渗流的超临界尖锐性

Sahar Diskin* Philip Easo† Ritvik Ramanan Radhakrishnan* Benny Sudakov* Vincent Tassio n*

摘要

我们证明，对于任意无限传递图上的超临界渗流，原点属于大小至少为 n 的有限簇的概率会随 $\Phi(n)$ 指数衰减，其中 Φ 是该图的等周函数。

arXiv:2603.03257v1 [math.PR] 3 Mar 2026

1 引言

设 $G=(V,E)$ 是一个无限连通（局部有限、顶点）传递图。设 P_p 为标准渗流测度，其中每条边以概率 p 独立地开。固定一个顶点 o，并将由下式给出的临界点记为 p_c

$$p_c := \inf\{p\in[0,1]\colon \mathrm{P}_p(o\leftrightarrow\infty)>0\}.$$

渗流理论中的一个基本结果是次临界尖锐性（[Men86，AB87]，另见 [AV08、DCT16、DCRT19、Van25]），它表明对所有 $p<p_c$，存在 $c>0$ 使得对所有 $n\geq 1$，原点的簇 $\mathcal{C}_o$ 满足

$$\mathrm{P}_p(|\mathcal{C}_o|\geq n)\leq e^{-cn} \quad \text{and} \quad \mathrm{P}_p(o\leftrightarrow\partial \mathrm{B}_n)\leq e^{-cn},$$

其中 B_n 是以 o为中心、半径为 n 的球，而 ∂S 是在给定顶点集 S中恰有一个端点的所有边的集合。

本文将证明次临界尖锐性的如下超临界对应结果。将 $\Phi\colon\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 记为如下给出的等周函数

$$\Phi(n) := \min\left\{|\partial S|\colon S\subset V \text{ and } n\leq|S|<\infty\right\}.$$

定理 1. 对所有 $p>p_c$，存在 $c>0$ 使得对所有 $n\geq 1$,

$$\mathrm{P}_p(n\leq|\mathcal{C}_o|<\infty)\leq e^{-c\,\Phi(n)} \quad \textit{and} \quad \mathrm{P}_p(o\leftrightarrow\partial \mathrm{B}_n \textit{ but } o\not\leftrightarrow\infty)\leq e^{-cn}.$$

我们将由如下更一般的结果推出定理 1。对每个有限顶点集 W，定义

$$\Phi(W) := \min\left\{|\partial S|\colon W\subset S\subset V \text{ and } |S|<\infty\right\}.$$

等价地， $\Phi(W)$ 是从 W 到 ∞的最小边割集的大小。又将 $\mathcal{C}_S$ 记为与 S连通的顶点集。

定理 2. 对于所有 $p>p_c$，存在 $c>0$，使得对每个有限顶点集 S 以及所有 $n\geq 1$,

$$\mathrm{P}_p(S\not\leftrightarrow\infty \textit{ and } \Phi(\mathcal{C}_S)\geq n)\leq e^{-cn}.$$

*ETH 苏黎世数学系¨

†苏黎世联邦理工学院理论研究所与剑桥大学三一学院

1.1 评注

历史背景。 Broadbent 和 Hammersley 首次引入渗流后的最初几十年里，研究主要集中在超立方格 $\mathbb{Z}^d$ 上。对于这种情形，渗流相变的次临界尖锐性和超临界尖锐性最终都得到了充分理解。相关教科书可参见 [Gri99, BR06]。1996年，Benjamini 和 Schramm 在其开创性论文《渗流超越 $\mathbb{Z}^d$ [BS96] 中，开启了在任意无限传递图上研究渗流的先河。有关此后涌现出的丰富研究领域的综述，见 [LP16 第 7 章及 8] 。某些结果的证明（例如次临界尖锐性的证明）很容易推广到这一更一般的情形。本文聚焦于超临界尖锐性：这一结果在超立方格的情形下早已广为人知，但其证明仍局限于特定几何。

关于超临界尖锐性的先前结果。 在 $G = \mathbb{Z}^d$的经典情形中，超临界尖锐性在 [CCN87] 中由著名的Grimmett–Marstrand 板块定理 [GM90] 推出，即对所有 $d \geq 3$,

$$\lim_{m\to\infty} p_c\big(\mathbb{Z}^2 \times \{-m,\dots,m\}^{d-2}\big) = p_c\big(\mathbb{Z}^d\big).$$

在本文末尾，我们将解释为何反过来，这一板层定理很容易由超临界尖锐性推出。

最近，超临界尖锐性已从 $\mathbb{Z}^d$ 推广到每一个多项式增长 的无限传递图 [CMT24]。在这一普遍性层面上，人们不能使用依赖于 $\mathbb{Z}^d$的对称性的重整化方案。然而，继Gromov与Trofimov的奠基性工作 [Gro81, Tro03]之后，多项式增长传递图的几何仍已知具有高度刚性。特别地， [CMT24]利用了此类图中的极小割集是粗连通的这一特殊事实。通过另一种论证，超临界尖锐性也对每一个非平均的无限传递图得到了确立 [HH21], ，即满足$\inf_{n\geq 1} \Phi(n)/n > 0$。

对于一般无限传递图，证明超临界尖锐性的问题作为一种民间传闻已存在了一段时间，最近才被记载于 [HH21 的猜想 5.1–5.3] 中。

紧性。 定理 1 是尖锐的，其含义是对于所有 $p > p_c$，都存在 $C < \infty$ ，使得对于所有 $n \geq 1$

$$\mathrm{P}_p(n \leq |\mathcal{C}_o| < \infty) \geq e^{-C\Phi(n)} \quad \text{and} \quad \mathrm{P}_p(o \leftrightarrow \partial \mathrm{B}_n \text{ but } o \not\leftrightarrow \infty) \geq e^{-Cn}.$$

事实上，第一个不等式已在 [EST25 的评论 9], 中得到证明，而第二个不等式则可通过考虑这样的事件得到： $\mathcal{C}_o$ 是一条长度为 n 的固定测地路径。

暂态性。</style]Following [BLS99], 之后，已有大量研究探讨传递图上随机游走的哪些性质在渗流下保持不变。（例如，参见 [BM03、CP04、Gab05、Pet08、BDCKY15], ；以及关于高阶有限传递图的研究，参见[FR08、BKW14、EKK23、ADLZ25]）。 [BLS99] 中的猜想 1.7 指出，对于每个无限

暂态传递图[1] G，对所有 $p \in [0,1]$,

$$\mathrm{P}_p\left(\text{ every infinite cluster is transient }\right) = 1. \tag{1}$$

注意，当 $p < p_c$时，(1)显然成立；如果相信 [BS96] 中的著名猜想，即 $\mathrm{P}_{p_c}(o \leftrightarrow \infty) = 0$，那么当 $p = p_c$时，(1)也应显然成立。根据 [Hut23 第 3], 节的论证，并结合 [Pet08], 中的方法进行调整，我们的定理 1 有如下推论。

推论 1.1。对于每个暂态的无限连通传递图，(1) 对所有$p > p_c$均成立。

1.2 记号

我们采用约定，$\mathbb{N}$ 包含 0。设 $G = (V, E)$为一个图。本文中，我们假设每个图都是局部有限的。

图。给定一个顶点集合 A，我们定义如下：

$\overline{A}$	至少有一个端点位于 A中的边
A°	两个端点都在 A中的边
∂A	恰有一个端点在 A中的边
$\partial^- A$	在 A 中且与 ∂A中的边关联的顶点
$\partial^+ A$	在 $V \setminus A$ 中且与 ∂A中的边关联的顶点
$\mathrm{B}_r(A)$	与 A的距离不超过 r 的顶点
$G[A]$	由 A诱导的子图

割集。给定顶点集 L 和 R，若边集 Π使得在图 $(V, E \setminus \Pi)$ 中，L 与 R 不连通，则称 Π为从L 到 R 的边割集。若顶点集 A 使得在 $(V \setminus A, E \setminus A)$ 中，$L \setminus A$ 与 $R \setminus A$ 不连通，则称 A 为从 L 到 R的顶点割集。

渗流。对每个 $p \in [0,1]$，记参数为 p 的标准渗流测度为 P_p^G，或简记为 P_p，其定义在 G上。给定顶点集 A，我们可以用 P_p^A 简写 $\mathrm{P}_p^{G[A]}$。处理并非根据 P_p定义的随机变量时，我们认为它们都定义在同一个大的概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中。

连通性。给定顶点集 L 和 R，以及边集 F，我们用 $L \overset{F}{\leftrightarrow} R$ 表示事件：在图 (V, F) 中，L 与 R 连通。按照惯例，我们将每个构型 $\zeta \in \{0,1\}^E$ 与其支撑（即一个边集）等同起来。特别地，我们可以使用诸如 $\zeta \cap F$ 和 $L \overset{\zeta \cap F}{\longleftrightarrow} R$ 这样的表达式。我们用 $L \overset{F}{\leftrightarrow} \infty$ 表示：在图 (V, F) 中，与 L 连通的顶点集是无限的。当 L 或 R 是边集时，我们采用相同的定义；在这种情况下，我们自然地将这些集合等同于至少包含在其中一条边里的顶点集。具体讨论 P_p 时，给定顶点集 A，我们用 $L \overset{A}{\leftrightarrow} R$ 表示 $L \overset{\omega \cap A^\circ}{\longleftrightarrow} R$；而我们简写 $L \leftrightarrow R$ 表示 $L \overset{\omega}{\leftrightarrow} R$，其中 ω 是底层的渗流构型。

[1]严格来说，他们的猜想只针对凯莱图。

1.3 论文概要

在第 2 节中，我们将介绍关键的技术结果——命题 2.1，并解释为何这一结果蕴含定理 2。在第 3 节中，我们将概述命题 2.1 的证明。为证明命题 2.1 做准备，我们将在第 4 节中建立几个辅助引理。第 5 节是本文的核心：我们将在那里证明命题 2.1。第 6 节是收尾部分，我们将解释如何由定理 2 得到定理 1。在尾声部分，即第 7 节和第 8 节中，我们将回到 $\mathbb{Z}^d$ 的经典设定，并说明如何从超临界尖锐性推出 Grimmett–Marstrand。

2 多次接触便已足够

在假设 $p > p_c$的情况下研究渗流时，有一种重要工具可用；但仅假设 $\mathrm{P}_p(o \leftrightarrow \infty) > 0$时则不能使用这种工具，它就是撒点：通常可以从关于 $p' \in (p_c, p)$处渗流的较弱结论，推导出关于 p 处渗流的较强结论。本节将从下面这个先验上较弱的命题推出定理 2。本文的主要目标就是证明这个命题。该命题用以下随机变量来表述。对于有限顶点集 S，定义

$$\Psi(S) \coloneqq \big|\{e \in \partial S \colon e \xleftrightarrow{V\setminus S} \infty\}\big|.$$

命题 2.1。设 $G = (V, E)$ 是一个无限连通传递图。设 $p \in [0,1]$ 满足$\mathrm{P}_p(o \leftrightarrow \infty) > 0$。对于所有 $q \in (p,1)$ 以及所有 $\varepsilon \in (0,1]$，，存在 $c > 0$，使得对每个有限顶点集 S 以及每个满足 $t \le c\,\Phi(S)$的正整数 t，

$$\mathrm{P}_q(\Psi(S) \ge t) \ge (1-\varepsilon)^t.$$

命题 2.1 蕴含定理 2 的证明依赖于一种广为人知的撒点论证的变体：如果两个 p 簇在许多位置相互接触，那么它们不合并的概率很小。这里我们使用这一陈述的一个变体，即断言一个 p-簇在许多位置接触一个 $(p+\varepsilon)$-簇、却不包含于其中的概率很低。证明本身是对 [Hut23, 定理 1.1，$(ii) \Rightarrow (iii)$] 中论证的简单拓展。

在命题 *2.1* 的基础上证明定理 *2*。令 $p > p_c$。选择 $q \in (p_c,\ p)$，并令 $\varepsilon > 0$ 使得 $(1-q)(1-\varepsilon) = (1-p)$。将命题 2.1 应用于相同的参数 q，但用 $\varepsilon/2$ 和某个 $p' \in (p_c,\ q)$ 代替 “ε” 和 “p”，则存在 $h > 0$，使得对于每个有限顶点集 C 以及每个满足 $t \le h\,\Phi(C)$ 的正整数 t，

$$\mathrm{P}_q(\Psi(C) \ge t) \ge \big(1 - \varepsilon/2\big)^t. \tag{2}$$

现在令 S 为一个有限顶点集，并令 $n \ge 1/h$。我们将证明，定理 2 中所示的方程在 $c := h\varepsilon/4 > 0$ 时成立。这足以得出证明，因为如有必要，可以减小常数 c，以确保该结论对 $n \le 1/h$也成立。定义 $t := \lfloor hn \rfloor$，并注意到 t 是满足 $hn/2 \le t \le hn$的正整数。令 ω和 ζ为相互独立的渗流构型，其中 $\omega \sim \mathrm{P}_q$且 $\zeta \sim \mathrm{P}_\varepsilon$。注意，由于我们对 ε的选择，$\omega \cup \zeta \sim \mathrm{P}_p$。考虑事件

$$\mathcal{E} \coloneqq \{S \xleftrightarrow{\omega\cup\zeta} \infty\} \cap \big\{\big|\{e \in \partial \mathcal{C}_S(\omega \cup \zeta) : e \xleftrightarrow{\omega} \infty\}\big| \ge t\big\}.$$

一方面，通过对 $\mathcal{C}_S(\omega \cup \zeta)$ 进行条件化并利用独立性，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \sum_{C} \mathrm{P}_p(\mathcal{C}_S = C) \cdot \mathrm{P}_q(\Psi(C) \geq t), \tag{3}$$

其中求和遍历每个有限顶点集 C。如果这样的集合 C 满足 $\Phi(C) \geq n$，那么根据我们对 h 的选择，我们知道 C 也满足 (2)。因此，将 (3) 中的求和范围缩小，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{E}) &\geq \sum_{C\colon \Phi(C)\geq n} \mathrm{P}_p(\mathcal{C}_S = C) \cdot \big(1-\varepsilon/2\big)^t \\ &= \mathrm{P}_p(S \not\leftrightarrow \infty \text{ and } \Phi(\mathcal{C}_S) \geq n) \cdot \big(1-\varepsilon/2\big)^t. \end{aligned} \tag{4}$$

另一方面，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \leq (1-\varepsilon)^t. \tag{5}$$

事实上，这基本上就是 [Hut23，命题 2。1], 不过，为求完整起见，我们还是简要给出证明。定义

$$\mathcal{K} := \Big\{ v \in V : v \overset{\omega}{\nleftrightarrow} \infty \Big\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{M} := \mathcal{C}_{S\setminus\mathcal{K}}\left((\omega \cup \zeta) \setminus \overline{\mathcal{K}}\right).$$

注意到

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{K} \cap S = \varnothing\} \cap \{|\partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{M}| \geq t\} \cap \{\zeta \cap \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{M} = \varnothing\}.$$

现在，几乎必然地，如果 $\mathcal{K} \cap S = \varnothing$ 和 $|\partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{M}| \geq t$，那么由独立性，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E} \mid \mathcal{K}, \mathcal{M}) = \mathbb{P}(\zeta \cap \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{M} = \varnothing \mid \mathcal{K}, \mathcal{M}) = (1-\varepsilon)^{|\partial\mathcal{K}\cap\partial\mathcal{M}|} \leq (1-\varepsilon)^t,$$

对两边取期望后，立即得到 (5)。

现在由 (4)、(5) 以及 $t \geq hn/2$ 这一事实，我们得到

$$\mathrm{P}_p(S \not\leftrightarrow \infty \text{ but } \Phi(\mathcal{C}_S) \geq n) \leq \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\right)^t \leq e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \leq e^{-\frac{\varepsilon h n}{4}} = e^{-cn}. \qquad \square$$

3 证明概要

本节中，我们概述命题 2.1 的证明。固定图 G 中的一个连通有限集 S，并考虑限制在 S 补集上的渗流。若边 $e \in \partial S$ 在此受限构型中与无穷远连通，则称其为一个“触点”。我们的证明依赖于一种探索算法，该算法依次发现这些触点。该算法的一个重要特点是，在整个过程中，p-渗流中已揭示边的集合始终保持连通。我们将先介绍这一算法的一个简化版本，然后说明如何对其进行修改，以用于最终构造。

玩具算法。选取一个位于 S 与无穷远之间的中间位置的顶点，并探索它的簇$\mathcal{C}_1$。这里，中间位置是指该顶点与 S 和 ∞都连接的概率为常数。然后选取一个位于 S 与 $\mathcal{C}_1$之间的中间位置的顶点，并探索它的簇 $\mathcal{C}_2$。注意，在这个阶段， $\mathcal{C}_2$ 最多只能到达 $\mathcal{C}_1$ 的外部顶点边界，因为边界

已被揭示为闭合。考虑 $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{C}_2$ 相触点的所有边，并在此处撒点，以常数概率将这两个簇连接起来。以这种方式继续进行 t次，得到集合 $\mathcal{C}_1$，……，$\mathcal{C}_t$；每一步都选择一个位于 S与先前探索过的集合之间的中间位置的点。这一构造保证，每次探索都有至少为常数的概率 $\alpha > 0$ 连接到先前的探索，并形成一个新的触点。由此可得

$$\mathrm{P}_q(\Psi(S) \geq t) \geq \alpha^t.$$

改进算法。 为提高从 α 到 $1-\varepsilon$产生新触点的概率，我们将每次迭代分成两步：首先，每次揭示一个大球，寻找一个位于 S 与先前探索之间的种子（一个全开球）。然后探索该种子所在的簇。为确保寻找种子的过程不会与后续的簇探索相互影响，我们在种子层中寻找种子；种子层只是一个低密度渗流，且独立于原始的 p-渗流。

何时会发挥作用? 让我们以一条重要的观察结束这段证明概要。在玩具算法中，所有已揭示边组成的集合始终是连通的。相比之下，在改进算法中，寻找种子的过程会在种子层中产生许多坏球，它们彼此不连通，却包含负信息。因此，玩具算法总能持续运行，直至见证所有可能的触点（即 S暴露边界上的所有边）；而改进算法则可能在找到数量级为 $\Phi(S)$的触点后就停止，前提是这些坏球的并集构成了从 S 到无穷远的一个割集。

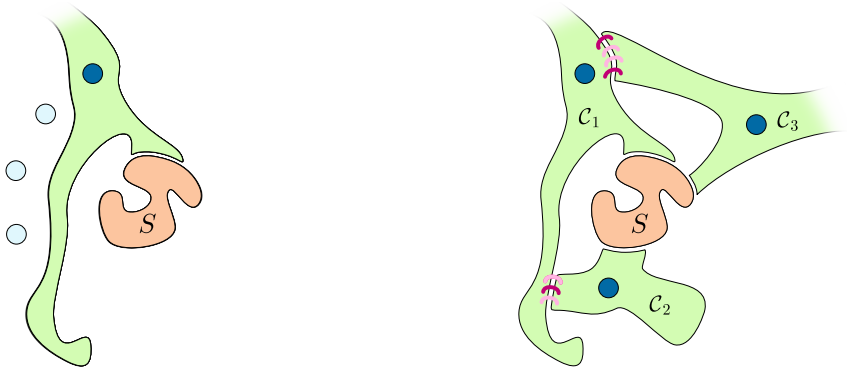


图1：左侧，蓝色球表示揭示种子层的位置：我们发现每个浅蓝色球中至少包含一条闭边，而深蓝色球则完全由开边构成，形成了一个种子。绿色区域是种子的 p-簇，它连接到无穷远并接触桃色集合 S。右侧，我们又重复了两次寻找种子并探索其簇的过程。粉色边表示用于将每个新绿色簇与已有绿色簇粘合起来的撒点：浅粉色边是闭边，深粉色边是开边。

4 寻找中点和中间球

渗流理论中的一个标准观察是，对于连通图 G 中的任意顶点集 L 和 R，如果每个顶点以固定概率与 $L \cup R$ 连通，那么

就存在一个中间点顶点，它与 L 和 R 连通的概率都固定。（近期的一个例子见 [EST25]。）

现在假设我们的图中不只有一条从 L到 R的不相交路径，而是有许多条。那么，我们就能找到不止一个中点，而是许多个。特别是，即使给定一个规模不太大的顶点集合 A，并且我们希望避开它，也至少存在一个与 A不相交的中点。在本节中，我们将上述论证推广到高概率情形，并构造中间球 而非中点。我们先构造一个避开禁区 A的中间球。

引理 4.1。设 $G=(V,E)$ 是一个图，L 和 R 是两个不相交的顶点集合。设 $r\geq 1$，并设 A 是一个顶点集合，使得$\mathrm{B}_r(A)$ 不是从 L 到 R的顶点割集。设 p、$\delta\in[0,1]$满足对所有 $v\in V$，

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_{r-1}(v)\leftrightarrow L\cup R)\geq 1-\delta. \tag{6}$$

那么，存在一个半径为 r 、与 A 不相交的球 B，并且满足

$$\mathrm{P}_p(B\overset{V\setminus R}{\longleftrightarrow}L),\ \mathrm{P}_p(B\overset{V\setminus L}{\longleftrightarrow}R)\geq 1-\sqrt{\delta}. \tag{7}$$

证明。由于 $\mathrm{B}_r(A)$ 不构成从 L到 R 的顶点割集，因此存在一条路径 $v_1,\dots,v_k$从 L 到 R，且不经过 $\mathrm{B}_r(A)$。注意，对于所有 i，$\mathrm{B}_r(v_i)$ 与 A 不相交。根据 FKG不等式（√技巧）和（6），对于所有 i,

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_{r-1}(v_i)\overset{V\setminus R}{\longleftrightarrow}L)\geq 1-\sqrt{\delta}\quad\text{or}\quad\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_{r-1}(v_i)\overset{V\setminus L}{\longleftrightarrow}R)\geq 1-\sqrt{\delta}.$$

注意，v_1 满足第一个选项，而 v_k 满足第二个选项。因此，我们可以找到某个 $i\in\{1,\dots,k-1\}$，使得

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_{r-1}(v_i)\overset{V\setminus R}{\longleftrightarrow}L),\ \mathrm{P}_p(\mathrm{B}_{r-1}(v_{i+1})\overset{V\setminus L}{\longleftrightarrow}R)\geq 1-\sqrt{\delta}.$$

由于 $\mathrm{B}_r(v_i)$ 包含 $\mathrm{B}_{r-1}(v_i)$ 和 $\mathrm{B}_{r-1}(v_{i+1})$，球 $B:=\mathrm{B}_r(v_i)$ 满足（7）。 □

通过加入更强的割集条件，并反复应用上述引理，我们接下来在两组集合之间构造许多 个互不相交的中间球。

引理 4.2。设 $G=(V,E)$ 为一个图，设 L 和 R 是不相交的顶点集。设r、$\ell\geq 1$，并设 A 为一个有限顶点集，使得从 L 到 R 的每个顶点割集的大小至少为

$$\sup_{v\in V}|\mathrm{B}_{2r}(v)|\cdot\big(|A|+\ell\big). \tag{8}$$

设 $p,\delta\in[0,1]$ 满足 (6)。那么存在半径为 r 的球 $B_1,\dots,B_\ell$，它们彼此不相交，且与 A 不相交，使得对所有 i

$$\mathrm{P}_p(B_i\overset{V\setminus R}{\longleftrightarrow}L),\ \mathrm{P}_p(B_i\overset{V\setminus L}{\longleftrightarrow}R)\geq 1-\sqrt{\delta}. \tag{9}$$

证明。由归纳法，只需证明：对于所有 $i\in\{1,\dots,\ell\}$，给定任意半径为 r 的球 $B_1,\dots,B_{i-1}$，存在一个半径为 r 的球 B_i，满足 (7)，且与

$$A_i:=A\cup B_1\cup\cdots\cup B_{i-1}.$$

引理 4.1 保证这样的球 B_i 存在，只要我们能够验证 $\mathrm{B}_r(A_i)$ 不是从 L 到 R的顶点割集。令 u_j 为每个 $j\leq i-1$对应的球 B_j 的中心，并令

$U := A \cup \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$。由于 $\mathrm{B}_r(A_i) \subset \mathrm{B}_{2r}(U)$ 且 $|U| < |A| + \ell$,

$$|\mathrm{B}_r(A_i)| \le \max_{v \in U} |\mathrm{B}_{2r}(v)| \cdot |U| < \sup_{v \in V} |\mathrm{B}_{2r}(v)| \, (|A| + \ell) \, .$$

因此根据 (8)，$\mathrm{B}_r(A_i)$ 确实不是从 L到 R 的顶点割集。 □

在命题 2.1 的证明中应用引理 4.2 时，名为 R 的集合边界上的边已经被揭示为闭合。不过，我们仍希望以高概率将引理 4.2 给出的中间球连接到 R。为挽救这一局面，我们将在 R 的边界上以小量 $\eta > 0$ 进行稀疏化，并应用以下关于稀疏化对连通概率影响（或无影响）的标准观察。

引理 4.3。对于任意 $p, \eta \in (0,1)$ 以及 $\varepsilon > 0$，存在 $\alpha > 0$，使得以下结论成立。设 B 和 R 是图 $H = (V, E)$ 中的顶点集。考虑独立配置

$$\omega \sim \mathrm{P}_p^{V \setminus R} \quad \textit{and} \quad \xi \sim \mathrm{P}_\eta^{\partial R}.$$

若$\mathrm{P}_p(B \leftrightarrow R) \ge 1 - \alpha$，则

$$\mathbb{P}(B \xleftrightarrow{\omega \cup \xi} R) \ge 1 - \varepsilon.$$

证明。若 B 与 R 相交，则结论显然成立，因此设 B 与 R 不相交。设 T 为满足 $e \xleftrightarrow{\omega} B$ 的边 $e \in \partial R$ 的（随机）数量。注意

$$\mathrm{P}_p(B \not\leftrightarrow R) = \mathbb{E}\left[(1-p)^T\right] \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(B \not\xleftrightarrow{\omega \cup \xi} R) = \mathbb{E}\left[(1-\eta)^T\right].$$

特别地，对于任意常数 $t \ge 0$,

$$\mathrm{P}_p(B \not\leftrightarrow R) \ge (1-p)^t \cdot \mathbb{P}(T \le t),$$

因此，对于任意满足 $\mathrm{P}_p(B \not\leftrightarrow R) \le \alpha$ 的 $\alpha > 0$ s,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(B \not\xleftrightarrow{\omega \cup \xi} R\right) &= \mathbb{E}\left[(1-\eta)^T 1_{T \le t}\right] + \mathbb{E}\left[(1-\eta)^T 1_{T > t}\right] \\ &\le \mathbb{P}(T \le t) + (1-\eta)^t \le \frac{\alpha}{(1-p)^t} + (1-\eta)^t. \end{aligned}$$

现在只需先选取足够大的 t，使得 $(1-\eta)^t \le \frac{\varepsilon}{2}$，然后选取足够小的 $\alpha > 0$，使得 $\frac{\alpha}{(1-p)^t} \le \frac{\varepsilon}{2}$。 □

5 命题 2.1 的证明

设 $q \in (p,1)$ 且 $\varepsilon \in (0,1]$。我们的目标是找到一个常数 $c > 0$，使得对于每个有限顶点集 S 以及每个满足 $t \le c\,\Phi(S)$ 的正整数 t，

$$\mathrm{P}_q\big(\big|\{e \in \partial S : e \xleftrightarrow{V \setminus S} \infty\}\big| \ge t\big) = \mathrm{P}_q\Big(\sum_{e \in \partial S} 1\{e \xleftrightarrow{V \setminus S} \infty\} \ge t\Big) \ge (1-\varepsilon)^t. \tag{10}$$

证明的组织如下：在第 5.1 节中，我们将定义若干常数，并最终定义所需的常数 $c > 0$。这些常数仅取决于 G、p、q 和 ε。在

第5.2节中，我们将把目标化归为有限体积版本。证明的核心内容将在第5.3–5.6节中给出。

5.1 常数 c的定义

选取 $\eta \in (0,1)$，使得

$$(1-p)(1-\eta)^2 = 1-q, \tag{11}$$

从而， p-渗流与两份 η-渗流的并集服从 q-渗流的分布。令

$$\delta := \min(\alpha, \varepsilon/4)^2, \tag{12}$$

其中 α 是将“ε”分别替换为 p、 η和 $\varepsilon/4$ 后应用引理 4.3所保证的常数。选取 $r \geq 1$ ，使得

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_{r-1} \leftrightarrow \infty) \geq 1-\delta, \tag{13}$$

这存在是因为 $\mathrm{P}_p(o \leftrightarrow \infty) > 0$ ，因此 $\lim_{R\to\infty} \mathrm{P}_p(\mathrm{B}_R \leftrightarrow \infty) = 1$。定义

$$b := \max\left(|\mathrm{B}_r^\circ|, |\mathrm{B}_r|\right),$$

并选取 $\ell \geq 1$ ，使得

$$\left(1-\eta^b\right)^\ell \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

特别是，这保证了如果我们在 ℓ个半径为 r的互不相交的球上进行 η-渗流，那么以至少 $1-\varepsilon/2$的概率，可以找到一个完全开着的球。令 d 为 G的顶点度，并注意到 $d \geq 2$。我们将证明可以取

$$c := \frac{1}{4b^3 d\ell}. \tag{15}$$

5.2 化归为有限体积

设 S 为一个有限顶点集，令 t 为满足 $t \leq c\,\Phi(S)$的正整数（我们可以假设这样的整数存在；否则结论显然成立）。我们先将（10）化归为关于大球内渗流的一个命题。几乎必然地，对每条边 $e \in \partial S$，当$\mathrm{B}_R \supset S$时，事件 $\left\{e \overset{V\setminus S}{\longleftrightarrow} \partial \mathrm{B}_{R+1}\right\}$ 的指示函数关于 R 单调递减，并且当 $R \to \infty$ 时收敛到事件 $\left\{e \overset{V\setminus S}{\longleftrightarrow} \infty\right\}$ 的指示函数。因此，只需证明对所有满足$\mathrm{B}_R \supset S$的 R ，

$$\mathrm{P}_q\Big(\sum_{e\in\partial S} 1\{e \overset{V\setminus S}{\longleftrightarrow} \partial \mathrm{B}_{R+1}\} \geq t\Big) \geq (1-\varepsilon)^t.$$

在证明的其余部分，固定满足 $\mathrm{B}_R \supset S$ 的 R ，并设 $\Lambda := \mathrm{B}_{R+1}$。令 ω、 ξ、和 ζ 为相互独立的（随机）构型，使得

$$\omega \sim \mathrm{P}_p^{\Lambda\setminus S} \quad \text{and} \quad \xi, \zeta \sim \mathrm{P}_\eta^{\Lambda\setminus S}.$$

注意，由 (11) 可知，$\omega \cup \xi \cup \zeta \sim \mathbf{P}_q^{\Lambda \setminus S}$。因此，只需证明

$$\mathbb{P}\big(|\partial \mathcal{C}_{\partial\Lambda} \cap \partial S| \geq t\big) \geq (1-\varepsilon)^t, \tag{16}$$

其中，$\mathcal{C}_{\partial\Lambda}$ 是 $\omega \cup \xi \cup \zeta$中与 $\partial\Lambda$ 连通的所有顶点构成的集合。

5.3 只需逐个构造接触

本节中，我们从以下引理推导出 (16)。该引理提取了我们将通过第 3 节所述的连续探索构造的簇序列所具有的相关性质。我们将在接下来的几个小节中证明该引理本身。

引理 5.1。存在一个由顶点 $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_t \subset \mathcal{C}_{\partial\Lambda}$ 构成的（随机）集合序列，使得以下结论成立。对于每个 $i \in \{0, \ldots, t\}$，定义

$$N_i := |\partial(\mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_i) \cap \partial S|. \tag{17}$$

那么，对于所有 $i \in \{1, \ldots, t\}$，我们有

$$\mathbb{P}(N_{i-1} < N_i \mid N_0 < \cdots < N_{i-1} < t) \geq 1 - \varepsilon, \tag{18}$$

或者，被条件化的事件的概率为零。

利用引理 *5.1* 完成命题 *2.1* 的证明。设 $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_t$为引理 5.1 给出的序列，并且对所有 i，令 N_i如式 (17) 所示。对每个 $i \in \{0, \ldots, t\}$，考虑事件

$$\mathcal{E}_i := \{N_0 < \cdots < N_i\} \cup \{N_{i-1} \geq t\},$$

其中我们令 $N_{-1} := 0$。令 $i \geq 1$。由 (18)，

$$\mathbb{P}(N_0 < \cdots < N_i \text{ and } N_{i-1} < t) \geq (1-\varepsilon) \cdot \mathbb{P}(N_0 < \cdots < N_{i-1} < t). \tag{19}$$

由于 $N_{i-2} \leq N_{i-1}$，我们有如下包含关系

$$\mathcal{E}_{i-1} \subset \{N_0 < \cdots < N_{i-1} < t\} \cup \{N_{i-1} \geq t\}. \tag{20}$$

因此，根据 $\mathcal{E}_i$ 的定义以及 (19) 和 (20)，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{E}_i) &= \mathbb{P}(N_0 < \cdots < N_i \text{ and } N_{i-1} < t) + \mathbb{P}(N_{i-1} \geq t) \\
&\geq (1-\varepsilon) \cdot \big(\mathbb{P}(N_0 < \cdots < N_{i-1} < t) + \mathbb{P}(N_{i-1} \geq t)\big) \\
&\geq (1-\varepsilon) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_{i-1}).
\end{aligned}$$

特别地，注意到 $\mathcal{E}_t \subset \{N_t \geq t\}$ 和 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_0) = 1$，

$$\mathbb{P}(|\partial C_{\partial\Lambda} \cap \partial S| \geq t) \geq \mathbb{P}(\mathcal{E}_t) \geq (1-\varepsilon) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{E}_{t-1}) \geq \cdots \geq (1-\varepsilon)^t.$$

这确立了 (16)，从而完成了该命题的证明。 □

5.4 选择潜在种子

在本小节中，我们应用引理 4.2 构造一个函数 Seeds，用以在已探索部分与固定集合 S 之间生成一组中间球。我们强调，本引理中出现的函数 Seeds 是纯确定性的。我们为后续所有小节固定这样一个函数的选取。给定顶点集合 A，令 $\mathcal{P}(A)$ 表示 A 的所有子集构成的集合。

引理 5.2。 存在一个函数

$$\mathsf{Seeds} : \mathcal{P}(\Lambda\backslash S)^2 \to \mathcal{P}(\Lambda\backslash S)^\ell$$

具有以下性质。对于满足条件的每个输入 (D, K)

$$K \supset \partial^-\Lambda, \quad |\partial K \cap \partial S| < t, \quad \textit{and} \quad |D| \le b\ell t, \tag{21}$$

输出是集合序列 $B_1, \dots, B_\ell$，这些集合彼此不相交，且均与 D 不相交；此外，对于所有 i，集合 B_i 是图 $G[\Lambda\backslash S]$ 中半径为 r 的球，并满足

$$\mathrm{P}_p\big(B_i \xleftrightarrow{\Lambda\backslash(K\cup S)} \partial^+ S \setminus K\big),\, \mathrm{P}_p\big(B_i \xleftrightarrow{\Lambda\backslash S} K\big) \ge 1 - \sqrt{\delta}. \tag{22}$$

证明。 假设给定满足 (21) 的集合 $D, K \subset \Lambda\backslash S$ 。我们希望将 Seeds(D, K) 定义为对图 $G[\Lambda\backslash S]$应用引理 4.2 所得到的球序列，使用相同的 p, δ, r, ℓ，但以 D 代替“A”，并使用

$$L := \partial^+ S \setminus K \quad \text{and} \quad R := K,$$

因为采用此设置时，(22) 可由 (9) 立即推出。（可能有多个序列满足引理 4.2 的结论；为了定义 Seeds(D, K)，我们按照任意一个确定性规则，从所有选项中选取一个特定序列。）要应用此引理，我们需要 **a)** 验证 (6)，并且 **b)** 证明，在 $G[\Lambda\backslash S]$ 中，从 L 到 R 的每个顶点割集的大小至少为 (8)。

a) 令 $v \in \Lambda \setminus S$。考虑 $B := \mathsf{B}_{r-1}^{G[\Lambda\backslash S]}(v)$ 和 $B' := \mathsf{B}_{r-1}^{G}(v)$，并注意到 $B = B'$ 或B' 并未完全包含在 $\Lambda \setminus S$ 中。若 $B = B'$，则根据我们在 (13) 中对 r 的选择，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_p(B \xleftrightarrow{\Lambda\backslash S} L \cup R) &\ge \mathrm{P}_p(B \xleftrightarrow{\Lambda\backslash S} \partial^+ S \cup \partial^-\Lambda)\\ &\ge \mathrm{P}_p(B \leftrightarrow \infty) = \mathrm{P}_p(B' \leftrightarrow \infty) \ge 1 - \delta.\end{aligned}$$

若 B' 未完全包含在 $\Lambda \setminus S$ 中，则 B 必与 $\partial^+ S \cup \partial^-\Lambda \subset L \cup R$ 相交，因此 $\mathrm{P}_p(B \xleftrightarrow{\Lambda\backslash S} L \cup R) = 1$.

b) 注意， $G[\Lambda \setminus S]$ 中每个半径为 $2r$ 的球都包含在 G 中一个半径为 $2r$ 的球内，因此其大小至多为 $|\mathsf{B}_{2r}| \le b^2$。反过来， $G[\Lambda \setminus S]$ 中任意一个将 L 与 R 分隔开的顶点割集 W，都会在 G 中诱导出一个将 S 与无穷远分隔开的边割集 $W \cup (\partial K \cap \partial S)$，因此满足

$$d \cdot |W| + |\partial K \cap \partial S| \ge |\overline{W}| + |\partial K \cap \partial S| \ge \Phi(S).$$

因此只需证明

$$d \cdot b^2(|D| + \ell) + |\partial K \cap \partial S| < \Phi(S). \tag{23}$$

根据 (21)，由于 $t \le c\,\Phi(S)$，并且根据我们在 (15) 中对 c 的选取，

$$d \cdot b^2|D| + |\partial K \cap \partial S| < db^3\ell t + t \le 2db^3\ell t \le 2db^3\ell \cdot c\,\Phi(S) = \frac{1}{2}\Phi(S). \tag{24}$$

此外，由于 t 是满足 $t \le c\,\Phi(S)$ 的正整数，我们有 $\Phi(S) \ge 1/c$，因此根据我们在 (15) 中对 c 的选择

$$d \cdot b^2\ell \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \le \frac{1}{2}\Phi(S). \tag{25}$$

结合 (24) 和 (25)，我们便得到所需的 (23)。 □

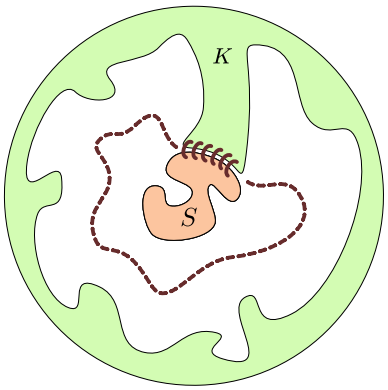


图 2：虚线棕色线位于桃色集合 S 与绿色集合 K 之间，其含义是，以该线为中心的任意 r-球都有高概率同时连接到 $\partial^+ S \setminus K$ 和 K。这条线不能太短，因为加上构成 $\partial S \cap \partial K$ 的棕色边后，我们得到一个从 S 到 K 进而到无穷远的割集。因此，即使给定一个不太大的区域 D（图中未显示），我们也能找到许多以虚线为中心的 r-球，它们彼此不相交，且都与 D 不相交。我们将这些球组成的序列定义为 Seeds(D, K)。

现在来估计从给定种子 B 出发对簇进行探索并同时连接到 K 和 $\partial^+ S \setminus K$ 的概率。然而，在引理 5.1 的证明中，我们已经揭示了 K 中许多边的状态。因此，我们不会允许连接发生在整个 $\omega \cup \zeta \cup \xi$ 中，而只允许在这些构型中一个尚未揭示的子集中发生连接。

Le引理 5.3. 设 D、$K \subset \Lambda \setminus S$ 是满足 (21) 的集合，并令 $B \in \mathrm{Seeds}(D, K)$。那么

$$\mathbb{P}(\partial^+ S \setminus K \xleftrightarrow{\omega\setminus\overline{K}} B \xleftrightarrow{(\omega\setminus\overline{K})\cup(\xi\cap\partial K)} K) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

证明。 我们首先证明

$$\mathbb{P}(B \xleftrightarrow{(\omega\setminus\overline{K})\cup(\xi\cap\partial K)} K) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{26}$$

(22) 的第二部分以及 (12) 中 δ 的定义给出，

$$\mathrm{P}_p(B \xleftrightarrow{\Lambda\setminus S} K) \ge 1 - \sqrt{\delta} \ge 1 - \alpha.$$

回忆 在 α 处，按照参数为 p 的喷洒引理（引理 4.3）进行选择 ，

η，并用 $\varepsilon/4$ 替代“ε”。将 B 和 K 分别代入“B”和“R”，对图$G[\Lambda\setminus S]$应用喷洒引理的结论，即得（26）。此外，根据（22）的第一部分以及（12）中 δ 的定义，

$$\mathbb{P}(B \xleftrightarrow{\omega\setminus\overline{K}} \partial^+ S \setminus K) \geq 1 - \sqrt{\delta} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{27}$$

由并集界，所声称的不等式现在可由 (26) 和 (27) 得出。 □

5.5 增长种子

本节中，给定由上一小节的 Seeds 函数输出的一个球，我们将描述如何通过两步探索构造该球的某个簇。

定义 5.4 节。 给定满足 (21) 的集合 $D, K \subset \Lambda \setminus S$，以及给定 $B \in \mathsf{Seeds}(D, K)$，定义

$$\mathcal{C}_{D,K}(B) := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2,$$

其中

$$\mathcal{C}_1 := \mathcal{C}_B(\omega \setminus \overline{K}) \qquad and \qquad \mathcal{C}_2 := V\left(\partial\left(\mathcal{C}_1 \setminus K\right) \cap \partial K \cap \xi\right),$$

即，$\mathcal{C}_2$ 是包含在一个 ξ开边 uv 中的所有顶点的集合，该边具有 $u \in \mathcal{C}_1\setminus K$ 和 $v \in K$。

以下是$\mathcal{C}_{D,K}(B)$的三个显然可由其构造得出的基本性质。

备注 5.5. 几乎必然，$\mathcal{C}_{D,K}(B)$在 $\omega \cup \xi \cup B^\circ$.中连通

注 5.6. 几乎必然，$\mathcal{C}_{D,K}(B)$与 $\partial^+ S \setminus K$ 相交，当且仅当

$$B \xleftrightarrow{\omega\setminus\overline{K}} \partial^+ S \setminus K,$$

并且$\mathcal{C}_{D,K}(B)$与 K 相交，当且仅当

$$B \xleftrightarrow{(\omega\setminus\overline{K})\cup(\xi\cap\partial K)} K.$$

注 5.7. 对于每个固定集合 $C \subset \Lambda \setminus S$，事件 $\{\mathcal{C}_{D,K}(B) = C\}$ 关于.....是可测的

$$\omega \cap \overline{C} \qquad \text{and} \qquad \xi \cap \partial(C \setminus K) \cap \partial K.$$

5.6 引理 5.1 的证明

构 建基于前面的小节，我们现在可以构造随机集 s.

构造 $\mathcal{C}_0$，.....，$\mathcal{C}_t$
递归地定义集合序列 $\mathcal{C}_0$，.....，$\mathcal{C}_t \subset \Lambda\setminus S$ 和序列 $\mathcal{S}_0$，.....，$\mathcal{S}_t$，使得对于所有 j，$\mathcal{S}_j$ 都是 $\Lambda \setminus S$ 的子集族，并满足

$$\sum_{B\in\mathcal{S}_j} |B| \leq b\ell. \tag{28}$$

从.....开始

$$\mathcal{S}_0 = \varnothing \quad \text{and} \quad \mathcal{C}_0 = \partial^- \Lambda.$$

现在令 $i \in \{1,\dots,t\}$，并假设我们已对所有 $j < i$ 定义了 $\mathcal{S}_j$ 和 $\mathcal{C}_j$，但尚未定义 $\mathcal{S}_i$ 或 $\mathcal{C}_i$。考虑

$$\mathcal{D} := \bigcup_{j=0}^{i-1} \bigcup_{B \in \mathcal{S}_j} B \quad \text{and} \quad \mathcal{K} := \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathcal{C}_j.$$

如果 $|\partial S \cap \partial \mathcal{K}| \geq t$，则设

$$\mathcal{S}_j := \varnothing \quad \text{and} \quad \mathcal{C}_j := \varnothing \quad \text{for all } j \geq i.$$

现在反过来假设 $|\partial S \cap \partial \mathcal{K}| < t$。将 (28) 应用于所有 $j < i$，可得

$$|\mathcal{D}| \leq b\ell i \leq b\ell t.$$

因此，$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{K}$ 满足 (21)。所以 $\mathsf{Seeds}(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ 是 $G[\Lambda \backslash S]$ 中一个球序列，具有引理 5.2 所保证的性质；对于任意 $B \in \mathsf{Seeds}(\mathcal{D}, \mathcal{K})$，第 5.5 节中的簇 $\mathcal{C}_{\mathcal{D},\,\kappa}(B)$ 都是良定义的。定义

$$\mathcal{S}_i := \mathsf{Seeds}(\mathcal{D}, \mathcal{K}),$$

并注意，这一选择满足 (28)，其中 $j = i_\circ$ 令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathsf{Seeds}(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ 给出的（有序）球序列中第一个满足以下条件的球：对于所有 $e \in \mathcal{B}^\circ$，$\zeta(e) = 1$；如果不存在这样的球，则设 $\mathcal{B} := \varnothing_\circ$ 如果 $\mathcal{C}_{\mathcal{D},\,\kappa}(\mathcal{B})$ 与 $\partial^+ S \setminus \mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}$ 相交，则设

$$C_i := \mathcal{C}_{\mathcal{D},\mathcal{K}}(\mathcal{B});$$

否则，设

$$\mathcal{C}_j := \varnothing \quad \text{for all } j \geq i \qquad \text{and} \qquad \mathcal{S}_j := \varnothing \quad \text{for all } j \geq i+1.$$

$\mathcal{C}_0$、……、$\mathcal{C}_t$ 的性质

注意，对所有 i，若 $\mathcal{C}_i = \varnothing$，则对所有 $j > i$，都有 $\mathcal{C}_j = \varnothing$。此外，对所有 $i \in \{1,\dots,t\}$，若对所有 $j \leq i$，都有 $\mathcal{C}_j \neq \varnothing$，则根据注记 5.5 以及我们对 $\mathcal{C}_0$ 的选择，可得 $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_{\partial\Lambda}$。因此，

$$\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_t \subset \mathcal{C}_{\partial\Lambda}.$$

设 $i \in \{1,\dots,t\}$。由 $\mathcal{C}_i$ 的构造可知，若 $\mathcal{C}_i \neq \varnothing$，则 $\mathcal{C}_i$ 与 $\partial^+ S \setminus \bigcup_{j<i} \mathcal{C}_j$ 相交。特别地，

$$N_i > N_{i-1} \quad \text{if and only if} \quad \mathcal{C}_i \neq \varnothing,$$

其中 N_i 如 (17) 中所述。因此，要证明 (18)，只需证明

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_i \neq \varnothing \mid \mathcal{C}_j \neq \varnothing \text{ for all } j \leq i-1 \text{ and } N_{i-1} < t) \geq 1 - \varepsilon, \tag{29}$$

只要所条件化的事件具有非零概率即可。为此，固定非空顶点集 C_0、……、C_{i-1}，使得 $\mathbb{P}$（对所有 $j \leq i-1$，$\mathcal{C}_j = C_j$）> 0，且满足 $|\partial K \cap \partial S| < t$，其中 $K := \bigcup_{j=0}^{i-1} C_{j\circ}$（若不存在这样的集合，则无需证明。）对这些集合的所有可能选择取平均后，要证明 (29)，只需证明

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_i \neq \varnothing \mid \mathcal{C}_j = C_j \text{ for all } j \leq i-1) \geq 1 - \varepsilon. \tag{30}$$

注意，存在唯一的确定性集合序列 $S_0, \dots, S_i$，使得

若对所有 $j \le i-1$均有 $\mathcal{C}_j = C_j$，则对所有 $j \le i$均有 $\mathcal{S}_j = S_j$。现定义

$$D \coloneqq \bigcup_{j=0}^{i-1} \bigcup_{B \in S_j} B \quad \text{and} \quad K \coloneqq \bigcup_{j=0}^{i-1} C_j.$$

注意到，通过反复应用注 5.7，$\mathcal{C}_j = C_j$ 对所有 $j \le i-1$ 成立的事件关于

$$\zeta \cap D^\circ, \quad \omega \cap \overline{K}, \quad \xi \cap K^\circ. \tag{31}$$

注意到，这三个构型独立于

$$\zeta \cap \bigcup_{B \in S_i} S_i^\circ \tag{32}$$

因为 Seeds$(D,\ K)$ 只输出与 D 不相交的球。因此，如同在构造 $\mathcal{C}_i$ 中那样，令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{S}_i$ 中第一个 ζ-开球（若不存在则为 $\mathcal{B} = \varnothing$），根据我们在 (14) 中对 ℓ 的选择，

$$\mathbb{P}(\mathcal{B} = \varnothing \mid \mathcal{C}_j = C_j \text{ for all } j \le i-1) = \prod_{B \in S_i} (1 - \eta^{|B^\circ|}) \le (1-\eta^b)^\ell \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

现在考虑一个固定的 $B \in \mathcal{S}_i$。根据注 5.6

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\mathcal{C}_i \neq \varnothing \mid \mathcal{C}_j = C_j \text{ for all } j \le i-1 \text{ and } \mathcal{B} = B) \\ &= \mathbb{P}(\partial^+ S \setminus K \xleftrightarrow{\omega \setminus \overline{K}} B \xleftrightarrow{(\omega \setminus \overline{K}) \cup (\xi \cap \partial K)} K \mid \mathcal{C}_j = C_j \text{ for all } j \le i-1 \text{ and } \mathcal{B} = B). \end{aligned}$$

注意到该事件

$$\partial^+ S \setminus K \xleftrightarrow{\omega \setminus \overline{K}} B \xleftrightarrow{(\omega \setminus \overline{K}) \cup (\xi \cap \partial K)} K$$

关于可测

$$\omega \setminus \overline{K} \quad \text{and} \quad \xi \cap \partial K,$$

而事件 $\mathcal{C}_j = C_j$ 对所有 $j \le i-1$ 和 $\mathcal{B} = B$ 成立，可测于 (31) 和 (32) 中的构型。因此，这两个事件相互独立。于是，

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_i \neq \varnothing \mid \mathcal{C}_j = C_j \text{ for all } j \le i-1 \text{ and } \mathcal{B} = B) = \mathbb{P}(\partial^+ S \setminus K \xleftrightarrow{\omega \setminus \overline{K}} B \xleftrightarrow{(\omega \setminus \overline{K}) \cup (\xi \cap \partial K)} K).$$

因此，根据引理 5.3 并对 B 的所有取值取平均，

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_i \neq \varnothing \mid \mathcal{C}_j = C_j \text{ for all } j \le i-1 \text{ and } \mathcal{B} \neq \varnothing) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{34}$$

结合方程 (33) 和 (34)，并利用 $(1-\varepsilon/2)^2 \ge 1-\varepsilon$，我们得到 (30)，如所需。

□

6 推导定理 1

本节将由定理 2 推导出定理 1。定理 1 中关于 $\mathcal{C}_0$ 体积的第一个不等式，本质上是定理 2 的一个直接推论。另一方面，为了从定理 2 推导出关于 $\mathcal{C}_0$ 半径的第二个不等式，我们需要以下几何命题。

命题 **命题 6.1**。设 G 是一个无限有界度图。假设存在 $\varepsilon >$ 0

使得 $\Phi(n) \geq \varepsilon n^{1/2}$ 对所有 $n \geq 1$ 都成立。那么存在 $\delta > 0$，使得对于每个有限连通顶点集 A，

$$|\partial A| \geq \delta \cdot \operatorname{diam}(A).$$

该命题在以下意义下是尖锐的：假设 $\Phi(n) \geq \varepsilon n^{1/2}$ 不能被削弱。事实上，考虑由 $\{(x, y)$ 诱导的图：$|y| \leq f(x)\}$ 对于仅略微 </style>次线性的函数 f 成立。在证明该命题之前，让我们先完成定理 1 的证明。

由命题 *6.1* 证明定理 *1*。 定理 1 中第一个显示的不等式由将定理 2 应用于 $S = \{o\}$ 得出，因为对于所有 $n \geq 1$，若 $n \leq |\mathcal{C}_o| < \infty$，则 $\Phi(\mathcal{C}_o) \geq \Phi(n)$。

至于定理 1 中第二个显示的不等式，我们先解释为何不妨设存在常数 $\varepsilon > 0$，使得对于所有 n，$\Phi(n) \geq \varepsilon n^{1/2}$：根据 LMS08，引理 7.2] （另见 LP16，第 6.7] 章），任何不满足这种二维等周不等式的无限传递图都不可能具有至少二维的体积增长，因此根据 Gromov 和 Trofimov，[Gro81，Tro03] （另见 [Woe00，定理 5.11]），它与 $\mathbb{Z}$ 拟等距，从而满足 $p_c = 1$。现在，定理 1 中第二个显示的不等式由定理 2 得出，因为对于所有 n，若 $o \leftrightarrow \partial \mathrm{B}_n$ 但 $o \not\leftrightarrow \infty$，则 $\operatorname{diam}(\mathcal{C}_o) \geq n$，因此根据命题 6.1，$\Phi(C_o) \geq \delta n$，其中某个常数为 $\delta > 0$。

□

现在只剩下证明几何命题本身。

命题 *6.1* 的证明。 设 A 是一个有限的连通顶点集，m 是其直径。固定一个顶点 $o \in A$。给定整数 k 和 r，令 $A_{k,r}$ 为所有满足 $\operatorname{dist}(o, v) \in [k - r, k + r]$的顶点 $v \in A$ 的集合，并令 $A_k := A_{k,0}$。定义

$$f(k, r) := |A_{k,r}| \quad \text{and} \quad g(k, r) := |\partial A_{k,r} \cap \partial A|.$$

Gi对于 $k \in [m] := \{0, \ldots, m\}$，令 $r(k)$ 为满足以下条件的最小非负整数 r

$$g(k, r) \geq \frac{\varepsilon}{2} f(k, r)^{1/2}, \tag{35}$$

该整数存在，因为将我们的等周不等式应用于 A即可得到，

$$g(k, m) = |\partial A| \geq \varepsilon |A|^{1/2} = \varepsilon f(k, m)^{1/2}.$$

不失 一般性，假设 $\varepsilon < 1$。下面用归纳法证明，对所有 $r \in [r(k)$],

$$f(k, r) \geq \left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)^2 (r + 1)^2, \tag{36}$$

其中，d 是 G的最大顶点度。当 $r = 0$时，(36)显然成立，因为 A 是连通的，因此 $f(k, 0) \geq 1$。现在令 $r \in \{1, \ldots, m\}$，并假设(36)在 $r - 1$处成立。将我们的等周不等式应用于$A_{k,\, r-1}$,

$$d|A_{k-r}| + d|A_{k+r}| + g(k, r - 1) \geq |\partial A_{k,r-1}| \geq \varepsilon f(k, r - 1)^{1/2}.$$

因此，由(35)的否定以及(36)在 $r-1$处成立可得，

$$|A_{k-r}|+|A_{k+r}| \geq \frac{\varepsilon}{2d} f(k,r-1)^{1/2} \geq \frac{\varepsilon}{2d}\cdot\frac{\varepsilon}{6d} r \geq \left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)^2 (2r+1),$$

因此，

$$\begin{aligned} f(k,r) &= f(k,r-1)+|A_{k-r}|+|A_{k+r}| \\ &\geq \left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)^2 r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)^2 (2r+1) = \left(\frac{\varepsilon}{6d}\right)^2 (r+1)^2, \end{aligned}$$

完成归纳法。现在由 (35) 和 (36)，在 $r = r(k)$ 处，

$$g(k,r(k)) \geq \frac{\varepsilon^2}{12d}(r(k)+1). \tag{37}$$

注意，区间的集合

$$I_k := [k-r(k)-1/2, k+r(k)+1/2] \quad \text{for } k \in [m]$$

显然覆盖 $[0,m]$。考虑覆盖 $[0,m]$ 的这类区间的一个极小族。按照各区间左端点从左到右排列这个族中的区间，并注意到由极小性可知，偶数编号的区间两两不相交，奇数编号的区间也两两不相交。因此，存在一个子集 $L \subset [m]$，使得对于 $k \in L$，区间 I_k 彼此不相交，且满足 $\sum_{k\in L}|I_k| \geq m/2$。（或者，我们也可以使用维塔利覆盖引理。）因此，由 (37) 以及每个 I_k 的长度为 $|I_k| \leq 2(r(k)+1)$ 这一事实，

$$|\partial A| \geq \sum_{k\in L} g(k,r(k)) \geq \sum_{k\in L}\frac{\varepsilon^2}{12d}(r(k)+1) \geq \frac{\varepsilon^2}{24d}\sum_{k\in L}|I_k| \geq \frac{\varepsilon^2}{48d}m. \qquad \square$$

7 收集质量

设 G 是一个无限连通传递图。由定理 2，对于所有 $p > p_c$，存在一个常数 $c > 0$，使得对于每个有限顶点集 S，

$$\mathrm{P}_p(S \leftrightarrow \infty) \geq 1 - e^{-c\,\Phi(S)},$$

其精确性仅取决于 c的选取。下列定理表明，以高概率，S 在每个尺度上也与其邻域内的许多顶点连通。形式上，给定非空有限顶点集 S 和 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathcal{C}_S^n = \big\{v \in \mathrm{B}_n(S) : v \xleftrightarrow{\mathrm{B}_n(S)} S\big\}.$$

定理 3. 对所有 $p > p_c$，存在 $c > 0$，使得对每个有限非空顶点集S，我们有，

$$\mathrm{P}_p\big(\forall n \in \mathbb{N} \quad |\mathcal{C}_S^n| \geq v_n\big) \geq 1 - \sum_{n\geq|S|} e^{-c\Phi(n)},$$

其中 $v_n = v_n(S)$ 关于 $n \geq 0$ 是由下式隐式定义的

$$\int_{|S|}^{v_n} \frac{1}{c\,\Phi(t)}\,dt = n. \tag{38}$$

注 7.1. 定理 3 可视为渗流中一个类比结果，对应于随机游走中返回概率与等周性之间众所周知的关系（见 [LP16，第 6 章。7]）。

注 7.2。 本质上， $v_n(S)$ 是对较小邻域递归应用等周函数后，得到的邻域 $\mathrm{B}_n(S)$ 大小的下界。如果 G 具有多项式增长，那么 $v_n(S) \asymp \mathrm{B}_n(S)$。另一方面，如果 G 具有指数增长，那么根据 Coulhon 和 Saloff-Coste 的结果，最坏情况下 $\Phi(x) \asymp x/\log\, x$，此时$v_n \asymp e^{c\sqrt{n}}$。如果 G 是非 Følner 的（即 $\Phi(x) \gtrsim x$），那么我们总有 $v_n \gtrsim e^{cn}$。

证明。 令 $p \in (p_c,1)$，并令 $c' > 0$ 为定理 1 保证存在的常数（只需考虑 $p < 1$）。我们将证明，定理的结论对 c 成立：$=\min\left(\frac{}{4d}\ \frac{-c'}{\log(1-p)}\ \frac{1}{2d}\right)$，其中 d是 G的顶点度。令 S为一个有限顶点集，并令 v_n由 (38) 定义。取任意非负整数 n。由于 Φ是递增的，

$$v_{n+1} - v_n \le \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{\Phi(v_{n+1})}{\Phi(t)}\, dt = c\,\Phi(v_{n+1}).$$

通过整理这个不等式，并利用 $c \le 1/2d$ 和 $\Phi(v_{n+1}) \le dv_{n+1}$，我们得到$v_{n+1} \le 2v_n$。由于对于所有 x， $\Phi(2x) \le 2\Phi(x)$，因此可得 $\Phi(v_{n+1}) \le \Phi(2v_n) \le 2\Phi(v_n)$。因此，

$$v_{n+1} - v_n \le 2c\,\Phi(v_n). \tag{39}$$

对于每个 $n \ge 0$，令 $M_n = |\mathcal{C}_S^n|$。注意到 $M_0 = |S| = v_0$。利用并集界，

$$\mathrm{P}_p(\forall n\ \ M_n \ge v_n) \ge 1 - \sum_{n\ge 0} \mathrm{P}_p(M_n \ge v_n \text{ but } M_{n+1} < v_{n+1}). \tag{40}$$

由于 M_n 始终是整数，因此当 $[v_n, v_{n+1})$ 不含整数时，这里的被加项均为零。于是，令 I 为所有满足区间 $[v_n, v_{n+1})$ 含有整数的 $n \in \mathbb{N}$ 的集合，并固定一个 $n \in I$。令 $\mathcal{W}$ 为所有满足 $e \overset{\mathrm{B}_{n+1}(S)}{\longleftarrow\!\!\!\longrightarrow} S$ 的边 $e \in \partial\mathrm{B}_{n+1}(S)$ 的集合。根据 (39)，当 $M_n \ge v_n$ 且 $M_{n+1} < v_{n+1}$ 时，我们知道

$$M_{n+1} - M_n \le 2c\,\Phi(v_n),$$

因此 $|\mathcal{W}| \le 2cd\Phi(v_n)$。通过揭示 $\mathrm{B}_{n+1}(S)$ 中的渗流构型，我们可以确定集合 $\mathcal{W}$，而无需揭示其边的状态。此外，若 W 中的每条边都闭合，则 S 不与无穷远连通。因此由独立性

$$\mathrm{P}_p\big(M_n \ge v_n \text{ but } M_{n+1} < v_{n+1}\big) \cdot (1-p)^{2cd\Phi(v_n)} \le \mathrm{P}_p(v_n \le |\mathcal{C}_S| < \infty).$$

因此通过整理，由于 c' 具有定理 1 所保证的性质，

$$\mathrm{P}_p\big(M_n \ge v_n \text{ but } M_{n+1} < v_{n+1}\big) \le \frac{e^{-c'\Phi(v_n)}}{(1-p)^{2cd\Phi(v_n)}} \le e^{-c\Phi(v_n)}, \tag{41}$$

其中最后一个不等式由我们对 c的公式得出。最后，将 (41) 代入 (40) 得到

$$\mathrm{P}_p(\forall n\ \ M_n \ge v_n) \ge 1 - \sum_{n\in I} e^{-c\,\Phi(v_n)} \ge 1 - \sum_{n\ge|S|} e^{-c\,\Phi(n)}. \qquad \square$$

备注 **7.3.** 本节中的论证可视为一种“由等周性得到

[Pet08],中将尾部估计的论证限制在球内。

8 Zd 上的超临界尖锐性

本节将说明如何由定理 3 推导出以下 Grimmett–Marstrand 板块定理。固定 $d \geq 3$ ，并考虑超立方格 $\mathbb{Z}^d$ 上的渗流。对于每个$\ell \geq 1$，考虑厚度为 ℓ 的板层，其定义如下：

$$\mathbb{S}_\ell := \mathbb{Z}^2 \times \{-\ell, \dots, \ell\}^{d-2}$$

定理 **m 4 (Grimmett–Marstrand，1990)。** 对于所有 $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$，存在 $\ell \geq 1$ 使得 at

$$\mathrm{P}_p(0 \overset{\mathbb{S}_\ell}{\longleftrightarrow} \infty) > 0.$$

我们将应用以下著名引理，该引理可由标准的静态重整化方法推出。为方便读者，我们给出其证明。我们将 $\mathrm{B}_k(n)$ 简记为 $\mathrm{B}_k(e_n)$，其中 $e_n := (n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$，并令 $\mathrm{B}_k := \mathrm{B}_k(0)$。

引理 8.1。 设 $p \in [0,1]$。若存在常数 $C \geq 2$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}_p(\mathrm{B}_k \overset{\mathrm{B}_{Cn}}{\longleftrightarrow} \mathrm{B}_k(n)) = 1, \tag{42}$$

于是存在 $\ell \geq 1$ 使得 $\mathrm{P}p(0 \overset{\mathbb{S}_\ell}{\longleftrightarrow} \infty) > 0$。

证明。 假设存在满足式（42）的常数 $C \geq 2$ 。根据 [LSS97] （或直接使用 Peierls 论证），存在 $\varepsilon > 0$ ，使得通常的方格格 $\mathbb{Z}^2$ 上的任意 $3C$-依赖渗流，只要其边缘分布至少为 $1 - 3\varepsilon$ ，就几乎必然存在一个无限簇。于是存在 $k < \infty$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}_p(\mathrm{B}_k \overset{\mathrm{B}_{Cn}}{\longleftrightarrow} \mathrm{B}_k(n)) > 1 - \varepsilon. \tag{43}$$

根据无限簇唯一性，存在 $n_0 < \infty$ 使得

$$\mathrm{P}_p(U) > 1 - \varepsilon,$$

其中 U 是指：将我们的渗流构型限制在 $\mathrm{B}^\circ_{n_0}$ 内后，与 B_k 和 $\partial^-\mathrm{B}n_0$均相交的簇至多有一个这一事件。因此，由等式（43），存在$n \geq n_0$ 使得

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_k \overset{\mathrm{B}_{Cn}}{\longleftrightarrow} \mathrm{B}_k(n)) > 1 - \varepsilon.$$

对于 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^d$ 的每条边 uv （利用显然的包含关系），令 $\zeta(uv)$ 表示以下事件的指示函数

$$\{(nu + \mathrm{B}_k) \overset{nu+\mathrm{B}_{Cn}}{\longleftrightarrow} (nv + \mathrm{B}_k)\} \cap U(nu) \cap U(nv),$$

其中 $U(x)$ 表示事件 U经平移后以向量 $(x, 0, \dots, 0)$ 为中心。注意， ζ 是一个 $3C$-相依渗流，其边缘分布至少为 $1-3\varepsilon$。此外，几乎必然地，若 ζ 包含一个无限簇，则我们原来的渗流构型限制到 $\mathbb{S}_{Cn}$ 上也包含一个无限簇。因此，由我们对 C 的选取，有 $\mathrm{P}p(0 \overset{\mathbb{S}_{Cn}}{\longleftrightarrow} \infty) > 0$。

□

证明 **定理 *4.*** 设 $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$。由于我们在 $\mathbb{Z}^d$ 上工作，我们知道 $\Phi(n) \gtrsim n^{\frac{d-}{d}}$ $^{-1}$.

因此，根据定理 3 和一些微积分，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq 3k} \mathrm{P}_p(|\mathcal{C}^n_{\mathrm{B}_k}| > \delta|\mathrm{B}_{2n}|) = 1.$$

令 $C := 2\lceil 1/\delta \rceil$。我们将证明 (42) 在 $2C$ 时成立；根据引理 8.1，这足以完成证明。为此，令 $\varepsilon \in (0, 1)$。取 $k \geq 1$，使得对所有 $n \geq 3k$，

$$\mathrm{P}_p(|\mathcal{C}^n_{\mathrm{B}_k}| > \delta|\mathrm{B}_{2n}|) > 1 - \eta, \tag{44}$$

其中 $\eta := \varepsilon^{C^2}/C$。现在令 $n \geq 3k$。对每个 $i \in \{0, \dots, C-1\}$，定义

$$\mathcal{C}_i := \{x \in \mathrm{B}_{2Cn} : x \xleftrightarrow{\mathrm{B}_{Cn}(ni)} \mathrm{B}_k(ni)\}.$$

由于 $\mathrm{B}_{Cn}(ni) \subset \mathrm{B}_{2Cn}$，将 n 替换为 Cn 应用于 (44)，再使用并集界，得

$$\mathrm{P}_p\big(|\mathcal{C}_i| > \delta|\mathrm{B}_{2Cn}| \text{ for all } i\big) \geq 1 - C\eta.$$

若对所有 i，$|\mathcal{C}_i| \geq \delta|\mathrm{B}_{2Cn}|$，则根据密度论证，存在指标 $i \neq j$，使得 $\mathcal{C}_i$ 与 $\mathcal{C}_j$ 相交。由于 $|ni - nj| \leq Cn$，我们有 $\mathrm{B}_{Cn}(nj) \subset \mathrm{B}_{2Cn}(nj)$，因此 $\mathrm{B}_k(ni) \xleftrightarrow{\mathrm{B}_{2Cn}(ni)} \mathrm{B}_k(nj)$。由于指标对至多只有 C^2 个，根据 √技巧，我们推得存在固定指标 $i \neq j$，使得

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_k(ni) \xleftrightarrow{\mathrm{B}_{2Cn}(ni)} \mathrm{B}_k(nj)) > 1 - (C\eta)^{1/C^2} \geq 1 - \varepsilon.$$

因此，根据平移不变性，$m := |i - j|n \geq n$ 满足

$$\mathrm{P}_p(\mathrm{B}_k \xleftrightarrow{\mathrm{B}_{2Cm}} \mathrm{B}_k(m)) \geq 1 - \varepsilon.$$

由于 n 是任意的，这就证明了 (42) 成立。 □

注 8.2. 定理 4 表明，对所有 $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$，在足够厚的板层中都有渗流。特别是，在半空间 $\mathbb{H} := \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ 中当然也有渗流。下面简要说明如何直接从定理 2 推出半空间中存在渗流，而无需经过板层：考虑 B_n 与 $S := \partial^- \mathrm{B}_{2n}$ 之间的区域，其中 n 足够大。根据定理 2，以至少 $1/2$ 的概率，S 中有固定比例 $c > 0$ 的顶点与 B_n 连通。（否则，通过关闭 ∂B_n，我们可以以至少 $\frac{1}{2} \cdot (1-p)^{dc|S|}$ 的概率迫使 $\mathrm{B}_n \not\leftrightarrow \infty$，若 c 足够小，这就与定理 2 矛盾。）在这一事件下，从 S 中均匀随机选取一个顶点的视角来考察，可知 $\mathrm{P}_p(0 \xleftrightarrow{\mathbb{H}} \infty) \geq c/2 > 0$，如所需。

致谢 感谢塞巴斯蒂安·马蒂诺对早期稿件提出宝贵评注。BS 得到了瑞士国家科学基金会（SNSF）项目资助，编号为 200021–228014。本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟“地平线 2020”研究与创新计划提供的资助（资助协议编号 851565）。

参考文献

[AB87] M. Aizenman 与 D. J. Barsky。渗流模型中相变的尖锐性。《数学物理通讯》，108:489–526，1987年。

[ADLZ25] M. Anastos、S. Diskin、L. Lichev 与 M. Zhukovskii。渗流超立方体中巨型连通分量的直径与混合时间。预印本，arXiv:2510.13348[math.PR](2025)，2025年。[AV08] T. Antunovi´c 与 I. Veseli´c。拟传递图上渗流的相变尖锐性与次临界簇大小的指数衰减。《统计物理学杂志》，130(5):983–1009，2008年。[BDCKY15] I. Benjamini、H. Duminil-Copin、G. Kozma 与 A. Yadin。无序、熵与调和函数。《概率年刊》，43(5):2332–2373，2015年。[BH57] S. R. Broadbent 与 J. M. Hammersley。渗流过程。I. 晶体与迷宫。《剑桥哲学学会会刊》，53:629–641，1957年。[BKW14] I. Benjamini、G. Kozma 与 N. Wormald。随机图巨型连通分量的混合时间。《随机结构与算法》，45(3):383–407，2014年。[BLS99] I. Benjamini、R. Lyons 与 O. Schramm。势理论与随机游走中的渗流扰动。载于《随机游走与离散势理论》（科尔托纳，1997年），《数学研讨会》第 XXXIX 卷，第 56–84 页。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[BM03] I. Benjamini 与 E. Mossel。关于超临界渗流簇上简单随机游走的混合时间。《概率论及其相关领域》，125(3):408–420，2003年。[BR06] B. Bollob´as 与 O. Riordan。渗流。剑桥：剑桥大学出版社，2006年。[BS96] I. Benjamini 与 O. Schramm。超出 $\mathbb{Z}^d$的渗流：诸多问题与少量解答。《电子概率通讯》，1:71–82，1996年。[CCN87] J. T. Chayes、L. Chayes 与 C. M. Newman。阈值以上的伯努利渗流：一种侵入渗流分析。《概率年刊》，15(4):1272–1287，1987年。[CMT24] D. Contreras、S. Martineau 与 V. Tassion。多项式增长图上的超临界渗流。《杜克数学杂志》，173(4):745–806，2024年。[CP04] D. Chen 与 Y. Peres。锚定扩张、渗流与速度。《概率年刊》，32(4):2978–2995，2004年。附 G´abor Pete 所写附录。[DCRT19] H. Duminil-Copin、A. Raoufi 与 V. Tassion。经由决策树得到的随机簇模型与波茨模型的尖锐相变。《数学年刊》(2)，189(1):75–99，2019年。[DCT16] H. Duminil-Copin 与 V. Tassion。伯努利渗流与伊辛模型相变尖锐性的一个新证明。《数学物理通讯》，343(2):725–745，2016年。[EKK23] J. Erde、M. Kang 与 M. Krivelevich。超立方体的超临界随机子图中的扩张及其后果。《概率年刊》，51(1):127–156，2023年。[EST25] P. Easo、F. Severo 与 V. Tassion。极小割集的计数与 $p_c < 1$。《数学论坛 Pi》，13:13，2025年。标识号 e23。

[FR08] N. Fountoulakis 和 B. A. Reed. 随机图巨型连通分量上简单随机游走混合率的演变。《随机结构与算法》，33(1):68–86，2008年。[Gab05] D. Gaboriau. 不变渗流与调和狄利克雷函数。Geom. Funct. Anal.，15(5):1004–1051，2005。[GM90] G. R. Grimmett 和 J. M. Marstrand. 渗流的超临界相性质良好。Proc. R. Soc. Lond., Ser. A，430(1879):439–457，1990。[Gri99] G. Grimmett. 渗流，第321卷，数学基础丛书（数学科学基本原理）。Springer-Verlag，柏林，第二版，1999年。[Gro81] M. Gromov. 多项式增长群与扩张映射。Inst. Hautes ́Etudes Sci. Publ. Math.，(53):53–73，1981。[HH21] J. Hermon 和 T. Hutchcroft. 非平均图上的超临界渗流：等周性、解析性及簇大小分布的指数衰减。Invent. Math.，224(2):445–486，2021。[Hut23] T. Hutchcroft. 超临界渗流簇的暂态性与锚定等周维数。《电子概率通讯》，28:第14号论文，15页，2023年。[LMS08] R. Lyons、B. J. Morris 和 O. Schramm. 一致生成森林中的端。《电子概率通讯》，13:1702–1725，2008。[LP16] R. Lyons 和 Y. Peres. 树与网络上的概率，第42卷，剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，纽约，2016年。[LSS97] T. M. Liggett、R. H. Schonmann 和 A. M. Stacey. 乘积测度支配。《概率年刊》，25(1):71–95，1997年。[Men86] M. V. Men’shikov. 渗流问题中临界点的重合。Sov. Math., Dokl.，33:856–859，1986。[Pet08] G. Pete. 关于整数格 $\mathbb{Z}^d$上的渗流的一则注记：通过指数簇排斥得到的等周轮廓。《电子概率通讯》，13:377–392，2008年。[Tro03] V. I. Trofimov. 具有近似多项式增长的无向图和有向图。Discuss. Math. Graph Theory，23(2):383–391，2003年。[Van25] H. Vanneuville. 伯努利渗流体积的指数衰减：一种基于随机比较的证明。《Annales Henri Lebesgue》，8:101–112，2025年。[Woe00] W. Woess. 无限图与群上的随机游走，第138卷，剑桥数学专著丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。