arXiv:2603.03261v1 [math.PR] 3 Mar 2026

使用马利亚万导数进行重新中心化

2026年3月4日

Yvain Bruned 和 Aur´elien Minguella

洛林大学，法国国家科学研究中心，洛林埃利·嘉当研究所，F-54000
南锡，法国 电子邮箱：yvain.bruned@univ-lorraine.fr
aurelien.minguella@univ-lorraine.fr

摘要
我们以代数方式统一了正则性结构中重整化模型收敛的谱隙证明。我们证明，文献中用于调整模型重新中心化的关键重新定心映射 dΓ 可通过等价的刻画给出。

目录

1 引言 1 2 装饰树与重新定心映射 5 3 重新定心映射的刻画 133.1 导数方法.13
3.2 递归定义.16

1 引言

证明一大类奇异随机偏微分方程（SPDEs）的局部适定性时，主要挑战之一是系统地描述解的拟设：它由迭代随机积分构成，并且经过适当的重整化程序后能够收敛。Martin Hairer 在 [14]中提出的正则性结构理论以极大的普适性解决了这一问题。该理论采用局部展开，将拟设中的迭代积分局部化于一个基点附近，并使其发挥单项式的作用。描述这些积分的组合结构以装饰树和森林的霍普夫代数为基础，见 [14, 5], ，借此可以构建重整化模型，即一组局部化的重整化随机积分。重整化按照量子场论中为重整化费曼图而发展出的著名 BPHZ方案进行（见 [7, 16, 22]）。随后，在 [10], 中，通过计算这些重整化随机积分的累积量证明了收敛性，而计算结果会产生费曼图。这些图还包含了重新中心化过程

这一过程使收敛性证明相当棘手，因为必须同时处理两种分析过程：重整化和重新中心化。文献[2] 表明，给定通过 B-级数描述的重整化拟设后，可以得到重整化方程，并通过不动点论证获得局部适定性。

在 [19, 17], 中，作者提出了一种不同的组合框架——多重指标，用于编码标量值方程的正则性结构拟设。其核心思想是通过方程的非线性来参数化解拟设，这归结为将局部展开中具有相同系数的随机积分分组。这样一来，便无法直接获得随机积分，因而也无法通过费曼图证明模型的收敛性。在 [18], 中，作者基于谱隙不等式发展了一种递归方法，以证明模型的收敛性。下面简要总结他们的方法。考虑一个半线性方程

$$(\partial_t - \mathcal{L})u = f(u, \nabla u, ..., \xi) \tag{1.1}$$

其中， f 是时空噪声 ξ 的仿射函数，并且依赖于 u 及其导数； $\mathcal{L}$ 是满足 Schauder估计的微分算子，例如拉普拉斯算子。我们希望控制由组合对象 τ索引的重新中心化分布 $\Pi_x\tau$ 的 p阶矩，该组合对象可以是装饰树或多重指标。这些项出现在(1.1)右侧的局部展开中：

$$f(u, \nabla u, ..., \xi) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \frac{\Upsilon_f[\tau](u, \nabla u, ...)(x)}{S(\tau)} \Pi_x\tau + R_{\mathcal{T},x}$$

其中 $\mathcal{T}$是一个有限的组合集合，$R_{\mathcal{T},x}$ 是泰勒余项， $S(\tau)$是与 τ相关联的对称因子，而 $\Upsilon_f[\tau]$ 是基本微分。[18] 的核心思想是使用以下谱隙不等式，

$$\mathbb{E}(|\Pi_x\tau|^p)^{\frac{1}{p}} \leq |\mathbb{E}(\Pi_x\tau)| + \mathbb{E}(\|\delta\Pi_x\tau\|_\star^p)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\|\cdot\|_\star$ 是一个合适的泛函范数，而 $\delta\Pi_x$ 是模型 Π_x的马利亚万导数。接着，需要控制 $\Pi_x\tau$ 的一阶矩，这由 BPHZ重整化方案给出。 $\delta\Pi_x\tau$的构造通过重构论证完成。事实上，求马利亚万导数归结为对组合对象求抽象导数，这可以从交换关系中看出

$$\delta\Pi_x\tau = \Pi_x D_\Xi\tau, \tag{1.2}$$

其中， D_Ξ 将与噪声 ξ 相关联的装饰变为与 $\delta\xi$相关联的装饰，而该噪声带有一个马利亚万导数。对于装饰树的重整化模型，这个恒等式已在 [9, 命题 4.1] 中得到证明。然后，考虑到 $\delta\xi$ 的正则性优于 ξ，可以看出 D_Ξ 是正次数组合对象的线性组合。这就是

我们可以对这一项应用重构论证的原因。该论证能否成功，取决于一种递归结构：必须构造规模小于 τ的 σ 模型。

文献中已有多种利用这一思想的证明。论文 [4] 概述了模型的收敛的各种证明。我们简要介绍谱隙证明

- [18] 中的原始证明是针对带有多重指标的拟线性方程进行的。该证明被再次用于构造 [21]中的模型以及 [13]中的薄膜方程。 Φ^4 模型在 [6]中得到处理。
- [15] 中的证明使用装饰树以及带标记的模型化分布这一概念来进行重构，这看起来类似于[18]的分析部分。他们的结果适用于一大类奇异随机偏微分方程。
- 工作 [3] 为模型增加了另一个参数以衡量可积性，从而可以给出分析论证的另一种版本。

需要强调的是，在 [17] 完成前后，Pawel Duch在 [11] 中也提出了一种受Polchinski流 [20]启发的、关于随机积分收敛的递归方法。

正如 [9, 定义 4.3], 中所注意到的，可以确定一个模型化分布，其重构将得到 $\delta\Pi_x\tau$，其定义如下

$$\mathrm{d}\Gamma_{yx}\tau = \mathcal{Q}_0(\Gamma_{yx}\otimes f_x)\hat{\Delta}D_{\Xi}\tau, \tag{1.3}$$

其中， Γ_{xy} 允许改变展开的基点，即

$$\Pi_x\Gamma_{xy} = \Pi_y.$$

映射 f_x 是一个特征，它通过[14]中引入的余乘积定义模型 Π_x

$$\Pi_x = (\mathbf{\Pi}\otimes f_x)\Delta$$

其中， $\mathbf{\Pi}$ 称为预模型。项 $\mathbf{\Pi}\tau$ 是与 τ 相关联的随机迭代积分，且未经重新中心化。映射$\mathcal{Q}_0$ 是一个投影，仅保留不含抽象马利亚万导数的˙组合项。最后， Δ 是与 Δ 相关联的映射，用于简化重新中心化。事实上，可以定义一个模型 Π^0_x ，使其在重新中心化时不区分噪声 ξ 和 $\delta\xi$ ，并且由 [9, 命题 3.7] 可得

$$\Pi^0_x = (\Pi_x\otimes f_x)\hat{\Delta}$$

这恰好就是 [3, 引理 8] 中使用的恒等式。这里，模型 Π^0_x 在重新中心化时没有考虑马利亚万导数，而Π_x则考虑了。接下来，根据带有马利亚万导数的噪声所对应的次数，模型 Π_x 将被替换为两个模型 Π^1_x 和 Π^2_x 。我们还将

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\Delta$ 替换为合适的映射 Δ_1 和 Δ_2。最后，在光滑模型的情形下重构模型化分布 $\mathrm{d}\Gamma_{\cdot x}\tau$ 时，可得

$$(\mathcal{R}\mathrm{d}\Gamma_{\cdot x}\tau)(y) = (\Pi_y \mathrm{d}\Gamma_{yx}\tau)(y) = (\delta\Pi_x\tau)(y),$$

其中我们使用了光滑情形下重构算子的公式 $\mathcal{R}(\cdot)(y) = (\Pi_y\cdot)(y)$。前一等式已在 [9, 定理 4.5]中得到证明。尽管 [9] 中提出了词典，以便用不在对偶侧的装饰树改写[18] 的主要代数论证，但尚不清楚[9] 中定义的 $\mathrm{d}\Gamma$ 是否对应于 [18], 中的那个，也不清楚它与 [15] 的构造有何关系。本文的主要结果是给出澄清，并表明同一映射的各种变体被用于所有谱隙证明。

定理 1.1 在 *[17, 15, 3]* 中经由谱隙不等式的收敛证明的代数部分依赖于重新定心映射 $\mathrm{d}\Gamma$，其在装饰树上的表达式由 *(1.3)* 给出

该定理的证明分为两部分：

- 定理3.2表明，有恒等式 [9, 定理 4.5]，但在更高阶时

$$(\partial^n\Pi_y \mathrm{d}\Gamma_{yx}\tau)(y) = (\partial^n\delta\Pi_x\tau)(y),$$

  其中 $n \in \mathbb{N}^{d+1}$，且该恒等式对每个满足 n 的 $|n|_{\mathfrak{s}}$ 都成立：向量 n 的范数小于一个取决于方程的某个量。这正是 [18, 第 5 节4] 和 [6, 第 2 节6]给出的刻画。

- 定理 3.4 表明，$\mathrm{d}\Gamma$ 的一个变体满足˜主代数映射 f_x^τ 的递归定义，该映射在 [15, 第 4 节1]中讨论。证明依赖于 [12, 注 1425]给出的关键恒等式 (2.20)。它还与 [8,命题 313]中给出的、用 $(\Pi_x\cdot)(y)$ 表示 Γ_{xy} 的递归公式有关。

我们简要概述本文内容，并介绍各节安排。第 2 节回顾用于求解奇异随机偏微分方程的装饰树的主要定义（见定义2.1）。我们引入两类噪声，以区分带有马利亚万导数的噪声与不带该导数的噪声。我们在 (2.3) 中定义了与这些树相关的不同次数，从而可以在重新中心化时选择是否将马利亚万导数计入其中。定义抽象 Malliavin 导数 D_Ξ（见定义 2.2）后，我们引入一大类奇异随机偏微分方程所满足的假设 1（见例2.3）。该假设保证含有马利亚万导数的有根树具有正次数。这对于下文使用重构论证以及刻画映射 $\mathrm{d}\Gamma$ 至关重要。随后，我们回顾余作用 Δ_i、余乘积 Δ_i^+、预备映射R（见定义 2.4 和假设2），以及定义重整化模型 Π_x^i所需的预模型 $\mathbf{\Pi}$。这里，下标 i 表明模型使用的是次数 deg_i。最后，我们给出本文核心映射 $\mathrm{d}\Gamma$ 的定义（见定义 2.5），并对该映射作霍普夫代数解释，同时通过实例加以说明（见例 2.6）。

第3节首先证明定理3.2，即通过导数刻画 $\mathrm{d}\Gamma$ 。其证明遵循定理 [9, Theorem 4.5] 证明中的相同步骤，并且关键依赖于假设2.2。最后，我们在命题3.3中证明，可以在对偶侧得到此前在 [18, 第 5 节4]中引入的刻画。也可参见讲义 [6, 第 2 节7]。本节后半部分致力于证明定理 3.4，即 $\mathrm{d}\Gamma$ 的递归刻画。其证明归结为使用 Γ_{yx} 与 $\mathcal{I}_a$ 之间的交换恒等式（见 (2.20)）。

致谢

Y.B. 和 A.M. 衷心感谢欧洲研究委员会通过 ERC 初级研究员资助项目“通过装饰树研究低正则性动力学”（LoRDeT）提供资金支持，资助协议编号为 101075208。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的立场。欧盟和资助机构均不对此承担责任。Y.B. 在 2025 年秋季学期驻留于加利福尼亚州伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所期间，本研究的构想应运而生。此次驻留部分由美国国家科学基金会通过资助编号 DMS-2424139 提供支持。Y. B. 感谢 Lorenzo Zambotti 的深入讨论，并感谢他组织了一个关于正则性结构无图方法的工作小组。

2 装饰树与重新定心映射

我们首先回顾 [9] 的主要定义。我们选取三个符号$\mathcal{I}$、 Ξ 和 $\dot{\Xi}$，并据此定义一组边装饰$\mathcal{D} := \{\mathcal{I}\ \ \Xi,\ \ \dot{\Xi}\} \times \mathbb{N}^{d+1}$。第一个符号$\mathcal{I}$ 表示与一个核进行卷积，该核来源于我们所研究方程的微分算子；而符号 Ξ, Ξ则分别表示噪声项及其无穷小扰动。

定义2.1 以$\mathcal{D}$ 为底集的装饰树是如下形式的三元组： $\tau_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}} = (\tau, \mathfrak{n}, \mathfrak{e})$，其中 τ 是非平面有根树，其节点集为 N_τ，边集为 E_τ。映射$\mathfrak{n}$： $N_\tau \to \mathbb{N}^{d+1}$ 和 $\mathfrak{e}$： $E_\tau \to \mathcal{D}$ 分别是节点装饰和边装饰。

我们用 T 表示装饰树集，$\mathcal{T}$是其线性张成。我们定义二叉树乘积如下：

$$(\tau, \mathfrak{n}, \mathfrak{e}) \cdot (\tau', \mathfrak{n}', \mathfrak{e}') = (\tau \cdot \tau', \mathfrak{n} + \mathfrak{n}', \mathfrak{e} + \mathfrak{e}')\,, \tag{2.1}$$

其中， $\tau\cdot\tau\prime$是通过将 τ和 τ'的根识别为同一个顶点而得到的有根树。求和 $\mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$ 表示将装饰加在根上，并通过令装饰在另一棵树上取零，将其扩展到不交并上。两棵树的每条边和每个顶点都保留其装饰，唯有根合并为一个新的根，其装饰为原来两个装饰之和。

(i) 由 $(\mathcal{I}\ a)\ \in \mathcal{D}$ 装饰的边记为 $\mathcal{I}_a$。符号 $\mathcal{I}_a$ 也可视为这样一种操作：通过一条边装饰为 a的新边，将一棵树嫁接到一个新根上。此处新根的装饰仍为 0。

(ii) 由（Ξ,0）或（Ξ, 0）装饰的边分别记为 Ξ或 Ξ。

(iii) 因子 X^k 编码单个节点 $\bullet^k$，其装饰为 $k \in \mathbb{N}^{d+1}$。我们记$X_i, i \in \{0,1,\dots,d\}$，用以表示 X^{e_i}。此处，我们用 $e_0, ..., e_d$ 表示 $\mathbb{N}^{d+1}$的标准基。元素 X^0（其编码 $\bullet^0$）将记为**1**。所有单项式 X^k 的空间将记为 $\bar{T}$，其线性张成记为$\mathcal{T}$。

我们假定噪声类型边总是带有装饰 Ξ 或 $\dot{\Xi}$，并且总是连接到一个叶节点。我们用 T_0 表示包含 而无符号 Ξ 的装饰树集，用 T_1 表示至少包含一个符号 Ξ的装饰树集。由此，我们分别定义它们的张成为$\mathcal{T}_0$ 与 $\mathcal{T}_1$。

利用这种符号表示法，任意装饰树 $\tau \in T$都可以表示为：

$$\tau = X^k \Xi^l \dot{\Xi}^m \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{a_i}(\tau_i), \tag{2.2}$$

其中 $\prod_i$ 表示树乘积，$k \in \mathbb{N}^{d+1}$、l、$m \in \mathbb{N}$。在相关应用中，尤其是在本文所关注的应用中，不允许出现噪声乘积，因此只能考虑满足 $l + m \leq 1$的情形。此外，我们假设对于每个 $k \in \mathbb{N}^{d+1}$，都有 $\mathcal{I}_a(X^k) = 0$。这是因为在分析方面，人们会考虑一个核，它会根据具体应用，将次数足够低的单项式消去。有根树是指形如$\mathcal{I}_a(\tau)$的树，也就是说，只有一条边将根与树的其余部分连接起来。我们还引入抽象导数$\mathcal{D}^p$，对于 $n \in \mathbb{N}^{d+1}$，规定

$$\mathcal{D}_n \mathcal{I}_a(\tau) = \mathcal{I}_{a+n}(\tau), \quad \mathcal{D}_n X^k = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} X^{k-n} & k \geq n \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

最后再利用莱布尼茨法则将其推广到所有 T。我们在噪声上定义次数映射 $\deg_0$、$\deg_1$ 和 $\deg_2$，规定

$$\deg_j(\Xi) = \alpha,\ \deg_0(\dot{\Xi}) = \alpha,\ \deg_1(\dot{\Xi}) = \alpha + \frac{d+2}{2},\ \deg_2(\dot{\Xi}) = \alpha + \frac{d+2}{2} + 2\kappa,$$

其中，α 是由 Ξ 编码的噪声 ξ 的时空正则性，而在 $\deg_1(\dot{\Xi})$ 和 $\deg_2(\dot{\Xi})$ 中出现 $\frac{d+2}{2}(+2\kappa)$，是为了追踪取马利亚万导数所带来的正则性提升。κ是一个很小的正数。由此，通过规定对 T中的所有元素，若 $j \in \{0,1,2\}$：，将次数映射扩展到整个 T。

$$\begin{aligned} &\deg_j(X_0) = 2, && \deg_j(X_i) = 1, \ \text{for } i \neq 0, \\ &\deg_j(\sigma\tau) = \deg_j(\sigma) + \deg_j(\tau), && \deg_j\left(\mathcal{I}_a(\tau)\right) = \deg_j(\tau) + 2 - |a|_{\mathfrak{s}}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中我们使用了抛物型缩放 $\mathfrak{s} = (2, 1, \ldots, 1)$，以及某个多重指标$n \in \mathbb{N}^{d+1}$ 来定义这个量

$$|n|_{\mathfrak{s}} := \sum_{i=0}^{d} \mathfrak{s}_i n_i.$$

注意，这意味着对于多重指标 n，有 $\deg(X^n) = |n|_{\mathfrak{s}}$。我们还用 $|\cdot|_\Xi$ 表示 τ 中噪声的个数，不论其类型如何。此外，与它们在 [9] 中的对应物相比，指标 0 和 1 已被互换。这是因为我们需要第三个次数，并决定按递增的值对它们进行排序。

给定子集 $E \subset T$，我们定义如下集合

$$E^{+,i} := \left\{ X^k \prod_j \mathcal{I}_{a_j}^{+,i}(\tau_j) \,\middle|\, \deg_i(\mathcal{I}_{a_j}(\tau_j)) > 0,\ \tau_j \in E,\ k \in \mathbb{N}^{d+1} \right\}.$$

选取新符号 $\mathcal{I}_{a_j}^{+,i}$ 是为了强调上述集合与 E之间的差异，该差异尤其在 $E = T_0$ 时出现。对于 $T^{+,i}_0$ 中的装饰树，根处的乘积不受任何约束。该符号可通过将负次数的树映为零而推广到 T 的任意元素：

$$\mathcal{I}_a^{+,i}(\tau) = 0, \quad \deg_i(\mathcal{I}_a(\tau)) \le 0.$$

如上，我们用 $\mathcal{T}^{+,i}$ 表示 $T^{+,i}$ 的线性张成。

我们在 T_1 上定义经典组合系数，即对称因子。它们在形如 $\tau = X^k \Xi^l \dot{\Xi}^m \prod_{i=1}^n \mathcal{I}_{a_i}(\tau_i)^{\beta_i}$ 的树上归纳给出，其中各偶对 (a_i, τ_i) 两两不交，由

$$S(\tau) = k! \prod_{i=1}^{n} \beta_i! S(\tau_i)^{\beta_i}, \tag{2.4}$$

和 $S(\mathbf{1}) = S(\Xi) = S(\dot{\Xi}) = 1$。据此，我们还可以在$T_1 \times T_1$ 上定义一个标量积：

$$\langle \tau, \sigma \rangle = \mathbf{1}_{\tau=\sigma} S(\tau), \tag{2.5}$$

并利用双线性性将其扩展到$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$上。

我们引入树上的抽象导数，它是相对于噪声的马利亚万导数的代数对应形式。这是 [9] 中的定义 2.2。

定义 2.2 线性映射 $D_\Xi : \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}_1$ 定义为一个导子，它将给定装饰树的Ξ 转换为 $\dot{\Xi}$。它可以通过要求以下条件，在树结构上归纳定义：

$$D_\Xi \left(X^k \Xi \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{a_i}(\tau_i) \right) = X^k \dot{\Xi} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{a_i}(\tau_i) + X^k \Xi \sum_{j=1}^{n} \mathcal{I}_{a_j}(D_\Xi \tau_j) \prod_{i \neq j} \mathcal{I}_{a_i}(\tau_i),$$

以及 $D_\Xi(\dot{\Xi}) = \Xi$，以及 $D_\Xi(X^{\mathbf{n}}) = D_\Xi(\mathbf{1}) = 0$。

我们对空间$\mathcal{T}_0$作出如下关键假设：

假设 1 对于每个 $\tau \in T_0$，我们假设：

$$D_\Xi \tau = \sum_i \mathcal{I}_{a_i}(D_\Xi \tau_i')\tau_i + \dot{\Xi}\tau', \tag{2.6}$$

其中 τ_i、τ_n、τ_1属于 T_0，而 τ_1的根上没有任何噪声。我们将满足 次数$_1$(Ξ) $+2-N>0$ 的最大整数记为 N。这个量与线性方程解的马利亚万导数有关。我们假设，对于每个 $|n|_{\mathfrak{s}} \le N$，

$$\deg_1(\mathcal{I}_{a_i+n}(D_\Xi \tau_i')) > 0, \tag{2.7}$$

在后一个等式中，我们滥用了记号，因为对于装饰树的线性组合，次数$_1$ 并未定义。这里，我们知道 $D_\Xi \tau_i'$ 是由次数相同的装饰树构成的线性组合。因此，我们用次数$_1$($D_\Xi \tau_n$) 表示它们的次数。

这个假设是对 [9, 假设 3] 的扩展，其中 (2.7) 仅对 $n=0$作出假设。这个新假设对于证明定理3.2是必要的，并且大多数自然模型都满足该假设。下面的例子中，我们考虑几个模型：

例2.3 考虑带有 $\kappa>0$ 的 $\Phi^4_{4-\kappa}$ 模型。其动力学由下式给出

$$(\partial_t - \Delta)u = -u^3 + \xi, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^4$$

其中，时空噪声 ξ 的轨迹属于 $C^{-3+\kappa}$。于是，定义 T_0 为

$$T_0 = \{\Xi, X^k\mathcal{I}(\tau_1), X^k\mathcal{I}(\tau_1)\mathcal{I}(\tau_2), \mathcal{I}(\tau_1)\mathcal{I}(\tau_2)\mathcal{I}(\tau_3),\, k \in \mathbb{N}^{d+1},\, \tau_i \in T_0\}.$$

设 $\alpha = -3+\kappa$。于是可以发现，具有 $\tau \in T_0$ 且形如 $I(\tau)$ 的最低次数装饰树为 $I(\Xi)$。有

$$\begin{aligned}
&\deg_1(\mathcal{I}(D_\Xi \Xi)) = \deg_1(\mathcal{I}(\dot{\Xi})) = 2 + \alpha + \frac{2+d}{2} = 2+\kappa,\\
&\deg_2(\mathcal{I}(D_\Xi \Xi)) = \deg_2(\mathcal{I}(\dot{\Xi})) = 2 + 3\kappa
\end{aligned}$$

其中用到了 $d=4$。于是有 $N=2$。对于特定的模型 Φ^4_3，考虑时空白噪声，也就是说轨迹属于 $\alpha = -\frac{5}{2} - \kappa$，于是有

$$\deg_1(\mathcal{I}(D_\Xi \Xi)) = 2-\kappa \quad \deg_2(\mathcal{I}(D_\Xi \Xi)) = 2+\kappa.$$

在这种情况下，有 $N=1$。我们考虑的第二个模型是广义 KPZ 方程，其形式为

$$(\partial_t - \partial_x^2)u = f(u)(\partial_x u)^2 + g(u)\xi, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$$

其中 ξ 是时空白噪声。因此， $\alpha = -\frac{3}{2} - \kappa$。集合 T_0 定义为

$$T_0 = \Big\{ X^k\tau, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}(\tau_i)\Xi, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}(\tau_i) \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_{(0,1)}(\sigma_i), \\ p \in \{0,1,2,3\}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^{d+1}, \tau, \tau_i, \sigma_i \in T_0 \Big\}$$

按照约定，当 $n = 0$ 或 $p = 0$时，前面的乘积 $\prod$ 等于一。因此，在这种情况下，最低次数的项形式为 $I_{(0,1)}(\tau)$ ，即 $I_{(0,1)}(\Xi)$ ，从而得到

$$\deg_1(\mathcal{I}_{(0,1)}(D_\Xi \Xi)) = 2 - \kappa \quad \deg_2(\mathcal{I}(D_\Xi \Xi)) = 2 + \kappa, \quad N = 1.$$

我们回顾余作用 Δ_i 的定义：$\mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_i \otimes \mathcal{T}^{+,\,i}$ ，最初定义于[14]。

$$\begin{aligned} &\Delta_i \mathbf{1} \coloneqq \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \qquad \Delta_i X_j = X_j \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_j, \\ &\Delta_j \Xi = \Xi \otimes \mathbf{1}, \;\; \Delta_0 \dot{\Xi} = \dot{\Xi} \otimes \mathbf{1}, \;\; \Delta_1 \dot{\Xi} = \dot{\Xi} \otimes \mathbf{1}, \;\; \Delta_2 \dot{\Xi} = \dot{\Xi} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \dot{\Xi}, \\ &\Delta_i \mathcal{I}_a(\tau) \coloneqq (\mathcal{I}_a \otimes \mathrm{id}) \Delta_i \tau + \sum_{|\ell+m|_{\mathfrak{s}} < \deg_i(\mathcal{I}_a(\tau))} \frac{X^\ell}{\ell!} \otimes \frac{X^m}{m!} \mathcal{I}^{+,i}_{a+\ell+m}(\tau). \end{aligned} \tag{2.8}$$

我们还用余乘积 Δ_i^+ 补充这些余作用：$\mathcal{T}^{+,\,i} \to \mathcal{T}^{+,\,i} \otimes \mathcal{T}^{+,\,i}$。

$$\begin{aligned} &\Delta_i^+ \sigma\tau = \Delta_i^+ \sigma \Delta_i^+ \tau, \\ &\Delta_i^+ \mathcal{I}_a^{+,i}(\tau) = \sum_{|\ell|_{\mathfrak{s}} < \deg_i(\mathcal{I}_a(\tau))} \left(\mathcal{I}^{+,i}_{a+\ell} \otimes \frac{(-X)^\ell}{\ell!} \right) \Delta\tau + \mathbf{1} \otimes \mathcal{I}_a^{+,i}(\tau). \end{aligned} \tag{2.9}$$

我们回顾预备映射的定义，它们最初由 [8], 引入，我们将用它们归纳地定义重整化模型。

定义 2.4 预备映射是一个线性映射 $R\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$，它保持多项式、噪声、有根树不变，并且满足

- 对于每个 $\tau \in \mathcal{T}$，都存在有限多个 $\tau_j \in \mathcal{T}$以及常数 λ_j，使得

$$R\tau = \tau + \sum_j \lambda_j \tau_j, \quad \text{with} \quad \deg_0(\tau_j) \geq \deg_0(\tau) \quad \text{and} \quad |\tau_j|_\Xi < |\tau|_\Xi. \tag{2.10}$$

- 有

$$(R \otimes \mathrm{id}) \Delta_i = \Delta_i R. \tag{2.11}$$

- 映射 R 与 D_Ξ 交换，即在 $\mathcal{T}_0$ 上有：

$$R D_\Xi = D_\Xi R. \tag{2.12}$$

交换性质 (2.12) 正是我们与文献中原始定义的不同之处。它旨在反映这样一个事实：将某棵树中的噪声 ξ 替换为其自身的无穷小扰动 $\delta\xi$ 后，它便不再那么奇异，因此无需进行重整化。准备映射 R 的一种自然选择见于 [8, 1]：

$$R_\ell^* \tau = \sum_{\sigma \in T_0^-} \frac{\ell(\sigma)}{S(\sigma)} \sigma \star \tau, \tag{2.13}$$

其中，T_0^-是 T_0 中次数为负的元素，次数由 $\deg_1$ 或 $\deg_2$，确定；结合乘积 $\star$ 与 Δ_i 的对偶有关，而 $\ell : T_0^- \to \mathbb{R}$提供重整化常数，其选取方式使得 R_ℓ 具有准备映射的各种性质。映射 R_ℓ 的对偶映射为 R_ℓ^*，它最初在 [8] 中作为提取-收缩过程引入，用于提取根处含有负次数的子树。我们对准备映射作出如下假设。

假设2 我们假设准备映射 R 满足

$$R\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_0 R, \tag{2.14}$$

其中，Q_0 将包含至少一个 *Mallivin*导数 Ξ 的树投影为零。

给定准备映射 R 后，可以按如下方式归纳定义相应的重整化模型 Π_x^i，其中 $i \in \{0, 1\}$：

$$\begin{aligned} \Pi_x^i \tau = \Pi_x^{i,\times} R\tau, \quad \Pi_x^{i,\times}(\sigma\tau) = (\Pi_x^{i,\times}\sigma) \times (\Pi_x^{i,\times}\tau), \\ (\Pi_x^{i,\times}\mathcal{I}_a(\tau))(y) = (\partial^a K * \Pi_x^i \tau)(y) \\ - \sum_{|k|_{\mathfrak{s}} < \deg_i(\mathcal{I}_a(\tau))} \frac{(y-x)^k}{k!} (\partial^{a+k} K * \Pi_x^i \tau)(x), \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中，K 现在是一个紧支撑函数，由所考虑的奇异随机偏微分方程相关的核得到，其种子为：

$$\begin{aligned} \Pi_x^i \Xi = \xi, \quad \Pi_x^0 \dot{\Xi} = \delta\xi, \quad \Pi_x^1 \dot{\Xi} = \delta\xi, \quad \Pi_x^2 \dot{\Xi} = \delta\xi - \delta\xi(x), \\ \Pi_x^i X^k = (\cdot - x)^k, \quad \Pi_x^{i,\times}\tau = \Pi_x^i \tau, \quad \text{for } \tau \in \{\Xi, \dot{\Xi}\} \cup \bar{T}. \end{aligned}$$

在继续之前，我们还需要几个定义。第一个是正则性结构文献中的以下经典对象。它通过归纳定义为

$$\begin{aligned} f_x^i(\mathbf{1}) = 1, \qquad f_x^i(X_j) = -x_j \text{ for } j \in \{0, \dots, d\}, \\ f_x^i(\mathcal{I}_a^{+,i}(\tau)) = -(\partial^a K * \Pi_x^i \tau)(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

可以使用余作用 Δ_i 和 f_x^i 定义模型 Π_x^i

$$\Pi_x^i = \Big(\mathbf{\Pi} \otimes f_x^i\Big)\Delta_i \tag{2.17}$$

其中映射 $\mathbf{\Pi}$ 是定义如下的预模型

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Pi}\tau = \mathbf{\Pi}^{\times} R\tau, \quad \mathbf{\Pi}^{\times}(\sigma\tau) = (\mathbf{\Pi}^{\times}\sigma) \times (\mathbf{\Pi}^{\times}\tau), \\ &(\mathbf{\Pi}^{\times}\mathcal{I}_a(\tau))(y) = (\partial^a K * \mathbf{\Pi}\tau)(y) \end{aligned} \tag{2.18}$$

可以注意到，该映射不依赖于次数映射 $\deg_i$，因为其定义中没有重新定心。下文还需要另一个映射，即由下式给出的重新展开映射 Γ_{xy}^i

$$\Gamma_{xy}^i = \Big(\mathrm{id} \otimes \gamma_{xy}^i\Big)\Delta_i,$$

其中 γ_{xy}^i 定义为

$$\gamma_{xy}^i = \Big(f_x \mathcal{A}_i^+ \otimes f_y\Big)\Delta_i^+,$$

其中$\mathcal{A}_i^+$：$\mathcal{T}^{+,i} \to \mathcal{T}^{+,i}$是霍普夫代数$\mathcal{T}^{+,i}$的反元，满足

$$\mathcal{M}^{+,i}\Big(\mathcal{A}_i^+ \otimes \mathrm{id}\Big)\Delta_i^+ = \mathcal{M}^{+,i}\Big(\mathrm{id} \otimes \mathcal{A}_i^+\Big)\Delta_i^+ = \mathbf{1}^*,$$

而$\mathcal{M}^{+,i}$：$\mathcal{T}^{+,i} \otimes \mathcal{T}^{+,i} \to \mathcal{T}^{+,i}$是$\mathcal{T}^{+,i}$中的乘法映射，$\mathbf{1}^*$：$\mathcal{T}^{+,i} \to \mathbf{R}$是余单位，在$\mathbf{1}$上的值非零且等于 1。反元$\mathcal{A}_i^+$还有如下递归定义，见 [14,引理 8.39]

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_i^+(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad \mathcal{A}_i^+(X_j) = -X_j, \quad \mathcal{A}_i^+(\sigma\tau) = \mathcal{A}_i^+(\sigma)\mathcal{A}_i^+(\tau), \\ &\mathcal{A}_i^+(\mathcal{I}_a^{+,i}(\tau)) = -\sum_{\ell \in \mathbf{N}^{d+1}} \mathcal{M}^{+,i}\left(\mathcal{I}_{a+\ell}^{+,i} \otimes \frac{X^\ell}{\ell!}\mathcal{A}_i^+\right)\Delta_i^+\tau. \end{aligned} \tag{2.19}$$

我们给出 Γ_{xy}^i 与 $\mathcal{I}_a$ 之间的交换公式：

$$\Gamma_{xy}^i(\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^i(y)) = (\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^i(x))\Gamma_{xy}^i \tag{2.20}$$

其中

$$\mathcal{J}_a^i(x)\tau = \sum_{|k|_{\mathfrak{s}} < \deg_i(\mathcal{I}_a\tau)} (\partial^{a+k} K * \Pi_x^i\tau)(x)\frac{X^k}{k!}. \tag{2.21}$$

公式 (2.20) 见 [12, 注 14.25]。它也与 Γ_{xy} 关于 $(\Pi_x\cdot)(y)$ 的递归公式有关，后者见 [8, 命题 3.13]。

最后，我们在 $\mathcal{T}_1$ 上定义两个映射如下：

$$\begin{aligned} &\hat{\Delta}_1 \bullet = \bullet \otimes \mathbf{1}, \quad \text{for } \bullet \in \{\mathbf{1}, X_j, \Xi, \dot{\Xi}\}, \\ &\hat{\Delta}_2 \bullet = \bullet \otimes \mathbf{1}, \quad \text{for } \bullet \in \{\mathbf{1}, X_j, \Xi\}, \quad \hat{\Delta}_2\dot{\Xi} = \dot{\Xi} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \dot{\Xi}, \\ &\hat{\Delta}_i\mathcal{I}_a(\tau) = (\mathcal{I}_a \otimes \mathrm{id})\hat{\Delta}_i\tau - \sum_{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) \le |\ell|_{\mathfrak{s}}} \frac{X^\ell}{\ell!} \otimes \mathcal{M}^{+,i}(\mathcal{I}_{a+\ell}^{+,i} \otimes \mathrm{id})\hat{\Delta}_i\tau, \end{aligned} \tag{2.22}$$

对于 $i \in \{1,2\}$ 以及 $j \in \{0,\dots,d\}$。这最初是在 [9, 命题 3.8] 中定义的。

有了这些记号，我们便可以定义本文的核心对象。第一个是 [9,定义 4.3]。

定义 2.5 对于 $\tau \in \mathcal{T}_0$,我们令

$$\mathrm{d}\Gamma^1_{yx}\tau = \mathcal{Q}_0\Big(\Gamma^1_{yx} \otimes f^1_x\Big)\hat{\Delta}_1 D_\Xi \tau, \tag{2.23}$$

其中$\mathcal{Q}_0$ 将所有包含噪声 Ξ的树投影为零,

$$\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\tau = \Big(\Gamma^2_{yx} \otimes f^2_x\Big)\hat{\Delta}_2 D_\Xi \tau. \tag{2.24}$$

我们可以对映射 $\mathrm{d}\Gamma^i$ 给出另一种解释，类似于 (2.17) 中给出的霍普夫代数表述。由 [9,命题 3.9], 可得

$$\hat{\Delta}_i = \Big(\mathrm{id} \otimes \hat{\Gamma}_i\Big)\Delta_i \tag{2.25}$$

其中

$$\begin{aligned} &\hat{\Gamma}_i X_j = 0, \quad \hat{\Gamma}_i \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \hat{\Gamma}_2 \dot{\Xi} = -\dot{\Xi}, \\ &\hat{\Gamma}_i\left(\sum_{\ell \in \mathbb{N}^{d+1}} \frac{X^\ell}{\ell!}\mathcal{I}^{+,i}_{a+\ell}(\tau)\right) = -\mathbf{1}_{\{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) \le 0\}}\mathcal{M}^{+,i}\Big(\mathcal{I}^{+,i}_a \otimes \mathrm{id}\Big)\hat{\Delta}_i\tau. \end{aligned} \tag{2.26}$$

然后，结合两个恒等式 (2.25) 和 (2.26)，可得

$$\hat{\Gamma}_i\left(\sum_{\ell \in \mathbf{N}^{d+1}} \frac{X^\ell}{\ell!}\mathcal{I}^{+,i}_{a+\ell}(\tau)\right) = -\mathbf{1}_{\{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) \le 0\}}\mathcal{M}^{+,i}\Big(\mathcal{I}^{+,i}_a \otimes \hat{\Gamma}_i\Big)\Delta_i\tau \tag{2.27}$$

其中，在上一个等式中，我们通过考虑 $\tilde{\mathcal{I}}^{+\,i}_a(\tau) := \sum_{\ell \in \mathbf{N}^{d+1}} \frac{X^\ell}{\ell!}\mathcal{I}^{+\,i}_{a+\ell}(\tau)$，在 Γ_i 的定义中进行了基变换。这与反元的递归公式 $\mathcal{A}^+_i$(2.19) 非常接近。因此，有

$$\mathrm{d}\Gamma^1_{yx}\tau = \mathcal{Q}_0\Big(\Gamma^1_{yx} \otimes f^1_x\hat{\Gamma}_1\Big)\Delta_1 D_\Xi\tau, \quad \mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\tau = \Big(\Gamma^2_{yx} \otimes f^2_x\hat{\Gamma}_2\Big)\Delta_2 D_\Xi\tau. \tag{2.28}$$

例 2.6 我们以广义 *KPZ* 方程中的一个简单装饰树 $I(\Xi)$ 为例，给出这两个表达式。其中

$$\hat{\Delta}_i\mathcal{I}(\dot{\Xi}) = (\mathcal{I} \otimes \mathrm{id})\hat{\Delta}_i\dot{\Xi} - \sum_{\deg_0(\mathcal{I}(\tau)) \le |\ell|_{\mathfrak{s}}} \frac{X^\ell}{\ell!} \otimes \mathcal{M}^{+,i}(\mathcal{I}^{+,i}_\ell \otimes \mathrm{id})\hat{\Delta}_i\dot{\Xi}.$$

接着，利用以下事实:

$$(\mathcal{I} \otimes \mathrm{id})\hat{\Delta}_i\dot{\Xi} = \mathcal{I}(\dot{\Xi}) \otimes \mathbf{1}, \quad (\mathcal{I}^{+,i} \otimes \mathrm{id})\hat{\Delta}_i\dot{\Xi} = \mathcal{I}^{+,i}(\dot{\Xi}) \otimes \mathbf{1},$$

and

$$\deg_0(\mathcal{I}(\dot{\Xi})) = \frac{1}{2} - \kappa, \quad \deg_1(\mathcal{I}(\dot{\Xi})) = 2 - \kappa, \quad \deg_2(\mathcal{I}(\dot{\Xi})) = 2 + \kappa$$

可得

$$\hat{\Delta}_1\mathcal{I}(\dot{\Xi}) = \mathcal{I}(\dot{\Xi}) \otimes \mathbf{1} - X_1 \otimes \mathcal{I}_{(0,1)}(\dot{\Xi})$$
$$\hat{\Delta}_2\mathcal{I}(\dot{\Xi}) = \mathcal{I}(\dot{\Xi}) \otimes \mathbf{1} - X_1 \otimes \mathcal{I}_{(0,1)}(\dot{\Xi}) - \frac{X_1^2}{2} \otimes \mathcal{I}_{(0,1)}(\dot{\Xi}) - X_0 \otimes \mathcal{I}_{(1,0)}(\dot{\Xi}).$$

接着，我们计算 $\Gamma^i_{yx}I(\dot{\Xi})$。有

$$\mathcal{I}(\Gamma^i_{yx}\dot{\Xi}) = \mathcal{I}(\dot{\Xi}).$$

由式 *(2.20)* 可得

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{yx}(\mathcal{I}(\dot{\Xi})) &= -\mathcal{J}^i(x)\dot{\Xi} + (\mathcal{I} + \mathcal{J}^i(y))\Gamma^i_{yx}\dot{\Xi} \\ &= \sum_{|k|_{\mathfrak{s}} < \deg_i(\mathcal{I}(\tau))} \Big((\partial^k K * \delta\xi)(y) - (\partial^k K * \delta\xi)(x)\Big)\frac{X^k}{k!} + \mathcal{I}(\dot{\Xi}).\end{aligned}$$

最后，可得

$$\mathrm{d}\Gamma^1_{yx}\mathcal{I}(\dot{\Xi}) = (\partial K * \delta\xi)(y)X + ((K * \delta\xi)(y) + (y - x)(\partial K * \delta\xi)(y))\mathbf{1}.$$

and

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\mathcal{I}(\dot{\Xi}) = (\partial^2 K * \delta\xi)(y)X_1^2 + (\partial_t K * \delta\xi)(y)X_0 \\ &+ ((\partial K * \delta\xi)(y) + (y_1 - x_1)(\partial^2 K * \delta\xi)(y))X_1 + ((K * \delta\xi)(y) \\ &+ (y_1 - x_1)(\partial K * \delta\xi)(y) + \frac{(y_1 - x_1)^2}{2}(\partial^2 K * \delta\xi)(y) + (y_0 - x_0)(\partial_t K * \delta\xi)(y))\mathbf{1}.\end{aligned}$$

3 重新定心映射的刻画

3.1 导数方法

本节中，我们证明关于 $\mathrm{d}\Gamma^1_{yx}$ 的定理3.2。更准确地说，我们将借助原文 [18], 中使用的一种刻画，说明 [9] 中引入的 $\mathrm{d}\Gamma$ 映射与原文中的映射相同。我们先从一个简单的引理开始。

引理3.1 我们有交换性质

$$\partial^n\Pi^{0,\times}_x = \Pi^{0,\times}_x\mathcal{D}_n. \tag{3.1}$$

证明。 对于基本树，该结论显而易见，因此我们省略证明。对于乘积形式为 $\sigma\tau$ 的树，根据莱布尼茨法则，我们有

$$\partial^n(\Pi^{0,\times}_x\sigma\tau)(y) = \partial^n\Big((\Pi^{0,\times}_x\sigma)(y) \times (\Pi^{0,\times}_x\tau)(y)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \partial^k (\Pi_x^{0,\times}\sigma)(y) \times \partial^{n-k}(\Pi_x^{0,\times}\tau)(y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Pi_x^{0,\times}\mathcal{D}_k\sigma)(y) \times (\Pi_x^{0,\times}\mathcal{D}_{n-k}\tau)(y) \\
&= (\Pi_x^{0,\times}\mathcal{D}_n(\sigma\tau))(y).
\end{aligned}
$$

对于形式为 $\mathcal{I}_a(\tau)$ 的树，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\partial^n(\Pi^{0,\times}\mathcal{I}_a\tau)(y) \\
&= (\partial^{a+n}K * \Pi_x^0\tau)(y) - \sum_{|k|_{\mathfrak{s}} \le \deg_0(\mathcal{I}_a(\tau))} \frac{(y-x)^{k-n}}{(k-n)!}(\partial^{a+k}K * \Pi_x^0\tau)(x), \\
&= (\partial^{a+n}K * \Pi_x^0\tau)(y) - \sum_{|k|_{\mathfrak{s}} \le \deg_0(\mathcal{I}_{a+n}(\tau))} \frac{(y-x)^{k}}{k!}(\partial^{a+k+n}K * \Pi_x^0\tau)(x), \\
&= (\Pi^{0,\times}\mathcal{I}_{a+n}\tau)(y) = (\Pi^{0,\times}\partial^n\mathcal{I}_a\tau)(y).
\end{aligned}
$$

我们在求和中使用了指标变换，并利用了 $\deg_0(\mathcal{I}_{a+n}(\tau)) = \deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) - |n|_{\mathfrak{s}}$ 这一事实。 □

现在我们可以转向本节的主要结果。

定理3.2 对于每个满足假设 *1* 的 $\tau \in T_0$，以及每个满足假设 *2* 的 R，都有 $|n|_{\mathfrak{s}} \le N$

$$
\partial^n\Big(\Pi_y^{0,\times}\mathrm{d}\Gamma_{yx}^1\tau - \delta\Pi_x^{0,\times}\tau\Big)(y) = 0, \tag{3.2}
$$

因此，对于 $\tau \in T_0$，有

$$
\partial^n\Big(\Pi_y^{0}\mathrm{d}\Gamma_{yx}^1\tau - \delta\Pi_x^{0}\tau\Big)(y) = 0. \tag{3.3}
$$

证明。为证明该结果，我们基本沿用 [9] 中定理 4.5 的证明思路。唯一非平凡的修改是证明形如$\mathcal{I}_a(\tau)$的树满足 (3.2)。事实上，只有在这一部分中，左边基点与求值点取为相同点这一事实才会起作用。我们回顾以下等式序列

$$
\begin{aligned}
\partial^n\Big(\Pi_y^{0,\times}\mathrm{d}\Gamma_{yx}^1\mathcal{I}_a\tau\Big)(y) &= \partial^n\Big(\Pi_y^{0,\times}\mathcal{Q}_0\Big(\Gamma_{yx}^1 \otimes f_x^1\Big)\hat{\Delta}_0\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau)\Big)(y) \\
&= \partial^n\Big(\Big(\Pi_y^{1,\times}\Gamma_{yx}^1\cdot\Big)(y) \otimes f_x^1\Big)\hat{\Delta}_1\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau) \\
&= \partial^n\Big(\Big(\Pi_x^{1,\times}\cdot\Big)(y) \otimes f_x^1\Big)\hat{\Delta}_1\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau) \\
&= \partial^n\Big(\Pi_x^{0,\times}\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau)\Big)(y) \\
&= \partial^n\Big(\delta\Pi^{0,\times}\mathcal{I}_a(\tau)\Big)(y),
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

关键在于恒等式

$$\partial^n(\Pi_y^{0,\times}\mathcal{Q}_0\Gamma_{yx}^1\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau))(y) = \partial^n(\Pi_y^{1,\times}\Gamma_{yx}^1\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau))(y).$$

这是因为，对于 $|n| \le N$,

$$\deg_1(\mathcal{I}_{a+n}(D_\Xi\tau')) > 0,$$

对于每个包含 τ 的根的 τ' τ 子树（见假设2），并利用引理3.1,

$$\begin{aligned}(\partial^n\Pi_y^{1,\times}\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau'))(y) &= (\Pi_y^{1,\times}\mathcal{D}_n\mathcal{I}_a(D_\Xi\tau'))(y)\\ &= (\Pi_y^{1,\times}\mathcal{I}_{a+n}(D_\Xi\tau'))(y)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(3.3) 的证明与 [9] 中的证明完全相同。 □

为了说明与 [18], 的联系，我们需要稍微调整框架，因为作者采用的是对偶性。他们使用一个对偶模型，定义如下:

$$\Pi_x^0(y) = \sum_\tau \frac{(\Pi_x^0\tau)(y)}{S(\tau)}\tau, \tag{3.5}$$

并且他们使用 $\mathrm{d}\Gamma^{1,\ *}_{yx}$，它是关于标量积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 的 $\mathrm{d}\Gamma^1_{yx}$ 的形式伴随算子。

命题3.3 对于 $|n|_{\mathfrak{s}} \le N$，我们有如下等价关系，

$$\partial^n(\delta\Pi_x^0 - \mathrm{d}\Gamma_{xy}^{1,*}\Pi_y^0)(y) = 0 \Leftrightarrow \forall\tau\in\mathcal{T}_0,\ \partial^n\Big(\delta\Pi_x^0\tau - \Pi_y^0\mathrm{d}\Gamma_{yx}^1\tau\Big)(y) = 0. \tag{3.6}$$

证明。 首先我们有

$$\begin{aligned}\langle\delta\Pi_x^0,\sigma\rangle &= \left\langle\sum_\tau\frac{\delta\Pi_x^0\tau}{S(\tau)}\tau,\sigma\right\rangle = \sum_\tau\frac{\delta\Pi_x^0\tau}{S(\tau)}\langle\tau,\sigma\rangle\\ &= \delta\Pi_x^0\sigma,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{d}\Gamma_{xy}^{1,*}\Pi_y^0,\sigma\rangle &= \left\langle\sum_\tau\frac{\Pi_y^0\tau}{S(\tau)}\mathrm{d}\Gamma_{xy}^{1,*}\tau,\sigma\right\rangle = \sum_\tau\frac{\Pi_y^0\tau}{S(\tau)}\langle\mathrm{d}\Gamma_{xy}^{1,*}\tau,\sigma\rangle\\ &= \sum_\tau\frac{\Pi_y^0\tau}{S(\tau)}\langle\tau,\mathrm{d}\Gamma_{xy}^1\sigma\rangle = \Pi_y^0\mathrm{d}\Gamma_{yx}^1\sigma.\end{aligned}$$

在两边取 ∂^n 即可得出结论。 □

这个命题正是我们所需要的，因为在 [6, 18], 中的应用 $\mathrm{d}\Gamma^{1,\ *}_{yx}$在多重指标上的刻画正是命题3.3的左侧。例子可见 [18, 第 5 节。4] ，或讲义 [6, 第 2 节。7]。注意，我们证明的恒等式是在树上成立的，但这并不构成问题，因为每个多重指标都可以写成树的线性组合。

3.2 递归定义

˜本节中，我们将证明，在 [15] 中使用的模型化分布 f_x^τ 可以写成一种与 [9], 中定义的映射 dΓ 相近的形式，即Γ^2 中定义的 d，也就是 2.5 中定义的映射。另请参见讲义 [4], 第 17 页中的定义。现在我们可以陈述本节的主要定理了。

定理 3.4 映射 $\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}$ 满足以下归纳关系。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\Xi = \dot{\Xi} + \delta\xi(y), \quad \mathrm{d}\Gamma^2_{yx}X^k = 0,\\
&\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}(\sigma\tau) = \mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\tau \times \Gamma^2_{yx}\sigma + \Gamma^2_{yx}\tau \times \mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\sigma,\\
&\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\mathcal{I}_a(\tau) = (\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^2(y))(\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\tau) - \Gamma^2_{xy}P_{\deg_0(\mathcal{I}_a\tau)}(\mathcal{J}_a^2(x)(\mathrm{d}\Gamma^2_{xx}\tau)).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

P_η 是投影到齐次度小于 η 的树上的典范投影。

ˆ · · ·证明。 我们先从初始化开始。我们有 $\Delta_2\Xi = \Xi\otimes\mathbf{1} - \mathbf{1}\otimes\Xi$，因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Gamma^2_{yx}\Xi &= \Gamma^2_{yx}\dot{\Xi} + \delta\xi(x)\mathbf{1}\\
&= \dot{\Xi} + (\delta\xi(y) - \delta\xi(x))\mathbf{1} + \delta\xi(x)\mathbf{1}\\
&= \dot{\Xi} + \delta\xi(y)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

X^k 上的恒等式显然成立，因为 $D_\Xi X^k = 0$。接下来讨论乘积恒等式。ˆ 首先注意，对于 $\tau\in T_0$， $\Delta_2\tau = \tau\otimes\mathbf{1}$。我们得到

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_2 D_\Xi(\sigma\tau) &= \hat{\Delta}_2(D_\Xi\sigma\times\tau + \sigma\times D_\Xi\tau)\\
&= \hat{\Delta}_2(D_\Xi\sigma)\times\hat{\Delta}_2\tau + \hat{\Delta}_2\sigma\times\hat{\Delta}_2 D_\Xi\tau\\
&= \hat{\Delta}_2(D_\Xi\sigma)\times(\tau\otimes\mathbf{1}) + (\sigma\otimes\mathbf{1})\times\hat{\Delta}_2 D_\Xi\tau.
\end{aligned}$$

由此我们得到所需结果。关于带根树的最后一个恒等式是最难彻底得到的。证明的核心是我们在下面回顾的公式 (2.20)

$$\Gamma^2_{yx}(\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^2(x)) = (\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^2(y))\Gamma^2_{yx}.$$

我们从以下开始

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma^2_{yx}\otimes f_x^2\right)\hat{\Delta}_2\mathcal{I}_a\tau &= (\Gamma^2_{yx}\mathcal{I}_a\otimes f_x^0)\hat{\Delta}_2\tau\\
&\quad - \sum_{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau))\le|\ell|_{\mathfrak{s}}} \Gamma^2_{yx}\frac{X^\ell}{\ell!}\otimes(f_x^2\mathcal{I}^{+,2}_{a+\ell}\otimes f_x^2)\hat{\Delta}_2\tau.
\end{aligned}$$

ˆ 我们用 Sweedler 记号表示 $\Delta_2\tau = \sum_{(\tau)}\tau_1\otimes\tau_2$。我们考察上述等式右侧的第一项。利用 (2.20)，得到：

$$(\Gamma^2_{yx}\mathcal{I}_a\otimes f_x^2)(\tau_1\otimes\tau_2) = \Gamma^2_{yx}\mathcal{I}_a\tau_1 f_x^2(\tau_2)$$

$$= \Big((\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^2(y))\Gamma_{yx}^2\tau_1 - \mathcal{J}_a^2(x)\tau_1\Big) f_x^2(\tau_2),$$

由此可得

$$(\Gamma_{yx}^2\mathcal{I}_a \otimes f_x^2)\hat{\Delta}_2 D_\Xi \tau = (\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^2(y))\mathrm{d}\Gamma_{yx}^2\tau - \Gamma_{yx}^2\mathcal{J}_a^2(x)\mathrm{d}\Gamma_{xx}^2.$$

回顾一下，$\mathrm{d}\Gamma_{xx}^2 = (\mathrm{id} \otimes f_x^2)\hat{}\Delta_2 D_\Xi$。另一项为

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{yx}^2 \sum_{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) \le |\ell|_{\mathfrak{s}}} \frac{X^\ell}{\ell!} \otimes (f_x^2\mathcal{I}_{a+\ell}^{+,2} \otimes f_x^2)(\tau_1 \otimes \tau_2) \\
&= \Gamma_{yx}^2 \sum_{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) \le |\ell|_{\mathfrak{s}}} (f_x^2(\mathcal{I}_{a+\ell}^{+,2}\tau_1) f_x^2(\tau_2)) \frac{X^\ell}{\ell!} \\
&= -\Gamma_{yx}^2 \sum_{\deg_0(\mathcal{I}_a(\tau)) \le |\ell|_{\mathfrak{s}}} (\partial^{a+\ell} K * \Pi_x^2\tau_1)(x) \frac{X^\ell}{\ell!} f_x^2(\tau_2).
\end{aligned}$$

综合以上各项，得到

$$\Big(\Gamma_{yx}^2 \otimes f_x^2\Big)\hat{\Delta}_2\mathcal{I}_a\tau = (\mathcal{I}_a + \mathcal{J}_a^2(y))\mathrm{d}\Gamma_{yx}^2\tau - \Gamma_{yx}^2 P_{\deg_0(\mathcal{I}_a\tau)}\mathcal{J}_a^2(x)\mathrm{d}\Gamma_{xx}^2.$$

□

现在回顾一下，定理 3.4 中给出的归纳定义正是用于定义˜模型化分布 f_x^τ 在 [15], 的定义，从而得以完成证明。

参考文献

[1] I. Bailleul, Y. Bruned. 奇异随机偏微分方程的局部性. 《概率年刊》**54**, no. 2, (2026), 768-795. doi:10.1214/25-AOP1778.[2] Y. Bruned, A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, 正则性结构中的随机偏微分方程重整化. 《欧洲数学会杂志》（JEMS）, **23**, no. 3, (2021), 869-947. doi:10.4171/JEMS/1025.[3] I. Bailleul, M. Hoshino. 正则性-可积性结构上的随机模型。arXiv:2310.10202.[4] I. Bailleul, M. Hoshino. 随机模型的重整化：综述。《随机偏微分方程：分析与计算》, (2025). doi:10.1007/s40072-025-00376-x.[5] Y. Bruned, M. Hairer, L. Zambotti. 正则性结构的代数重整化。《数学发明》**215**, no. 3, (2019), 1039–1156. doi:10.1007/s00222-018-0841-x.[6] L. Broux, F. Otto, M. Tempelmayr. 正则性结构中的 *Malliavin* 微积分讲义. 《随机偏微分方程：分析与计算》 doi:10.1007/s40072-025-00384-x..[7] N. N. Bogoliubow, O. S. Parasiuk. 关于场量子理论中因果函数的乘法。《数学学报》**97**, (1957), 227–266. doi:10.1007/BF02392399.[8] Y. Bruned. 正则性结构中的递归公式。《随机偏微分方程：分析与计算》**6**, no. 4, (2018), 525–564. doi:10.1007/s40072-018-0115-z.

[9] Y. Bruned, U. Nadeem. 正则性结构中基于树的模型收敛的无图方法. 日本数学会杂志, 76, no. 4, (2024), 1139-1169.doi:10.2969/jmsj/91129112.[10] A. Chandra, M. Hairer. 正则性结构的解析 BPHZ 定理. arXiv:1612.08138[11] P. Duch. 奇异随机偏微分方程的流方程方法 《概率与数理物理》6, no. 2, (2025), 327–437. T doi:10.2140/pmp.2025.6.327.[12] P. K. Friz, M. Hairer. 粗糙路径教程. 施普林格国际出版公司, 2020. doi:10.1007/978-3-030-41556-3.[13] R. S. Gvalani, M. Tempelmayr. 带热噪声的薄膜方程随机估计. arXiv:2309.15829.[14] M. Hairer. 正则性结构理论. 《数学发明》198, no. 2, (2014), 269–504. doi:10.1007/s00222-014-0505-4.[15] M. Hairer, R. Steele. 通过谱隙不等式证明正则性结构的 BPHZ 定理. 《数学分析档案》248, no. 9, (2024), 1–81. doi:10.1007/s00205-023-01946-w.[16] K. Hepp. 加法重整化与解析重整化的等价性. 《数学物理通讯》14, (1969), 67–69. doi:10.1007/BF01645456.[17] P. Linares, F. Otto, M. Tempelmayr. 通过泛包络代数构造拟线性方程的结构群. 《美国数学会通讯》3, (2023), 1-64. doi:10.1090/cams/16.[18] P. Linares, F. Otto, M. Tempelmayr, P. Tsatsoulis. 正则性结构中随机估计的无图方法. 《数学发明》237, (2024), 1469–1565.doi:10.1007/s00222-024-01275-z.[19] F. Otto, J. Sauer, S. Smith, H. Weber. 完整次临界区域中拟线性随机偏微分方程的先验界. 《欧洲数学会杂志》（JEMS）27, no. 1, (2025), 71–118.doi:10.4171/JEMS/1574.[20] J. Polchinski, 重整化与有效拉格朗日量. 《核物理 B》, 231, no. 2, (1984) 269–295. doi:10.1016/0550-3213(84)90287-6.[21] M. Tempelmayr. 正则性结构中的模型刻画：拟线性情形. 《概率论及相关领域》192, (2025), 373–429. doi:10.1007/s00440-024-01292-2.[22] W. Zimmermann. Bogoliubov 重整化方法在动量空间中的收敛. 《数学物理通讯》15, (1969), 208–234. doi:10.1007/BF01645676.