arXiv:2603.03262v1 [cs.LO] 3 Mar 2026

# 局部着色图的 Yeo 定理：线性逻辑中通向序列化的路径

RÉMI DI GUARDIA [a]、OLIVIER LAURENT [b]、LORENZO TORTORA DE FALCO [c] 和 LIONEL VAUX AUCLAIR [d]

[a]巴黎西岱大学、Inria、法国国家科学研究中心、IRIF，法国巴黎 F-75013电子邮箱：remi.di.guardia@ens-lyon.org

[b]法国国家科学研究中心、里昂高等师范学院、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、LIP、UMR 5668，法国里昂电子邮箱：olivier.laurent@ens-lyon.fr

[c]罗马第三大学，数学与物理系，意大利罗马；GNSAGA，国家高等数学研究所，意大利罗马电子邮箱：tortora@uniroma3.it

[d]艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，法国马赛电子邮箱：lionel.vaux@univ-amu.fr

摘要。我们重新考察线性逻辑证明网理论中与 Danos-Regnier 正确性判据相关的序列化证明。我们的方法基于 Yeo 定理在图上的推广，该推广以半边着色为基础。这恰好提供了适当的抽象层次，使我们能够在不修改证明网图结构的情况下，从证明网中提取序列性信息。因此，我们通过归纳方式，依靠一个分裂顶点，以不同方式从证明网恢复相继式演算推导；我们可以模块化地要求该顶点为 $\parr$-顶点、终端顶点、非公理顶点等。这一方法既适用于存在 $mix$规则的情形，也适用于无单位乘加线性逻辑的证明网（通过对 Yeo 定理作适当的进一步推广）。

我们的 Yeo 风格定理的证明依赖于一个关键引理，我们称之为尖点最小化。给定一种半边着色，路径中的尖点是指路径上相邻半边颜色相同的顶点。对于一个至少有一个尖点且满足适当假设的环，尖点最小化会构造出一个尖点严格更少的环。若不存在无尖点环，尖点最小化便足以确保存在一个分裂顶点，即 一个在其所属的任意环中都是尖点的顶点。我们的定理涵盖了若干图论结果，其中包括一些已知与 Yeo 定理等价的结果。其新颖之处在于，只需定义一种专门的着色，无须修改底图结构（顶点和边），便能以直接明了的方式推导出这些结果；而文献中的类似结果则需要更复杂的编码。

关键词：线性逻辑、证明网、序列化、图论、Yeo 定理。

* 本文是对 [DGLTdFVA25]，的修订和扩展版本，将结果推广至加法证明网，并采用了不同的组织方式。

预印本已提交至《计算机科学中的逻辑方法》

© R. Di Guardia, O. Laurent, L. Tortora de Falco, and L. VauxAuclair
知识共享

## 1. 引言

证明网是线性逻辑的一项重要贡献 [Gir87]。与通常将证明表示为相继式演算中的推导树不同，证明网将证明表示为满足某种正确性判据 [DR89], 的一般图，该判据要求不存在某种特定类型的环。证明网将相继式演算的推导视为在规则置换下等价 [HvG16]；由于这种典范性，在这一形式体系中，割消去等结果更容易证明。这一方法中的一个关键定理指出，每个证明网确实都是相继式演算中某个推导的图表示：恢复此类推导树的过程称为序列化。文献中可以找到这一结果的许多证明 [Gir87, DR89, Gir91, Gir96, Cur05 等], ，但序列化仍被认为不易证明。

过去 40 年间，人们提出了许多证明，更广泛地说，也提出了许多等价正确性判据。这些判据依据关联图中特定路径的存在或缺失（长行程、切换环、交替初等环） [Gir87、DR89、Ret03], ，重写过程是否成功（可收缩性、解析） [Dan90、Laf95、Gue99、dNM11], ，同调 [Mét94] 或拓扑 [Mel04] 性质等。它们描述的都是同一类有效图（即相继式演算推导的像），但所采用的性质陈述方式迥异，旨在刻画相应的结构。这些方法的多样性既反映了证明网这一概念在线性逻辑中的核心地位，也体现了设计正确性判据时动机的多样性：有些判据确保紧致的复杂度界（尤其是基于可收缩性的判据），有些则与其他领域建立联系（例如拓扑或图论），还有些则更容易推广到其他逻辑系统，等等。

另一方面，就证明网理论（合流性、规范化、约简策略等）的研究而言，这些方法大多在实践中几乎无法使用。这使得 Danos-Regnier 判据 [DR89] 具有特殊地位：不存在切换环可直接用于证明关于证明网的结果。例如，它禁止在割消去过程中出现公理-割环 [Gir95]；它保证乘法-指数线性逻辑中约简的合流性 [PTdF10]；它提供所谓闭割的存在性 [Lau20], ，而闭割在交互几何中起着关键作用 [Gir88]；它允许为乘法 [CVA21]乃至乘法-指数线性逻辑 [GMTdFVA24]定义割消去的并行过程；等等。这尤其意味着，基于该判据，可以在不再援引相继式演算的情况下发展证明网理论。因此，我们希望更好地理解这一精确判据及其与树推导的序列结构之间的联系，经由序列化。沿着先前将图论与证明网理论联系起来的工作路线 [Ret03, Ehr14, Ngu20], ，我们寻找图性质与证明网序列结构之间的直接联系：分裂顶点。事实上，从证明网中提取相继式演算推导的关键步骤，是将其归纳地分解为自身满足正确性条件的子图。

在图论中，同一图类通常有若干种（等价的）刻画，而归纳刻画可能使证明更简单——例如，余图 [CLSB81]、$k$-树 [BP71] ，或具有唯一完美匹配的图 [Kot59]。这种归纳刻画可能源于存在一个顶点或一条边，能够以一种“良好”的方式将图分开（例如 一条桥 [BJG08]）。Szeider [Sze04], 证明，五个能给出这类顶点或边的定理彼此等价，也就是说，它们可以

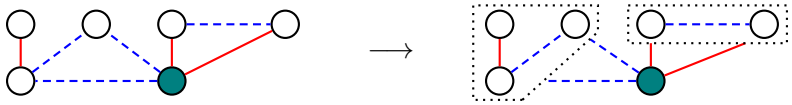


图 1：Yeo 定理的示例，其中有一个实心分裂顶点和点线连通分量

通过对所讨论的图进行编码而相互推导。在这五个定理中，既有彩色图上的 Yeo 定理 [Yeo97], 和关于唯一完美匹配的 Kotzig 定理 [Kot59], ，也有 Shoesmith 和 Smiley 关于转向顶点的定理 [SS79]——有趣的是，后者的方法与我们自己的工作有着惊人的相似之处，我们将在论文中更详细地讨论这一点（见第 4.2 节）。

在证明网方面，Rétoré 指出，完美匹配为证明网提供了一种替代表示法 [Ret03]：在这一背景下，他基于不同的分裂顶点概念，按照 Kotzig 定理的思路，重新得到了序列化证明 [Kot59]。˜值得注意的是，Nguyên 后来证明，Kotzig 定理实际上等价于带$mix$ [Ngu 20], 的无单位乘法证明网的序列化定理，同样是通过图编码得到的。

本文转而关注 Yeo 定理 [Yeo97] ，该定理针对边染色无向图。我们的目标是将 Yeo 风格的命题直接应用于证明网的边着色，从而证明证明网中分裂顶点的存在性（完全不改变图结构，即保留相同的顶点和边）。在边染色图中，若一个环上所有相邻的边颜色都不同，则称其为交替环。Yeo 定理指出，没有交替环的边染色图 $G$ 必有一个分裂顶点 $v$，即该顶点的删除 $G - v$ 不会使任何连通分量与 $v$ 通过多种颜色的边相连——见图 1（分裂顶点在文献中也称为割色顶点，或分隔颜色的割点）。这种分解可以继续进行，从而为没有交替环的图提供一种归纳表示。这一关于边染色图的重要结构性结果已在文献中得到广泛应用（例如参见书籍 [BJG08] ，或 [ADF+08、FLZ18]等论文）。

为了能直接应用于证明网，我们从两个方面推广 Yeo 定理。首先，我们考虑一种更一般的边着色概念，称为局部着色：它为每条边的每个端点关联一种颜色（这等同于给半边着色，但我们避免正式引入半边这一概念，以便沿用更基础的图论概念）。其次，我们引入一个参数（一组顶点-颜色对，即 一组带有颜色标记的顶点），借此更精确地控制得到的分裂顶点。

我们对这一新结果的证明是初等的，基于一个我们称为尖点最小化的关键引理，以及由局部着色所诱导的顶点-颜色对序的定义。形式上，局部着色图中路径上的尖点是指一对相邻边，且中间顶点所关联的颜色对于这两条边相同。顶点-颜色对上的序由特定的无尖点路径诱导。此外，给定一个含有尖点的环 $\omega$ ，以及该环中的一个非尖点顶点 $v$ $\omega$，并满足一些额外的技术条件，我们的尖点最小化结果（引理 2.5）可得出：要么存在一个无尖点环，要么存在另一个尖点数严格少于 $\omega$ 的环，但其中同样有 $v$ 作为非尖点顶点。在不存在无尖点环的局部着色图中，只需考察参数中的极大顶点-颜色对，即可轻松推出 Yeo 定理的推广。

尖点最小化也为 Yeo 定理的原始版本提供了一种证明，其简洁程度不逊于文献中已知的简短证明 [LN22, Nen14]。尽管推广到局部着色后得到的结论可证明与 Yeo 定理等价，但似乎很难将参数化版本化归为非参数化版本。我们还展示了如何利用 Yeo 定理在局部着色和参数化方面的推广，通过选择适当的着色，推导出 [Sze04] （以及 [GSR MSLVV22, 定理 2]）中讨论的各项陈述，同时不改变所考虑图的顶点集和边集。因此，只需修改尖点的定义，便可轻松地将尖点最小化改编为这些结果中任一结果的证明——这是我们唯一用到着色的地方。

回到线性逻辑和证明网理论，我们可以从 Yeo 定理的推广中推导出分裂顶点（按序列化的意义）的存在性，甚至还能以模块化的方式聚焦于某种特定的分裂顶点：任意分裂顶点、分裂乘法顶点（⅋ 或 ⊗）、分裂 ⅋ （即截面 [Dan90]）、终端分裂乘法顶点等。基于上述任一选择，都很容易推导出一个序列化过程。值得注意的是，这个序列化定理的证明可以直接应用于存在 $mix$ 规则的情形，而无 $mix$ 的情形也很容易推导出来。这意味着，我们对 Yeo 定理的变体，是对 [Sze04, a 提出的五个等价定理、 [GSRMSLVV22 定理 2] 以及序列化定理的一种表述严谨的形式。

我们的新图论结果甚至可以进一步推广，以容纳某些交替圈的存在；其证明技术性更强，但仍以尖点最小化引理为基础。尽管从图论角度看，对允许的环所设的条件并不常见，这一推广仍为 Hughes 和 van Glabbeek [HvG05], 的无单位乘法-加法证明网给出了一个分裂顶点，从而证明了在这一复杂得多的情形下可以进行序列化。与 [HvG05]中的做法不同，我们的方法足够稳健，还能通过终端顶点实现序列化。值得注意的是，图论与证明网理论之间的联系此前仅限于乘法证明网，如今也扩展到了加法联结词。

综上，我们为 Danos-Regnier 判据给出了一个直接而简单的序列化证明，且无需预先掌握图论。我们提出的线性逻辑序列化之路，始于尖点最小化，继而推广 Yeo 定理，最终提取出证明网的归纳分解。

**概要**。本文分为三个主要部分。
(1) 首先，我们讨论关于 Yeo 定理推广的纯图论部分。我们先回顾图、路径等常见概念，并给出局部着色的定义（第 2 节）。随后，我们通过尖点最小化引理陈述并证明 Yeo 定理的推广，即定理 3.6（第 3 节）。此外，我们还证明，Yeo 风格结果的无参数版本与原结果等价，并说明如何由此推出 Szeas 的其他四个等价定理，以及 Yeo 定理对 GSRMSLVV22 着色图的推广，定理 (第 4 节)——每个结果都可通过定义恰当的着色，以直接明了的方式得到。(2) 接下来是逻辑部分，其中定义了带有 $mix$ 规则的无单位元乘法线性逻辑，以及与之相关的证明网概念（第 5 节）。然后我们给出

这些证明网的序列化定理的若干种证明，运用我们对 Yeo 定理的推广（第 6 节）。在此过程中，我们更仔细地考察证明网的连通性概念：首先，我们引入几乎连通 证明网——这类证明网的特征是，每个 ⅋-顶点的前提之间都存在一条切换路径——并证明这一条件等价于它是连通证明网的不交并；换言之，一个证明网几乎连通，当且仅当它是某个证明的去序列化结果，且该证明的 $mix$ 规则全都位于树根处。其次，我们将我们的序与王国序进行比较 [BVdW95], ，后者是文献中不含 $mix$ 规则的证明网所采用的标准序（第 7 节）。

(3) 随后，我们将这一技巧扩展到包含加法联结词的情形，并沿用前两部分的思路。这里同样先讨论纯粹的图论部分，将 Yeo 定理进一步推广到存在某些交替环的情形（第 8 节）。接着是另一部分逻辑内容：首先定义带有$mix$ 规则的无单位乘法-加法线性逻辑，并给出与之相关的证明网概念（第 9 节）；然后利用 Yeo 定理的最新推广，为这些证明网给出若干序列化定理的证明（第 10 节）。

## 2. 图与尖点

**2.1. 部分无向图与路径。** 由于本文关注证明网和 Yeo 定理，我们研究有限无向部分多重图中的无向路径。这里简要回顾图论中的一些基本概念；更多详情请参阅 [AU08]。

（有限无向多重）**部分图** （不含环）是一个三元组 $(\mathcal{V},\ \mathcal{E},\ \psi)$，其中 $\mathcal{V}$（**顶点**）和 $\mathcal{E}$（**边**）是互不相交的有限集合，而 $\psi$ （**关联函数**）将每条边关联到一个至多含两个顶点的集合。若一条边 $e$的 $\psi(e)$ 基数为二，则称其为**全边** ；若一个**全图** 的所有边都是全边，则称其为**图**。许多概念都可以直接从全图推广到部分图，例如 同构，记作 $\simeq$。若一条边 $e$ 与顶点 $v$ 相**关联** ，即 $v \in \psi(e)$，则称 $v$ 是 $e$的一个**端点** 。

一条**路径** $p$ 是由顶点和边交替组成的非空有限序列，形式为 $(v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ v_2,\ \ldots,\ e_n,\ v_n)$，并且对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$e_i$ 的端点恰好是$v_{i-1}$ 和 $v_i$ （二者互不相同）。路径至少包含一个顶点，但可以不含边，此时路径退化为单个顶点 $(v_0)$，称为**空** 路径。沿用上述记法，$v_0$ 是 $p$的**源** ，$v_n$ 是其**目标** ，二者构成$p$的**端点** 。 $p$的**顶点** 以及 $p$的**边** ，指的是其中包含的顶点和边。由于同一顶点可能在一条路径中出现多次，我们可能需要讨论**路径中顶点的出现位置**，以区分这些相同的值。我们使用以下记法：

- 两个**路径的拼接** $p_1 = (v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k)$ 和 $p_2 = (v_k, e_{k+1}, \ldots, e_n, v_n)$ 是路径 $p_1 \cdot p_2 = (v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, \ldots, e_n, v_n)$；
- 路径 $p = (v_0,\ e_1,\ v_1,\ \ldots,\ e_k,\ v_k)$的**反向**是路径$p = (v_k,\ \bar{e}_k,\ v_{k-1},\ \ldots,\ e_1,\ v_0)$；
- 如果 $v$ 和 $u$ 是路径 $p$的两个顶点（或顶点的两个出现位置），且 $v$ 出现在 $u$之前，那么 $p_{(v,\ u)}$ 是 $p$ 中以 $v$ 为源、以 $u$为目标的唯一**子路径**（即是路径的子序列）。

如果一条路径的边两两不同，且其顶点除端点可能相同外也两两不同，则称其为**简单**路径。如果一条路径的端点相同，则称其为**闭路径**，否则称其为**开放**路径。**环**是非空的简单闭路径。不含环的图称为**无环**图。

**引理 2.1**（简单路径的连接）。 如果 $p_1$ 和 $p_2$ 是两条简单开路径，它们唯一的公共顶点分别是 $p_1$ 的目标和 $p_2$ 的源，并且可能还有 $p_2$ 的目标和 $p_1$ 的源；若 $p_1$ 的最后一条边不同于 $p_2$ 的第一条边，则 $p_1 \cdot p_2$ 是简单路径。

**引理 2.2**（不相交简单路径的拼接）。 若 $p_1$ 和 $p_2$ 是两条简单开放路径或空路径，且 $p_1$ 的目标顶点是 $p_2$ 的源顶点，并且这是它们唯一的公共顶点，则 $p_1 \cdot p_2$ 是简单的开放路径或空路径。

给定部分图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \psi)$， $G$ 的子图是部分图 $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}', \psi')$，满足 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$、$\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$，且 $\psi'$ 是在其定义域上对 $\psi$ 的限制，并且其值域中的集合为 $\mathcal{E}'$。换言之，对于 $e \in \mathcal{E}'$，有 $\psi'(e) = \psi(e) \cap \mathcal{V}'$。注意，子图 $G'$ 由 $\mathcal{V}'$ 和 $\mathcal{E}'$ 唯一确定。对于部分图 $G$ 的子图 $G_1$ 和 $G_2$，部分子图 $G_1 \cup G_2$（分别为 $G_1 \cap G_2$）的顶点和边分别是 $G_1$ 和 $G_2$的顶点和边的并集（分别为交集）。可以如下定义子图上的偏序 $\subseteq$：给定同一部分图的子图 $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1, \psi_1)$ 和 $G_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2, \psi_2)$，当且仅当 $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ 且 $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$（后两者是集合的包含关系）时，$G_1 \subseteq G_2$。换言之，若 $G_1$ 是 $G_2$的子图，则 $G_1 \subseteq G_2$。

在部分图中，连通性的定义并非显而易见，因为路径连接的是顶点。两个顶点 $v$ 和 $u$ 在存在一条端点为$v$ 和 $u$的路径时称为**连通**。如果两条边相等（这对于没有端点的边是必要的），或者它们分别关联于两个连通的顶点，则称这两条边**连通**。边 $e$ 与顶点 $v$ 在 $e$ 关联于一个与 $v$连通的顶点时**连通**。部分图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \psi)$ 非空，且对于任意一对 $(x, y) \in (\mathcal{V} \cup \mathcal{E})^2$，$x$ 与 $y$ 连通时，称其**连通**。**连通分支**是极大的连通子图。

2.2. 局部着色与尖点。设 $G$ 为一个部分图。$G$ 的局部着色由一个有限集合 $\mathsf{C}$（颜色集合）以及一个函数 $\mathsf{c}$ 给出，该函数将由一条边 $e$及其一个端点 $v$组成的每一对映射到一种颜色 $\mathsf{c}(e, v)$。直观地说，给定一条边 $e$ 及其一个端点 $v$，$\mathsf{c}(e, v)$就是按照 $v$赋予 $e$ 的颜色。局部着色也可以看作半边着色，即 $\mathsf{c}(e, v)$是 $e$ 靠近 $v$的那一半的颜色。因此，绘制部分图时，我们用着色表示 $e$ 接触 $v$的部分，从而表示 $\mathsf{c}(e, v)$；边的形状（实线、虚线等）也表示相应的颜色。若对每条边 $e$，$\mathsf{c}(e,_)$在 $e$的所有端点处取值相同，我们便得到将边映射到颜色的标准边着色概念。图2给出了一个局部着色偏图的示例，其中 $\mathsf{c}(e, v) =$ 实线，$\mathsf{c}(e, u) =$ 实线，$\mathsf{c}(f, u) =$ 实线，$\mathsf{c}(f, x) =$ 虚线，$\mathsf{c}(g, v) =$ 虚线，$\mathsf{c}(g, x) =$ 实线，且 $\mathsf{c}(h, v) =$ 点线。通常我们省略集合 $\mathsf{C}$，只定义着色函数 $\mathsf{c}$，但读者应注意，该函数不一定是满射。

颜色为 $\alpha$ 的 $v$ 尖点是一个三元组 $(e, v, f)$，其中 $e$ 和 $f$ 是两条不同的边，$v$ 是这两条边的共同端点，并且 $\mathsf{c}(e, v) = \alpha = \mathsf{c}(f, v)$（因此 $(f, v, e)$ 也是一个尖点）。在这种情况下，$v$ 称为尖点的顶点，$\alpha$ 称为尖点的颜色，而 $(v, \alpha)$ 称为尖点点。图2中的局部着色偏图有两个尖点，$(e, u, f)$ 和 $(f, u, e)$，它们的顶点都是 $u$，颜色均为实线，因此 $(u, \text{solid})$ 是这个部分图唯一的尖点点。

更一般地，我们将考虑**顶点-颜色对**，即由一个顶点和一种颜色构成的任意一对元素。尖点是顶点-颜色对的一种特例。请注意，一般来说，在固定一个局部着色偏图后，我们完全可以考虑图中未实现的顶点-颜色

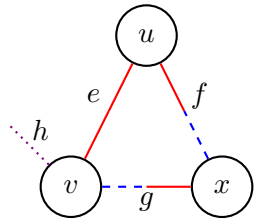



图2：局部着色偏图示例

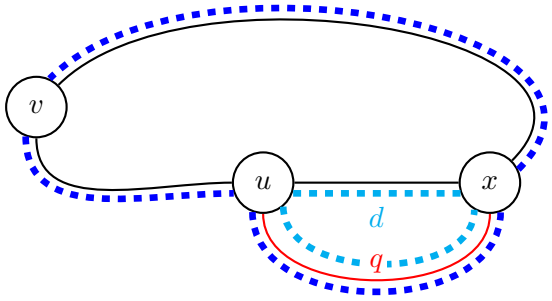



图 3：引理 2.5 的示意图

对 $(v,\ \alpha) \in \mathcal{V} \times \mathsf{C}$ — 即，不存在与 $v$ 相邻的边 $e$，且 $\alpha = \mathsf{c}(e,\ v)$。

路径 $p$ 的一个尖点，要么是由该路径的一个子序列 $(e, v, f)$ 形成的尖点——称为 $p$ 的内部尖点——要么在 $p$ 闭合时，是由其最后一条边$e_n$、其源（及目标） $v_0$ 和第一条边 $e_1$ 形成的尖点 $(e_n, v_0, e_1)$。注意，路径的反向与该路径包含相同数量的尖点。无尖点路径也称为交替路径，即不含尖点的路径。给定一条非空路径 $p$，其源为 $v_0$，第一条边为 $e_1$，其起始颜色为 $\mathsf{c}(e_1, v_0)$。类似地，若其目标为 $v_n$ 且最后一条边为 $e_n$，则 $p$ 的终止颜色为 $\mathsf{c}(e_n, v_n)$。注意，$p$ 的起始颜色（分别为终止颜色）是 $p$的终止颜色（分别为起始颜色）。例如，在图2所示的部分图中，路径 $(v, e, u, f, x)$ 在 $u$ 处有一个实线颜色的尖点，其起始颜色为实线，终止颜色为虚线。

**事实 2.3.** 设 $\omega$ 是一个源处没有尖点的环，$\alpha$ 是一种颜色。那么，$\alpha$ 不是 $\omega$ 的起始颜色，或者 $\alpha$ 不是 $\omega$ 的起始颜色。

我们将满足以下条件的顶点 $v$ 称为**分裂**顶点：任何包含它的环在 $v$ 处都有一个尖点。我们将在第 4.1 节中说明，这符合 Yeo 定理 [Yeo97] 结论中所涉及的概念。

**注 2.4.** “局部着色”这一概念是我们提出的，在文献中并不常见；“尖点”这个名称也是如此。若只通过尖点和分裂顶点的概念来使用它，那么不同顶点使用相同颜色并无影响。因此，我们可以为每个顶点使用不同的颜色集，也可以将所用颜色数限制在图的最大度数以内。等价地，对于每个顶点 $v$，局部着色就是关联于 $v$ 的边上的一个等价关系。我们保留局部着色这一概念，因为它是边着色的直接推广。

2.3. **尖点最小化**。证明我们的 Yeo 风格定理的关键在于表明，对于严格偏序 $\lhd$（定义 3.1）下的任意极大对 $(v, \alpha)$，$v$ 都是分裂的。这是以下结论的推论：

**引理 2.5**（尖点最小化）。固定一个具有局部着色的部分图 $G$。假设 $\omega$ 是一个从顶点 $v$ 出发的环，在 $v$ 处没有尖点，但包含顶点 $u$ 和颜色 $\alpha$ 所对应的尖点。假设存在一条简单开放无尖点路径 $q$，它从 $u$ 不以颜色 $\alpha$ 出发，并终止于 $\omega$ 上的一个顶点 $x$（且与 $\omega$ 除了 $u$ 和 $x$ 之外没有其他公共顶点）。

那么，要么存在一个以 $q$ 为子路径的无尖点环，要么存在一个源为 $v$、在 $v$ 处没有尖点且尖点数严格少于 $\omega$的环。

证明。 请参考图 3 了解记号。我们使用记号 $v_1$ 表示 $v$ 在 $\omega$源处的出现，并使用 $v_2$ 表示它在 $\omega$目标处的出现。将 $\beta$ 称为 $q$的终止颜色。

通过对称性（如有必要，考虑 $\omega$ 的反向），我们可以假设 $x$ 位于$\omega_{(u,v_2)}$ 中；如果 $x = v_2$，则 $\beta$ 不是 $\omega$的起始颜色。事实上，如果 $x \notin \omega_{(u,v_2)}$，我们将$\omega$反向。否则，若 $x = v_2$，我们对 $\omega$ 和 $\beta$ 应用事实 2.3，从而得到 $\omega$ 或 $\omega$ 符合我们的假设。

考虑环 $\omega' := \omega_{(v_1,u)} \cdot q \cdot \omega_{(x,v_2)}$ 和 $d := q \cdot \omega_{(x,u)}$（见图 3）。这两条路径确实都非空（因为 $q$ 非空）且简单（利用引理 2.1）。

现在来计算 $\omega$、$\omega'$ 和 $d$中的尖点数量。回想一下，$u$ 是颜色为 $\alpha$的 $\omega$ 的一个尖点，$q$ 无尖点且其起始颜色不是 $\alpha$，并且 $\omega'$ 在 $v$ 处没有尖点（根据上文的对称性论证）。因此，$\omega$中有 $n_1 + 1 + n_2 + b_x^\omega + n_3$ 个尖点，$\omega'$中有 $n_1 + b_x^{\omega'} + n_3$ 个尖点，$d$中有 $b_x^d + n_2$ 个尖点，其中：

- $n_1$（分别为 $n_2$、$n_3$）是 $\omega_{(v_1,u)}$（分别为 $\omega_{(u,x)}$、$\omega_{(x,v_2)}$）的尖点数量；

如果 $\omega$（分别为 $\omega'$、$d$）在 $x$ 处有尖点，则 $b_x^\omega$（分别为 $b_x^{\omega'}$、$b_x^d$）为 1，否则为 0。

如果 $\omega'$ 的尖点数量严格少于 $\omega$，我们就完成了；否则 $b_x^{\omega'} \geq 1 + n_2 + b_x^\omega$。因此，$n_2 = 0$、$b_x^\omega = 0$ 和 $b_x^{\omega'} = 1$。但后两者意味着 $b_x^d = 0$，所以 $d$ 是一个无尖点环，其中 $q$是其子路径。□

**注 2.6.** 引理 2.5 的证明显然是构造性的：必要时改变 $\omega$ 的定向，我们要找的环就是 $q \cdot \omega_{(x,u)}$ 和 $\omega_{(v_1,u)} \cdot q \cdot \omega_{(x,v_2)}$。

对于一个顶点 $v$，我们用 $\mathcal{M}_v$ 表示以下环集：

- 的源（和目标）为 $v$；
- 的最后一条边和第一条边在 $v$ 处不构成尖点；
- 在所有满足前两个条件的环中尖点数最少。注意，当且仅当 $v$ 是分裂时，集合 $\mathcal{M}_v$ 为空。

**推论 2.7**（尖点循环）。 固定一个带有局部着色的部分图 $G$、$G$ 的一个顶点 $v$，以及 $\omega \in \mathcal{M}_v$。假设 $\omega$ 包含一个颜色为 $\alpha$ 的尖点 $(f_1, \kappa, f_2)$，并且存在一条简单开放无尖点路径 $q$，从 $\kappa$ 出发，不具有颜色 $\alpha$，并终止于 $\omega$ 的一个顶点 $u$。那么存在一个无尖点环，在 $G$ 中包含 $\kappa$。

证明。 如有必要，取 $q$ 的一个前缀后，我们可以假设 $q$ 与 $\omega$ 除了其两个不同的端点 $\kappa$ 和 $u$ 外，不共享任何顶点。我们应用引理 2.5。由于 $\omega \in \mathcal{M}_v$，我们无法找到一个以 $v$ 为源、在 $v$ 处没有尖点且尖点严格少于 $\omega$ 的环。因此，我们有一个包含 $\kappa$ 的无尖点环。□

上述推论足以用于证明 Yeo 定理（见第 3 节）。下一个结果仅在进一步推广 Yeo 定理时有用；该推广允许存在一些无尖点环（见第 8 节）。

**推论 2.8** (尖点最小化 2)。 固定一个具有局部着色的部分图 $G$。假设$\omega$ 是一个从顶点 $v$出发的环，在 $v$处没有尖点，并且 $x$ 和 $y$ 是$\omega$的两个顶点，二者均不同于 $v$，其中 $x$ 出现在 $y$之前（或与之重合），且 $x$ 与 $y$ 之间至少有一个尖点（可能位于 $x$ 或 $y$处）。设 $\kappa$ 是一个顶点，使得存在一条从 $x$ 到 $\kappa$的路径 $\rho$、一条从 $y$ 到 $\kappa$ 的路径 $\chi$，以及一条端点为 $\kappa$ 和 $l$ 的边 $e$，满足：

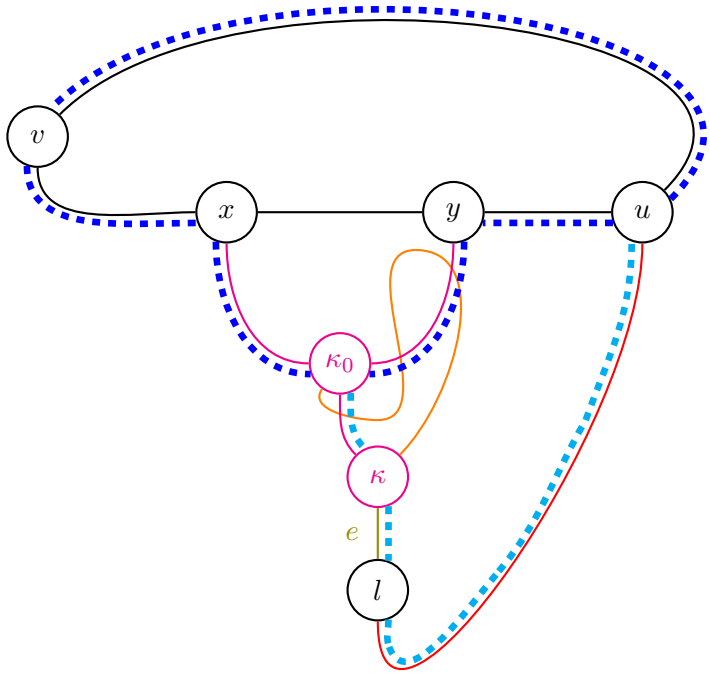



图 4：推论 2.8 的示意图

- $\rho \cdot (\kappa, e, l)$ 是一条简单无尖点路径，其起始颜色不是$\omega_{(v,\ x)}$的终止颜色；
- $\chi \cdot (\kappa, e, l)$ 是一个简单无尖点路径，其起始颜色不是 $\omega_{(y,v)}$ 的起始颜色；
- $\rho$ 或 $\chi$ 中可能属于 $\omega_{(y,v)} \cdot \omega_{(v,x)}$ 的唯一顶点是 $x$ 和 $y$ （当其中一条路径为空时，它们可能等于 $\kappa$）。

若存在一条简单开放无尖点路径 $(\kappa, e, l) \cdot p$，使得：

- 其目标 $u$ 属于 $\omega_{(y,v)} \cdot \omega_{(v,x)}$
- 两者 $\rho$ 和 $\chi$ 都与 $p$没有共同顶点

那么，要么存在一个包含 $e$ 的无尖点环，要么存在一个以 $v$ 为源、在 $v$ 处无尖点且尖点严格少于 $\omega$ 的环。

证明。 以图 4 作为记号的参考。必要时取 $p$ 的一个前缀，我们可以假设 $p$ 除其目标 $u$ 外不与 $\omega_{(y,v)} \cdot \omega_{(v,x)}$ 共享任何顶点（若 $l$ 在 $\omega_{(y,v)} \cdot \omega_{(v,x)}$ 中，则 $p$ 为空路径）。考虑 $\kappa_0$，即属于 $\chi$ 的 $\rho$ 的第一个顶点。我们有 $\rho = \rho_0 \cdot \rho_1$ 和 $\chi = \chi_0 \cdot \chi_1$，其中 $\kappa_0$ 是 $\rho_0$ 和 $\chi_0$的目标。我们考虑闭路径 $\omega' := \omega_{(v,x)} \cdot \rho_0 \cdot \chi_0 \cdot \underline{\omega}_{(y,v)}$，它以 $v$ 开始，且在 $v$处无尖点。该闭路径 $\omega'$ 是简单的，因为由引理 2.1 和 2.2，$(\omega_{(y,v)} \cdot \omega_{(v,x)}) \cdot (\rho_0 \cdot \chi_0)$是简单的，因此它是一个环。若 $\omega'$ 在 $\kappa_0$ 处无尖点，则 $\omega'$ 的尖点严格少于 $\omega$ （后者在 $x$ 与 $y$之间含有一个尖点）。否则 $\omega'$ 在 $\kappa_0$ 处含有一个尖点（且尖点数量至多与

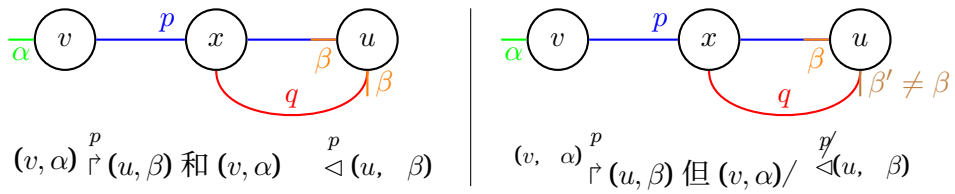



图5：关系 $\lhd$ （定义 3.1）的图示

$\omega$）。除其源外， $\chi_1$的任何顶点都不属于 $\omega'$，除其目标外， $p$的任何顶点也不属于。我们将引理 2.5 应用于 $\omega'$和 $q := \chi_1 \cdot (\kappa, e, l) \cdot p$。我们已经看到 $\omega'$满足引理 2.5 的假设。现在关于 $\chi_1 \cdot (\kappa, e, l) \cdot p$：由引理 2.2，它是一条简单路径，因为 $(\kappa, e, l) \cdot p$ 是简单的，且 $\chi$ 与 $p$没有公共顶点；它是无尖点的，因为 $(\kappa, e, l) \cdot p$ 和 $\chi \cdot (\kappa, e, l)$ 都是无尖点的。最后，由于 $\omega'$ 在 $\kappa_0$处有一个尖点，$\chi \cdot (\kappa, e, l)$ 是无尖点的，且 $\chi \cdot (\kappa, e, l)$ 的起始颜色不是 $\omega_{(y,v)}$的起始颜色，因此 $\chi_1 \cdot (\kappa, e, l) \cdot p$ 的起始颜色不可能是 $\omega'$中 $\kappa_0$ 处尖点的颜色。 □

## 3. Yeo 定理的推广

**3.1. 参数化局部 Yeo 定理。** 我们证明 Yeo 定理的一个版本 [Yeo97] （关于 Yeo 的原始陈述，见定理 4.2），它适用于局部着色偏图，并且进一步由顶点-颜色对集合的选取所参数化（须满足一个技术条件）：定理 3.6。该结果使我们能够在不含无尖点环的局部着色图中找到分裂顶点。我们首先固定一个带有局部着色 c 的部分图 $G$ 。

主要思想是沿着一条作为进展证据的路径，即一个严格偏序：当存在一条（适当的）从第一个顶点到第二个顶点的路径时，前一个顶点小于后一个顶点，并且我们将证明极大顶点是分裂的。由于该定理的假设涉及无尖点环，在此序 $\Rsh$中考虑无尖点路径是合理的。然而，有两个问题使得 $\Rsh$ 不能成为一个序。首先，两条无尖点路径的拼接可能并非无尖点。为使 $\Rsh$ 是传递的，我们对无尖点路径的起始颜色与终止颜色施加一个条件——这正是我们考虑顶点-颜色对而非仅仅顶点的原因。其次，没有理由认为这种“由无尖点路径相连”的关系 $\Rsh$ 不会形成回路。因此，我们在路径上增加一个条件，即无法沿该路径返回，从而由 $\Rsh$ 得到一个关系 $\lhd$ ，它将成为我们的严格偏序——见图5的图示。由此可得如下结论：

**定义 3.1.** 设 $v$ 和 $u$为顶点， $\alpha$ 和 $\beta$ 为颜色。

- 若 $p$ 是从 $v$到 $u$的一条简单开放无尖点路径，且其起始颜色不是 $\alpha$ ，终止颜色为 $\beta$，则记作 $(v, \alpha) \overset{p}{\Rsh} (u, \beta)$。只要存在这样的路径，我们就简记为 $(v, \alpha) \Rsh (u, \beta)$。
- 我们注意到，当 $(v, \alpha) \overset{p}{\Rsh} (u, \beta)$ ，且对于所有顶点 $x$、颜色 $\tau$和路径 $q$，只要满足 $(u, \beta) \Rsh (x, \tau)$ ， $x$ 就不属于 $p$，便有 $(v, \alpha) \overset{p}{\lhd} (u, \beta)$ 。只要存在某个 $p$ 使得 $(v, \alpha) \overset{p}{\lhd} (u, \beta)$ ，我们就简写为 $(v, \alpha) \lhd (u, \beta)$ 。

$p$ $p'$**注 3.2**。 如果（$v$， $\alpha$）↱（$u$， $\beta$），且 $p'$ 是 $p$ 的非空前缀，那么（$v$， $\alpha$）↱（$x$， $\tau$），其中 $x$ 是 $p'$ 的目标，而 $\tau$ 是其终止颜色。

**引理 3.3**。 设 $v$、 $u$和 $x$为顶点， $\alpha$、 $\beta$和 $\tau$为颜色， $p$和 $q$为路径。若 $(v,\alpha) \overset{p}{\lhd} (u,\beta)$ 且 $(u,\beta) \overset{q}{\Rsh} (x,\tau)$，则 $(v,\alpha) \overset{p\cdot q}{\Rsh} (x,\tau)$。

证明。 假设 $(v,\alpha) \overset{p}{\lhd} (u,\beta) \overset{q}{\Rsh} (x,\tau)$，并考虑路径 $p \cdot q$，其源为 $v$，目标为$x$。它的起始颜色不是 $\alpha$，终止颜色为 $\tau$。

若 $q$ 包含一个属于 $p$ 且不是 $u$的顶点，令 $q'$ 为 $q$ 的前缀，终止于首次出现此类顶点的位置 $x'$，且终止颜色为 $\tau'$。于是得到 $(u,\beta) \overset{q'}{\Rsh} (x',\tau')$（注 3.2），其中 $x' \in p$，这与 $(v,\alpha) \overset{p}{\lhd} (u,\beta)$ 矛盾。因此，我们可以使用引理 2.2 推得 $p \cdot q$是简单且开放的。最后， $p \cdot q$ 无尖点，因为它在 $u$ 处没有尖点；这是因为 $p$ 的终止颜色为 $\beta$，而这不是 $q$的起始颜色。 □

引理 *3.4*。 *</style}*关系 $\lhd$是顶点-颜色对上的严格偏序。

证明。 *</style}*关系 具有自反性：根据定义，不可能有 $(,\alpha) \Rsh (v,\beta)$。

现在假设 $(v,\alpha) \overset{p}{\lhd} (u,\beta) \overset{q}{\lhd} (x,\tau)$。我们得到 $(v,\alpha) \overset{p\cdot q}{\Rsh} (x,\tau)$，根据引理 3.3。要得到 $(v,\alpha) \lhd (x,\tau)$，只需证明：如果 $(x,\tau) \overset{\rho}{\Rsh} (y,\epsilon)$，则 $y$不会出现在 $p \cdot q$ 中。首先注意到， $y$不可能出现在 $q$ 中，因为 $(u,\beta) \overset{q}{\lhd} (x,\tau)$。此外，根据引理 3.3， $(u,\beta) \overset{q\cdot\rho}{\Rsh} (y,\epsilon)$，因此 $(v,\alpha) \overset{p}{\lhd} (u,\beta)$ 意味着 $y$也不会出现在 $p$ 中。 □

**命题 3.5**。 设 $v$ 是一个局部着色偏图中的非分裂顶点，且该图不含无尖点环。对于任意颜色 $\alpha$，都存在一个尖点 （$u$， $\beta$），使得 （$v$， $\alpha$） $\lhd$ （$u$， $\beta$）。

证明。 由于 $v$ 不是分裂顶点，我们有 $\mathcal{M}_v \neq \emptyset$。取某个 $\omega \in \mathcal{M}_v$，根据 $v$ 将其视为以起始颜色不为 $\alpha$ 的起始对象，这归功于事实 2.3（这是可能的，因为 $v$ 的元素中不存在尖点，并且 $\mathcal{M}_v$ 在反转操作下封闭）。由于 $\omega$ 不可能是无尖点的，它至少包含一个尖点：记 $u$ 为 $\omega$ 中第一个尖点的顶点，记 $\beta$ 为其颜色。我们有（$v$， $\alpha$） $\overset{\omega_{(v,u)}}{\Rsh}$ （$u$， $\beta$），根据推论 2.7，可得（$v$， $\alpha$） $\overset{\omega_{(v,u)}}{\lhd}$ （$u$， $\beta$）。 □

现在，我们只需应用命题 3.5，即可陈述并证明 Yeo 定理的推广。若对任意尖点 $(v,\alpha)$，要么 $(v,\alpha) \in P$，要么存在 $(u,\beta) \in P$，且满足 $(v,\alpha) \lhd (u,\beta)$，则顶点-颜色对集合 $P$ **支配尖点**。

**定理 3.6** (参数化局部 Yeo 定理)。 考虑一个带有局部着色的部分图 $G$，并设 $P$ 为支配尖点的顶点-颜色对集合。若 $G$ 不含无尖点环，则任意 $\lhd$-极大元 $P$ *(* 即 将 $\lhd$ 限制到 $P$ 后得到的极大元*)*的顶点都是分裂的。

证明。 设 $(v,\alpha)$ 是 $P$ 的一个元素。若 $v$ 不是分裂的，则根据命题 3.5，存在一个尖点 $(u,\beta)$，使得 $(v,\alpha) \lhd (u,\beta)$。根据关于 $P$ 的假设，要么 $(u,\beta) \in P$，要么我们可以找到 $(x,\tau) \in P$，且满足 $(u,\beta) \lhd (x,\tau)$。这意味着 $(v,\alpha)$ 不是 $P$ 中关于 $\lhd$ 的极大元。 □

注意，定理 3.6 的逆命题不成立：图 14 展示了一个具有分裂顶点的图，其中该顶点不属于任何极大顶点-颜色对。

3.2. **终结性**。 我们在此证明一个结果，该结果将适用于乘法线性逻辑和乘法-加法线性逻辑的证明网，从而确认序 $\lhd$ 中的极大顶点只能是终端。为避免重复证明，我们在此给出关于局部着色偏图的一个推广。

引理 *3.7.* 设 $G$ 是一个带有局部着色 $c$ 的部分图。考虑一条端点为 $v$ 和 $u$ 的边 $e$ 。假设 $(v, c(e, v))$ 不是尖点（即，所有以 $v$ 为端点的边 $f$ 都满足 $(f, v, e)$ 不是尖点）。那么，要么 $v$ 属于一个无尖点环，要么对于所有颜色 $\alpha \neq$ ，$c(e, v)$、$(v, \alpha)$、$(v,e,u) \lhd (u, c(e, u))$.

$(v,e,u)$ 证明。因为 $\alpha \neq c(e, v)$，所以有 $(v, \alpha) \Rsh (u, c(e, u))$。路径 $p(v, e, u)$ 的顶点只有 $v$ 和 $u$。如果存在 $p$ 和 $\beta$，使得 $(u, c(e, u)) \Rsh (v, \beta)$，那么 $(v, e, u) \cdot p$ 是一个包含 $v$ 的环（引理 2.1）；此外，由于 $(v, c(e, v))$ 不是尖点，因此该环无尖点。否则，$(v, \alpha)$ $(v,e,u) \lhd (u, c(e, u))$ 成立。

□

## 4. 我们广义Yeo定理与文献的比较

4.1. **局部着色与全局着色**。 首先注意，我们的参数化版本蕴含一个更简单的版本，与Yeo 定理更为接近。

**定理 4.1** (局部Yeo)。 设 $G$ 是一个至少有一个顶点的局部着色偏图。若 $G$ 不含无尖点环，则 $G$ 中存在一个分裂顶点。

证明。 若存在一个顶点不是任何边的端点，则该顶点是分裂顶点。否则， $G$ 的所有顶点-颜色对组成的集合 $P$ 是有限且非空的，因此按 $\lhd$ （引理 3.4）存在一个极大元 $(v, \alpha)$。顶点 $v$ 是分裂顶点（定理 3.6）。 □

例如，图2所示的部分图不含无尖点环，而 $u$ 是其唯一的分裂顶点。

现在，我们将其与Yeo 定理 [Yeo97] 中的术语衔接起来，并证明它是我们局部版本的直接推论。对于部分图 $G$ 及其一个顶点 $v$ ，部分图 $G \setminus v$ 是从 $G$ 的顶点中移除 $v$ 后得到的子图（边保持不变，但端点可能减少）。由此可对局部着色偏图中的分裂顶点作如下刻画：顶点 $v$ 是分裂顶点，当且仅当任意两条以 $v$ 为端点且在 $G \setminus v$ 中连通的边，在 $v$ 上具有相同的颜色。

接下来介绍全图的术语:

- 由于 $G \setminus v$ 通常会产生一个部分图，因此必须将其替换为作用于全图的运算 $G - v$。该运算不仅会移除 $v$ ，还会移除与之关联的所有边。将部分图上的连通性限制到全图上，就得到标准概念；一个（非空）全图是连通的，当且仅当它的所有顶点都是连通的。
- 标准的着色概念是**边着色**，它将边映射到颜色。对于边着色而言，**交替圈**是局部着色中同一概念的限制：一个环，其相邻边的颜色各不相同，包括最后一条边和第一条边。

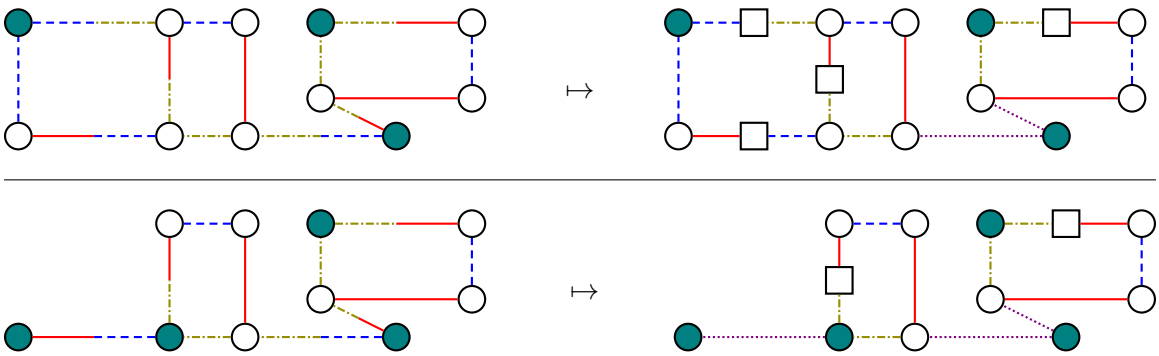


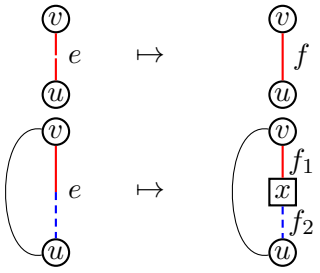
图 6：将局部着色编码为边着色的两个示例，其中填充的顶点是分裂顶点，方形顶点表示添加的顶点

**定理 4.2** (Yeo 定理)。 若 $G$ 是一个非空且不存在交替圈的边着色图，则存在一个顶点 $v$ 属于 $G$，使得 $G - v$ 的任何连通分支都不会通过多种颜色的边与 $v$ 相连。

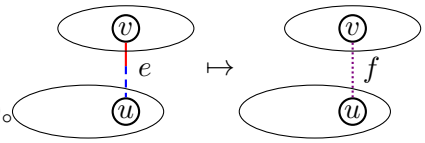
证明。令 c 为 $G$ 的边着色，我们定义局部着色 c′，使得对任意边$e$ 及其任意端点 $v$，c′($e$, $v$) := c($e$)。相对于 c′ 交替（或无尖点）的 $G$ 的环，恰好就是相对于 c 交替的环。由定理 4.1 可知，存在一个分裂顶点 $v$，使得对于 c′：在 $G \setminus v$ 中，任何两个以 $v$ 为端点且彼此连通的边，根据 c′(_, $v$) 着色都相同。也就是说， $G - v$ 的任何连通分支都不会通过不同颜色的边与 $v$ 相连。 □

乍看之下，定理 4.1 似乎比定理 4.2 更一般，但我们通过图编码从后者推导出前者。部分边在定理 4.1 中不起作用，因此我们只考虑全图。考虑一个带有局部着色 c 的图 $G$，我们将其关联到一个带有边着色 c 的图 $G$：

- $G$ 的所有顶点均视为 $G$ 的顶点（并将添加一些顶点）；
- 对于 $G$ 中端点为 $v$ 和 $u$ 的每条边 $e$，若 c($e$, $v$) = c($e$, $u$)，则在 $G$ 中关联一条边 $f$，其端点与 $e$ 相同，且 c($f$) = c($e$, $v$) = c($e$, $u$)；



- 对于 $G$ 中端点为 $v$ 和 $u$ 的每条边 $e$，若 c($e$, $v$) ≠ c($e$, $u$) 且 $e$ 属于一个环，则关联两条边 $f_1$ 和 $f_2$ 以及一个新顶点 $x$；$f_1$ 的端点为 $v$ 和 $x$，$f_2$ 的端点为 $x$ 和 $u$，且 c($f_1$) = c($e$, $v$) 并且 c($f_2$) = c($e$, $u$)；
- 对于 $G$ 中端点为 $v$ 和 $u$ 的每条边 $e$，若 c($e$, $v$) ≠ c($e$, $u$) 且 $e$ 不属于环（即 $e$是桥），则在 $G$ 中关联一条边 $f$，其端点与 $e$ 相同，并赋予任意颜色 c($f$)。



$G$ 的顶点数（分别地，边数）等于 $G$的顶点数（分别地，边数），再加上 $G$ 中至少包含在一个环内且满足 c($e$,_) 在 $e$ 的两个端点处取值不同的边数 $e$。

图 6 给出了这种编码的两个示例。这种编码的关键性质如下：

• 所得图中的交替/无尖点环 $G$ 对应于 $G$的无尖点环，尤其是 $G$ 不存在无尖点环当且仅当 $G$ 也不存在；
• 当且仅当对应的顶点在 $G$ 中是分裂顶点时， $G$ 中的一个顶点在 $G$ 中是分裂顶点；
• $G$ 中没有新增顶点是分裂顶点。
利用这些性质，可以很容易地从定理 4.2（应用于 $G$ 和 c）推出定理 4.1 对带有局部着色 c 的图 $G$ 成立。

**注 4.3**。 编码 $(_)$不是局部的，也就是说，它不具有子图稳定性。这是因为 $(_)$ 考虑了环的存在（或不存在），这是一个全局判据，取决于所考察边的端点邻域以外的信息。例如，考虑图 6 上半部分和下半部分中的局部着色图 $G$ 和 $G'$，以及它们各自的编码 $G$ 和 $G'$。注意，尽管 $G'$ 是 $G$的子图， $G'$ 却不是 $G$的子图：其中唯一的 实线-虚线 边 $G'$ 不属于任何环，而 $G$中的对应边则属于一个环。

一种具有子图稳定性的局部编码似乎很难找到。尤其是，有一种行不通的想法：在每条边（或每条「双色」边）的中间添加同一个「构件」图，从而复制每条边并相应地为它们着色——无论该构件只是一个顶点，还是一个更复杂的图。事实上，为了能够应用定理 4.2，所添加的构件不能包含任何无尖点环；而为了能在原图中找到分裂顶点，它也不能包含任何分裂顶点。根据定理 4.2 本身，这样的图不可能存在！

4.2. **Yeo 定理的变体**。众所周知，Yeo 定理等价于其他若干图论结果（即它们可以相互证明）。尤其是，Szeider [Sze04] 提出了四种这样的替代表述。其中一种是 Kotzig 定理，它已被证明等价于带有 $mix$ [Ngu20] 的无单位乘法证明网的序列化。我们还将考虑来自 [GSRMSLVV22] 的 Yeo 定理向 $H$-着色的推广。

在 [Sze04] 中给出了将图编码为图的非平凡编码，使得对某一编码应用一个定理便能证明初始图上的另一个定理。我们在此表明，定理 3.6 提供了一个自然的统一原理，统摄了所有这些结果（定理 4.2、4.4、4.5、4.7、4.8 和 4.11）。事实上，我们通过对图精心选取的局部着色应用定理 3.6，而不改变其结构（顶点与边），来证明这些结果中的每一个，从而给出某种“无编码”的证明。此外，这意味着我们对定理 3.6 通过尖点最小化的证明，只需调整尖点的定义，同时也是这些结果各自的证明。

图 $G$ 的**完美匹配**，或称 1-因子，是一个边集 $F$，使得每个顶点都恰有一条属于 $F$ 且与之关联的边。众所周知，图 $G$ 中的完美匹配 $F$ 是唯一的，当且仅当 $G$ 不包含 **$F$-交替圈**，即一个其边交替地属于和不属于 $F$的环，包括最后一条与第一条（它例如 是 [Ber57 定理 1] 的一个简单变体，该定理考虑 $F$-交错开路）。**桥** 是一条边，其删除会增加图的连通分量数目；等价地，它是一条不在任何环中的边。

**定理 4.4** （Kotzig [Kot59]）。 若一个（非空）图 $G$ 具有唯一完美匹配 $F$，则 $G$ 具有一条属于 $F$的桥。

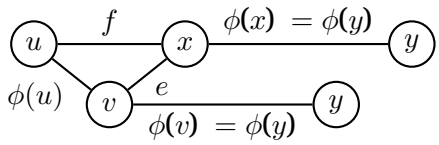



图 7：定理 4.5 不存在边着色

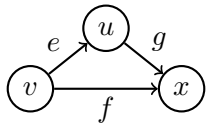



图 8：定理 4.8 不存在边着色

证明。只需将 $G$ 的边着色 c 定义为 $\{0,1\}$，使得当且仅当 $e \in F$时，c($e$) $= 1$。于是，$F$-交替圈恰好是无尖点环，因此根据定理 4.1（在此甚至定理 4.2 也足够），存在一个分裂顶点 $v$。与 $v$ 关联的 $F$ 的唯一一条边是一条桥，因为它是端点 $v$ 中唯一颜色为 1 的边。□

**定理 4.5** [Sey78]。考虑一个（非空）图 $G$ 以及一个从其顶点到其边的函数 $\phi$，满足对所有顶点 $v$，$\phi$（$v$）都与 $v$ 关联。若 $G$ 没有满足$\phi$（$v$）$\in \omega$ 的环 $\omega$（对每个 $v \in \omega$ 而言——这样的环称为 $\phi$-**共形**——），那么存在一个顶点 $u$，使得 $\phi$（$u$）是一条桥。

证明。在 $\{0,1\}$ 上定义局部着色：当且仅当 $e = \phi(v)$ 时，令 c($e$, $v$) $= 1$。在此局部着色下，$\phi$-共形环恰好是无尖点环，因此由定理 4.1 可得一个分裂顶点 $v$：$\phi(v)$ 是一条桥，因为它是端点 $v$ 处唯一颜色为 1 的边。□

**注 4.6**。注意，若不改变图的结构，边着色 c 无法证明定理 4.5：考虑图 7 所示的图。为使 $\phi$-共形环与无尖点环等价，例如，考虑环 $\omega$:=($u$, $f$, $x$, $e$, $v$, $\phi(u)$ $u$)，就需要 c($f$) $=$ c($e$)（观察 $x$），c($e$) $=$c($\phi(u)$)（观察 $v$），以及 c($\phi(u)$) $\neq$c($f$)（观察 $u$），从而 c($f$) $=$ c($e$) $=$ c($\phi(u)$) $\neq$ c($f$)，这显然荒谬。

**定理 4**。**7** [GH83]. 任意（非空）的双色边着色图都有一个分裂顶点或一个交替圈。

证明。这只是将定理 4.2 限定为两种颜色的特殊情形。□

下一个定理讨论无向图中的有向路径。有向图与第2.1节中定义的（全）图相同，不同之处在于，我们不再使用单个关联函数，而是用两个函数分别给出每条边 $e$的**源**s($e$)和**目标** t($e$)，并要求 s($e$) $\neq$ t($e$)。通过定义关联函数 $\psi$，并令 $\psi(e)$ $=$ {s($e$),t($e$)}（这始终是一个有序对），即可得到底图：顶点集和边集保持不变，只有关联的概念有所放宽。这里我们不讨论有向路径（我们将在第 5.2 节简要讨论）：有向图中的路径就是底图中的路径。有向性唯一的作用在于转向顶点的定义：环 $\omega$ 的顶点 $v$ 是一个**转向顶点** $\omega$，当且仅当在 $\omega$ 中与 $v$ 关联的两条边要么都以其为源 $v$，要么都以其为目标 $v$。

**定理 4.8**（Shoesmith 和 Smiley [SS79]）。如果有向图 $G$ 的一个非空顶点集 $S$ 包含 $G$ 的每个环上的一个转向顶点，那么 $S$ 中存在一个顶点，它是其所属每个环的转向顶点。

证明。遗忘图的定向后，我们希望得到一种局部着色，使其尖点恰好是 $S$中的转向顶点。通过设定 c($e$, $v$) $= 0$若 $v \in S$是 $e$的源，c($e$, $v$) $= 1$若 $v \in S$是 $e$的目标，以及 c($e$, $v$) $= e$否则，即可得到这样的着色。$S$ 中没有转向顶点的环恰好是无尖点环，因此定理 3.6

结合 $P := \{(v,\ \alpha) \mid v \in S,\ \alpha \in \{0,1\}\}$ 得到一个分裂顶点 $v \in S$。根据 c 的定义，$v$ 是其所属每个环的转向顶点。 □

我们需要结果的参数化版本，以便以简单的方式处理参数$S$。这里同样，仅有边着色 c 不足以在不改变图结构的情况下证明定理 4.8：请看图 8，其中所有顶点都属于 $S$。若要使没有转向顶点的环与无尖点环等价，就需要 $\mathsf{c}(f) = \mathsf{c}(g) \neq \mathsf{c}(e) = \mathsf{c}(f)$。

**注 4.9**。 Shoesmith 和 Smiley 陈述并证明了定理 4.8，以处理一类特殊的证明，这类证明表示为图 [SS78], ，与乘法线性逻辑的证明网有着惊人的相似之处（尤其是禁止某些类别的环）。[1] 此外，将定理 4.8 中的 $S$ 设为所有⅋-顶点的集合，即可直接用它在证明网中得到一个分裂 ⅋ 。而且，Shoesmith 和 Smiley 对该定理的证明与我们通过尖点最小化给出的证明颇为相似：两种证明的关键思路都是考察尖点（或转向顶点）数量最少的环。不过，两者仍有重要区别：我们在顶点-颜色对上构造了一个显式的序关系，而他们的证明则通过构造一条无限路径来导出矛盾；此外，在我们的参数中将颜色与顶点关联起来，使结果更具模块化。这一点对证明网尤其重要：定理 4.8 似乎只能用于给出一个分裂 ⅋，而不具备第 3.1 节中所见定理 3.6 的统一性。

定理 4.1 蕴含了 Yeo 定理的另一种推广，适用于 $H$-着色图 [GSRMSLVV22]。给定一个图 $H$，图 $G$ 的 $H$-**着色** 是指以 $H$的顶点为颜色，对 $G$ 进行边着色。 $H$-**环** 是 $G$ 中的一个环，其中连续边（包括最后一条边和第一条边）的颜色在 $H$中由一条边相连。当 $H$ 是完全图时，我们就得到标准的边着色，而 $H$-环则对应于交替圈。**完全多部** 图 $R$的顶点为 $S_1 \uplus \ldots \uplus S_k$（不交并），其中每个 $S_i$都是一个由顶点构成的独立集（ $R$ 中 $S_i$的顶点之间没有边）；若 $v \in S_i$ 和 $u \in S_j$（其中 $i \neq j$），则它们在 $R$中恰有一条边相连。

**定义 4.10**。 给定一个带有 $H$-着色 c 的图 $G$，以及 $G$的一个顶点 $v$，$G_v$ 是一个图，其顶点为 $G$ 中关联于 $v$的边；当且仅当它们的颜色 $\mathsf{c}(e)$ 和 $\mathsf{c}(f)$ 在 $H$中由一条边相连时，$e$ 与 $f$ 之间有一条边。

请注意，$G_v$ 仅取决于 $v$ 的邻域（与 $v$关联的边），以及由这些边的颜色所诱导的 $H$ 子图。

**定理 4**。**11** [GSRMSLVV22，定理 2]。 设 $H$ 是一个图，$G$ 是一个非空的$H$着色图。假设 $G$ 不含 $H$环，并且对于 $v$ 中每个顶点 $G$，$G_v$ 都是一个完全多部图。那么，$G$ 中存在一个顶点 $v$，使得 $G - v$ 的每个连通分支 $D$ 都满足：$G$ 中连接 $v$ 与 $D$ 中顶点的边集是 $G_v$中的一个独立集。

证明。 定义一个局部着色 c，使得 $\mathsf{c}(e,\ v)$ 是 $G_v$ 中包含 $e$ 的独立集。由于$G$ 不含 $H$环，因此它不含关于 c 的无尖点环，结论由定理 4.1 得出。 □

由于 $G_v$ 是完全多部图，因此可以将其顶点独立集视为对应于给定颜色，从而定义局部着色。局部着色似乎比

[1]在开展本论文相关研究时，我们尚未注意到这项工作；直到通过 Szeider 的等价结果 [Sze04]，我们才了解到它。据我们所知，在 [SS78]发表 48 年、 [Gir87], 发表 39 年后，第一条研究脉络一直被线性逻辑界忽视：进一步探究它与证明网之间的联系无疑很有意义。

$H$ 的某些诱导子图的完全多部结构更自然。请注意，定理 4.1、4.2 和 4.11 彼此等价。据我们所知，在本文的会议版本发表之前，还没有人知道该定理与 Yeo 定理等价。

定理 4.11 实际上是对 [GSRMSLVV22, 定理 2] 的略微改写，因为其作者要求 $H$ 的任意两个顶点之间至多有一条边，并且 $H$ 和 $G$ 没有孤立顶点。这些修改显然不会影响定理。

## 5. 乘法证明网

**5.1. 带 Mix 的无单位乘法线性逻辑**。我们聚焦于无单位元乘法线性逻辑，其公式定义如下：

$$A ::= X \mid X^{\perp} \mid A \otimes A \mid A \parr A$$

**对偶**算子（_）$^{\perp}$ 通过德摩根对偶扩展为所有公式上的一个对合：$(X^{\perp})^{\perp} = X$、$(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} \parr B^{\perp}$ 和 $(A \parr B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes B^{\perp}$。

事实上，我们将考虑**局部化公式**，它们是通过用来自某个固定无限可数集的唯一标签（即其**位置**）标记每个句法构造而得到的。形式上：

$$A ::= X_e \mid X_e^{\perp} \mid A \otimes_e A \mid A \parr_e A$$

其中标签 $e$ 是位置，并且我们要求同一公式中不得重复使用任何位置：每个局部化公式称为其底层（未加标签的）公式的一个**实例**。然后，我们将**相继式** 定义为局部化公式的集合，同样不重复标签。这为公式 $A$ 的**出现** 提供了清晰的概念（即 $A$的一个实例，它作为给定（局部化）公式的子公式出现——后者可能是某个相继式的元素），同时避免了对显式交换规则的需要。此外，这将使与证明网的对应更为直接：在这一点上，我们遵循先前的方法，例如， [HH16a]。为与更为传统的表述保持一致，我们通常将相继式 $\Gamma$ 表示为其元素的枚举，并且将位置保持为隐式：例如，我们可以写 $A^{\perp}, A$来表示由两个局部化公式组成的集合（其标签集不相交），且这两个公式的底层公式互为对偶；我们也可以写 $\Gamma, \Delta$ 来表示两个序列式的并（同样隐式要求它们的位置集不相交）。

我们考虑乘法线性逻辑中带有$mix$ 规则的开放推导演绎系统 $\mathrm{MLL}^{0,2}$ 假设。该系统由经典乘法线性逻辑的常见规则组成：

$$\frac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ (ax) \qquad \frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash A^{\perp}, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (cut) \qquad \frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Delta}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta}\ (\otimes) \qquad \frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \parr B, \Gamma}\ (\parr)$$

再加上两条$mix$ 规则，以及一条可引入任意单公式相继式的附加规则：

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (mix_2) \qquad \frac{}{\vdash}\ (mix_0) \qquad \frac{}{\vdash A}\ (hyp).$$

**(**假设**)**规则的作用是允许开放推导，其中一些公式不必得到证明。若 $\pi$ 是一个假设为 $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$、结论为 $\vdash B_1, \ldots, B_k$的推导，我们称 $\pi$**这是一个从** $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_k$得出的推导。请注意，我们将假设限制为单个公式，而非任意相继式：这样便可以定义用一个证明代换某个假设的概念，而该假设在证明结构中的对应项

始终保持正确性（见下文注5.2和引理 5.5）。若 $\pi_1$ 是 $\Sigma \vdash \Gamma, A$ 的推导，且 $\pi_2$ 是 $A, \Theta \vdash \Delta$ 的推导（并且假设 $\Sigma, \Gamma, \Theta, \Delta$中没有重复的位置），则将 $\pi_1$ 代换进 $\pi_2$ 所得的**代换** 是 $\Sigma$, $\Theta \vdash \Gamma, \Delta$的推导：它由 $\pi_2$ 得到，方法是将 $\vdash A$ 上的(假设)规则替换为 $\pi_1$ （这会将 $\Gamma$ 添加到 $\pi_2$ 中 $\vdash A$以下的所有相继式中）。

我们还考虑以下对推导的重写，称为**mix-Rétoré 归约** （由于它类似于 Rétoré 对指数联结词？ [Dan90（第 77], 页）所作的归约，其中收缩和弱化构成一个幺半群）：

$$\dfrac{\vdash \Gamma \quad \dfrac{}{\vdash}\,(mix_0)}{\vdash \Gamma}\,(mix_2) \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Gamma \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash}\,(mix_0) \qquad \vdash \Gamma}{\vdash \Gamma}\,(mix_2) \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Gamma$$

它在推导上定义了一个合流且强正规化的重写系统。

**引理5.1 (**Mix-Rétoré 范式**).** 若 $\pi$ 是一个从乘法线性逻辑$^{0,2}_{hyp}$ 出发且处于 ***mix-Rétoré*** 范式的推导，则它要么是$(\overline{mix}_0)\vdash$ ，要么不包含$(mix_0)$ 规则。

证明 . 注意，$(mix_2)$ 是唯一一个以空相继式作为前提的规则 se. □

5.2. **证明结构**。 证明结构是一个有向无环偏图，并为顶点和边赋予特定标记，同时满足我们将在下文详细说明的额外条件。

有向偏图的定义与第2.1节中定义的部分图相同，不同之处在于，我们使用两个部分函数 s 和 t，而不是单个关联函数；这两个函数分别给出每条边 $e$的源 s($e$) 和目标 t($e$)。定义关联函数 $\psi$ 如下，即可得到其底层部分图： $\psi(e)$ 是一个至多包含两个顶点的集合，其中包括 s($e$)（若其有定义）以及 t($e$)（若其有定义）。这个定义将我们在第4.2节中使用的定义推广到了部分图的情形：顶点集和边集保持不变，只有关联的概念有所放宽。有向偏图中的路径，就是其底层部分图中的路径。当路径 ($v_0$， $e_1$， $v_1$， $e_2$， $v_2$，……， $e_n$， $v_n$) 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都满足 s($e_i$) $= v_{i-1}$ 和 t($e_i$) $= v_i$ 时，称其为有向路径。无环有向偏图是指不含任何有向环的有向偏图。

在证明结构中，顶点以规则名称标记：$ax$、$cut$、 $\otimes$或 $\parr$，随后根据其标记命名：$ax$-**顶点**、$cut$-**顶点**、 $\otimes$-**顶点** 和 $\parr$-**顶点**。证明结构的**前提** （分别地，**结论**）是指任意没有源（分别地，没有目标）的边；顶点的**前提**（分别地，**结论**）是指目标（分别地，源）为该顶点的任意边。此外，关联关系还须满足以下约束：

- 每个$ax$-顶点有两个结论（且没有前提）；
- 每个$cut$-顶点有两个前提（且没有结论）；
- 每个 $\otimes$-顶点和每个 $\parr$-顶点都有两个前提和一个结论。

根据定义可直接得出，对于证明结构中的每一对边（$e, f$），从 t($e$) 到 s($f$) 至多存在一条有向路径。**初始边** 是证明结构的一个前提，或是某个$ax$-顶点的一个结论（即 其源（若存在）不是另一条边的目标）。**终端顶点** 是指其结论也属于证明结构的结论的顶点（即 不是其他顶点的前提）。$cut$-顶点始终是终端顶点。

此外，边上还标记有局部化公式：边的标记称为其**类型**。定型须满足以下局部约束（如图9所示）：

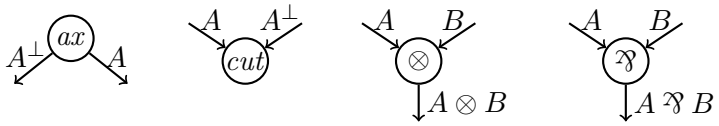



图9：证明结构中的类型约束

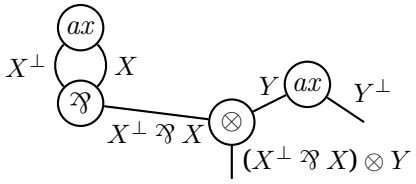



图10：证明结构示例

- $ax$-顶点的结论（分别地，$cut$-顶点的前提）必须具有对偶类型；
- 一个 $\otimes$-顶点（分别为 $\parr$-顶点）的结论必须具有类型 $A \otimes B$（分别为 $A \parr B$），其中 $A$ 和 $B$ 是其前提的类型；

以及对标签的以下全局约束：

- 初始边的位置集合两两不相交。

证明结构的**结论序列**（分别为**前提序列**）是其结论（分别为前提）的类型集合——实际上，由于类型约束以及我们先前关于有向路径的观察，其中没有位置重复。若证明结构没有前提，则称其为**封闭的** 。证明结构的一个**连通分支** 是由底层部分图的一个连通分支所诱导的证明结构。

在对证明结构的讨论中，有向性除了使前述定义得以成立之外，并无其他作用：从现在起，每当我们提到证明结构中的路径，都应将其理解为底层部分图中的路径。此外，在描绘证明结构时，我们通常不显式标出边的方向，而是将边从上到下绘制。图10给出了一个封闭证明结构的示例，其结论序列为 $(X^\perp \parr X) \otimes Y$，$Y^\perp$。

**注5.2**。 定义证明结构有许多种方式。在文献中，通常只考虑闭合证明结构：对于本文讨论的带类型的乘法情形，很容易验证，（闭合）证明结构的概念与文献中的其他定义基本等价（例如 [Gir87]），或者仅在与序列化无关之处有所不同——例如，有些定义（例如 [Ngu20]）并未预先规定边的定型先验。开放证明结构有时也称为模组 [DR89]。这里我们避免使用这个名称，因为模组通常意味着通过某种形式的垂直复合组装而成，即将一个模组的结论与另一个模组的前提一一对应；一般来说，这可能会引入环，而我们只考虑一种简单得多的操作，它模拟将一个证明代换到一个假设中，其做法是沿单条边粘合两个证明结构（见引理 5.5）。

为了识别对应于证明的证明结构，并区分$\otimes$-顶点与 $\parr$-顶点，通常要求证明结构满足正确性判据。如引言所述，我们采用 Danos 与 Regnier [DR89] 所给出的判据。证明结构中的一条路径被称为**切换** ，当它不包含两个前提，且这两个前提属于任意

⅋-顶点。一个证明结构若没有切换环，则是**DR-正确**的，并称为**证明网**。

**备注 5.3**。 Danos-Regnier 正确性判据 [DR89] 中无环条件的原始定义（在 [FR94] 中扩展到 $(mix_2)$）实际上略有不同。该定义考察**正确性图**：通过断开每个 ⅋-顶点的两个前提之一（将其目标设为未定义）得到的部分图。当所有 $2^n$ 正确性图（其中 $n$ 是 $\rho$ 中 ⅋-顶点的数量）都是无环的（在不含 $mix$ 规则的原始工作中还要求连通）时，证明结构就是正确的。这个条件等价于：证明结构中的任意环都必须包含某个 ⅋-顶点的两个前提（也就是说，按照 [FR94] 的含义，没有环是可行的）。这也等价于一个表面上更弱的条件：证明结构中的任意环都必须连续地经过某个 ⅋-顶点的两个前提：

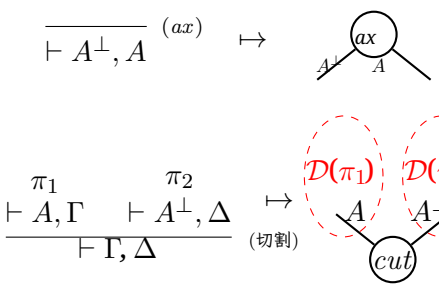
**引理 5.4** (局部-整体原理)。 若一条简单路径从不连续经过某个 ⅋-顶点的两个前提（对于环而言，也包括作为首边和末边的情形），则它是一条切换路径。

证明。 若某个 ⅋-顶点 $v$ 的两个前提 $e_1$ 和 $e_2$ 出现在一条简单路径 $p$ 中，则：要么 $v$ 在 $p$ 中恰好出现一次，并且 $e_1$ 和 $e_2$ 必须分别紧接在 $v$ 之前和 $v$ 之后，出现在 $p$ 中；要么 $p$ 是一个环，而 $e_1$ 和 $e_2$ 分别是它的首边和末边。 □

给定某个 DR-正确证明结构 $\rho$，其**DR 连通度** $d(\rho)$ 等于其任意一个正确性图的连通分量数，如备注 5.3 中所定义。注意，由于无环性， $d(\rho)$ 不依赖于正确性图的选择。若 $d(\rho) = 1$，我们称 $\rho$ 为**连通**（特别地，它非空）：注意，这意味着 $\rho$ 由单个连通分量构成，但反过来并不成立（例如，由一个 ⅋-顶点及其前提和结论构成的证明网，其 DR 连通度为 2）。

5.3. **去序列化**。 我们通过对推导 $\pi$ 归纳，定义 $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k$ 的**去序列化** $\mathcal{D}(\pi)$。它是一个 DR-正确证明结构，假设的标记为 $A_1, \dots A_n$，结论的标记为 $B_1, \dots, B_k$（我们也称“$\mathcal{D}(\pi)$ 是一个定义在假设为 $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k$ 的相继式上的 DR-正确证明结构”）。

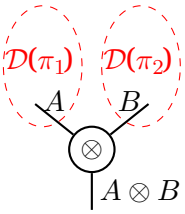
- 若 $\pi$ 化简为一个以 $\vdash A^\perp, A$ 为结论的 $(ax)$ 规则，则 $\mathcal{D}(\pi)$ 是一个含有一个 $ax$-顶点 $v$ 的证明结构，并有两个结论，其标记分别为 $A^\perp$ 和 $A$，二者的源都是 $v$。




- 若 $\pi$ 的最后一条规则是应用于两个推导 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的（$cut$）规则，则 $\mathcal{D}$（$\pi$）由 $\mathcal{D}$（$\pi_1$）与$\mathcal{D}$（$\pi_2$）的不交并添加一个新的$cut$-顶点 $v$而得到。$\mathcal{D}$（$\pi_1$）与 $\mathcal{D}$（$\pi_2$）中由（$cut$）规则的主公式 $A$ 与 $A^\perp$ 所标记的结论现在以 $v$ 为目标。

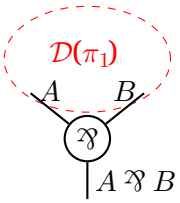
- 若 $\pi$ 的最后一条规则是应用于两个推导 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的（$\otimes$）规则，则 $\mathcal{D}(\pi)$ 由 $\mathcal{D}(\pi_1)$ 与 $\mathcal{D}(\pi_2)$ 的不交并添加一个新的 $\otimes$-顶点 $v$而得到。$\mathcal{D}(\pi_1)$ 与 $\mathcal{D}(\pi_2)$ 中由（$\otimes$）规则的主公式 $A$ 与 $B$ 所标记的结论现在以 $v$为目标，并且我们添加一条新的结论边，标记为 $A \otimes B$，其源为 $v$。

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash A, \Gamma} \qquad \overset{\pi_2}{\vdash B, \Delta}}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta}\ (\otimes) \quad \mapsto$$



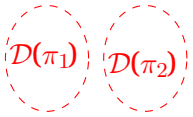

- 如果 $\pi$ 的最后一条规则是应用于推导 $\pi_1$ 的 ($\parr$) 规则，那么通过添加一个新的 $\parr$- 顶点 $v$，即可从 $\mathcal{D}(\pi_1)$ 得到 $\mathcal{D}(\pi)$。 $\mathcal{D}(\pi_1)$ 中由 ($\parr$) 规则的主公式 $A$ 和 $B$ 标记的结论现在将 $v$ 作为附加端点；我们再添加一条标记为 $A \parr B$、源为 $v$ 的新边。

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash A, B, \Gamma}}{\vdash A \parr B, \Gamma}\ (\parr) \quad \mapsto$$




- 若 $\pi$ 的最后一条规则是应用于两个推导 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 上的（$mix_2$）规则，那么 $\mathcal{D}(\pi)$就是 $\mathcal{D}(\pi_1)$与 $\mathcal{D}(\pi_2)$的不交并。

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Gamma} \qquad \overset{\pi_2}{\vdash \Delta}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (mix_2) \quad \mapsto$$




- 如果将 $\pi$ 简化为一条（$mix_0$）规则，那么 $\mathcal{D}(\pi)$就是空图（没有顶点，也没有边）。

$$\dfrac{}{\vdash}\ (mix_0) \quad \mapsto$$

- 如果将 $\pi$ 简化为作用于 $\vdash A$上的一条（假设）规则，那么 $\mathcal{D}(\pi)$是没有顶点的证明结构以及一条没有端点、带有标记的边 $A$.

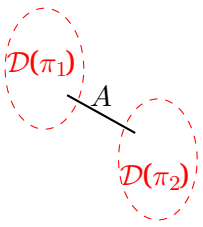
$$\dfrac{}{\vdash A}\ (\text{假设}) \quad \mapsto$$




$\pi$的（$ax$）、（$cut$）、（$\otimes$）和（$\parr$）规则与 $\mathcal{D}(\pi)$的顶点之间存在一个双射； $\pi$ 的公式（更准确地说，是 $\pi$ 中所有相继式的并集）与 $\mathcal{D}(\pi)$的边之间存在一个双射。

根据定义，证明的去序列化确实是一个证明网，这一点应当是清楚的。下面两个结果也可直接得到。

**引理 5.5**（代换的去序列化）。 如果 $\pi$ 是在推导 $\pi_2$ 中用推导 $\pi_1$ 代换假设 $A$，那么 $\mathcal{D}(\pi)$ 由 $\mathcal{D}(\pi_1)$ 与 $\mathcal{D}(\pi_2)$ 的不交并得到：将标记为 $A$ 的 $e$ 结论（来自 $\mathcal{D}(\pi_1)$）与标记为 $A$ 的 $e'$ 假设（来自 $\mathcal{D}(\pi_2)$）识别。所得的边标记为 $A$，源s（$e$）为 $e$，目标t（$e'$）为 $e'$。




**引理 5.6** (去序列化与 *mix*-规则). 若 $\pi_2$ 是由 $\pi_1$ 经过 *mix-Rétoré* 归约得到的，则 $\mathcal{D}(\pi_1) \simeq \mathcal{D}(\pi_2)$。此外，对于任意证明 $\pi$， $d(\mathcal{D}(\pi)) = 1 + \#mix_2 - \#mix_0$（其中$\#mix_i$是 $\pi$ 中 *(mix$_i$)* 规则的数量）。特别地，不含 *mix* 的证明具有连通去序列化。

## 6. 序列化

证明网理论的一个关键结果是，去序列化是满射，具体如下：

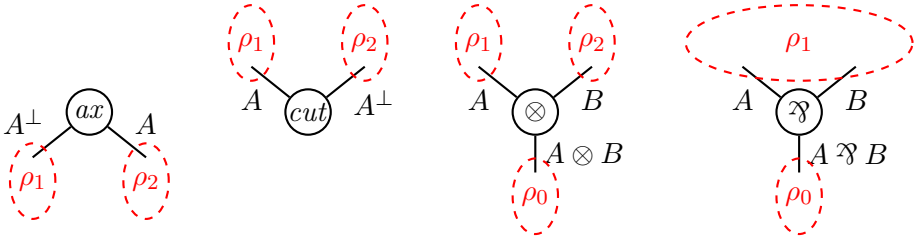



图 11：每类分裂顶点的连通分支形状

**定理 6.1** (序列化)。 给定一个证明网 $\rho$，存在一个乘法线性逻辑$^{0,2}_{hyp}$中的推导 $\pi$，使得 $\rho \simeq \mathcal{D}(\pi)$； $\pi$ 称为 $\rho$ 的**序列化** 。

事实上，这一结果有许多变体，取决于我们是否考虑例如无切证明网（从而得到无切证明），或者是否将范围限制在闭证明网（从而序列化为闭证明），又或者是否要求连通性（从而去掉$mix$规则）。关于这一主题的文献相当丰富；早期的一些研究方法可参见 [Gir87、DR89、Dan90、FR94] 。本节旨在说明，如何以统一且模块化的方式，从 Yeo 定理的参数化局部版本（定理 3.6），甚至直接从尖点最小化（以推论 2.7 的形式），推导出这类序列化结果。

6.1. **分裂顶点**。大多数（甚至可能是全部）序列化证明都遵循一个共同模式：对证明结构的规模作归纳推理，并证明给定一个证明网 $\rho$：要么 $\rho$ 显然是某个证明的翻译（例如，它为空、缩减为一条边，或缩减为一个带有两个结论的$ax$顶点）；要么 $\rho$ 可以分裂成更小的证明结构，且它们仍然都是 DR-正确的，使得通过拼接这些较小证明网的序列化结果，可以得到 $\rho$ 的序列化结果。从本质上说，这相当于证明每个证明网都属于第 5.3 节去序列化定义中的七种情况之一，但有以下区别：在 $\mathcal{D}(\pi)$ 的归纳定义中，新顶点总是以终端位置引入；而有时，在某个内部顶点处分裂证明网会更有用。

由此我们得到以下定义：

**定义 6.2.** 若证明结构 $\rho$ 中的顶点 $v$ 满足以下条件，则称其为**分裂**[2]：

- $v$ 是公理 顶点、 $\otimes$-顶点，或不属于 $\rho$ 中任何环的切割顶点；
- 或 $v$ 是 $\parr$-顶点，其结论边不属于 $\rho$ 中的任何环。

换言之， $\rho$ 中 $v$ 的连通分支（所诱导的证明结构）可以唯一地分解为图 11 所示的四种形状之一。序列化由此归结为以下关键结果：

**引理 6.3** (存在一个分裂顶点)**.** 任何至少包含一个顶点的证明网都存在一个分裂顶点。

事实上，序列化定理的证明可直接推出：

[2]这种术语上的 明显冲突与第2.2节有关，在那里我们给出了分裂顶点的另一种定义，只是暂时 的。我们很快会通过在证明结构上引入适当的局部着色来解决这一问题。

定理 *6.1* 的证明。我们对 $\rho$ 的顶点数和边数进行归纳。实际上，我们还要求 $\pi$ 处于 mix-Rétoré 范式。

如果 $\rho$ 为空，那么 $\pi$ 就简化为一条（$mix_0$）规则。如果 $\rho$ 有多个连通分支，那么它就是非空（且必然更小）的证明结构 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的不交并。$\rho_1$ 和 $\rho_2$ 仍然是 DR-正确的，并且归纳假设给出证明 $\pi_1$ 和 $\pi_2$，使得 $\mathcal{D}(\pi_1) \simeq \rho_1$ 且 $\mathcal{D}(\pi_2) \simeq \rho_2$。于是我们可以将 $\pi$ 的结论序列写成 $\Gamma_1$，$\Gamma_2$，使得 $\pi_i$ 的结论对于 $1 \leq i \leq 2$ 是 $\Gamma_i$。我们定义

$$\pi \quad := \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Gamma_1} \qquad \overset{\pi_2}{\vdash \Gamma_2}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2}\ (mix_2)$$

并直接得到 $\mathcal{D}(\pi) \simeq \rho$。

如果 $\rho$ 简化为一条类型为 $A$ 的边 $e$，那么将 $\pi$ 设为作用于 $A$ 的一条（$hyp$）规则。否则，$\rho$ 会简化为一个至少包含一个顶点的连通分支，因此根据引理 6.3，它是一个分裂分支 $v$。

假设 $v$ 是一个 $\parr$-顶点。将 $v$（其前提的标记为 $A$ 和 $B$，结论的标记为 $A \parr B$）从 $\rho$ 中移除（这样一来，$v$ 的前提的目标和其结论的源都不再有定义），即可得到证明结构 $\rho_1$，其中某些结论的标记为 $A$ 和 $B$；以及证明结构 $\rho_0$，其中一个前提的标记为 $A \parr B$，如图 11 所示。根据归纳假设，可得证明 $\pi_1$，使得 $\mathcal{D}(\pi_1) \simeq \rho_1$；以及证明 $\pi_0$，使得 $\mathcal{D}(\pi_0) \simeq \rho_0$。于是，我们可以将 $\pi$ 的结论（分别为前提）相继式写作 $\Gamma_1$，$\Gamma_0$（分别为 $\Sigma_1$，$\Sigma_0$），从而 $\pi_1$ 是 $\Sigma_1 \vdash \Gamma_1$，$A$，$B$ 的推导，而 $\pi_0$ 是 $A \parr B$，$\Sigma_0 \vdash \Gamma_0$ 的推导。我们将 $\pi$ 定义为.....的代换

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Gamma_1, A, B}}{\vdash \Gamma_1, A \parr B}\ (\parr)$$

对于 $\pi_0$中 $A \parr B$ 上的（假设）规则，并由引理 5.5 得到 $\mathcal{D}(\pi) \simeq \rho$。

假设 $v$ 是一个 $\otimes$-顶点。从 $\rho$中移除 $v$（其前提分别标记为 $A$ 和 $B$，结论标记为 $A \otimes B$），得到证明结构 $\rho_1$（分别为 $\rho_2$），其中 $A$（分别为 $B$）是其一个结论的标记；还得到 $\rho_0$，其中 $A \otimes B$ 是其一个前提的标记，如图 11 所示。根据归纳假设，可得到证明 $\pi_1$，使得 $\mathcal{D}(\pi_1) \simeq \rho_1$；证明 $\pi_2$，使得 $\mathcal{D}(\pi_2) \simeq \rho_2$；以及证明 $\pi_0$，使得 $\mathcal{D}(\pi_0) \simeq \rho_0$。于是，我们可以将 $\pi$的结论（分别为前提）相继式写为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_0$（分别为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_0$），使得 $\pi_1$是 $\Sigma_1 \vdash \Gamma_1$的推导，$\pi_2$是$\Sigma_2 \vdash \Gamma_2, B$的推导，而 $\pi_0$是 $A \otimes B, \Sigma_0 \vdash \Gamma_0$的推导。我们将 $\pi$定义为.....的代换

$$\dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Gamma_1, A} \qquad \overset{\pi_2}{\vdash \Gamma_2, B}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B}\ (\otimes)$$

对于 $A \otimes B$ in $\pi_0$ 上的 (假设) 规则，并由引理 5.5 得到 $\mathcal{D}(\pi) \simeq \rho$。

假设 $v$ 是一个切割顶点。从 $\rho$ 中移除 $v$（其前提的标记为 $A$ 和 $A^\perp$）后，我们得到证明结构 $\rho_1$（分别为 $\rho_2$），其中 $A$（分别为 $A^\perp$）是某些结论的标记，如图 11 所示。根据归纳假设，可得到证明 $\pi_1$，使得 $\mathcal{D}(\pi_1) \simeq \rho_1$，以及 $\pi_2$，使得 $\mathcal{D}(\pi_2) \simeq \rho_2$。然后，我们可以将 $\pi$ 的结论（分别为前提）相继式写为 $\Gamma_1, \Gamma_2$（分别为 $\Sigma_1, \Sigma_2$），使得 $\pi_1$ 是 $\Sigma_1 \vdash \Gamma_1, A$ 的一个推导，而 $\pi_2$ 是 $\Sigma_2 \vdash \Gamma_2, A^\perp$ 的一个推导。我们定义

$$\pi \quad := \quad \dfrac{\overset{\pi_1}{\vdash \Gamma_1, A} \qquad \overset{\pi_2}{\vdash \Gamma_2, A^\perp}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2}\ (cut)$$

并直接得到 $\mathcal{D}(\pi) \simeq \rho$。

假设 $v$ 是一个 ax-顶点。移除 $v$ （其结论分别标记为 $A$ 和 $A^\perp$）后，我们得到证明结构 $\rho_1$ （分别为 $\rho_2$），其中 $A^\perp$ （分别为 $A$）是其某个前提的标记，如图 11 所示。根据归纳假设，可得证明 $\pi_1$，使得 $\mathcal{D}(\pi_1) \simeq \rho_1$，以及证明 $\pi_2$，使得 $\mathcal{D}(\pi_2) \simeq \rho_2$。于是，我们可以将 $\pi$ 的结论（分别为前提）相继式写作 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ （分别为 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$），从而 $\pi_1$ 是 $\Sigma_1$、$A^\perp \vdash \Gamma_1$ 的推导，而 $\pi_2$ 是 $\Sigma_2$、$A \vdash \Gamma_2$ 的推导。用 (ax) 规则 (ax) $\vdash A^\perp$、$A$ 替换 $\pi_1$ 中 $A^\perp$ 上的 (hyp) 规则，得到 $\Sigma_1 \vdash \Gamma_1$、$A$ 的推导；再用后者替换 $\pi_2$ 中 $A$ 上的 (hyp) 规则，即可得到 $\pi$：应用两次引理 5.5，得到 $\mathcal{D}(\pi) \simeq \rho$。 □

各种序列化方法本质上仅在引理 6.3 的证明方式上有所不同：由定理 6.1 所诱导的序列化过程取决于人们为寻找分裂顶点所遵循的策略。我们将第 6 节的其余部分专门用于给出引理 6.3 的一系列证明。

第一种方法沿用了我们在第 3 节中建立 Yeo 定理所用方法的一个变体：在第 6.2 节中，我们基于无尖点路径在 $\parr$-顶点上定义一个序，并证明极大的 $\parr$-顶点是分裂的；然后我们应用关于证明网的简单而众所周知的结果来处理无 $\parr$ 的证明网情形。这一证明无需参阅第 3 节和第 4 节即可阅读，它也使我们有机会为初学的线性逻辑学家提供一份充分展开、同时又希望易于理解的序列化证明。

第二种方法直接由定理 3.6 推出引理 6.3：在第 6.3 节中，我们特别说明如何仅通过调节参数 $P$ 就能恢复许多寻找分裂顶点的经典策略。

在这两种情况下，第一步都是为任意证明结构定义局部着色（即为其诱导的部分图定义局部着色）。

**定义 6.4**。若一个证明结构配备了其部分图的局部着色，且满足以下条件，则称其为**良着色的**：

- 对于一个具有结论 $e_1$ 和 $e_2$ 的 $ax$ 顶点 $v$，$\mathsf{c}(e_1, v) \neq \mathsf{c}(e_2, v)$；
- 对于一个具有前提 $e_1$ 和 $e_2$ 的 $cut$ 顶点 $v$，$\mathsf{c}(e_1, v) \neq \mathsf{c}(e_2, v)$；
- 对于一个以前提 $e_1$ 和 $e_2$ 及结论 $f$ 为关联项的 $\otimes$-顶点 $v$，$\mathsf{c}(e_1, v)$、$\mathsf{c}(e_2, v)$ 和 $\mathsf{c}(f, v)$ 两两不同；
- 对于一个以前提 $e_1$ 和 $e_2$ 及结论 $f$ 为关联项的 $\parr$-顶点 $v$，$\mathsf{c}(e_1, v) = \mathsf{c}(e_2, v) \neq \mathsf{c}(f, v)$。

总是可以将证明结构转化为良着色证明结构，而且只需三种颜色，例如：虚线、实线和点线：

- 对每个割顶点的结论使用实线和点线；
- 对每个顶点的前提使用实线和点线 $\otimes$，并用虚线表示其结论；
- 对每个顶点的前提使用实线 $\parr$，并用虚线表示其结论。

图 12 给出了一个遵循此约定的良着色证明结构示例。

注意，良着色证明结构的尖点恰好是这样的点对 $(v,\ \alpha)$：其中 $v$ 是一个 $\parr$-顶点，而 $\alpha$ 是与其前提相关联的颜色。这至少需要三种颜色，且只有通过局部着色才能实现（见图 12 中的 $ax$-顶点 $x_1$）。接着，根据引理 5.4，证明结构中的无尖点路径无非就是切换路径；因此，根据定义 6.2 和第2.2节的含义，一个顶点是分裂顶点，当且仅当它是分裂顶点。图 12 展示了这种一致性：$v$、$u$ 和 $x_2$ 是分裂顶点，而 $x_1$ 不是。

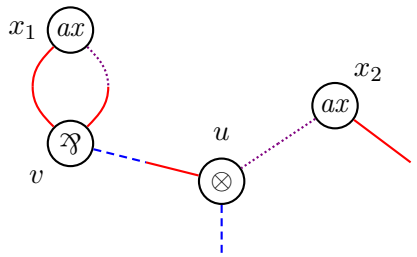



图 12：良着色证明结构的示例

以下几个简单的观察也将有所帮助：

**引理 6.5.** 每个终端的 $ax$ - 或 $\mathfrak{Y}$-顶点都是分裂的。

证明。 终端顶点的结论不可能属于某个环。 □

**引理 6.6.** 在无 $\mathfrak{Y}$的证明网（连通分支）中，每个顶点都是分裂的。

证明。 任何不含 $\mathfrak{Y}$-顶点的环都是切换环。 □

6.2. **从尖点循环进行序列化**。 证明结构中的 **$\mathfrak{Y}$-路径** 是指其源和目标均为 $\mathfrak{Y}$-顶点的路径，并且从其源的结论开始，以其目标的一个前提结束。于是，以下结果显而易见：

**引理 6.7**（-路径的拼接）。 两条 $\mathfrak{Y}$-路径（分别地，无尖点$\mathfrak{Y}$-路径）的拼接是一条 $\mathfrak{Y}$-路径（分别地，无尖点 $\mathfrak{Y}$-路径）。

回顾一下， $\mathcal{M}_v$ 表示源为 $v$、在 $v$处没有尖点，并且在这类环中尖点数最少的环集。以下是推论 2.7 的一个特例：

**引理 6.8**（证明结构中的尖点循环）。 设 $v$ 为一个顶点， $\omega$ 为 $\mathcal{M}_v$中的一个环，且在 $\kappa$处有一个尖点。若存在一条从 $\kappa$ 到 $\omega$中某个顶点的简单无尖点 $\mathfrak{Y}$-路径 $q$ ，则存在一个切换环。

**定义 6.9**。 当 $p$ 是一条从 $v$ 到 $u$ 的简单开放无尖点 $\mathfrak{Y}$-路径，且不存在从 $u$ 出发并终止于 $p$ 的某个顶点上的简单开放无尖点 $\mathfrak{Y}$-路径时，我们记作 $v \overset{p}{\prec} u$ 。当存在 $p$ 使得 $v \overset{p}{\prec} u$ 时，我们记作 $v \prec u$ 。

**引理 6.10**。 在证明网中， $\prec$ 是 $\mathfrak{Y}$-顶点上的严格偏序关系。

证明。 若 $v \overset{p}{\prec} u$，则 $v \neq u$ ，因为 $p$ 是开放的，因而 $\prec$ 是自反性的。若 $v \overset{p}{\prec} u \overset{q}{\prec} x$，则我们证明 $_{p\cdot q}v \prec x$。

我们首先证明，除了其源之外， $q$ 不包含 $p$中的任何顶点。事实上，若不然，考虑 $q$ 的最短开放前缀 $q'$ ，其目标 $x'$ 位于 $p$中。那么 $\omega := p_{(x',u)} \cdot q'$ 是一个环：要么 $x' = u$ 和 $\omega = q'$；要么我们可以应用引理 2.1。根据 DR 正确性， $\omega$ 必定有一个尖点：根据假设， $p$ 和 $q$ 无尖点；而 $x$ 处没有尖点，因为 $q$ 是一个$\mathfrak{Y}$-路径；因此 $\omega$ 必定在 $x'$处有一个尖点。于是 $q'$ 是一个简单的开放无尖点 $\mathfrak{Y}$-路径，这与 $v \overset{p}{\prec} u$矛盾。

因此， $p \cdot q$ 是一个简单的开放无尖点 $\mathfrak{P}$-路径（引理 2.2 和 6.7）。考虑以 $x$为源的简单开放无尖点 $\mathfrak{P}$-路径 $\rho$。由于 $u \overset{q}{\prec} x$， $\rho$ 不会终止于 $q$中的某个顶点。因此， $q \cdot \rho$ 是一个简单的开放无尖点 $\mathfrak{P}$-路径（引理 2.2 和 6.7），其源为 $u$。由于$v \overset{p}{\prec} u$， $\rho$ 也不会终止于 $p$ 中的某个顶点。 □

然后我们展示如何重新证明关于分裂顶点的一条经典结果：分裂 $\mathfrak{P}$-顶点 [Dan90] （引理 6.12）的{style id='1'>截面，即 存在性。

**引理 6.11**。 设 $v$ 是证明网中的一个 $\mathfrak{P}$-顶点，并考虑一个环 $\omega \in \mathcal{M}_v$ ， 它还是一条 $\mathfrak{P}$-路径。那么 $v \prec \kappa$，其中 $\kappa$ 是 $\omega$中第一个尖点的顶点。

证明。 前缀$\omega_{(v,\kappa)}$ 是一条简单的开放无尖点 $\mathfrak{P}$-路径。此外，根据引理 6.8 和 DR 正确性，不存在从 $\kappa$到 $\omega$的简单无尖点 $\mathfrak{P}$-路径。 □

**引理 6.12** （分裂 $\mathfrak{P}$）。 证明网要么是 $\mathfrak{P}$-无尖点的，要么包含一个分裂 $\mathfrak{P}$-顶点。

证明。 若证明网包含一个 $\mathfrak{P}$-顶点，则其 $\mathfrak{P}$-顶点集有限且非空，因此其中存在一个关于 $\prec$ 的极大元 $v$ （引理 6.10）。若 $v$ 不是分裂顶点，则其结论属于一个环，并且 $\mathcal{M}_v \neq \emptyset$。取某个 $\omega \in \mathcal{M}_v$，将其结论视为由$v$ 开始： $\omega$ 是一条 $\mathfrak{P}$-路径。根据 DR 正确性， $\omega$ 至少包含一个尖点：于是引理 6.11 与 $v$的极大性矛盾。 □

例如，很容易验证图 12 的证明结构是一个证明网，而它唯一的 $\mathfrak{P}$-顶点 $v$ 必定是分裂顶点，这一点从图上显而易见。

加上引理 6.6，引理 6.12 完成了引理 6.3 的证明。

6.3. **由参数化局部 Yeo 得到的序列化**。定理 3.6 为良着色证明网中任何支配尖点的顶点-颜色对集合 $P$ 给出一个分裂顶点——即对 $(v,\ \alpha)$，其中 $v$ 是一个 $\mathfrak{P}$-顶点， $\alpha$ 是与其两个前提相关联的颜色。我们回顾在定理 3.6 中为参数 $P$ 选择不同的自然取值，如何导出引理 6.3 的各种证明，从而形成在序列化过程中选择分裂顶点的不同策略。这些选择都显然满足定理 3.6 的假设： $P$ 包含所有尖点。

最直接的做法就是考虑所有顶点-颜色对：

**推论 6.13** (极大对)。 取证明网中所有顶点-颜色对的集合：对于每个 $\lhd$-极大元 $(v, \alpha) \in P$，顶点 $v$都是分裂的。

这立即给出了引理 6.3 的证明，因为当且仅当证明网没有顶点时， $P$ 才为空。

例 6.14。考虑图 12 中的证明网：利用引理 3.7，容易验证，对于 $\alpha \in \{solid, dotted\}$，$(x_1, \alpha) \lhd (v, solid) \lhd (u, solid)$；此外，$(x_2, solid) \lhd (u, dotted) \lhd (v, dashed)$，且对于 $\beta \in \{solid, dashed\}$，$(u, \beta) \lhd (x_2, dotted)$。注意，我们没有$p(v, dashed) \lhd (x_1, \alpha)$，其中 $\alpha \in \{solid, dotted\}$：每条路径 $p$都满足，若 $(v, dashed) \Rsh (x_1, \alpha)$，则$q$可约化为 $v$ 的一个前提，而另一个前提给出一条路径 $q$， 满足 $(x_1, \alpha) \Rsh (v, solid)$。因此 $(v, dashed)$ 是极大的。所以极大对只有 $(v, dashed)$ 和 $(x_2, dotted)$（其极大性显而易见）， 而 $v$ 和 $x_2$ 确实是分裂顶点。注意，剩余的分裂顶点 $u$ 不是极大对的分量：并非所有分裂顶点都能由推论 6.13 得到。

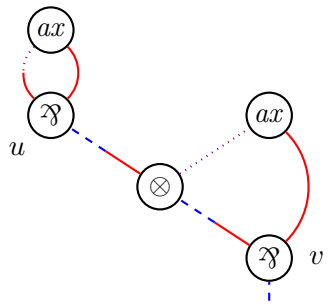



图 13:　具有两个分裂 ⅋-顶点 $v$ 且满足 $u$ 使得 $(u, solid) \lhd (v, solid$ )

此外，我们还可以重新得到关于分裂顶点的两个经典存在性结果：存在截面，即分裂的 ⅋-顶点 [Dan90]；以及存在分裂终端顶点 [Gir87]。

**推论 6.15** (分裂 ⅋)。令 $P$ 为所有尖点的集合：$P$ 的一个极大元是$(v, \alpha)$，其中 $v$ 是一个分裂 ⅋-顶点。

在图 12 的证明网中，唯一的 ⅋-顶点 $v$ 确实是分裂的。为了导出引理 6.3 的证明，只需处理情形 $P = \emptyset$：该证明网是 ⅋-自由的，因此我们应用引理 6.6。

**推论 6.16** （分裂终端顶点）. 考虑

$$P := \{(v, \alpha) \in \mathcal{V} \times \mathsf{C} \mid \alpha \neq \mathsf{c}(e, v) \text{ for each conclusion edge } e \text{ of } v\},$$

each $P$ 的$\lhd$-极大元是一个对$(v, \alpha)$，其中 $v$ 是一个分裂终端顶点。

证明。 $v$ 是分裂的，这再次是定理 3.6 的直接应用。我们证明它也是终端的。事实上，否则它将有一个结论 $e$，其目标 $u$已定义。利用引理 3.7，可得$(v, \alpha) \lhd (u, \mathsf{c}(e, u))$，因为 $\alpha \neq \mathsf{c}(e, v)$（由定义 6.4）：这与$(v, \alpha)$的极大性矛盾。 □

在图 12 的证明网中，唯一的终端顶点 $u$ 确实是分裂的。假设（不失一般性）颜色集 C 至少有三个元素，则集合 $P$ 为空当且仅当该证明网没有顶点：我们再次得到引理 6.3 的一个证明。

注意，定理 3.6 足够灵活，允许其他新颖（尽管也许并不那么有趣）的策略。例如，可以力求得到一个分裂的非$ax$顶点：

**推论 6.17** （非分裂公理-顶点）。取 $P$所有顶点-颜色对（$v$、$\alpha$），其中 $v$ 不是公理顶点。根据定理 *3.6*，每个 $\lhd$-极大元（$v$、$\alpha$）$\in P$都会产生一个分裂顶点 $v$。

在图 12 的证明网中，$P$ 中的极大对为（$v$, *dashed*）和（$u$, *solid*）；而且，两个非公理-顶点确实都是分裂顶点。再次，为了导出引理 6.3 的证明，只剩下 $P = \emptyset$这一种情况，我们仍按前面的推理处理。

与推论 6.13 一样，推论 6.15 至 6.17 不一定会生成目标类别中的所有 分裂顶点。图 13（针对分裂 ⅋-顶点）和图 14（分别针对分裂终端顶点以及分裂非$ax$-顶点）给出了反例。

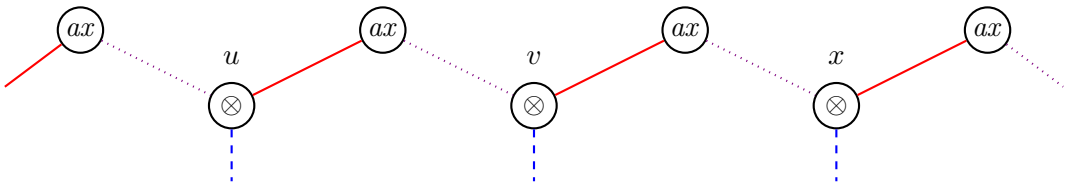



图 14：具有三个终端分裂 $\otimes$-顶点 $v$， $u$ 以及 $x$，使得 $(v,\ \alpha) \lhd (u,\ solid)$ 对于 $\alpha \in \{solid, dashed\}$，且 $(v,\ dotted) \lhd (x,\ dotted)$

6.4. **限制**。 既然我们已经为完整的乘法线性逻辑$^{0,2}_{hyp}$建立了序列化和去序列化，现在就可以考察一些限制，并通过相继式演算的子系统在证明结构中的像所具有的性质来刻画这些子系统。

首先注意，推导 $\pi$ 不包含（$hyp$）规则，当且仅当 $\mathcal{D}(\pi)$ 是闭合的。由定理 6.1 可直接得出：

**定理 6.18** (闭合序列化)。 给定一个闭合证明网 $\rho$，存在一个无假设推导 $\pi$，使得 $\rho \simeq \mathcal{D}(\pi)$。

注意，根据第 6.3 节的结果，可以在定理 6.1 的证明中将由引理 6.3 得到的分裂顶点设为终端顶点。因此，我们可以选择只考虑无（$hyp$）规则的推导和闭合证明结构，不仅在陈述中如此，在整个序列化过程中也如此。事实上，若 $\rho$ 是闭合的，且 $v$ 是一个分裂终端顶点：与 $v$ 的前提相关联的分量也都是闭合的；而与其结论相关联的分量（若有）则归约为单条边，因此无需进行任何代换。采用这种方法，可以调整定理 6.1 的证明，从而得到定理 6.18 的证明，整个过程中无需在推导中考虑假设，也无需在证明结构中考虑前提——这可能是一些作者（包括 [Gir87], ）偏好沿终端分裂顶点进行序列化的原因之一。

另一个重要的子系统可通过去掉$mix$ 规则得到。由引理 5.6，对任意$mix$无关证明 $\pi$，$\mathcal{D}(\pi)$是一个连通证明网。反之，给定某个连通证明网 $\rho$，我们对定理 6.1 的证明（遵循任意寻找分裂顶点的策略）会得到一个 mix-Rétoré 标准形证明 $\pi$，并带有 $\rho \simeq \mathcal{D}(\pi)$。再次应用引理 5.6，我们得到$\#mix_2 = \#mix_0$，其中$\#mix_i$是 $\pi$中（$mix_i$）规则的个数；并且由于 $\pi$处于 mix-Rétoré 标准形，它必定是$mix$无关的。我们得到：

**定理6.19** （连通序列化）。 给定一个连通证明网 $\rho$，存在一个 *mix* 无关推导 $\pi$，使得 $\rho \simeq \mathcal{D}$（$\pi$）。

当然，可以将这两种约束结合起来，从而恢复将闭的连通证明网序列化为 MLL（即纯乘法线性逻辑，既无假设也无$mix$规则）证明这一原始结果。

除了它是原始 Danos-Regnier 判据的一项要求这一事实之外，DR-连通性还引出了一种在某种程度上更为精细的理论：例如，它在研究子证明结构的各种概念（如王国和帝国）时起着关键作用 [BVdW95]；而且一些关于序列化的经典证明关键依赖于 DR-连通性（例如，基于帝国的证明 [Gir91]）。因此，我们认为有必要更详细地研究从我们的方法中可以导出哪些关于 DR-连通性的额外结果：这将在第7节中进行。

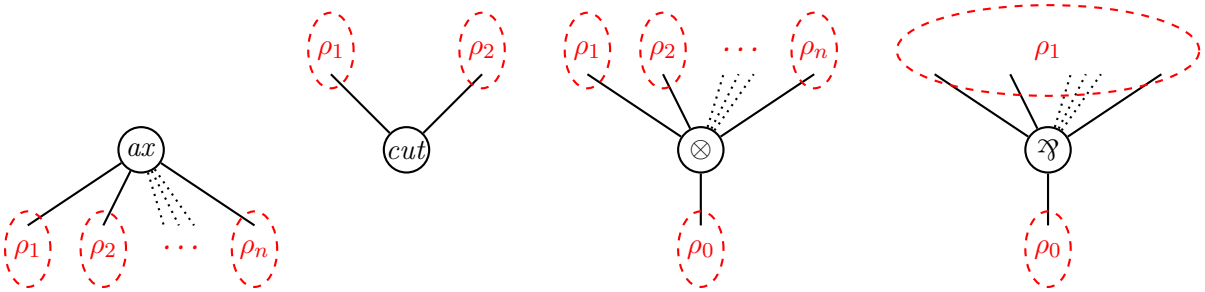



图 15：任意元数下各类分裂顶点的连通分支形状

6.5. **推广**。 第 6.1 节中定理 6.1 的证明是与逻辑系统乘法线性逻辑$^{0,2}$ 假设 直接关联地给出的，并且边的类型使得能够在证明中构造公式。然而，这一序列化过程的核心是分裂顶点的存在，而这完全不依赖于定型：定义 6.2 并未提及定型，只有图 11 中分量的形状是相关的；DR 正确性的定义不涉及定型；而且我们在第 6.2 节和第 6.3 节中给出的引理 6.3 的证明从未提及类型约束。因此，人们可以完全按照第 5.2 节的方式定义**无类型证明结构**，只需忽略类型标签和约束，仍然可以得到引理 6.3。

此外，还可以放宽顶点的元数限制，允许 $ax$-顶点具有任意数量的结论，以及 $\parr$-和 $\otimes$-顶点具有任意数量的前提，从而得到**广义（无类型）证明结构**。分裂顶点的概念保持不变：不属于任何环的分裂$ax$-、$cut$或 $\otimes$-顶点；而分裂 $\parr$-顶点则是指其结论边不属于任何环的顶点（见图 15）。良着色证明结构的概念也可自然地相应调整：若一个广义证明结构中，非 $\parr$-顶点的任意两条相邻边颜色不同，且每个 $\parr$-顶点的所有前提边颜色相同，并且不同于其结论边的颜色，则称该结构为良着色的——这可能需要任意多种颜色，具体取决于顶点的元数。同样，引理 6.3 对广义证明结构也成立：我们在第 6.2 节和第 6.3 节中给出的任一证明都可逐字适用。

由此可见，我们的序列化方法可以模块化地扩展到更丰富的系统：通过对边和顶点的数量进行归纳推理，可以从证明结构构造出开放推导；每个分裂顶点都能将证明结构分解为与规则应用相容的部分——必要时还可接着进行代换。只要允许使用$mix$规则，处理乘法单位元就很简单：[3] 从几何角度看，可以将单位元视为一元公理（或者等价地，视为零元的 $\parr$-或$\otimes$-顶点），它们总是分裂顶点。类似地，在存在结构规则（针对 ? 模态的弱化、收缩和降格）以及提升（引入 ! 模态）的情况下，我们也能得到乘法指数证明网的序列化：收缩（降格；弱化）被视为二元（一元；零元） $\parr$-顶点；而提升

[3]关于带单位元且不含$mix$ 的乘法线性逻辑证明网的理论尤其困难 [HH16a], , 超出了本文讨论的范围。尽管如此，我们的方法也适用于这样一种框架：为每个 $\bot$-顶点设置一条跳边 [Gir96, Hug12, Hug05] ——其中尖点恰由 $\parr$-顶点的非跳跃前提对构成。

框在顶层序列化时起到广义公理的作用，因为每个框的内容都通过归纳方式进行序列化。

另一方面，按照 [HvG05] 的思路处理加法联结词，需要对我们基于定理 3.6 的方法进行推广。我们将在第8节至第10节讨论这一点。

## 7. 关于证明网连通性的更多讨论

本节将从两个相互独立的方向，进一步探讨连通证明网这一概念。

在第7.1节中，我们注意到，在连通证明网中，每个 $\parr$-顶点都有一个 适当环 ——也就是说，一个（几乎）无尖点的环，其起点和终点均为其前提边——并证明某种逆向性质成立：如果一个证明网中的每个 $\parr$-顶点都有一个适当环，那么它就是若干连通证明网的不交并。由此自然引出一种与我们用于序列化的方法相契合的连通性变体：几乎连通性。

在第 7.2 节中，我们将序关系 $\lhd$ 与连通证明网中王国概念所诱导的序关系进行比较；在讨论序列化时，文献中通常采用的正是后者。

### 7.1. 几乎连通证明网。

秉承引理 5.4 和备注 5.3 的思路，我们先给出连通 DR-正确证明结构的另一种定义。

**定义 7.1**。 若一个 DR-正确证明结构非空，且对于任意两条边 $e \neq f$，都存在一条无尖点简单路径，从 $e$ 的某个相邻顶点通向 $f$ 的某个相邻顶点，则称其为**cf-连通**。

**引理 7.2**。 证明网连通，当且仅当它是 *cf*-连通的。

证明。 固定一个证明网 $\rho$。在这两种情况下，其底层部分图都非空。

如果 $\rho$ 连通，只需考察它的一个正确性图：每对边在该图中都连通，而且正确性图中的简单路径都是无尖点的。

反过来，假设 $\rho$ 是 cf-连通的，我们通过对其顶点数进行归纳证明它是连通的。如果 $\rho$ 无尖点，那么它唯一的正确性图就是 $\rho$的底图：根据假设，每一对边都由一条（无尖点）路径连接；又因为证明结构的每个顶点都至少与一条边相邻，所以正确性图是连通的，进而 $\rho$ 是连通的。如果 $\rho$ 有一个 $\parr$顶点，那么根据引理 6.12（或推论 6.15），它有一个分裂 $\parr$顶点 $v$：根据归纳假设，移除 $v$ 后得到的证明网的连通分量 $\rho_0$ 和 $\rho_1$ （见图 11）都是连通证明网；因此， $\rho$ 的每个正确性图都是连通的，因为它是将 $\rho_0$ 的一个正确性图与 $\rho_1$ 的一个正确性图通过 $v$ 连接而成的（ $v$ 与其结论以及 $\rho$的正确性图中选定的前提相邻）。 □

证明结构中一个 $\parr$ 顶点 $v$ 的**适当环**是一个源为 $v$、在 $v$ 处有尖点但没有内部尖点的环：它特别具有如下形式：$(v,\ e_1,\ u_1) \cdot p \cdot (u_2,\ e_2,\ v)$，其中 $e_1$ 和 $e_2$ 是 $v$ 的两个前提，而 $p$ 是一条无尖点路径。

回顾一下，我们曾在证明网的 $\parr$-顶点上定义了一个严格偏序 $\prec$ （定义 6.9 与引理 6.10）。

**引理 7.3.** 在局部着色为 c 的良着色证明网中，设 $u$ 是 $\mathfrak{R}$-顶点 $v \neq u$ 的一个适当环中的顶点。则对任意颜色 $\alpha$，$(u,\alpha) \lhd (v,\mathsf{c}(e,v))$，其中 $e$ 是 $v$ 的任意前提。特别地，若 $u$ 是 $\mathfrak{R}$-顶点，则 $u \prec v$。

证明。设 $\omega$ 为 $v$ 的一个包含 $u$ 的适当环。由于 $\omega$ 在 $u$ 处无尖点，它包含一条关联于 $u$ 的边 $f$，并且使得 $\mathsf{c}(f,u) \neq \alpha$：我们把使用与 $\omega$ 相同的边、以 $u$ 为源、以 $f$ 为起始边的环称为 $\omega'$。注意，$\omega'$ 的唯一尖点是位于 $v$ 处的尖点；又由于我们处于一个证明网中，不存在无尖点环（引理 5.4）：因此 $\omega' \in \mathcal{M}_u$。令 $p$ 为 $\omega'$ 中从 $u$ 到 $v$ 的子路径，由推论 2.7，我们得出 $(u,\alpha) \overset{p}{\lhd} (v,\mathsf{c}(e,v))$。□

**注记 7.4**。引理 7.3 的逆命题并不成立：在图 13 的证明网中，$u \prec v$，但 $u$ 并不在 $v$ 的适当环中。

如果一个 DR-正确证明结构非空，且每个$\mathfrak{R}$-顶点都有一个适当环，我们就称其为**几乎连通**。

**注记 7.5**。没有内部尖点的路径未必是切换路径：事实上，$\mathfrak{R}$-顶点的适当环不是切换路径。图 10 和图 12 中的证明网是连通的（也几乎连通），特别是因为该 $\mathfrak{R}$-顶点唯一的适当环没有内部尖点。

**引理 7.6**。每个连通证明网都是几乎连通的。

证明。假设 $\rho$ 是一个连通证明网。我们证明，$\rho$ 的每个 $\mathfrak{R}$-顶点都有一个适当环。考虑 $v$ 这个 $\mathfrak{R}$-顶点的两个前提 $e_1$ 和 $e_2$。记 $u_1 := \mathsf{s}(e_1)$，$u_2 := \mathsf{s}(e_2)$。根据 DR-连通性，在 $\rho$的某个正确性图中，存在一条从 $u_1$ 到 $u_2$ 的简单路径 $p$；它也是 $\rho$中的一条无尖点路径。

我们首先证明 $p$ 不包含 $v$的任何前提。事实上，若它包含一个前提，由于它是一条切换路径，它恰好包含一个前提，记作 $e_1$。由于 $p$ 是简单的，$e_1$ 必定是 $p$的第一条边或最后一条边。因此，不失一般性，我们可以写成 $p = (u_1, e_1, v)\cdot q$，其中 $q$ 是一条从 $v$ 到 $u_2$、不包含 $e_2$的简单无尖点路径；但这样一来，$(u_2, e_2, v)\cdot q$ 便是一个无尖点环，这与 DR 正确性矛盾。

因此，$p$ 是从 $u_1$ 到 $u_2$的一条简单无尖点路径，既不包含 $e_1$，也不包含 $e_2$，由此得到 $v$的一个适当环：$(v, e_1, u_1)\cdot p\cdot(u_2, e_2, v)$。□

现在我们可以证明：在一个几乎连通证明网 $\rho$中，通过路径连通等价于通过简单无尖点路径连通。也就是说，$\rho$ 的部分图的每个连通分支都定义了一个连通证明网。

**引理 7.7**（几乎连通证明网中的路径）。设 $\rho$ 是一个几乎连通证明网。对于 $\rho$中的每条路径 $p$，都存在 $\rho$ 的一条简单无尖点路径 $p'$，其端点与 $p$相同。

证明。根据引理 6.10，满足以下条件的序列$(v_i)_{1\leq i\leq n}$ 的长度有上界：每个 $v_i$ 都是一个 $\mathfrak{R}$-顶点，且对于 $1 \leq i < n$，$v_{i+1} \prec v_i$。该上界由 $\rho$的 $\mathfrak{R}$-顶点数量给出。我们称 $v$ 的秩为——并用 $cr(v)$表示——以 $v$为末项的这类序列 $v_n \prec \cdots \prec v_1 = v$中顶点数量的最大值 $n$。注意，根据定义，$cr(v) \geq 1$。若 $p$ 是 $\rho$中的一条路径，则$p$ 的秩 $cr(p)$是 $p$ 的内部尖点的秩的最大值；若$p$ 没有内部尖点，则令 $cr(p) = 0$。

现在，我们转向该命题的证明。我们可以不失一般性地假设 $p$ 是开放简单路径；若 $p$ 闭合，则结论显然。我们对 $cr(p)$使用归纳法。令 $l$

为 $p$在顶点 $\kappa_1$、.....、 $\kappa_l$处的尖点数，并称 $e_i$、 $f_i$为 $\kappa_i$的两个前提，其源点分别为 $x_i$、 $y_i$，且（$x_i$、$e_i$、 $\kappa_i$、 $f_i$、 $y_i$）是 $p$的一条子路径。

我们首先将为每个 $1 \leq i \leq l$ 构造一条以 $x_i$ 为源、以 $y_i$ 为目标的无尖点简单路径 $\gamma_i$。由于 $\rho$ 几乎连通，我们可以为每个 $1 \leq i \leq l$ 选取一个 $\kappa_i$ 的适当环 $\pi_i$：不失一般性，（否则考虑 $\pi_i$ 的反向），我们可以写成 $\pi_i = (\kappa_i,\ e_i,\ x_i)\cdot\gamma_i\cdot(y_i,\ f_i,\ \kappa_i)$。由于 $\pi_i$ 是一个适当环，路径 $\gamma_i$ 无尖点，并且有 $\mathsf{s}(\gamma_i) = x_i$ 以及 $\mathsf{t}(\gamma_i) = y_i$。

我们有 $p = p_1\cdot(x_1, e_1, \kappa_1, f_1, y_1)\cdot p_2 \cdots p_i\cdot(x_i, e_i, \kappa_i, f_i, y_i)\cdot p_{i+1} \cdots p_l\cdot(x_l, e_l, \kappa_l, f_l, y_l)\cdot p_{l+1}$，其中 $p_1$、$\cdots$、$p_{l+1}$ 是无尖点简单路径；我们还知道，简单路径 $\gamma_1$、.....、$\gamma_l$ 都是无尖点的。那么，路径 $q := p_1 \cdot \gamma_1 \cdot p_2 \ldots p_i \cdot \gamma_i \cdot p_{i+1} \ldots p_l \cdot \gamma_l \cdot p_{l+1}$ 显然与 $p$ 具有相同的端点，而 $q$ 唯一可能的尖点位于顶点 $x_i = \mathsf{t}(p_i) = \mathsf{s}(\gamma_i)$ 以及顶点 $y_i = \mathsf{t}(\gamma_i) = \mathsf{s}(p_{i+1})$，其中 $1 \leq i \leq l$。不过， $q$ 可能不是简单的。

定义 $q'$ 为从 $q$ 出发，通过递归移除其中一个非空闭子路径，直到没有闭子路径为止（因此最终得到一条简单路径）所得到的简单路径。注意，$q'$ 与 $q$ 的端点相同，因此也与 $p$ 的端点相同，因为移除闭子路径会保留端点。我们声称 $cr(q') < cr(p)$。这是因为， $q'$ 中尖点的顶点 $z$ 必须属于某个 $\gamma_i$，其中 $1 \leq i \leq l$；这是因为 $z$ 要么是 $q$ 的尖点（即某个 $x_i$ 或 $y_i$），要么是在构造 $q'$ 的过程中移除闭子路径而得到的尖点，而 $q$ 中唯一会多次出现的顶点都位于某个 $\gamma_i$ 中（$p_j$ 中的所有顶点都互不相同，因为 $p$ 是简单且开放的）。因此， $z$ 属于 $\kappa_i$ 的一个适当环，由引理 7.3 可得 $z \prec \kappa_i$，于是 $cr(z) < cr(\kappa_i)$，从而 $cr(q') < cr(p)$。接着，我们对路径 $q'$ 应用归纳假设，得出存在一条 $\rho$ 中的无尖点简单路径 $p'$，其端点与 $q'$ 相同，因而也与 $p$ 相同。 □

**推论 7.8**（几乎连通证明网的分解）。几乎连通证明网是若干个连通证明网的不交并，且至少包含一个连通证明网。

证明。设 $\rho$ 是一个几乎连通证明网。根据引理 7.7， $\rho$ 中的两个顶点通过一条简单无尖点路径连通，当且仅当它们属于 $\rho$ 的同一个连通分支。因此， $\rho$ 的每个连通分支都是一个连通证明网（引理 7.2 ）。 □

7.2. **王国与序**。我们在顶点-颜色对上定义的偏序 $\lhd$，与证明网文献中已知的任何偏序都不对应。与连通证明网序列化相关的常见偏序，源自王国与帝国的概念 [BVdW95]。具体而言，王国定义了一个严格偏序 [BVdW95，引理 3]；借助分裂终端顶点，可以由此推导出序列化定理——而帝国则不同，它们并不对应任何严格偏序。

我们在此证明，尽管王国序和我们的序 $\lhd$ 并不相同，但在连通闭证明网中二者存在关联。

**定义 7.9**（王国 [BVdW95，命题 3.(II)]）。 连通闭证明网中顶点$v$ 的**王国**$k(v)$是以 $v$ 为终端顶点的最小连通 DR-正确子证明结构。等价地，$k(v)$是具有以下顶点和边的子证明结构：

- 如果 $v$ 是一个轴顶点，$k(v)$就是 $v$ 及其两个结论；
- 若 $v$ 是一个带有前提 $e_1$ 和 $e_2$的 $\otimes$-顶点，则 $k(v)$ 可通过将 $v$ 及其结论添加到 $k(\mathsf{s}(e_1))$和 $k(\mathsf{s}(e_2))$中得到；

• 若 $v$ 是一个 $\parr$-顶点，给定 $v$的任意适当环 $\omega$，则 $k(v)$ 是 $\omega$ 中除 $v$之外各顶点所属王国的并集，再加上 $v$ 及其结论。[4]

顶点之间的王国序很简单： $u$ 小于 $v$，当且仅当 $u \in k(v)$。

引理 *7.10*。设良着色连通封闭证明网中有两个不同的顶点 $v$ 和 $u$，其局部着色为 $c$。若 $u \in k(v)$，则存在 $v$ 的一个前提 $e$，使得对于任意颜色 $\beta \notin \{c(f,u) \mid f \text{ 是 } u\}$的一个结论，且$(u,\beta) \lhd (v,c(e,v))$。特别地，$u \in k(v) \implies \exists \alpha,\beta,(u,\beta) \lhd (v,\alpha)$。

证明。我们需要考虑三种情况，并根据上述王国的刻画进行归纳。

**若 $v$ 是一个$ax$-顶点：**则 $v$ 是$k(v)$的唯一顶点。

**If $v$是一个 $\otimes$-顶点，其前提为 $e_1$和 $e_2$：**于是，对于 $s(e_1)$ 的任意前提 $f_1$ 以及 $s(e_2)$ 的任意前提 $f_2$（使用引理 3.7），$(s(e_1), c(f_1, s(e_1))) \lhd (v, c(e_1, v))$，且 $(s(e_2), c(f_2, s(e_2))) \lhd (v, c(e_2, v))$。由归纳假设以及 $\lhd$ 的传递性，得证。

**If $v$ 是一个 $\parr$-顶点：**设 $\omega$ 是 $v$ 的一个适当环。对于任意 $x \in \omega$ 和任意颜色 $\tau$，存在 $v$ 的某个前提 $e$，使得 $(x, \tau) \lhd (v, c(e, v))$（使用引理 7.3）。由归纳假设以及 $\lhd$ 的传递性，得证。 □

如图 14 所示，逆命题不成立，其中每个 $\otimes$-顶点的王国中的顶点是该 $\otimes$-顶点本身以及其上方的两个 $ax$-顶点。

## 8. Yeo 定理在乘法加法线性逻辑中的另一种推广

正如定理 3.6 为我们乘法证明网的序列化过程奠定了基础，Yeo 定理的进一步推广也可用于证明 Hughes 和 van Glabbeek [HvG05] 所提出的乘法-加法线性逻辑证明网的序列化。这里定理 3.6 并不足够，因为这些证明网中存在一些无尖点环。

由子图的并（定义见第2.1节）可导出无尖点环的并这一概念。若无尖点环的并作为子图是连通的，则称其为连通并。若对于每个无尖点环的连通并 $\Omega'$，$\Omega \subseteq \Omega' \implies \Omega = \Omega'$（使用第2.1节中按包含关系定义的子图序），一个无尖点环的连通并 $\Omega$ 都是极大的（按包含关系），则称其为极大。

**定义 8.1**。给定一个带有局部着色 c 的部分图 $G$，我们将其所有极大无尖点环连通并的集合记为 $\mathfrak{O}\ G$。

例如，参见图 16，其中展示了一个局部着色图及其集合 $\mathfrak{O}$。

我们回顾一下，在带有局部着色的任意部分图 $G$ 中，都可以定义边上的严格偏序 $\lhd$（参见第 10 页的定义 3.1）。本节旨在证明以下定理。

**定理 8.2**。设 $G$ 是一个带有局部着色 c 的部分图。对于每个 $\Omega \in \mathfrak{O}$，选取一条边 $\mathfrak{e}(\Omega)$，其端点为 $\mathfrak{l}(\Omega) \in \Omega$ 和 $\mathfrak{w}(\Omega) \notin \Omega$，使得：
$(H_G^1)$ $(\mathfrak{l}(\Omega), c(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{l}(\Omega))$ 不是尖点；$(H_G^2)$ $(\mathfrak{w}(\Omega), c(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))$ 是尖点。

[4]所得证明结构不依赖于适当环 $\omega$ [BVdW 的选择 95].

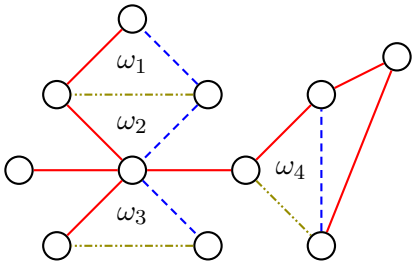



图 16：带有 $\mathfrak{O} = \{\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3, \omega_4\}$ 的局部着色图

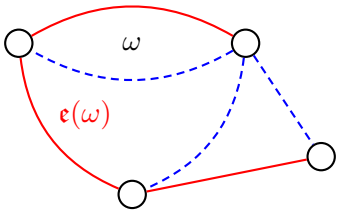



图 17：没有分裂顶点、满足 $(H_G^2)$ 的图，其中有 $\mathfrak{O} = \{\omega\}$，且 $\mathfrak{e}(\omega)$ 在 $\mathfrak{l}(\omega)$ 处不会形成尖点，边位于 $\omega$ 之外

令 $P$ 为一个支配尖点且与$P_{out}$ : $= \{(\mathfrak{l}(\Omega), \mathfrak{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{l}(\Omega)) \mid \Omega \in \mathfrak{O}\}$不相交的顶点-颜色对集合。那么，任意 $P$(即对限制在 $P$上的 $\lhd$ )的 $\lhd$-极大元的顶点都是分裂。

根据 $(H_G^1)$， $P_{out}$ 不含任何尖点，因此总能找到满足要求的集合 $P$：只需取所有尖点构成的集合。我们将**带有出口函数的**部分图称为局部着色偏图，并为其配备函数 $\mathfrak{e}$、$\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{w}$ ；这些函数为每个由无尖点环构成的极大连通并 $\Omega \in \mathfrak{O}$ 关联一条边 $\mathfrak{e}(\Omega)$，其端点为$\mathfrak{l}(\Omega) \in \Omega$ 和 $\mathfrak{w}(\Omega) \notin \Omega$。

该定理的证明并非显而易见，将在第 8.1 节和第 8.2 节中给出。定理 8.2 蕴含了定理 4.1 的一个推广。

**定理 8.3**。 考虑 $G$ 一个带出口函数且至少包含一个顶点的局部着色偏图。若 $G$ 满足$(H_G^1)$和$(H_G^2)$，则 $G$中存在一个分裂顶点。

证明。 $P$ 中所有不属于 $P_{out}$ 的顶点-颜色对构成的集合非空：要么 $\mathfrak{O}$ 为空，因此 $P_{out}$也为空；要么至少存在一个不属于 $P_{out}$ 的尖点（根据（$H_G^2$）） 。因此，根据 $\lhd$ （引理 3.4），$P$ 包含一个极大元（$v$， $\alpha$）；又由于 $P$ 包含所有尖点，根据定理 8.2， $v$ 是分裂顶点。 □

**注8.4**。 定理 8.3 确实是定理 4.1 的一个推广：对于一个没有无尖点环的局部着色偏图 $G$，假设（$H_G^1$）和（$H_G^2$）显然成立；这两个假设涉及无尖点环的连通并。

**注8.5** （所有假设都是必要的）。 这里给出一些例子，说明定理 8.3（因此也包括定理 8.2）的所有假设都是必要的，即使在边着色的情况下也是如此。对于这里提到的所有图，函数 $\mathfrak{e}$ 都已明确给出，这与函数 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{w}$ 不同，因为后两者可以推导出来。

我们先考虑假设（$H_G^1$），即（$\mathfrak{l}(\Omega)$，$\mathfrak{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{l}(\Omega)$）不是一个尖点。对子图 $\Omega$ 及其补图都作出这一假设很重要：

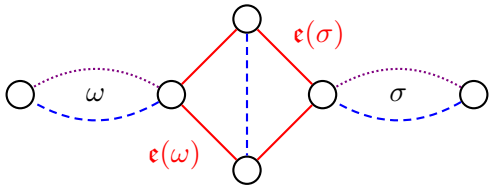



图 18：没有分裂顶点、满足 $(H_G^2)$ 的图，其中 $\mathfrak{O} = \{\omega, \sigma\}$ 和 $\mathfrak{e}(\omega)$ 以及 $\mathfrak{e}(\sigma)$ 与 $\omega$ 和 $\sigma$ 中的边均不构成尖点

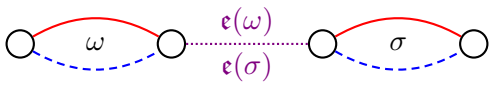



图 19：没有分裂顶点、满足 $(H_G^1)$ 的图，其中有 $\mathfrak{O} = \{\omega, \sigma\}$




图 20：满足 $(H_G^1)$ 和 $(H_G^2)$，其中有 $\mathfrak{O} = \{\omega\}$ 和 $(v,\ dotted) \in P_{out}$ 对于 $\lhd$ 而言是极大的，而 $v$ 不是分裂的

图 17（分别为图 18）是一个反例，其中 $\mathfrak{e}(\Omega)$ 在 $\mathfrak{l}(\Omega)$ 处形成一个尖点，且有一条边位于 $\Omega$ 内部（分别位于 $\Omega$ 外部）。

现在考虑假设 $(H_G^2)$，图 19 中的图满足 $(H_G^1)$，但没有分裂顶点。

最后，观察定理 8.2，图 20 给出了所选边集 $P$ 与 $P_{out}$ 不互不相交时的一个反例。在该图中，$(v, dotted)$ $(v,f,u) \lhd (u, solid)$ 不成立，因为 $(u, solid) \not\vdash (v, dashed)$，其中使用虚线边作为路径；类似地，$(v, dotted) \not\lhd (u, dashed)$；显然，$(v, dotted)$ 不小于另外两个顶点中的任何一个，因为从 $v$ 出发到它们的路径都不是以点线颜色开头的，所以 $(v, dotted)$ 是极大的。

**注 8.6.** 以下与 [HvG05] 中的单切换环猜想相对应：在 $\mathfrak{O}$ （定义 8.1）的定义中，将“无尖点环的极大连通并”简单替换为“无尖点环”后，定理 8.3 是否仍然成立？答案是否定的：图 21 所示的图是一个反例，它不满足定理 8.3 的假设，但若将“无尖点环的极大连通并”替换为“无尖点环”，则会满足这些假设。不过，这个图无法改造为证明网语境下单切换环猜想的反例，因为在该框架中，所有的 $(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))$ 都具有相同的颜色。

尽管技术细节稍微复杂一些，定理 8.2 的证明与第 3.1 节中定理 3.6 的证明思路相同：非分裂顶点不可能属于对 $\lhd$ 极大的顶点-颜色对（命题 8.14）。具体来说，我们需要研究无尖点环的连通并的一些性质；这些性质在我们首次推广 Yeo 时并未涉及，但在这里至关重要：第 8.1 节将讨论这一对象。接下来我们将运用

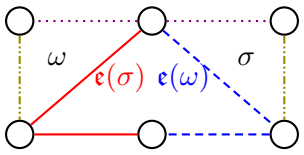



图 21：没有分裂顶点，但两个无尖点环各有一条边从环中伸出，使该边在环外的端点处形成尖点，而在环内的端点处不形成尖点的图

这些性质以及第 8.2 节中的尖点最小化，证明极大顶点-颜色对包含一个分裂顶点。

**记号**。 在本节余下部分，我们固定一个任意的部分图 $G$，它配备了局部着色 c 和出口函数 $(\mathfrak{e}, \mathfrak{l}, \mathfrak{w})$。

8.1. **↱-连通性**。

**定义 8.7** （↱-连通性）。 若子图 $S$ 属于 $G$，且对于 $S$ 中任意两个不同的顶点 $v$ 和 $u$，以及 $G$ 的任意颜色 $\alpha$，都存在一条位于 $S$ 内的路径 $p$ 和一种颜色 $p\beta$，使得 $(v, \alpha) \curvearrowright (u, \beta)$，则称该子图为 **↱-连通** 。

**注记 8.8.** 这种连通性的概念强于“由一条无尖点简单路径相连”这一关系。

• 它是传递的：若 $(v, \alpha) \overset{p}{\curvearrowright} (u, \beta)$，且 $(u, \beta) \overset{q}{\curvearrowright} (x, \tau)$，其中 $p$ 和 $q$ 唯一共有的 $p{\cdot}q$ 顶点是 $u$，则 $(v, \alpha) \curvearrowright (x, \tau)$。这与“由一条无尖点简单路径相连”这一关系不同。

• 对于 ↱-连通的 $S$ 中的 $v$ 和 $u$，从 $v$ 到 $u$ 至少有两条无尖点路径：一条以某种颜色 $\alpha$ 开头，这是将定义应用于 $G$ 的任意一种颜色所得；另一条以颜色 $\beta \neq \alpha$ 开头，这是将定义应用于颜色 $\alpha$ 所得。

本节旨在证明推论8.11：无尖点环的连通并是 ↱-连通的。

**引理8.9.** 无尖点环是 ↱-连通的。

证明。 考虑一个由 $\omega, v \neq u$ 顶点组成的无尖点环，其中 $\omega$ 和 $\alpha$ 具有某种颜色。由于 $\omega$ 在 $v$ 处没有尖点，将其视为源为 $v$ 的环时，其起始颜色或终止颜色都不是 $\alpha$ （事实 2.3）：不妨反向 $p\omega$，假设其起始颜色不是 $\alpha$。称 $p$ 为从 $v$ 到 $u$ 的 $\omega$ 前缀：那么 $(v, \alpha) \curvearrowright (u, \beta)$，其中 $\beta$ 是 $p$ 的终止颜色。 □

**引理 8.10**。 设 $S$ 和 $R$ 是 $G$ 的两个 ↱-连通子图，且至少有一个公共顶点。那么 $S \cup R$ 是 ↱-连通的。

证明。 考虑顶点 $v \neq u \in S \cup R$ 和 $\alpha$ 以及一种颜色。如果 $v, u \in S$ 或 $v, u \in R$，那么我们可以利用 $S$ 或 $R$ 的 ↱-连通性得出结论。不失一般性，假设 $v \in R \backslash S$ 和 $u \in S \backslash R$。

根据假设，存在一个顶点 $x \in S \cap R$；必然有 $v \neq x$。由 $R$ 的 ↱-连通性，存在一条路径 $p$，位于 $R$ 中，使得 $(v, \alpha) \overset{p}{\curvearrowright} (x, \beta)$。考虑 $p$ 的一个最小前缀 $p'$

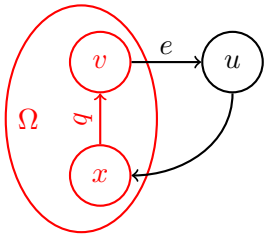



图 22：引理8.12证明示意图

以 $S \cap R$ 结束： $p'$ 除了其目标 $x' \in S \cap R$ 外，在 $S$ 中没有顶点。称 $p'$ 的终止颜色为 $\beta'$：我们有 $(v,\ \alpha) \overset{p'}{\curvearrowright} (x',\ \beta')$（注 3.2）。由带有 $R \ni x' \neq u \notin R$ 的 $S$ 的 $\curvearrowright$-连通性，存在一条路径 $q$，位于 $S$ 中，使得 $(x',\ \beta') \overset{q}{\curvearrowright} (u,\ \tau)$。因此， $p' \cdot q$ 是一条从 $v$ 到 $u$ 的简单开放无尖点路径（引理 2.2，因为 $p'$ 在 $S$ 中唯一的顶点是其目标 $x'$）。其起始颜色是 $p'$ 的起始颜色，因此也是 $p$ 的起始颜色，故 $(v,\ \alpha) \overset{p'\cdot q}{\curvearrowright} (u,\ \tau)$。

□

换言之，前一个引理告诉我们，$\curvearrowright$-连通子图的连通并是 $\curvearrowright$-连通的。一个直接推论是，对于无尖点环的并，$\curvearrowright$-连通等价于连通。

**推论8.11**。 $G$ 的有限个无尖点环的并是 $\curvearrowright$-连通的，当且仅当它是连通的。

证明。 正向推论显然。反向推论由引理8.9和8.10得出，使用关于无尖点环数量的归纳法。设 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i$ 是 $n$ 无尖点环的连通并。空情形 $n = 0$ 显然；若 $n = 1$，则 $\Omega = \omega_1$，由引理 8.9 可知其为$\curvearrowright$-连通。否则， $n > 1$ 且 $\Omega = S \cup \omega_n$，其中 $S = \bigcup_{i=1}^{n-1} \omega_i$ 是$n-1$ 无尖点环的并。由 $\Omega$ 的连通性可知， $S$ 的每个连通分支 $S_j$ 都满足$S_j \cap \omega_n \neq \emptyset$，其中 $S_j$ 是无尖点环的连通并。根据归纳假设，每个 $S_j$都是 $\curvearrowright$-连通的，而 $\omega_n$ 也由引理 8.9 可知是如此。于是，通过对 $\omega_n \cup S_1$、$\omega_n \cup S_1 \cup S_2$、……、 $\omega_n \cup S = \Omega$反复应用引理 8.10，$\Omega$ 是 $\curvearrowright$-连通的。

□

8.2. **寻找一个分裂顶点**。 我们现在利用 $\curvearrowright$-连通性来证明我们的定理，并用到 $\mathfrak{O}$ （定义 8.1）中的每个元素都是连通的这一事实，这一点由推论8.11保证。

**引理8.12**。 设 $\Omega \in \mathfrak{O}$，且 $e$ 是一条边，其端点为 $v$ 和 $u$，满足 $v \in \Omega \not\ni u$，并且$(v, \mathsf{c}(e, v))$ 不是 $G$ 的尖点。那么，对任意顶点 $x \in \Omega$ 和颜色 $\alpha$，$(u, \mathsf{c}(e, u)) \curvearrowright (x, \alpha)$均不成立。

证明。图 22 展示了该证明的示意图。为导出矛盾，假设对某个 $x \in \in \Omega$ 和颜色 $\alpha$，$p(u, \mathsf{c}(e, u)) \curvearrowright (x, \alpha)$。取一个非空前缀后， $p$ 在 $\Omega$ 中唯一的顶点是其目标 $x$，且 $\Omega \ni x \neq u \notin \Omega$。由于根据推论8.11，$\Omega$ 是 $\curvearrowright$-连通的，$q$因此 $\Omega$ 中存在一条从 $x$ 到 $v$ 的路径 $q$，其中 $q$ 要么为空，要么对某个颜色 $\beta$，有 $(x, \alpha) \curvearrowright (v, \beta)$。根据引理 2.1 和 2.2， $\omega = (v, e, u) \cdot p \cdot q$是一个环，因为 $p$不能以 $e$ 开始。此外，该环是无尖点环，因为 $(v, \mathsf{c}(e, v))$ 不是尖点。因此， $\Omega \cup \omega$ 是无尖点环的连通并，这与 $\Omega \in \mathfrak{O}$ 的极大性矛盾。

□

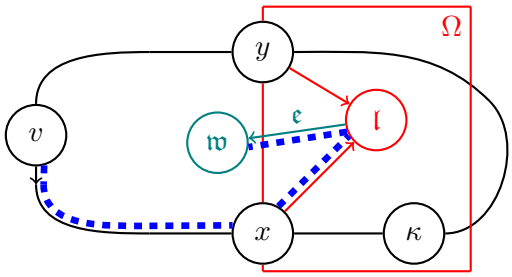



图 23：命题 8.14 证明中命名元素的示意图： $v$ 不在无尖点环中，而 $\kappa$ 在无尖点环中的情况

这意味着，极大元对于 $\lhd$ 的顶点不能属于无尖点环。

**引理 8.13**。 假设 $G$ 满足 $(H_G^1)$。考虑 $\Omega \in \mathfrak{O}$， $v \in \Omega$ 是一个顶点，而 $\alpha$ 是一种颜色。那么，要么 $v = \mathfrak{l}(\Omega)$ 且 $\alpha = \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{l}(\Omega))$，要么存在一条位于 $p$ $\Omega$ 内的路径，使得 $p \cdot (\mathfrak{l}(\Omega)\ \mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega)) \lhd (\mathfrak{w}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega), \mathfrak{w}(\Omega)))$.

证明。 由于 $\mathfrak{l}(\Omega) \in \Omega$，利用推论8.11，存在一条路径 $p$，位于 $\Omega$ 中，从 $v$ 到 $\mathfrak{l}(\Omega)$，且$p$要么为空，要么为 $(v,\ \alpha) \Rsh (\mathfrak{l}(\Omega)\ \beta)$，其中某个颜色为 $\beta$。考虑路径 $p \cdot (\mathfrak{l}(\Omega)\ \mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))$。它是简单且开放的，因为 $p$ 的所有顶点都属于 $\Omega$，而 $\mathfrak{w}(\Omega)$ 位于 $\Omega$ 之外（引理 2.2）。此外，这条路径无尖点，因为 $p$ 无尖点，并且利用 $(H_G^1)$。

因此，如果 $p$ 非空，那么 $(v, \alpha) \overset{p\cdot(\mathfrak{l}(\Omega),\mathfrak{e}(\Omega),\mathfrak{w}(\Omega))}{\Rsh} (\mathfrak{w}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega)))$ 成立，因为 $p \cdot (\mathfrak{l}(\Omega)\ \mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))$ 的起始颜色就是 $p$ 的起始颜色。如果 $p$ 为空，那么 $v = \mathfrak{l}(\Omega)$、$(\mathfrak{l}(\Omega)\ \mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))$ 和 $(v, \alpha) \Rsh (\mathfrak{w}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega)))$ 均成立，除非 $\alpha = \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{l}(\Omega))$；若是如此，则 $p \cdot (\mathfrak{l}(\Omega)\ \mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))$，证毕。两种情况下，我们都得到 $(v, \alpha) \Rsh (\mathfrak{w}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega)))$。

此外，考虑任意顶点-颜色对 $(u, \beta)$，并假设 $(\mathfrak{w}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))) \Rsh (u, \beta)$。根据引理 8.12， $u \notin \Omega$，因此特别地， $u$ 不是 $p$ 的顶点；又因为 $q$ 是开放的，所以 $u \neq \mathfrak{w}(\Omega)$。因此， $(v, \alpha) \overset{p\cdot(\mathfrak{l}(\Omega)\ \mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega))}{\lhd} (\mathfrak{w}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{w}(\Omega)))$。 □

这处理了顶点位于无尖点环中的顶点-颜色对。对于其余情况，如果找到的尖点位于不属于无尖点环的顶点上，我们可以应用尖点循环（推论 2.7）；如果它位于这样的环中，则可以应用尖点最小化（推论 2.8）。后一种情况下，我们需要对路径作一些研究，因此下一个结果的证明会稍长一些。

**命题 8.14**。 假设 $G$ 满足 $(H_G^1)$ 和 $(H_G^2)$。设 $(v, \alpha)$ 是一个顶点-颜色对，不属于 $\{(\mathfrak{l}(\Omega), \mathsf{c}(\mathfrak{e}(\Omega)\ \mathfrak{l}(\Omega)) \mid \Omega \in \mathfrak{O}\}$。若 $v$ 不是分裂，则存在一个尖点 $(u, \beta)$，使得 $(v, \alpha) \lhd (u, \beta)$。

证明。 若 $v$ 属于一个无尖点环，则由引理 8.13 可得结论，该引理利用 $(H_G^2)$ 给出了一个尖点。因此，我们假设情况并非如此。

由于 $v$ 不是分裂的， $\mathcal{M}_v \neq \emptyset$：取一个 $\omega \in \mathcal{M}_v$。不妨反转 $\omega$，并假设其起始颜色不是 $\alpha$ （事实 2.3）。这个环至少包含一个尖点：记 $\kappa$ 为 $\omega$中第一个尖点的顶点，其颜色记为 $\beta$。根据 $\kappa$ 是否属于无尖点环，我们分两种情况讨论。

如果 $\kappa$ 不属于无尖点环，那么根据推论 2.7，我们有 $(v,\ \alpha) \overset{\omega_{(v,\kappa)}}{\lhd} (\kappa,\ \beta)$。

因此，以下假设 $\kappa$ 属于一个无尖点环，并将包含 $\kappa$ 的极大连通并记为 $\Omega$；注意 $\Omega \in \mathfrak{O}$。现在我们将为一些顶点、边、路径和颜色命名；图 23 展示了一个示例。我们用记号 $\mathfrak{e}$ 表示 $\mathfrak{e}(\Omega)$，用 $\mathfrak{l}$ 表示 $\mathfrak{l}(\Omega)$，用 $\mathfrak{w}$ 表示 $\mathfrak{w}(\Omega)$。设 $x$（分别为 $y$）是 $\omega$ 中属于 $\Omega$ 的第一个（分别为最后一个）顶点。注意 $v \notin \{x, y\}$，因为 $v$ 不属于任何无尖点环，因此也不属于 $\Omega$。令 $\alpha_x$ 为 $\omega_{(v,x)}$ 的终止颜色，$\alpha_y$ 为 $\omega_{(y,v)}$ 的起始颜色。根据引理 8.13，存在一条路径 $\rho$，位于 $\Omega$ 中，连接 $x$ 和 $\mathfrak{l}$，使得要么（$x = \mathfrak{l}$ 因而）$\rho$ 为空，要么 $(x, \alpha_x) \overset{\rho\cdot(\mathfrak{l},\mathfrak{e},\mathfrak{w})}{\lhd} (\mathfrak{w},\mathfrak{c}(\mathfrak{e},\mathfrak{w}))$。类似地，由引理 8.13，$\Omega$ 中存在一条位于 $y$ 与 $\mathfrak{l}$ 之间的路径 $\chi$，使得要么（$y = \mathfrak{l}$ 从而）$\chi$ 为空，要么 $(y, \alpha_y)\ \chi\cdot(\mathfrak{l},\mathfrak{e},\mathfrak{w}) \lhd (\mathfrak{w},\mathfrak{c}(\mathfrak{e},\mathfrak{w}))$。

我们来证明 $\mathfrak{w} \notin \omega_{(v,x)}$，并且若对某个顶点-颜色对 $(u, \tau)$ 有 $(\mathfrak{w}, \mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w})) \Rsh (u, \tau)$，则 $u \notin \omega_{(v,x)}$。为此，只需证明不存在简单的、开放的或空的无尖点路径 $q$，其源为 $\mathfrak{w}$、目标为 $u \in \omega_{(y,v)} \cdot \omega_{(v,x)}$，且其起始颜色（若存在）不是 $\mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w})$。我们采用反证法：取这样一个 $q$。注意 $q$ 的任何顶点都不属于 $\Omega$，否则我们将由 $(H_G^1)$ 与引理8.12 矛盾。特别地，$u \notin \{x, y, \mathfrak{l}\}$ 与 $q$ 既不与 $\rho$ 也不与 $\chi$ 共享任何顶点。于是由推论 2.8 得到矛盾：要么 $\mathfrak{e}$ 属于一个无尖点环，从而与 $\Omega$ 的极大性矛盾，要么存在一个以 $v$ 开始的环，在 $v$ 处无尖点，且尖点严格少于 $\omega$，从而与 $\omega \in \mathcal{M}_v$ 矛盾。因此我们断定不存在如 $q$ 这样的路径。

由于 $\mathfrak{w} \notin \omega_{(v,x)}$，根据引理 2.2，$p = \omega_{(v,x)} \cdot \rho \cdot (\mathfrak{l}, \mathfrak{e}, \mathfrak{w})$ 是一条简单的开放路径（见图 23），按构造它是无尖点的，并且 $(H_G^1)$。因此，$(v, \alpha) \overset{p}{\Rsh} (\mathfrak{w}, \mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w}))$。我们不可能有 $(\mathfrak{w}, \mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w})) \Rsh (u, \tau)$ 且 $u \in p$：我们已经有 $u \notin \omega_{(v,x)}$，并且 $u \notin \rho$ 由 $(x, \alpha_x) \overset{\rho\cdot(\mathfrak{l},\mathfrak{e},\mathfrak{w})}{\lhd} (\mathfrak{w}, \mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w}))$ 或 $\rho$ 为空可得。因此，$(v, \alpha) \overset{p}{\lhd} (\mathfrak{w}, \mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w}))$，其中 $(\mathfrak{w}, \mathfrak{c}(\mathfrak{e}, \mathfrak{w}))$ 根据 $(H_G^2)$ 是一个尖点。

□

定理 8.2 的证明。取 $(v, \alpha) \in P$ 为关于 $\lhd$（限制于 $P$）的极大者：$v$ 是分裂的。事实上，否则根据命题 8.14，将存在某个尖点 $(u, \beta)$，使得 $(v, \alpha) \lhd (u, \beta)$。由于 $P$ 支配尖点，我们将得到 $(u, \beta) \in P$ 或 $(v, \alpha) \lhd (u, \beta) \lhd (x, \tau)$，其中某个 $(x, \tau) \in P$，这与 $(v, \alpha)$ 的极大性矛盾。

□

## 9. 乘法-加法证明网

现在，我们借助 Dominic Hughes 和 Rob van Glabbeek [HvG05] 定义的证明网，将第 6 节中关于序列化的证明扩展到包含加法联结词的情形。证明的核心与乘法情形相同：通过一个分裂顶点，我们可以利用归纳法得出结论；主要难点在于找到这样的分裂顶点。针对乘法证明网采用的两种方法都可以扩展到乘法-加法情形：既可以像第 6.2 节那样寻找一个分裂的 ⅋- 或 &-顶点，也可以像第 6.3 节那样借助 Yeo 定理寻找某种分裂顶点。这里我们只扩展第二种方法，因为它能得到更一般的结果。此外，我们稍微修改了 [HvG05] 中证明网的定义，以允许开放假设；我们还加入 $ax$-顶点，以得到一个有向偏图。

**9.1. 带 mix 规则的无单位乘法-加法线性逻辑**。线性逻辑的无单位乘法-加法片段 [Gir87] 的公式由以下文法给出，其中 $X$ 属于一个可数集 **原子**：

$$A ::= X \mid X^{\perp} \mid A \otimes A \mid A \parr A \mid A \,\&\, A \mid A \oplus A$$

通过德摩根对偶，**对偶** 算子 $(_)^{\perp}$ 扩展为定义在所有公式上的对合：$(X^{\perp})^{\perp} = X$、$(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} \parr B^{\perp}$、$(A \parr B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes B^{\perp}$、$(A \oplus B)^{\perp} = A^{\perp} \,\&\, B^{\perp}$ 以及 $(A \,\&\, B)^{\perp} = A^{\perp} \oplus B^{\perp}$。

形式上，与乘法线性逻辑一样，我们考虑局部化公式，以获得公式 $A$出现位置的概念。

我们考虑由无单位乘法-加法线性逻辑中的无割[5] 开放 推导给出的演绎系统 $\mathrm{MALL}^{0,2}$ 假设，其中包含$mix$ 规则和原子公理 （即 引入一个原子及其对偶）：

$$\frac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(ax) \qquad \frac{}{\vdash A}\,(hyp)$$

$$\frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Delta}{\vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta}\,(\otimes) \qquad \frac{\vdash A, B, \Gamma}{\vdash A \parr B, \Gamma}\,(\parr) \qquad \frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(mix_2) \qquad \frac{}{\vdash}\,(mix_0)$$

$$\frac{\vdash A, \Gamma \quad \vdash B, \Gamma}{\vdash A \,\&\, B, \Gamma}\,(\&) \qquad \frac{\vdash A, \Gamma}{\vdash A \oplus B, \Gamma}\,(\oplus_1) \qquad \frac{\vdash B, \Gamma}{\vdash A \oplus B, \Gamma}\,(\oplus_2)$$

线性逻辑的公理展开过程保证，任何可证相继式都存在一个仅使用原子公理的推导 [Gir87]。当 $\pi$ 是 $\vdash \Gamma$ 的推导，且其（假设）规则作用于（已定位的）公式 $\Delta$ 时，我们记作 $\pi$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$ 的推导。

与线性逻辑的乘性片段相比，主要区别在于 (&) 规则，它引入了上下文共享 $\Gamma$。由此产生了切片 [Gir87，Gir96]这一概念；切片是一种缺少某些加性分量的部分推导。切片的构造使用与推导相同的规则，但 (&) 规则除外：它被替换为两个切片版本：

$$\frac{\vdash A, \Gamma}{\vdash A \,\&\, B, \Gamma}\,(\&_1) \qquad \frac{\vdash B, \Gamma}{\vdash A \,\&\, B, \Gamma}\,(\&_2)$$

此外，我们对（假设）规则施加一项限制。给定一个推导 $\pi$，其中有一条（假设）规则作用于 $\vdash A$，则在 $\pi$ 的每个切片中，都必须有一条（假设）规则作用于该出现项 $A$。例如，下面第一个推导符合这一限制，而另外两个则不符合：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A}\,(hyp) \quad \dfrac{}{\vdash X, X^{\perp}}\,(ax)}{\vdash A \otimes X, X^{\perp}}\,(\otimes) \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash A}\,(hyp) \quad \dfrac{}{\vdash X, X^{\perp}}\,(ax)}{\vdash A \otimes X, X^{\perp}}\,(\otimes)}{\vdash A \otimes X, X^{\perp} \,\&\, X^{\perp}}\,(\&)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash X}\,(hyp) \quad \dfrac{}{\vdash X, X^{\perp}}\,(ax)}{\vdash X, X, X^{\perp}}\,(mix_2) \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash X, X^{\perp}}\,(ax) \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash Y, Y^{\perp}}\,(ax)}{Y \parr Y^{\perp}}\,(\parr)}{\vdash X, Y \parr Y^{\perp}, X^{\perp}}\,(mix_2)}{\vdash X, X \,\&\, (Y \parr Y^{\perp}), X^{\perp}}\,(\&) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash X}\,(hyp) \quad \dfrac{}{\vdash X}\,(hyp)}{\vdash X \,\&\, X}\,(\&)$$

[5]我们的证明 技巧也适用于存在（切割）规则的情况，但带开放假设的 和（切割）规则的证明网定义相当技术性。

我们以这种方式限制（假设）规则，是因为我们的序列化过程总是会生成上述形式的（假设）规则，而且在这一限制下，证明网的概念更简单。此外，我们希望像在乘法线性逻辑中那样，借助（假设）规则定义代换；这会对（假设）规则的使用施加某种限制。若 $\pi_1$是 $\Sigma \vdash \Gamma, A$ 的一个推导，且 $\pi_2$ 是 $A, \Theta \vdash \Delta$的一个推导，那么在 $\pi_2$ 中用 $\pi_1$ 代换假设 $A$，所得的是 $\Sigma, \Theta \vdash \Gamma, \Delta$的一个推导：它由 $\pi_2$ 得到，方法是将作用于 $\vdash A$ 的每一条（假设）规则替换为 $\pi_1$，从而将 $\Gamma$ 添加到 $\pi_2$ 中位于某条 $\vdash A$以下的所有相继式中。若（假设）规则不受限制，所得结果未必是一个推导：见上文 $X \vdash X, X \,\&\, (Y \parr Y^\perp)$ $X^\perp$ 上的推导，我们希望在其中代入一个由作用于 $X$的（公理）规则构成的证明。

最后，**mix-Rétoré 归约** 也在此定义：

$$\dfrac{\vdash \Gamma \quad \vdash}{\vdash \Gamma}\,{}^{(mix_0)}_{(mix_2)} \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Gamma \qquad\qquad \dfrac{\vdash \qquad \vdash \Gamma}{\vdash \Gamma}\,{}^{(mix_0)}_{(mix_2)} \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Gamma$$

再次，i t 在推导上定义了一个合流且强正则化的重写系统 .

**引理 9.1** (Mix-Rétoré 范式)。 如果 $\pi$ 是一个来自 乘法加法线性逻辑$^{0,2}$ 假设 且处于 *mix-Rétoré* 范式的推导，那么它要么是 $(mix_0)\vdash$ ，要么不包含 $(mix_0)$ 规则。

证明。 与乘法线性逻辑$^{0,2}$ $_{hyp}$中一样，（$mix_2$）是唯一接受空相继式作为前提的规则。 □

9.2. **无单位乘加线性逻辑的证明网**。 我们采用 [HvG05], 中的无单位MALL证明网概念，并在下文加以回顾——更多细节以及指导这些定义的直觉，请参阅该文。乘法加法线性逻辑证明网还存在其他定义：吉拉尔的原始定义 [Gir96], ，以及其他定义，例如 [DG11, HH16b]。尽管如此，我们所遵循的定义从典范性和切消等角度看是最令人满意的定义之一：关于其他定义的比较，见 [HvG05, HvG16], 或 [HH16b] 的引言。不过，我们并未完全采用这一定义：与推导一样，我们允许开放假设在所有切片之间共享；我们还添加$ax$-顶点以得到有向偏图——否则公理连接是无向的——并将跳跃边从这些顶点引出，而不是从叶子引出。

我们总是将一个公式 $A$ （的某次出现）视为其**句法树**：内部顶点是其联结词，叶子是其原子，边朝向根，且有一条源为根、目标未定义的部分边。这条最后的边就是与 $A$**相关联的**句法树的边。相继式 $\vdash \Gamma$ 上的一个**（共享开放）假设**是 $\Gamma$中的一个顶点（即句法树中的一个顶点）。给定一组假设 $\Delta$，我们将带有这些假设 $\Delta$的相继式 $\vdash \Gamma$ 记作$\Delta \vdash \Gamma$ 。我们默认将 $\Delta \vdash \Gamma$ 视为如下有向偏图，并称之为它的**句法森林**：取 $\Gamma$ 中各公式的句法树之并，并删除以 $\Delta$中的顶点为根的所有子树，同时保留它们的部分边。请注意假设与叶子的区别：一个假设对应一条没有源的部分边。例如，考虑 $Z \,\&\, Z^\perp \vdash X \oplus (Y \,\&\, Y)$，$(Y^\perp \,\&\, X^\perp) \otimes (Z \,\&\, Z^\perp)$，其句法森林如图24所示。我们将在这个带有假设的相继式上具体应用本部分中定义的概念。

给定 $v$ 中的一个顶点 $\Delta \vdash \Gamma$，我们称 $v$ 的**前提** 为句法森林中以 $v$ 为目标的边。类似地， $v$ 的**结论** 是句法森林中以 $v$ 为源的边。 $v$ （的句法树）的**论元子树**是这样一棵子树：其部分边是 $v$的前提；论元子树也可能仅由一条部分边构成。例如，这两棵

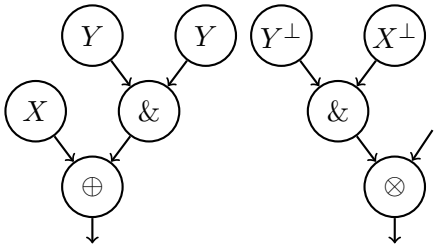



图24： $Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus (Y \,\&\, Y)$，$(Y^{\perp} \,\&\, X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp}$ 的句法森林 )

$\otimes$顶点在图2中的论元子树分别是 $Y^{\perp} \,\&\, X^{\perp}$ 的树，以及一条没有源的边。

带有假设 $\Delta \vdash \Gamma$ 的相继式的 **加性解析**，是指对每个加性（& 或 $\oplus$）顶点删除一个论元子树后得到的任意结果，但不得以此方式删除 中顶点的任何部分边——也就是说，所有源未定义的部分边都必须保留。带有假设 $\Delta \vdash \Gamma$ 的相继式的 **&-解析**，是指对每个 &-顶点删除一个论元子树后得到的任意结果。例如， $Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus$，$(\&X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp})$ 是 $Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus (Y \,\&\, Y)$，$(Y^{\perp} \,\&\, X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp})$ 的六种加性解析之一，而 $Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus (\&Y)$，$(\&X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp})$ 则是其四种 &-解析之一。请注意加性解析与 &-解析在假设上的区别：每条没有源的部分边都必须出现在所有加性解析中，而在某些 &-解析中则可以不出现。

在 $\Delta \vdash \Gamma$ 上的公理链接是 $\Delta \vdash \Gamma$ 中一对互补叶子 $\{X, X^{\perp}\}$，它们对应某个原子 $X$。$\Delta \vdash \Gamma$ 上的连结 $\lambda$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$ 上的一组公理链接，它们构成 $\Delta \vdash \Gamma$ 的某个加性解析的叶子集合的一个划分；这个（唯一的）加性解析记作 $\Delta \vdash \Gamma \restriction \lambda$。在这种情况下，我们称 $\lambda$ 是加性解析 $\Delta \vdash \Gamma \restriction \lambda$ 上的连结。类似地，如果 $\lambda$ 的每个叶子也是某个给定 &-解析的叶子，我们就称 $\lambda$ 位于该 &-解析上（注意，给定的连结可能位于多个 &-解析上，因为 $\oplus$-顶点被删去的论元子树中可能含有一个 &-顶点）。例如，在图25最左侧的部分图中，红色的 ax-顶点构成一个连结 $\lambda_1 = \{\{X, X^{\perp}\}\}$，其加性解析为 $Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus, (\&X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp})$；它也位于以下 &-解析上：$Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus (Y \,\&\,), (\&X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp})$ 和 $Z \,\&\, Z^{\perp} \vdash X \oplus (Y \,\&\,), (\&X^{\perp}) \otimes (Z \,\&\, Z^{\perp})$。

若一组链接 $\Lambda$ 中 $\Delta \vdash \Gamma$ **翻转**一个 &-顶点 $w$，则该顶点的两个前提都属于 $w$。如果存在 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$，使得 $a \in \lambda \backslash \lambda'$，且 $w$ 是 $\{\lambda, \lambda'\}$翻转的唯一 &-顶点，那么我们就说一个公理链接 $a$ **依赖于** $\Lambda$ 中的 &-顶点 $w$。观察图25中的示例，其中链接为 $\lambda_1 = \{\{X, X^{\perp}\}\}$ 和 $\lambda_2 = \{\{Y, Y^{\perp}\}\}$：$\{\lambda_1, \lambda_2\}$翻转的唯一 &-顶点是最右边的那个。此外，对于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$，两个公理链接都依赖于这个 &-顶点，因为它们只包含不同的配对。

有向偏图 $\mathcal{G}_\Lambda$ 定义为 $\Delta \vdash \Gamma \restriction \Lambda$，其中对$\bigcup \Lambda$中的每一对 $\{X, X^{\perp}\}$，都有一个 公理-顶点 $v$，其两条出边分别指向 $X$和 $X^{\perp}$；此外，对于 $\Lambda$中依赖于 $w$ 的每个 &-顶点 $w$，还添加跳边 $v \to w$。当 $\Lambda = \{\lambda\}$ 由单个链接组成时，我们将 $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_{\{\lambda\}}$ 简单记作 $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_{\{\lambda\}}$ —— 它是带有来自 $\lambda$ 的公理-顶点且不含跳边的部分图 $\Delta \vdash \Gamma \restriction \lambda$。回到我们的示例，部分图 $\mathcal{G}_{\lambda_1}$、$\mathcal{G}_{\lambda_2}$、$\mathcal{G}_{\lambda_3}$ 和 $\mathcal{G}_{\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}}$ 如图25所示。

当我们写 $\mathfrak{R}$\&-顶点时，指的是 $\mathfrak{R}$- 或 &-顶点；其他标记组合也同理。$\mathfrak{R}$\&-顶点 $v$ 的一条**切换边** 是 $v$ 的一个前提，或是一条指向 $v$的跳边。**切换环** 是指每个 $\mathfrak{R}$\&-顶点至多有一条切换边的环。

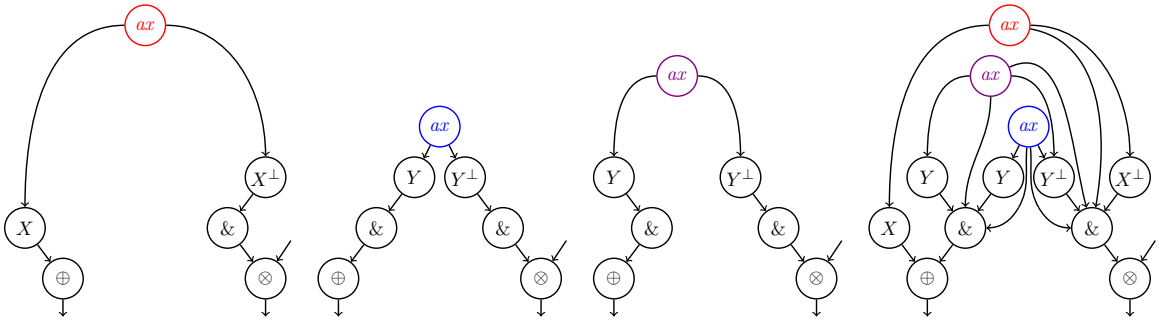



图25：来自一个证明网示例的部分图 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 在 $Z \,\&\, Z^\perp \vdash X \oplus (Y \,\&\, Y)$，$(Y^\perp \,\&\, X^\perp) \otimes (Z \,\&\, Z^\perp)$：从左到右 $\mathcal{G}_{\lambda_1}$， $\mathcal{G}_{\lambda_2}$， $\mathcal{G}_{\lambda_3}$ 和 $\mathcal{G}_{\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}}$

**定义 9.2**（证明网）。 相继式上的一个**证明网** $\theta$，其假设为 $\Delta \vdash \Gamma$，是一个满足以下条件的连结集合：

**(P1) 分辨**：在 $\Delta \vdash \Gamma$的每个&-解析上，恰好有一个 $\theta$ 的连结。**(P2) 乘法线性逻辑**：对于每个连结 $\lambda \in \theta$， $\mathcal{G}_\lambda$ 没有切换环。**(P3) 切换**：每个由两个或更多链接组成的集合 $\Lambda \subseteq \theta$ 都会切换一个不在 $\mathcal{G}_\Lambda$的任何切换环中的&-顶点。

**注记9.3.** 通过将要求(P2)替换为下述要求，可以得到不含 mix 规则的乘法加法线性逻辑的连通证明网概念。连结 $\lambda$ 的 **⅋-切换** 是 $\mathcal{G}_\lambda$ 的任一子图，由断开每个 ⅋-顶点的两个前提之一而得到；若将这一边的选择记为 $\phi$，则它所产生的部分图为 $\mathcal{G}_\phi$。例如， ⅋-切换中的环是切换环，正如在 $\mathcal{G}_\phi$ 中，所有 ⅋\&-顶点都具有唯一的切换边。

(P2$^\circ$) 乘法线性逻辑 乘法线性逻辑：对于每个连结 $\lambda \in \theta$的每个 ⅋-切换 $\phi$， $\mathcal{G}_\phi$ 都是无环且连通的 .

注意到 (P2$^\circ$) 蕴含 (P2)，因此连通证明网是证明网的一种特殊类型。与乘法线性逻辑一样，可以从序列化推导出连通序列化。

这些条件称为**正确性判据**。条件 (P1) 是所有证明网 [HvG05] 的正确性判据，而 (P2)（分别是 (P2$^\circ$)）是 MLL 证明网（分别是连通 MLL 证明网）的 Danos-Regnier 判据 [DR89]。然而，对于无割MALL证明网，仅有 (P1) 和 (P2) 并不足够，因此还需要最后一个条件 (P3)，以考虑各切片之间的相互作用；类似条件也见 [DG11] 。由单个连结组成的集合 $\lambda$ 不纳入 (P3) 的考量，因为根据 (P2)，部分图 $\mathcal{G}_\lambda$没有切换环。若一个证明结构满足 (P1)，我们就称其为**证明结构** 。可以验证，图25中的示例 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 是一个（连通）证明网。

**注 9.4.** 条件 (P1) 意味着假设属于所有 &-解析。事实上，每个 &-解析上都有一个连结，其加法分辨（包含所有源未定义的部分边）包含于该 &-解析中。这意味着，若某个相继式中的假设只属于部分 &-解析，例如 $X \vdash X \,\&\, (Y \parr Y^\perp)$，则无法将其构造成证明网。

我们还需要几个定义。固定相继式上假设为 $\Delta \vdash \Gamma$ 的连结集合 $\Lambda$，以及 $\mathcal{G}_\Lambda$ 中的一个顶点 $v$ 。

$$\frac{}{\{\{\{X, X^\perp\}\}\} \triangleright \vdash X^\perp, X}\ (ax) \qquad \frac{}{\{\emptyset\} \triangleright A \vdash A}\ (hyp)$$

$$\frac{\theta \triangleright \Sigma \vdash A, \Gamma \quad \vartheta \triangleright \Phi \vdash B, \Delta}{\{\lambda \cup \mu \mid \lambda \in \theta, \mu \in \vartheta\} \triangleright \Sigma, \Phi \vdash A \otimes B, \Gamma, \Delta}\ (\otimes) \qquad \frac{\theta \triangleright \Delta \vdash A, B, \Gamma}{\theta \triangleright \Delta \vdash A \parr B, \Gamma}\ (\parr)$$

$$\frac{\theta \triangleright \Sigma \vdash \Gamma \quad \vartheta \triangleright \Phi \vdash \Delta}{\{\lambda \cup \mu \mid \lambda \in \theta, \mu \in \vartheta\} \triangleright \Sigma, \Phi \vdash \Gamma, \Delta}\ (mix_2) \qquad \frac{}{\{\emptyset\} \triangleright \vdash}\ (mix_0)$$

$$\frac{\theta \triangleright \Delta \vdash A, \Gamma \quad \vartheta \triangleright \Delta \vdash B, \Gamma}{\theta \cup \vartheta \triangleright \Delta \vdash A \,\&\, B, \Gamma}\ (\&)$$

$$\frac{\theta \triangleright \Delta \vdash A, \Gamma}{\theta \triangleright \Delta \vdash A \oplus B, \Gamma}\ (\oplus_1) \qquad \frac{\theta \triangleright \Delta \vdash B, \Gamma}{\theta \triangleright \Delta \vdash A \oplus B, \Gamma}\ (\oplus_2)$$

图26：将乘法加法线性逻辑$^{0,2}$ 假设 推导归纳地定义为连结集合

• 若顶点 $v$ 不是叶子，且是某个 $\Delta \vdash \Gamma$ 的句法树的根，或者它是一个 $ax$-顶点，其出边分别连向叶子 $X^\perp$ 和 $X$，且这两个叶子分别是两个 $\Delta \vdash \Gamma$ 句法树的根，则该顶点为**终端**。

• 若加法顶点在$\mathcal{G}_\Lambda$中恰有一个（分别为两个）前提，则称其为一**元**（分别称为二**元**）。

• 非叶顶点 $v$ 在以下情况下称为**分裂**：– $v$ 是一个$ax \backslash \otimes \backslash \oplus$-顶点，且不属于 $\mathcal{G}_\theta$的任何环；– $v$ 是一个 $\parr \backslash$&- 顶点，且其结论不属于 $\mathcal{G}_\theta$ 的任何环；（图 11 展示了一个示例，其中 $\oplus$-顶点类似于 $\otimes$-顶点，而 &-顶点类似于 $\parr$-顶点；叶子永远不会是分裂顶点。）

9.3. **去序列化**。 我们将一个具有假设$^{0,2}$ $_{hyp}$ 的 MALL 推导 $\pi$ 去序列化为 $\vdash \Gamma$ 上的证明网。我们按照 $\pi$ 进行归纳，采用图26中详述的步骤，并遵循 [HvG05] 的记法 $\theta \triangleright \Delta \vdash \Gamma$，表示“$\theta$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$上的连结集合”。我们将 $\mathcal{D}$（$\pi$）记作 $\pi$ 去序列化得到的连结集合。按照 [HvG05]中的方法进行归纳，很容易证明 $\mathcal{D}$（$\pi$）是一个证明网。例如，由唯一一个连结 $\{\{X, X^\perp\}\}$组成的集合 $\{\{\{X, X^\perp\}\}\}$，而该连结本身只有一个公理链接 $\{X, X^\perp\}$，是相继式 $\vdash X^\perp, X$上的证明网：该相继式只有一个 &-解析，并且其中没有（切换）环 $\mathcal{G}_{\{\{X,X^\perp\}\}}$。

**引理9.5**（代换的去序列化）。 如果 $\pi$ 是将推导$\pi_1$ 代换到推导 $\pi_2$中假设 $A$ 的位置，那么 $\mathcal{D}(\pi) = \{\lambda_1 \cup \lambda_2 \mid \lambda_1 \in \mathcal{D}(\pi_1)\ \lambda_2 \in \mathcal{D}(\pi_2)\}$。

证明。 对推导 $\pi_1$作归纳。 □

## 10. 序列化

与乘法线性逻辑的证明网类似，乘法-加法线性逻辑的证明网有一个关键结果：去序列化函数是满射：

**定理10.1**（序列化）。 给定一个证明网 $\theta$，存在一个乘法加法线性逻辑$^{0,2}$ 假设 中的推导 $\pi$，使得 $\theta = \mathcal{D}(\pi)$；$\pi$ 称为 $\theta$ 的**序列化**。

与 MLL 证明网的情况完全相同，这一结果也有若干变体：当限制为不含假设的证明网时，序列化得到不含（假设）规则的推导；当要求满足正确性判据（P2$^c$）时，序列化得到既不含（$mix_2$）也不含（$mix_0$）规则的推导；或者也可以加入（切割）规则。此类序列化结果可通过我们为乘法加法线性逻辑提出的 Yeo 定理的参数化局部版本（定理 8.2），以统一且模块化的方式推导出来，这与我们在第 6 节处理 MLL 证明网的方式如出一辙。

我们按如下方式进行。定理 8.2 使我们能够找到一个分裂顶点，这是通向序列化的关键中间结果；对于参数的不同取值，我们会找到不同类型的分裂顶点（第 10.1 节）。然后，可以从任意分裂顶点的存在性推出序列化，不过这比乘法情形更为困难（第 10.2 节）。

**10.1. 寻找分裂顶点。** 我们从证明的核心开始：寻找一个分裂顶点。据我们所知，所有（为数不多的）针对 [HvG05]证明网的序列化证明都采用了这种方法 [HvG05, DL22]。我们可以将第 8 节的内容直接移植到乘法加法线性逻辑证明网的框架中，并在过程中简化一些概念和证明，就像我们在第 6.2 节对乘法线性逻辑所做的那样。我们选择不在此这样做，因为证明会长得多。相反，我们从 Yeo 定理的一个推广中推导出各种类型的分裂顶点的存在性，这与我们在第 6.3 节所做的类似。乘法线性逻辑与乘法加法线性逻辑之间的主要区别在于切换环的存在；它使我们无法应用定理 3.6，这也是我们需要更一般的定理 8.2 的原因。直观地说，切换环可以看作一个矛盾依赖区域（也就是说，对一个 $\oplus$ 的前提作出不同选择，或序列化顺序依赖于切片），而将其投影到某个切片上时，这些依赖便会消解。我们必须从这样的环中找到一条跳边，连接到导致这些依赖的 &-顶点，并且这一点要对所有切片都成立。定理 8.2 中与之对应的是边 $\mathfrak{e}(\Omega)$，它使我们能够离开环 $\Omega$。要应用定理 8.2，我们需要给出满足所需假设的局部着色和出口函数。

关于证明网（所诱导的部分图）的局部着色，我们采用乘法线性逻辑中的做法。

**定义 10.2.** 当证明网配有（其部分图的）局部着色，且至少有三种颜色并满足以下条件时，称其为**良着色**：

- 对于一个带有前提 $e_1$ 和 $e_2$、结论为 $f$ 的 $\otimes$-或 $\oplus$-顶点 $v$，$\mathsf{c}(e_1, v)$、$\mathsf{c}(e_2, v)$ 和 $\mathsf{c}(f, v)$ 两两不同；
- 对于一个带有前提 $e_1$ 和 $e_2$、结论为 $f$ 的 $\parr$-顶点 $v$，$\mathsf{c}(e_1, v) = \mathsf{c}(e_2, v) \neq \mathsf{c}(f, v)$；
- 对于一个 &-顶点，其前提为 $e_1$ 和 $e_2$，结论为 $f$，且有传入跳边 $(g_i)_i$，对所有 $i$ $\mathsf{c}(e_1, v) = \mathsf{c}(e_2, v) = \mathsf{c}(g_i, v) \neq \mathsf{c}(f, v)$；
- 对于一个 $ax$ 顶点 $v$，其出边 $e_1$ 和 $e_2$ 指向叶子，且其出跳边 $(g_i)_i$、$\mathsf{c}(e_1, v)$、$\mathsf{c}(e_2, v)$ 以及所有 $\mathsf{c}(g_i, v)$ 两两不同；
- 对于一个叶子 $v$，其结论为 $f$，且入边 $(g_i)_i$、$\mathsf{c}(f, v)$ 以及所有 $\mathsf{c}(g_i, v)$ 两两不同。

总是可以将证明网转化为良着色证明网：

- 对所有与 $ax$-、$\otimes$- 或 $\oplus$-顶点关联的边使用不同的颜色；
- 对 实线用于每个 $\parr$\&-顶点的入边，并将 虚线 用于其结论；

例如，图27展示了图25中的证明网 $\mathcal{G}_{\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}}$ 的一种局部着色。

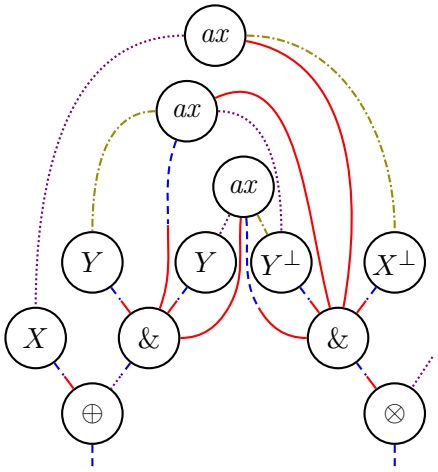



图27：来自图25的良着色证明网 $\mathcal{G}_{\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}}$

注意，良着色证明网的尖点恰好是这样的数对：$(v,\ \alpha)$，其中 $v$ 是一个 &-顶点，而 $\alpha$ 是与其入边相关联的颜色。于是，根据引理 5.4，证明网中的无尖点路径就是切换路径；并且，一个非叶顶点在第9.2节意义下是分裂的，当且仅当它在第2.2节意义下是分裂的。

关于出口函数，它可由 [HvG05],中的一个基本结果得到，其证明相当简短——不足一页； [DG24]中亦有更为详尽的证明。值得注意的是，除用于得出子图保持正确外，这是我们证明序列化时对正确性判据的唯一使用。为求完备，且由于我们略微修改了 [HvG05], 中证明网的定义，我们给出这一关键结果的改写证明。

**引理10.3** [HvG05，引理4.32]. 给定证明网 $\theta$， $\mathcal{G}_\theta$ 的切换环的每一个非空并Ω 都有一条从中向外的跳边：对某个 $v \in$Ω 以及某个&顶点 $w \notin \Omega$，在 $\mathcal{G}_\theta$中存在跳边 $v \to w$ 。

证明。 对于连结集合 $\Lambda \subseteq \theta$，我们将 $W(\Lambda)$ 取为这样的 &-顶点集合：其右前提位于 无 $\Lambda$ 的连结的加性解析中。考虑 $\Lambda \subseteq \theta$，其中 $\mathcal{G}_\Lambda$ 包含 Ω，并选取使得 $W(\Lambda)$ 在包含关系下极大。由 (P2)，若 $\Lambda$ 是单元素集，则 $\mathcal{G}_\Lambda$ 不可能包含非空的 Ω，矛盾。因此， $\Lambda$ 的大小至少为二，我们可以对其应用 (P3)：存在一个由 $\Lambda$ 切换的 &-顶点 $w$，它不在 $\mathcal{G}_\Lambda$ 的任何切换环中。特别地， $w \notin \Omega$ 且 $w \notin W(\Lambda)$。

我们将展示一条通向 $w$ 的跳边。为此，我们定义一个新的链接集合，以利用关于 $W(\Lambda)$ 的极大性假设。对于连结 $\lambda \in \Lambda$，我们如下定义 $\lambda^w$。考虑 $R(\lambda)$，即保持 $w$ 的左前提的 &-解析，在后者所包含的 &-顶点上（可能除 $w$ 外）作出与 $\lambda$ 的加法分辨相同的前提选择，并保持所有其他 &-顶点的左前提。由 (P1)，在 $R(\lambda)$ 上存在 $\theta$ 的唯一连结：即 $\lambda^w$。令 $\Lambda^w$:
$= \{\lambda^w \mid \lambda \in \Lambda\}$。注意到 $W(\Lambda^w) \supseteq W(\Lambda) \cup \{w\}$。

由 $\Lambda$ 的极大性， $\not\subseteq \mathcal{G}_{\Lambda^w}$：Ω 中存在一条边 $v \to u$，它不属于 $\mathcal{G}_{\Lambda^w}$。不失一般性， $v$ 是一个$ax$-顶点。事实上，如果目标是某些$ax$-顶点的环 Ω 中的所有边都属于 $\mathcal{G}_{\Lambda^w}$，那么 Ω 就会包含在 $\mathcal{G}_{\Lambda^w}$ 中。只需证明 $v \to w$ 是 $\mathcal{G}_\theta$ 中的一条跳边即可得出结论。我们通过矛盾法进行证明，这意味着以下性质成立：对于所有

$\lambda \in \Lambda$， $v \in \mathcal{G}_\lambda \iff v \in \mathcal{G}_{\lambda^w}$。事实上，如果 $v \in \mathcal{G}_\lambda$，而 $v \notin \mathcal{G}_{\lambda^w}$（或反之），那么 $v \to w$ 就是一条跳边，因为 $\{\lambda, \lambda^w\}$ 唯一切换的 &-顶点是 $w$。

若 $v \to u$ 不是跳边，则它属于某个 $\lambda \in \Lambda$ 的 $\mathcal{G}_\lambda$，因此也属于 $\mathcal{G}_{\lambda^w}$；这就产生了矛盾，因为 $v \to u$不是 $\mathcal{G}_{\Lambda^w}$的一条边。因此， $v \to u$是一条跳边：存在 $\lambda$， $\mu \in \Lambda$，使得与 $v$ 相关联的公理链接 $a$ 属于 $\lambda$，但不属于 $\mu$，并且 $w$是唯一一个被 $\{\lambda, \mu\}$切换的 &-顶点。但这样一来， $a \in \lambda^w \backslash \mu^w$。此外， $w$ 是唯一一个被 $\{\lambda^w, \mu^w\}$切换的 &-顶点，因为这些链接位于 &-分辨 $R(\lambda)$ 和 $R(\mu)$ 上，而两者仅在被 $\{\lambda, \mu\}$切换的 &-顶点上有所不同，也就是说，仅在 $u$上不同。因此， $v \to u$属于 $\mathcal{G}_{\Lambda^w}$，这就产生了矛盾。最后我们得出结论： $v \to w$ 是 $\mathcal{G}_\theta$中的一条跳边。□

因此，给定 Ω 为无尖点（即切换）环的一个极大连通并集，引理 10.3 给出一条跳边 $\mathfrak{e}(\Omega)$，连接 Ω 中的一个 $ax$-顶点 $\mathfrak{l}(\Omega)$ 与 Ω 外的一个 &-顶点 $\mathfrak{w}(\Omega)$。所需的假设（$H_G^1$）和（$H_G^2$）可直接得出，因为尖点恰好出现在 $\parr$\&-顶点及其入边所关联的颜色处。

定理 8.2 表明，对于良着色证明网中任何一个支配尖点、且与形如（$v$， $\alpha$）的对不相交的顶点-颜色对集合 $P$，都存在一个分裂顶点；其中 $v$ 是一个 $ax$-顶点， $\alpha$ 是与其关联的一条跳边的颜色。与乘法线性逻辑（第 6.3 节）一样，参数 $P$ 的自然取值可得出推论 10.4 的多种证明，进而得到在序列化过程中选择分裂顶点的多种策略。特别是，我们得到了与乘法线性逻辑中结论类似的陈述，其中包括 [HvG05、DL22] 中序列化证明的主要中间结果：存在分裂 &-顶点（又称分离 &）这一结论，见 [HvG05，引理 4.19],；以及存在分裂终端顶点（又称序列化顶点）这一结论（几乎[6]），见 [DL22]。

**推论 10.4**（分裂顶点的存在性）。 如果一个证明网包含顶点，那么它就包含一个分裂顶点。

证明。 取 $P$ 该证明网中所有（非叶顶点，颜色）对组成的集合，但不包括形如 $(v, \alpha)$ 的对，其中 $v$是一个$ax$-顶点， $\alpha$是与其关联的一条跳边的颜色。注意， $P$非空，因为叶子的存在意味着$ax$-顶点的存在，而该顶点有两条关联边，其颜色不同于它的所有跳边。根据定理 8.2，对于每个 $\lhd$-极大元 $(v, \alpha) \in P$，顶点 $v$都是分裂顶点。 □

**推论 10.5**（分裂 $\parr$\&-顶点）。 如果一个证明网包含 $\parr$\&-顶点，那么它就包含一个分裂顶点。

证明。 令 $P$ 为所有尖点组成的集合： $P$ 的一个 $\lhd$-极大元是 $(v, \alpha)$，其中 $v$ 是一个分裂 $\parr$\&-顶点，根据定理 8.2。 □

**推论 10.6 (**分裂终端顶点**)**。 如果证明网包含一个顶点，那么它就包含一个分裂终端顶点。

证明。令 $P$ 为所有二元组（$v$， $\alpha$）的集合，其中 $v$ 是一个 $\otimes \backslash \parr \backslash \& \backslash \oplus$-顶点，并且对于 $v$ 的所有出边 $e$，都有 $\alpha \neq \mathsf{c}(e, v)$。考虑到（$v$， $\alpha$）是 $\lhd$的一个极大元，根据定理 8.2， $v$ 不仅是分裂的，而且还是终端的。事实上，否则若 $v$ 是一个 $\otimes \backslash \parr \backslash \& \backslash \oplus$-顶点，则它会有一个结论 $e$，其目标 $u$ 已定义，而引理 3.7 得出（$v$， $\alpha$）$\lhd$（$u$，$\mathsf{c}(e, u)$）；若 $v$ 是一个公理顶点，则它有一条出边 $e_1$ 通向叶子 $l$，后者本身又有一条出边 $e_2$，其目标 $u$ 已定义，应用两次引理 3.7 得出（ $v$， $\alpha$ ） $\lhd$ （ $l$，$\mathsf{c}(e_1, l)$ ） $\lhd$ （ $u$，$\mathsf{c}(e_2, u)$ ）。

□

[6]在 [DL22], 分裂 $\oplus$-顶点必须是一元的，我们将在下一节证明这一点总是成立。

**推论 10.7**（非分裂 公理-顶点。）。 如果一个证明网包含一个 $\otimes\backslash\ \parr\ \backslash\ \&\ \backslash\oplus$-顶点，那么它包含一个分裂顶点。

证明。 取 $P$所有顶点-颜色对（$v,\ \alpha$）的集合，其中 $v$既不是叶子，也不是$ax$-顶点。根据定理 8.2，每个 $\lhd$-极大元（$v,\ \alpha$）$\in P$ 给出一个分裂顶点。 □

10.2. **利用分裂顶点进行序列化**。 我们在此详述如何由分裂顶点的存在性（推论 10.4）推出序列化定理（定理10.1）。与乘法线性逻辑不同，在乘法加法线性逻辑中，序列化并非推论 10.6 的直接推论。我们需要以下结果，其证明涉及找出若干跳跃边：

- 一个分裂顶点属于所有链接的加性解析——从而使我们遵守关于假设的约束；
- 一个分裂 $\oplus$-顶点是一元的——从而它对应于一条 $\oplus_1$-规则或 $\oplus_2$-规则。

本节安排如下：首先给出关于分裂顶点的两个所需结果（第 10.2.1 节），然后证明序列化定理（第 10.2.2 节）。

10.2.1. 关于分裂顶点的结果。 以下引理使我们能够轻松找到跳跃边，并将用于证明我们所需的分裂顶点结果。

**引理 10.8**。 设 $\lambda$ 和 $\mu$ 是证明结构 $\theta$中的两个链接。考虑定义在 $\theta$ 的链接上的谓词 $P$，使得 $P(\lambda)$ 为真，而 $P(\mu)$ 为假。那么，存在链接 $\lambda', \mu' \in \theta$，使得 $P(\lambda')$ 为真，$P(\mu')$ 为假，并且 $\{\lambda', \mu'\}$ 恰好切换一个 $\&$-顶点，且该顶点属于 $\{\lambda, \mu\}$所切换的顶点。

证明。 我们对 $\{\lambda, \mu$所切换的 &-顶点数量 $n$ 进行归纳 $\}$.

分别取 $\lambda$ 和 $\mu$ 的两个 &-解析 $R$ 和 $S$，并作如下选择：由 $\{\lambda, \mu\}$ 切换的 $n$ &-顶点，恰好是 $R$ 和 $S$ 中所选前提不同的 &-顶点。具体构造如下；下面说明如何构造 $R$，对称地也可构造 $S$。对于给定的 &-顶点，若它属于 $\lambda$ 的加性解析，则在 $R$ 中保留与该加性解析相同的前提；否则，若它属于 $\mu$ 的加性解析，则保留相应的前提；否则，保留左前提。

注意，$n \neq 0$，否则 $R = S$，并且由 (P1) 可得 $\lambda = \mu$，这就产生了矛盾。因此 $n \geq 1$：令 $w$ 为其中一个这样的 &-顶点。考虑由 $R$ 得到的 &-解析 $T$：对 $w$ 取另一个前提，并为以此方式引入的 &-顶点指定与它们在 $S$ 中相同的前提。利用 (P1)，称 $\theta$ 在 $T$ 上的链接为 $\nu$。如果 $P$（$\nu$）不成立，那么结论即得：所需的链接为 $\lambda$ 和 $\nu$。否则，根据 $T$ 的构造，$T$ 和 $S$ 中存在 $n-1$ 个所选前提不同的 &-顶点：它们是在 $R$ 和 $S$ 中所选前提不同的那些顶点，但不包括 $w$。由于由 $\{\nu, \mu\}$ 切换的 &-顶点包含在其中，我们可以对 $\nu$ 和 $\mu$ 应用归纳假设，从而得出结论。

□

给定句法森林 $\Delta \vdash \Gamma$ 中的顶点 $v$ 和 $u$，当 $v$ 位于根 $u$ 的子树中时，我们称 $v$ 是 $u$ 的**祖先**，而 $u$ 是 $v$ 的**后代**。

**事实 10.9**。 考虑 $\Delta \vdash \Gamma$（的句法森林）中的一条边 $e$，以及$\Delta \vdash \Gamma$上的一个连结集合 $\theta$。假设对于两个链接 $\lambda,\ \mu \in \theta,\ e$ 属于 $\mu$ 的加性解析，但不属于 $\lambda$的加性解析。那么，$e$ 具有一个已定义的源 s($e$)，其祖先是一个叶子 $l$，该叶子用于 $\mu$中的一个公理链接。

证明。 在以 $e$ 为无目标部分边的 $\Delta \vdash \Gamma$ 的子树中，不可能存在源未定义的边；否则，按照定义， $\lambda'$ 的加性解析将不包含这条源未定义的边，这是不可能的。因此，在 $\mu$的加性解析中，沿着从 $e$的源（该源已定义）开始的祖先关系，必然会到达一个叶子 $l$，该叶子与 $\mu$中的某个公理链接 $a$ 相关联。 □

**引理 10.10.** 设 $\theta$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$上的一个证明结构。考虑 $\mathcal{G}_\theta$ 中的一条非跳跃边 $e$，使得对于某个链接 $\lambda \in \theta$， $e \notin \mathcal{G}_\lambda$ 。那么， $\mathcal{G}_\theta$ 中存在一个包含 $e$的环。

证明。 定义 $P(\nu)$为链接上的如下谓词："$e$属于 $\mathcal{G}_\nu$"。注意，对于某个链接 $\mu \in \theta$， $P(\mu)$成立，因为 $e \in \mathcal{G}_\theta$ 不是跳边；而 $P(\lambda)$不成立。根据引理 10.8，可得到链接 $\lambda', \mu' \in \theta$，使得 $e$ 属于 $\mathcal{G}_{\mu'}$ 但不属于 $\mathcal{G}_{\lambda'}$，并且$\{\lambda', \mu'\}$ 切换一个唯一的 &-顶点 $w$。

一种简单的情况是， $e$ 是从一个 $ax$-顶点 $v$ 指向叶子 $l$ 的出边，而该叶子也在 $\mathcal{G}_{\lambda'}$中。此时，存在另一个 $ax$-顶点 $u$，它有一条出边指向 $\mathcal{G}_{\lambda'}$中的 $l$，于是我们得到一个包含 $\mathcal{G}_\theta$中 $e$ 的环： $v \to w \leftarrow u \to l \leftarrow v$。

否则，要么 $e$ 是从 $ax$-顶点 $u_l$ 到叶子 $l \in \mathcal{G}_{\mu'} \backslash \mathcal{G}_{\lambda'}$的一条出边；要么它是 $\Delta \vdash \Gamma$ 的句法森林中的一条边，并且根据事实 10.9，存在一个叶子 $l$，它是 $e$ 的源的祖先，并且被用于 $\mu'$ 的一条公理链接中，该公理链接对应于 $\mathcal{G}_{\mu'}$ 中的一个 $ax$-顶点 $u_l$——注意 $l, u_l \notin \mathcal{G}_{\lambda'}$ 如同 $e \notin \mathcal{G}_{\lambda'}$。在这两种情况下，称 $x$ 为 $l$ 的后代，其中 $\lambda'$ 与 $\mu'$ 的加性解析对前提作出不同选择。我们将展示一个环，它包含作为子路径的 $u_l \to l \cdot p_l$，其中 $p_l$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$ 的句法森林中从 $l$到 $x$的路径，因此在两种情况下都是一个包含 $e$ 的环。注意， $\mathcal{G}_\theta$中存在一条跳边 $u_l \to w$ 。

顶点 $x$ 要么是一个 &-顶点，此时它只能是 $w$ 由 $\{\lambda', \mu'\}$切换的唯一 &-顶点，要么它是一个 $\oplus$-顶点。

- 如果 $x$ 是 &-顶点 $w$，那么 $u_l \to l \cdot p_l \cdot x \leftarrow u_l$ 是包含 $e$ 的 $\mathcal{G}_\theta$ 的一个环（引理 2.2）——见图 28。
- 如果 $x$ 是 $\oplus$-顶点，那么通过对 $\mathcal{G}_{\lambda'}$ 中保留的 $x$ 的前提应用事实 10.9，可得一个叶子 $r$ 和一个 公理-顶点 $u_r$，它对应于包含 $r$ 的 $\lambda'$ 中的一个公理链接，并且 $r$ 是 $x$ 的祖先。此情形的示意图见图 29。因此， $\mathcal{G}_\theta$ 中有跳边 $u_l \to w$ 和 $u_r \to w$。将句法森林中从 $r$ 到 $x$ 的 $\Delta \vdash \Gamma$ 的路径称为 $p_r$。我们还可以展示一个包含 $e$ 的环： $w \leftarrow u_l \to l \cdot p_l \cdot p_r \cdot r \leftarrow u_r \to w$。根据引理 2.2，这确实是一个环，因为 $w$ 不可能是 $x$ 的祖先：它同时属于一个使用 $x$ 左前提的连结的加性解析，以及一个使用其右前提的连结的加性解析。

□

**引理 10.11**。 设 $v$ 是 $\mathcal{G}_\theta$ 中的一个分裂顶点，其中 $\theta$ 是一个证明结构。对于每个 $\lambda \in \theta$， $v$ 属于 $\mathcal{G}_\lambda$；也就是说， $v$ 属于其加性解析 $\Delta \vdash \Gamma \restriction \lambda$，或者是与 $\lambda$ 的某个公理链接相关联的 $ax$ 顶点。

证明。 我们通过逆否命题来证明：给定 $\mathcal{G}_\theta$ 中的一个顶点 $v$ 和一个连结 $\lambda \in \theta$，如果 $v$ 不属于 $\mathcal{G}_\lambda$，那么它就不是分裂顶点。为此，只需举出一个包含 $v$ 的一条出边的环。我们对 $v$ 的任意一条非跳跃出边应用引理 10.10，得到这个环；该边属于 $\mathcal{G}_\theta$ 但不属于 $\mathcal{G}_\lambda$，正如 $v$ 属于前者但不属于后者。

□

**引理 10.12.** 对于证明结构 $\theta$， $\mathcal{G}_\theta$中的分裂 $\oplus$-顶点是一元的。

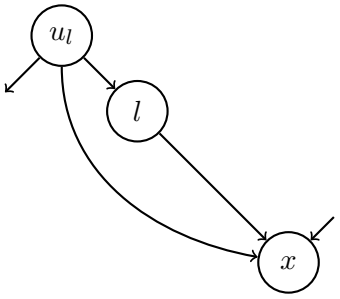



图28：当$x$ 是一个 &-顶点时，引理 10.10 的证明中的环

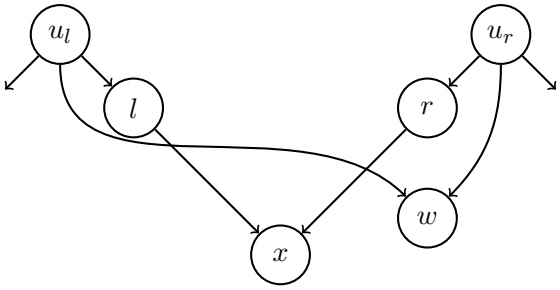



图29：当$x$ 是一个⊕-顶点时，引理 10.10 的证明中的环

证明. 我们证明二元 $\oplus$-顶点 $v$ 不是分裂的。由于 $v$ 是二元的，存在分别使用 $v$的左前提和右前提的链接$\lambda$, $\mu \in \theta$ 。对 $v$的左前提应用引理 10.10，我们得到一个包含该边的环，因而包含 $v$： $v$ 不是分裂的。

□

**引理 10.13**。 设 $\theta$ 是一个证明结构， $\lambda_0$、 $\lambda_1 \in \theta$ 和 $a \in \lambda_0 \backslash \lambda_1$ 是一个公理链接。存在一个 &-顶点 $w$ ， 它被 $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ 切换，使得在 $\theta$ 中， $a$ 依赖于 $w$ 。

证明。 在链接上定义谓词 $P$，令 $P(\mu) := (a \in \mu)$。应用引理 10.8，可得链接 $\mu_0, \mu_1 \in \theta$，使得 $a \in \mu_0 \backslash \mu_1$ 和 $\{\mu_0, \mu_1\}$ 切换唯一的 &-顶点 $w$，而该顶点也被 $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ 切换。因此，在 $\theta$ 中， $a$ 依赖于 $w$ 。 □

10.2.2. 序列化证明。 借助上一节，我们现在证明分裂顶点易于序列化。在对各类顶点分别证明之后，我们推出序列化定理。为避免多次重复同一论证，我们先考虑沿边代换，再考虑沿顶点的代换，然后仅考虑终端分裂顶点。我们还使用下述中间结果来证明正确性判据。

**引理 10.14**。 设 $\theta$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$ 上的一个证明网，且 $\theta'$ 是 $\Delta' \vdash \Gamma'$上的一个连结集合，其中 $\Delta' \vdash \Gamma'$ 的句法森林（同构于） $\Delta \vdash \Gamma$的句法森林的一个子图。特别地， $\Delta' \vdash \Gamma'$ 的叶子可视为 $\Delta \vdash \Gamma$的叶子。假设对所有 $\Lambda' \subseteq \theta'$，存在 $\mu$ 使得 $\Lambda := \{\lambda' \cup \mu \mid \lambda' \in \Lambda'\} \subseteq \theta$ ，并且 $\mathcal{G}_{\Lambda'}$ （同构于）$\mathcal{G}_\Lambda$ 的一个子图，且在 $\mathcal{G}_\Lambda$中不存在从子图 $\mathcal{G}_{\Lambda'}$ 到其补子图 $\mathcal{G}_\Lambda \backslash \mathcal{G}_{\Lambda'}$的跳边。则 $\theta'$ 满足*MLL*条件$(\mathrm{P2})$与切换条件$(\mathrm{P3})$。

证明。 $\theta'$ 的 MLL 条件 (P2) 得益于 $\theta$的 (P2)：给定 $\lambda' \in \theta'$，根据假设，存在某个 $\lambda = \lambda' \cup \mu \in \theta$ 使得 $\mathcal{G}_{\lambda'} \subseteq \mathcal{G}_\lambda$成立，而后者没有切换环。

考虑切换条件 (P3)，设 $\Lambda' \subseteq \theta'$ 的大小至少为二。于是，根据假设，存在一个大小相同的 $\Lambda = \{\lambda' \cup \mu \mid \lambda' \in \Lambda'\} \subseteq \theta$： 由 $\theta$的 (P3)， $\Lambda$ 切换了一个不属于 $\mathcal{G}_\Lambda$任何切换环的 &-顶点 $w$ 。要得出结论，只需证明 $w$ 属于$\mathcal{G}_{\Lambda'}$。事实上， $w$ 不属于 $\mathcal{G}_{\Lambda'}$ 的任何切换环，因此会属于 $\Delta' \vdash \Gamma'$；此外，$w$ 被 $\Lambda'$ 切换，因为它也被 $\Lambda = \{\lambda' \cup \mu \mid \lambda' \in \Lambda'\}$切换。

当 $w$ 被 $\Lambda$切换时，存在一条跳边，从某个 $ax$ 顶点 $v$ 指向它；该顶点对应于连结 $\lambda'_1 \cup \mu \in \Lambda$ 中的一条公理链接 $a$ ，且不属于另一条连结 $\lambda'_2 \cup \mu \in \Lambda$。注意，

$a$ 必须属于 $\lambda_1'$，而不属于 $\lambda_2'$。因此，对应的 $v$ 在 $\mathcal{G}_{\Lambda'}$中。于是，$w$ 也属于 $\mathcal{G}_{\Lambda'}$，因为根据假设，从 $\mathcal{G}_{\Lambda'}$ 到图的其余部分不存在跳边。 □

引理 *10.15*（分裂边）。考虑相继式 $\theta$ 上的证明网，其假设为 $\Delta \vdash \Gamma$。设 $e$ 是 $\Delta \vdash \Gamma$ 的句法森林中的一条边，其关联公式为 $A$。假设 $e$ 属于所有 $\mathcal{G}_\lambda$（对 $\lambda \in \theta$），且 $\mathcal{G}_\theta$ 是两个部分图 $G_0$ 和 $G_1$ 的不交并，其中 $G_0$ 的一条边（其目标为 *t(e)*，源未定义）与 $G_1$ 的一条边（其源为 *s(e)*，目标未定义）被识别为同一条边 $e$。那么，分别存在相继式 $\Delta_0, A \vdash \Gamma_0$ 和 $\Delta_1 \vdash A, \Gamma_1$ 上的证明网 $\theta_0$ 和 $\theta_1$，使得 $\theta = \{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$,$\Delta = \Delta_0, \Delta_1$, $\Gamma = \Gamma_0, \Gamma_1$, $\mathcal{G}_{\theta_0} \simeq G_0$ 和 $\mathcal{G}_{\theta_1} \simeq G_1$。特别地，$\mathcal{G}_\theta \simeq \mathcal{G}_{\theta_0} \cup \mathcal{G}_{\theta_1}$，其中 $\mathcal{G}_{\theta_0} \cup \mathcal{G}_{\theta_1}$ 中对应于 $A$ 的两条边被识别为同一条边。

证明。对于一个连结 $\lambda \in \theta$，定义 $\lambda_0$（分别为 $\lambda_1$）为 $\lambda$ 的公理连接，其中叶子位于 $G_0$（分别为 $G_1$）。由于 $e$ 不是 &-顶点的出边：$\lambda = \lambda_0 \cup \lambda_1$，因此没有公理连接同时使用位于 $G_0$ 和 $G_1$ 中的叶子。定义 $\theta_0 := \{\lambda_0 \mid \lambda \in \theta\}$，这是 $\Delta_0$ 上的连结集合，$A \vdash \Gamma_0$ 具有 $\Gamma_0$，而 $\Delta_0$ 由 $G_0$ 给出：它包含将 $\Delta \vdash \Gamma$ 限制到 $G_0$ 后得到的（剪枝后的）句法树。由我们对假设的约束可知，它确实是一个连结集合，因为 $e$ 属于所有 $\mathcal{G}_\lambda$，其中 $\lambda \in \theta$。此外，注意 $\mathcal{G}_{\theta_0} \simeq G_0$。类似地，定义 $\theta_1 := \{\lambda_1 \mid \lambda \in \theta\}$，这是相继式 $\Delta_1 \vdash A, \Gamma_1$ 上的连结集合，由限制到 $\mathcal{G}_1$ 得到，其中 $\mathcal{G}_{\theta_1} \simeq G_1$。因此，$\Delta = \Delta_0, \Delta_1$ 和 $\Gamma = \Gamma_0, \Gamma_1$ 正如所需。根据定义，观察到 $\theta \subseteq \{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$，以及 $\theta_0$ 和 $\theta_1$。还要注意 $\theta_0 \neq \emptyset$：否则 $\theta = \emptyset$，这与 (P1) 矛盾，因为 $\Delta \vdash \Gamma$ 至少有一个 &-解析。类似地，$\theta_1 \neq \emptyset$。我们证明 $\theta_0$ 和 $\theta_1$ 是证明网；在两种情况下，都需证明 (P1)、(P2) 和 (P3)，并利用 (P1) 证明包含关系 $\{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\} \subseteq \theta$。

让我们证明 $\theta_0$ 的归结条件 (P1)。类似的论证也可以证明 $\theta_1$ 的归结条件。设 $R_0$ 是 $\Delta_0, A_0 \vdash \Gamma_0$ 的一个 &-解析。我们可以将其扩展为 $\Delta \vdash \Gamma$ 的任意一个 &-解析 $R$。根据 (P1)，$R$ 上存在唯一的 $\lambda \in \theta$，从而在 $R_0$ 上得到一个 $\lambda_0$。对于唯一性条件，假设 $R_0$ 上有两个 $\lambda_0, \mu_0 \in \theta_0$，且满足 $\lambda_0 \neq \mu_0$。不失一般性，存在 $a \in \lambda_0 \backslash \mu_0 \subseteq \lambda \backslash \mu$。根据引理 10.13，在 $\mathcal{G}_\theta$ 中存在一个 &-顶点 $w$，$a$ 依赖于它，且它被 $\{\lambda, \mu\}$ 翻转。因此，$w$ 属于 $G_0$，因为在 $\mathcal{G}_\theta$ 中 $G_0$ 与 $G_1$ 之间不存在跳边。但这样一来，$\{\lambda_0, \mu_0\}$ 就会翻转 $w$；然而它们位于同一个 &-解析 $R_0$ 上，故产生矛盾。

现在来证明 $\{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\} \subseteq \theta$。考虑 $\lambda_0 \in \theta_0$ 和 $\mu_1 \in \theta_1$，以及它们分别所在的 $R_0$ 和 $R_1$ &-解析。令 $R$ 为 $\theta$ 的 &-解析，并对其采用与 $R_0$ 和 $R_1$相同的前提选择。根据 $\theta$的 (P1)，其上存在唯一的 $\nu \in \theta$。但对于 $i \in \{0, 1\}$，$\nu_i$ 位于 $R_i$上。根据 $\theta_0$的 (P1)，$\nu_0 = \lambda_0$；根据 $\theta_1$ 的 (P1)，$\nu_1 = \mu_1$。因此 $\nu = \lambda_0 \cup \mu_1$，最后得到 $\theta = \{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$。

我们将通过应用引理 10.14 得到 (P2) 和 (P3)。注意，对于任意 $\Lambda_0 \subseteq \theta_0$、$\Lambda_1 \subseteq \theta_1$和 $\mathcal{G}_{\{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \Lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda_1\}} \simeq \mathcal{G}_{\Lambda_0} \cup \mathcal{G}_{\Lambda_1}$，假设 $A$ 在$\mathcal{G}_{\Lambda_0}$ 中的边与结论 $A$ 在 $\mathcal{G}_{\Lambda_1}$中的边相同。这是因为根据假设，$e$ 属于$\mathcal{G}_{\{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \Lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda_1\}}$。现在对每个 $\theta_i$应用引理 10.14。考虑$\Lambda_i \subseteq \theta_i$，并任取一个 $\lambda_{1-i} \in \theta_{1-i}$。那么，$\Lambda := \{\lambda_i \cup \lambda_{1-i} \mid \lambda_i \in \Lambda_i\}$ 是 $\theta$中的一个连结集合。此外，由于 $e$ 不在 $\mathcal{G}_\theta \supseteq \mathcal{G}_\Lambda$的任何环上，因此从 $\mathcal{G}_{\Lambda_i}$ 到其补图不存在跳边。因此，我们可以应用引理 10.14 推出 (P2) 和 (P3)。 □

**引理 10.16**（分裂替换）。设 $v$ 是证明网 $\theta$中的一个分裂非公理顶点，该证明网定义在假设为 $\Delta \vdash \Gamma$的相继式上，且 $A$ 是与 $v$的结论相关联的公式。那么，存在证明网 $\theta_0$和 $\theta_1$，它们分别定义在 $\Delta_0, A \vdash \Gamma_0$ 和 $\Delta_1 \vdash A, \Gamma_1$ 上，使得

$\theta = \{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$, $\Delta = \Delta_0, \Delta_1$, $\Gamma = \Gamma_0, \Gamma_1$和 $v$ 在$\theta_1$中是分裂的且为终端。

证明。 由于 $v$ 是分裂的，其结论边 $e$ 不属于 $\mathcal{G}_\theta$中的任何环。因此， $\mathcal{G}_\theta$ 是不交并，由两个部分图 $G_0$ 和 $G_1$ 组成，其中我们将 $G_0$ 的一条边与 $G_1$ 的一条边识别为 $e$：$G_0$ 是 t($e$)（若有定义）在 $\mathcal{G}_\theta$中删除 $e$ 后所得的连通分支，再加上一条目标为 t($e$)、源未定义的边；而 $G_1$ 是图的其余部分，再加上一条源为 s($e$)、目标未定义的边——特别是， $G_1$ 包含 $v$ =s($e$)。此外，对于所有 $\lambda \in \theta$， $e$ 都属于 $\mathcal{G}_\lambda$，因为根据引理 10.11， $v$ 属于这些图。应用引理 10.15，即可得到所需的 $\theta_0$ 和$\theta_1$ 。 $v$ 在 $\theta_1$ 中是分裂且终端的，这一点由$\mathcal{G}_\theta \simeq \mathcal{G}_{\theta_0} \cup \mathcal{G}_{\theta_1}$直接得出；而 $v$ 在 $\theta$中是分裂的。 □

**引理 10.17** (分裂终端 $\otimes$)。 设 $v$ 是证明网$\theta$ 在 $\Delta \vdash A_0 \otimes A_1, \Gamma$上的一个分裂终端 $\otimes$-顶点，其中 $A_0 \otimes A_1$ 是与 $v$的结论相关联的公式。存在 $\theta_0, \theta_1, \Gamma_0, \Gamma_1, \Delta_0, \Delta_1$，使得 $\theta = \{\lambda \cup \mu \mid \lambda \in \theta_0, \mu \in \theta_1\}$, $\Delta = \Delta_0, \Delta_1$, $\Gamma = \Gamma_0, \Gamma_1$，且 $\theta_i$ 是 $\Delta_i \vdash A_i, \Gamma_i$ 上关于 $i \in \{0, 1\}$的证明网。

证明。称 $e_0$ 为与 $A_0$对应的 $v$ 前提，称 $e_1$ 为与 $A_1$对应的另一个前提。注意， $e_0$ 和 $e_1$ 属于所有 $\lambda \in \theta$的 $\mathcal{G}_\lambda$ ，因为 $v$ 是终端，故属于这些图。由于 $v$ 是分裂的， $e_0$ 和 $e_1$ 都不在 $\mathcal{G}_\theta$ 的任何环中。因此， $\mathcal{G}_\theta$ 是不交并，由三个部分图 $G_0$、 $G_1$ 和 $G_2$ 构成，其中我们将 $G_0$ 的一条边与 $G_2$ 的一条边识别为 $e_0$，并将 $G_1$ 的一条边与 $G_2$ 的一条边识别为 $e_1$： $G_2$ 是 $v$ 及其三条关联边； $G_0$ 是从 $\mathcal{G}_\theta$中删除 $e_0$ 后，s($e_0$) 所在的连通分支，再加上一条源为 s($e_0$)、目标未定义的边； $G_1$ 是图的其余部分，再加上一条源为 s($e_1$)、目标未定义的边。我们先后两次应用引理 10.15，先对 $e_0$ ，再对 $e_1$应用，得到证明网 $\theta_0$、 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ ，满足 $\mathcal{G}_{\theta_0} \simeq G_0$、$\mathcal{G}_{\theta_1} \simeq G_1$ 和 $\mathcal{G}_{\theta_2} \simeq G_2$。注意，$\theta_2$ 是 $A_0, A_1 \vdash A_0 \otimes A_1$上的证明网，且没有叶子：因此，$\theta_2 = \{\emptyset\}$。所以，$\theta = \{\lambda \cup (\mu \cup \nu) \mid \lambda \in \theta_0, \mu \in \theta_1, \nu \in \theta_2\} = \{\lambda \cup \mu \mid \lambda \in \theta_0, \mu \in \theta_1\}$。 □

**引理 10.18** （分裂终端 $\parr$）。 设 $v$ 是证明网 $\theta$ 中的一个终端（因此也是分裂的） $\parr$-顶点，证明网位于 $\Delta \vdash A_0 \parr A_1, \Gamma$ 上，且 $A_0 \parr A_1$ 是与 $v$ 的结论相关联的公式。那么， $\theta$ 是位于 $\Delta \vdash A_0, A_1, \Gamma$ 上的证明网。

证明。 $\Delta \vdash A_0 \parr A_1, \Gamma$ 与 $\Delta \vdash A_0, A_1, \Gamma$ 的句法森林仅在是否包含 $v$ 这一点上有所不同，因此具有相同的叶子集合以及相同的 &-解析和加性解析。因此， $\theta$ 也是 $\Delta \vdash A_0, A_1, \Gamma$ 上的连结集合，并且满足其上的 (P1)，因为它在 $\Delta \vdash A_0 \parr A_1, \Gamma$ 上满足该条件。对于 $\Delta \vdash A_0, A_1, \Gamma$ 上的任意 $\Lambda \subseteq \theta$, $\mathcal{G}_\Lambda$，移除顶点 $v$ 及其结论后， $\mathcal{G}_\Lambda$ 是 $\Delta \vdash A_0 \parr A_1, \Gamma$ 上的 $\mathcal{G}_\Lambda$。因此，根据引理 10.14， $\theta$ 在 $\Delta \vdash A_0, A_1, \Gamma$ 上满足 (P2) 和 (P3)。 □

**引理 10.19** （分裂终端&）。 设 $v$ 是证明网 $\theta$ 中一个终端（因而也是分裂的）&顶点，证明网位于 $\Delta \vdash A_0 \,\&\, A_1, \Gamma$上，且 $A_0 \,\&\, A_1$ 是与 $v$的结论相关联的公式。存在证明网 $\theta_0$和 $\theta_1$，分别位于 $\Delta \vdash A_0, \Gamma$和 $\Delta \vdash A_1, \Gamma$ 上，使得$\theta = \theta_0 \cup \theta_1$。

证明。定义 $\theta_0$ （分别地， $\theta_1$）为使用 $v$的左（分别地，右）前提的 $\theta$ 的连结集合。我们有 $\theta = \theta_0 \cup \theta_1$，因为 $v$ 是终端，所以任意一个链接都恰好使用 $v$的一个前提。

$\theta_i$ 是 $\Delta \vdash A_i, \Gamma$ 上的连结集合，这一点可由以下事实得出：它由 $\Delta \vdash A_0 \,\&\, A_1, \Gamma$ 上的链接构成，并在其加性解析中保留与 $A_i$ 相关联的前提。

为了得到 $\theta_i$ 是证明网，我们需要证明 (P1)、(P2) 和 (P3)。(P1) 归结条件可直接由 $\theta$ 上的条件推出，因为 $\theta_i \subseteq \theta$。借助引理 10.14，我们得到 (P2) 和 (P3)

。事实上，对于 $\theta_i$ 中所有的 $\Lambda \subseteq \theta_i$、$\mathcal{G}_\Lambda$，都有 $\theta$ 中的 $\mathcal{G}_\Lambda$，其中一元顶点 $v$ 及其结论已被移除，且没有指向 $v$ 的跳边，因为它没有被切换。 □

**引理 10.20** (分裂终端 $\oplus$)。设 $v$ 是证明网 $\theta$ 上、$\Delta \vdash A_0 \oplus A_1$ 中的一个分裂终端 $\oplus$-顶点，其中 $A_0 \oplus A_1$ 是与 $v$ 的结论相关联的公式。存在 $i \in \{0,1\}$，使得 $\theta$ 是 $\Delta \vdash A_i$、$\Gamma$ 上的证明网。

证明。根据引理 10.12，$v$ 是一元的：取 $i \in \{0,1\}$，使得 $\theta$ 的所有链接都保留 $v$ 中与 $A_i$ 对应的前提。由于 $v$ 是一元的，链接 $\lambda \in \theta$ 也是 $\Delta \vdash A_i$、$\Gamma$ 上的链接。下面证明 $\theta$ 是 $\Delta \vdash A_i$、$\Gamma$ 上的证明网。

考虑 (P1)，设 $R'$ 是 $\Delta \vdash A_i$、$\Gamma$ 的一个 &-解析。通过为 $A_{1-i}$ 的 &-顶点任意指定前提选择，将其扩展为 $v \vdash A_0 \oplus A_1$、$\Gamma$ 的一个 &-解析 $R$。由于 $\theta$ 的所有链接都使用 $v$ 的前提 $A_i$，$R'$ 上 $v \vdash A_i$、$\Gamma$ 的链接恰好就是 $R$ 上 $v \vdash A_0 \oplus A_1$、$\Gamma$ 的链接。因此，$\theta$ 在 $v \vdash A_i$、$\Gamma$ 上满足 (P1)，由 $\theta$ 在 $v \vdash A_0 \oplus A_1$、$\Gamma$ 上满足 (P1) 可得。

考虑 (P2) 和 (P3)，注意对于所有位于 $\Delta \vdash A_i, \Gamma$ 上的 $\Lambda \subseteq \theta, \mathcal{G}_\Lambda$，都有 $\mathcal{G}_\Lambda$ 位于 $\Delta \vdash A_0 \oplus A_1, \Gamma$ 上，其中我们移除了该一元顶点及其结论。由引理 10.14 可得结论。 □

**引理 10.21** (分裂 公理 ). 设 $v$ 是证明网 $\theta$ 中的一个分裂公理顶点，该证明网对应于具有假设 $\Delta \vdash \Gamma$ 的相继式，其中 $X^\perp$ 和 $X$ 是 $\theta$ 中 $v$ 的公理链接所关联的两个公式。那么，存在证明网 $\theta_0$ 和 $\theta_1$，分别对应于 $\Delta_0, X^\perp \vdash \Gamma_0$ 和 $\Delta_1, X \vdash \Gamma_1$，使得 $\theta = \{\{\{X^\perp, X\}\} \cup \lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$, $\Delta = \Delta_0, \Delta_1$ 且 $\Gamma = \Gamma_0, \Gamma_1$。

证明。由于 $v$ 是分裂的，根据引理 10.11，它属于所有 $\mathcal{G}_\lambda$，对于 $\lambda \in \theta$。因此，它所在的两个叶子$X^\perp$ 和 $X$ 都属于所有 $\mathcal{G}_\lambda$，且其唯一的入边是 $v$的出边。特别地，它们各自的结论边 $e_0$ 和 $e_1$ 不在 $\mathcal{G}_\theta$ 的任何环中，并且对于 $\lambda \in \theta$，属于所有 $\mathcal{G}_\lambda$。因此，$\mathcal{G}_\theta$ 是不交并，由三个部分图 $G_0$、$G_1$ 和 $G_2$ 组成，其中我们将 $G_0$ 的一条边与 $G_2$ 的一条边识别为 $e_0$，并将 $G_1$ 的一条边与 $G_2$ 的一条边识别为 $e_1$：$G_2$ 由 $v$、$X^\perp$、$X$ 及其四条关联边组成；$G_0$ 是从 $e_0$ 中删除 $\mathcal{G}_\theta$后，t($e_0$) 所在的连通分支，再加上一条目标为 t($e_0$) 且源未定义的边；$G_1$ 是图中其余部分，再加上一条目标为 t($e_1$) 且源未定义的边。我们两次应用引理 10.15，先对 $e_0$，再对 $e_1$，得到证明网 $\theta_0$、$\theta_1$ 和$\theta_2$，其中有 $\mathcal{G}_{\theta_0} \simeq G_0$、$\mathcal{G}_{\theta_1} \simeq G_1$ 和 $\mathcal{G}_{\theta_2} \simeq G_2$。注意，$\theta_2$ 是 $\vdash X^\perp$、$X$上的证明网，因此 $\theta_2 = \{\{\{X^\perp, X\}\}\}$。因此，$\theta = \{\lambda \cup (\mu \cup \{\{X^\perp, X\}\}) \mid \lambda \in \theta_0, \mu \in \theta_1\}$。

□

现在，借助引理10.16至10.21，我们来证明序列化定理。与第 6.1 节中的乘法线性逻辑一样，我们只需利用以下事实：至少含有一个顶点的证明网包含一个非叶分裂顶点（推论 10.4）。Yeo 定理（第 10.1 节）得出的不同分裂顶点，会像乘法线性逻辑中那样（第 6.3 节），导出这一序列化过程的各种特化形式。此外，我们构造的推导 $\pi$ 处于 mix-Rétoré 范式。

定理*10.1* 的证明。我们对 $\mathcal{G}_\theta$ 中顶点的数量进行归纳。首先假设 $\mathcal{G}_\theta$ 含有某个顶点：根据推论 10.4，$\mathcal{G}_\theta$ 中存在一个非叶分裂顶点 $v$。如果 $v$ 既不是终端，也不是 $ax$-顶点，那么应用引理 10.16，可得到证明网 $\theta_0$ 和 $\theta_1$，使得 $\theta = \{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$ 和 $v$ 在 $\theta_1$ 中是终端且分裂的。注意，$\mathcal{G}_{\theta_0}$ 至少含有一个顶点（即句法森林 $\Delta \vdash \Gamma$ 中位于 $v$ 下方的那个顶点），而 $\mathcal{G}_{\theta_1}$ 含有 $v$，因此二者的顶点数都少于 $\mathcal{G}_\theta$。根据归纳假设，可得到推导 $\pi_0$ 和 $\pi_1$，分别对应 $\Delta_0, A \vdash \Gamma_0$ 和 $\Delta_1 \vdash A, \Gamma_1$，使得 $\mathcal{D}(\pi_0) = \theta_0$，且 $\mathcal{D}(\pi_1) = \theta_1$。根据引理9.5，我们有 $\theta = \mathcal{D}(\pi)$，其中 $\pi$ 是在 $\pi_0$ 中以 $\pi_1$ 代换假设 $A$。

如果 $v$ 是一个 $ax$-顶点，那么使用引理 10.17，可得到证明网 $\theta_0$ 和 $\theta_1$，使得 $\theta = \{\{\{X^\perp, X\}\} \cup \lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$。根据归纳假设，可得到推导$\pi_0$ 和 $\pi_1$，分别对应 $\Delta_0, X^\perp \vdash \Gamma_0$ 和 $\Delta_1, X \vdash \Gamma_1$，使得 $\mathcal{D}(\pi_0) = \theta_0$ 且 $\mathcal{D}(\pi_1) = \theta_1$。两次应用引理9.5，可得 $\theta = \mathcal{D}(\pi)$，其中 $\pi$ 是在一个作用于 $\vdash X^\perp, X$ 的 $(ax)$ 规则中，先以 $\pi_1$ 代换假设 $X$，再以 $\pi_0$ 代换假设 $X^\perp$。

现在假设 $v$ 是终端顶点，且不是 $ax$-顶点。我们根据其类型区分情况。

如果 $v$ 是一个 $\otimes$-顶点，那么 $\Gamma = A_0 \otimes A_1, \Gamma'$，其中 $A_0 \otimes A_1$ 是与 $v$ 的结论相关联的公式。利用引理 10.17，可得 $\Delta = \Delta_0, \Delta_1$、$\Gamma' = \Gamma'_0, \Gamma'_1$，以及 $\theta = \{\lambda_0 \cup \lambda_1 \mid \lambda_0 \in \theta_0, \lambda_1 \in \theta_1\}$，其中 $\theta_i$ 是 $i \in \{0,1\}$ 上的一个证明网。根据归纳假设，可得 $\pi_i$，它们是 $\Delta_i \vdash A_i, \Gamma'_i$ 的推导，并满足 $\theta_i = \mathcal{D}(\pi_i)$。我们向 $\pi_0$ 和 $\pi_1$ 添加一条（$\otimes$）规则，从而得到 $\Delta \vdash A_0 \otimes A_1, \Gamma'$ 的一个推导 $\pi$，满足 $\theta = \mathcal{D}(\pi)$。

若 $v$ 是一个 $\parr$-顶点，则 $\Gamma = A_0 \parr A_1, \Gamma'$，其中 $A_0 \parr A_1$ 是与 $v$ 结论相关联的公式。根据引理 10.18，$\theta$ 是定义在 $\Delta \vdash A_0, A_1, \Gamma'$ 上的证明网。根据归纳假设，可得 $\Delta \vdash A_0, A_1$ 的一个推导 $\pi_0$，使得 $\theta = \mathcal{D}(\pi_0)$ 成立。我们在 $\pi_0$ 中添加一条 $(\parr)$ 规则，得到推导 $\pi$，其结论为 $\Delta \vdash A_0 \parr A_1, \Gamma'$，且满足 $\theta = \mathcal{D}(\pi)$。

若 $v$ 是一个 &-顶点，则 $\Gamma = A_0 \,\&\, A_1, \Gamma'$，其中 $A_0 \,\&\, A_1$ 是与 $v$ 结论相关联的公式。根据引理 10.19，$\theta = \theta_0 \cup \theta_1$ 是定义在 $\Delta \vdash A_i, \Gamma'$ 上、对应于 $i \in \{0,1\}$ 的证明网。根据归纳假设，可得 $\Delta \vdash A_i, \Gamma'$ 的推导 $\pi_i$，使得 $\theta_i = \mathcal{D}(\pi_i)$ 成立。我们在 $\pi_0$ 和 $\pi_1$ 中添加一条 (&) 规则，得到推导 $\pi$，其结论为 $\Delta \vdash A_0 \,\&\, A_1, \Gamma'$，且满足 $\theta = \mathcal{D}(\pi)$。

如果 $v$ 是一个 $\oplus$-顶点，那么 $\Gamma = A_0 \oplus A_1, \Gamma'$ 其中 $A_0 \oplus A_1$ 是与 $v$的结论相关联的公式。利用引理 10.20，存在 $i \in \{0,1\}$ 使得 $\theta$ 是定义在 $\Delta \vdash A_i, \Gamma'$上的证明网。根据归纳假设，可得到一个 $\pi_0$的推导，其结论为 $\Delta \vdash A_i, \Gamma'$，且满足$\theta = \mathcal{D}(\pi_0)$。我们向 $\pi_0$添加一条（$\oplus_i$）规则，得到一个 $\pi$ 的推导，其结论为 $\Delta \vdash A_0 \oplus A_1, \Gamma'$，且满足$\theta = \mathcal{D}(\pi)$。

现在假设 $\mathcal{G}_\theta$ 不含任何顶点。这意味着 $\Delta = \Gamma$，且 $\Delta \vdash \Gamma$ 既没有 &-顶点，也没有叶子，因此根据 (P1)，$\theta = \{\emptyset\}$。我们有 $\{\emptyset\} = \mathcal{D}(\pi)$，其中 $\pi$ 由针对 $\Gamma$ 中所有公式的（假设）规则构成；如果 $\Gamma$ 非空，则这些规则之间由（$mix_2$）规则连接；否则，$\pi$是一条（$mix_0$）规则。 □

## 11. 结论

我们通过定义一种适当的着色，推广了 Yeo 定理（定理 3.6），并以此为推论，给出了乘法证明网序列化的一种新的简单证明。这个新定理具有很强的模块化特性：它可以给出一个分裂终端顶点、一个分裂 $\parr$-顶点，或一个一般分裂顶点。该推广有一个简单的证明，只需定义证明结构中的尖点是什么，就可以将其改写为一个序列化证明。它还使我们能够推导出一些已知彼此等价的定理（定理 4.2、4.4、4.5、4.7、4.8 和 4.11），同样只需定义一种着色。因此，只需定义尖点是什么，我们的简单证明也可以改写为这些结果中的任意一个的证明。

聚焦于证明网，这种方法可以扩展到比乘法线性逻辑更丰富的系统。只要允许使用 $mix$规则，并不考虑 DR-连通性 [FR94]，处理乘法单位就很简单：这些只相当于引入无前提顶点，无须特别处理。即使不使用$mix$规则，在每个 $\perp$-顶点都配有一条跳边（将其与另一个

顶点） [Gir96, Hug12, Hug05] 的框架中，我们的方法也同样适用。只需注意，尖点恰好由 ⅋-顶点的非跳跃前提构成；例如，可以为每条跳边指定一种新的颜色。

类似地，在存在指数的情况下进行序列化——借助结构规则（针对 ? 模态的弱化、收缩、降格）以及提升——也很容易从乘法情形推出：收缩被当作一个 ⅋-顶点，而提升框允许归纳地进行序列化。同样，这既适用于 $mix$ 规则，也适用于跳跃边 [Gir96]。

按照 Hughes 和 van Glabbeek [HvG05] 的无单位乘法-加法证明网的精神来处理加法联结词，需要更多工作。我们调整了方法，从而在复杂得多的语境中得到了序列化证明。主要代价是建立定理 3.6 的进一步推广，以允许某些无尖点环（定理 8.2）——其证明同样依赖于尖点最小化引理。随后，关于加法联结词的论证遵循与乘法线性逻辑相同的思路：一个非分裂顶点不可能是序 ◁ 的极大元。与乘法线性逻辑中一样，该方法足够稳健，也能够通过分裂终端顶点、分裂 ⅋\&-顶点或一般分裂顶点来实现序列化。

## 参考文献

[ADF+08] A. Abouelaoualim、K.Ch. Das、L. Faria、Y. Manoussakis、C. Martinhon 和 R. Saad。边染色图中的路径与迹。《理论计算机科学》，409(3):497–510，2008。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397508006701，doi：10.1016/j.tcs.2008.09.021。[AU08] Adrian Bondy 和 U. S. R. Murty。图论。数学研究生教材第 1 卷。Springer London，2008。URL：https://link.springer.com/book/9781846289699。[Ber57] Claude Berge。图论中的两个定理。《美国国家科学院院刊》，43(9):842–844，1957年9月。URL：https://www.jstor.org/stable/89875。[BJG08] Jørgen Bang-Jensen 和 Gregory Z Gutin。有向图：理论、算法与应用。Springer Science & Business Media，2008。[BP71] L. W. Beineke 和 R. E. Pippert。k-树的性质与刻画。《*Mathematika*》，18(1):141–151，1971。doi：10.1112/S0025579300008500。[BVdW95] Gianluigi Bellin 和 Jacques Van de Wiele。MLL− 证明网的子网。见 Girard 等人。[GLR95], 第 249–270 页。[CLSB81] D.G. Corneil、H. Lerchs 和 L. Stewart Burlingham。补可约图。《离散应用数学》，3(3):163–174，1981。doi：10.1016/0166-218X(81)90013-5。[Cur05] Pierre-Louis Curien。线性逻辑与逻辑游戏导论，第二部分。讲义 cs/0501039，arXiv，2005。URL：https://arxiv.org/abs/cs/0501039。[CVA21] Jules Chouquet 和 Lionel Vaux Auclair。将乘法线性逻辑中的并行割消去应用于证明网的泰勒展开。《逻辑方法与计算机科学》，17(4)，2021。URL：https://doi.org/10.46298/lmcs-17(4:22)2021，doi：10.46298/ LMCS-17(4:22)2021。[Dan90] Vincent Danos。线性逻辑在各种规范化过程研究中的应用（主要是 λ-演算）。博士论文，巴黎第七大学，1990。[DG11] Paolo Di Giamberardino。从并行证明到序列证明：加法联结词，2011。https://hal.science/hal-00616386。[DG24] Rémi Di Guardia。在乘法加法线性逻辑中使用证明网实现证明与公式的同一性。博士论文，里昂高等师范学院，2024年9月。

[DGLTdFVA25] Rémi Di Guardia、Olivier Laurent、Lorenzo Tortora de Falco 和 Lionel Vaux Auclair。局部着色图的 Yeo 定理：线性逻辑中序列化之路。载于 Maribel Fernández 编，《形式结构与计算演绎国际会议》（FSCD），莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）第 337 卷，第 16:1–16:18 页。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心，2025年7月。另见 https://hal.science/hal-04082204。URL：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.FSCD.2025.16，doi：10.4230/LIPIcs.FSCD.2025.16。[DL22] Rémi Di Guardia 和 Olivier Laurent。无单位MALL证明网的自底向上序列化。载于 Laurent Regnier 和 Daniel Ventura 编，第三届线性性与线性逻辑及其应用趋势联合国际研讨会，2022，EasyChair 预印本第 8431 号，2022。URL：https://hal.science/hal-03719939。[dNM11] Paulin Jacobé de Naurois 和 Virgile Mogbil。线性逻辑证明结构的正确性判定是 NL完全的。《理论计算机科学》，412(20):1941–1957，2011。doi：10.1016/J.TCS. 2010.12.020。[DR89] Vincent Danos 和 Laurent Regnier。乘法片段的结构。《数学逻辑档案》，28:181–203，1989。doi：10.1007/BF01622878。[Ehr14] Thomas Ehrhard。MLL 证明网的一种新正确性判据。载于 Thomas A. Henzinger 和 Dale Miller 编，第二十三届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL）与第二十九届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS）联合会议，第 38:1–38:10 页。ACM，2014。doi：10.1145/2603088. 2603125。[FLZ18] Shinya Fujita、Ruonan Li 和 Shenggui Zhang。边染色图中短适当着色圈的颜色度与单色度条件。《图论杂志》，87(3):362–373，2018。URL：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/jgt.22163，doi：10.1002/jgt.22163。[FR94] Arnaud Fleury 和 Christian Retoré。混合规则。《计算机科学中的数学结构》，4(2):273–285，1994。[GH83] Jerrold W. Grossman 和 Roland Häggkvist。边划分图中的交替圈。《组合理论杂志 B 辑》，34(1):77–81，1983。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895683900084，doi：10.1016/0095-8956(83)90008-4。[Gir87] Jean-Yves Girard。线性逻辑。《理论计算机科学》，50:1–102，1987。doi：10.1016/0304-3975(87)90045-4。[Gir88] Jean-Yves Girard。交互几何 I：系统 $F$ 的一种解释。载于 Ferro、Bonotto、Valentini 和 Zanardo 编，《逻辑讨论会 ’88》。North-Holland，1988。[Gir91] Jean-Yves Girard。线性逻辑中的量词 II。载于 Corsi 和 Sambin 编，《逻辑与科学哲学的新问题》，第 79–90 页，博洛尼亚，1991。CLUEB。[Gir95] Jean-Yves Girard。线性逻辑：其语法与语义。见 Girard 等人。 [GLR95], 第 1–42 页。[Gir96] Jean-Yves Girard。证明网：证明论的并行语法。载于 Aldo Ursini 和 Paolo Agliano 编，《逻辑与代数》，纯粹与应用数学讲义第 180 卷，第 97–124 页，纽约，1996。Marcel Dekker。[GLR95] Jean-Yves Girard、Yves Lafont 和 Laurent Regnier 编。《线性逻辑进展》，伦敦数学会讲义系列第 222 卷。剑桥大学出版社，1995。[GMTdFVA24] Giulio Guerrieri、Giulia Manara、Lorenzo Tortora de Falco 和 Lionel Vaux Auclair。通过并行割消去实现证明网的合流性。载于 Nikolaj S. Bjørner、Marijn Heule 和 Andrei Voronkov 编，《LPAR 2024：第 25 届逻辑编程、人工智能与推理会议论文集》，毛里求斯路易港，2024 年 5 月 26 日至 31 日，EPiC 计算系列第 100 卷，第 464–483 页。EasyChair，2024。doi：10.29007/VKFN。[GSRMSLVV22] Hortensia Galeana-Sánchez、Rocío Rojas-Monroy、Rocío Sánchez-López 和 Juana Imelda Villareal-Valdés。H染色多重图中的 H圈。《图与组合》，38:62，2022。doi：10.1007/s00373-022-02464-4。

[Gue99] Stefano Guerrini。乘法证明网的正确性是线性的。载于《第十四届计算机科学逻辑年度研讨会论文集》，第 454–463 页，特伦托，1999 年 7 月。IEEE、IEEE 计算机学会出版社。[HH16a] Willem Heijltjes 和 Robin Houston。乘法线性逻辑中的证明等价是 PSPACE 完全的。《计算机科学中的逻辑方法》，12(1)，2016 年。doi:10.2168/LMCS-12(1:2)2016。[HH16b] Willem Heijltjes 和 Dominic Hughes。冲突网：高效的局部规范乘法加法线性逻辑证明网。载于第 31 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会（LICS）论文集，第 437–446 页。ACM 出版社，2016 年 7 月。doi:10.1145/2933575.2934559。[Hug05] Dominic Hughes。带单位元的简单乘法证明网，2005 年。网址：https://arxiv. org/abs/math/0507003，arXiv:math/0507003。[Hug12] Dominic Hughes。简单自由星自对偶范畴与完全相干性。《纯粹与应用代数杂志》，216(11):2386–2410，2012 年。网址：https://www.sciencedirect. com/science/article/pii/S0022404912001089，doi:10.1016/j.jpaa.2012.03.020。[HvG05] Dominic Hughes 和 Rob van Glabbeek。无单位乘加线性逻辑的证明网。《ACM 计算逻辑汇刊》，6(4):784–842，2005 年。doi:10.1145/ 1094622.1094629。[HvG16] Dominic Hughes 和 Rob van Glabbeek。乘法加法线性逻辑证明网将模规则交换的证明识别为等价。见 https://arxiv.org/abs/1609.04693，2016 年。[Kot59] Anton Kotzig。关于具有线性因子的有限图理论 II。《数学物理杂志》，09(3):136–159，1959 年。斯洛伐克语，原题为《有线性因子的有限图理论 II》。网址：https://eudml.org/doc/29908。[Laf95] Yves Lafont。从证明网到交互网。载于 Girard 等人 [GLR95], 第 225–247 页。[Lau20] Olivier Laurent。无类型初等线性逻辑中的多项式时间。《理论计算机科学》，813:117–142，2020 年。doi:10.1016/J.TCS.2019.10.002。[LN22] Ruonan Li 和 Bo Ning。重新审视 Bang-Jensen-Gutin 猜想和 Yeo 定理。预印本，2022 年。网址：https://arxiv.org/abs/2207.03793，doi:10.48550/arXiv.2207. 03793。[Mel04] Paul-André Melliès。乘法非交换逻辑的拓扑正确性判据。载于 Thomas Ehrhard、Jean-Yves Girard、Paul Ruet 和 Philip J. Scott 编，《计算机科学中的线性逻辑》，第 316 卷《伦敦数学会讲义系列》，第 283–322 页。剑桥大学出版社，2004 年 11 月。[Mét94] François Métayer。证明网的同调。《数理逻辑档案》，33 188，1994 169 10 1007 01203031：–。doi: . /bf 。[Nen 14] Gleb Nenashev。Kotzig 定理的一个简短证明。预印本，2014 年。网址：https://arxiv.org/abs/1402.0949，doi:10.48550/arXiv.1402.0949。[Ngu20] Lê Thành D˜ung Nguy˜ˆen。唯一完美匹配、禁用转移以及带 mix 规则的线性逻辑证明网。《计算机科学中的逻辑方法》，16(1)，2020 年 2 月。doi:10.23638/LMCS-16(1:27)2020。[PTdF10] Michele Pagani 和 Lorenzo Tortora de Falco。二阶线性逻辑的强规范化性质。《理论计算机科学》，411(2):410–444，2010 年。[Ret03] Christian Retoré。优美证明网：完美匹配与余图。《理论计算机科学》，294(3):473–488，2003 年。[Sey78] Paul D. Seymour。回路和。《图论及相关主题》，第 341–355 页，1978 年。[SS78] D. J. Shoesmith 和 T. J. Smiley。《多结论逻辑》。剑桥大学出版社，1978 年。[SS79] D. J. Shoesmith 和 T. J. Smiley。一个适用于逻辑的有向图定理。《图论杂志》，3(4):401–406，1979 年。网址：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/ 10.1002/jgt.3190030412，doi:10.1002/jgt.3190030412。[Sze04] Stefan Szeider。关于与具有唯一 1-因子的图上的 Kotzig 结果等价的定理。《组合学艺术》，73:53–64，2004 年。网址：https://www.ac.tuwien.ac.at/files/pub/szeider-AC-2004.pdf。[Yeo97] Anders Yeo。关于边着色图中交替圈的一则注记。《组合理论杂志 B 辑》，69(2):222–225，1997 年。doi:10.1006/jctb.1997.1728。

本作品采用知识共享署名许可协议授权。要查看该许可协议的副本，请访问 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/，或致函知识共享，地址：美国加利福尼亚州 94105旧金山第二街171号300室；或德国柏林10777艾森纳赫街2号。