A 面向黏性流体力学代码的更严格测试问题

AND GEOFFREY A. RYAN[1] AND ALEXANDER J. DITTMANN[2]
[1] 高等研究院，爱因斯坦大道1号，普林斯顿，新泽西州08540，美国，以及[2] 周界理论物理研究所，北卡罗琳街31号，滑铁卢，安大略省N2L 2Y5，加拿大
Version March 4, 2026

arXiv:2603.03266v1 [physics.flu-dyn] 3 Mar 2026

摘要

我们主张为旨在求解黏性流体动力学方程的代码采用更为严格的测试问题。具体而言，我们讨论常见的（均匀密度）高斯速度剪切测试的非均匀密度版本：横向于速度剪切方向的密度梯度会使速度剖面随时间漂移。通过采用非均匀密度，该测试可检验完整的黏性应力（及速度剪切）张量是否由守恒变量正确计算，并核验由此计算得到的通量与源项的正确性。

在附录A中，我们详细阐述了纳维–斯托克斯方程，尤其介绍了它们在多种常用坐标系中的通量和源项。

1. 引言

用于测试求解纳维-斯托克斯方程的代码的一种标准问题，是追踪高斯速度凸起的演化（例如，D'Orazio等人 2013年；Duffell 2016年；Stone等人 2024年），这一问题的灵感来自热方程经典解的类比。然而，这项测试通常在恒定背景密度下进行，这可能导致黏性演化项计算中的错误未被发现或未受重视。下文将讨论黏性流体动力学方程的一种更一般的解析解，以及如何将其用作数值格式的测试问题。

2. 笛卡尔坐　标坐标系下非均匀背景密度的速度剪切测试

我们考虑一个一维剪切流，该流在 y 和 z 方向上均匀。我们假设流体压力仅与密度和空间变化的声速有关，即 $P = c_s^2(x)\rho$；流体在z方向上静止，且流体的体积黏度为零。用笛卡尔坐标表示的可压缩黏性流体动力学方程为

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v_x) = 0, \tag{1}$$
$$\partial_t(\rho v_x) + \partial_x(\rho v_x^2 + P - 2\eta\sigma_{xx}) = 0, \tag{2}$$
$$\partial_t(\rho v_y) + \partial_x(\rho v_x v_y - 2\eta\sigma_{xy}) = 0, \tag{3}$$

其中 η 是动力黏度（与运动黏度的关系为 $\eta \equiv \rho\nu$），而 σ_{ij} 是速度剪切张量的分量。（关于各种坐标系中更一般的表达式，请参见附录 A 。）在 d 维空间中，速度剪切张量是对称且无迹的，在笛卡尔坐标中表示为

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right) - \gamma_{ij}\frac{1}{d}\nabla \cdot v, \tag{4}$$

其中 γ 是度量张量，在笛卡尔坐标中即单位并矢。因此，剪切张量的相关项为

$$\sigma_{xx} = \partial_x v_x - \frac{1}{d}\partial_x v_x = \frac{d-1}{d}\partial_x v_x, \tag{5}$$
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\partial_x v_y. \tag{6}$$

利用连续性方程，动量方程可写为

$$\rho\partial_t v_x + \rho v_x \partial_x v_x + \partial_x(c_s^2\rho) - 2\partial_x(\eta\sigma_{xx}) = 0 \tag{7}$$
$$\rho\partial_t v_y + \rho v_x \partial_x v_y - 2\partial_x(\eta\sigma_{xy}) = 0. \tag{8}$$

我们注意到，只要压力在 x, $P(x) = P_0$ (即 $\partial_x(c_s^2\rho) = 0$) 中保持均匀，那么初始处于 x-静止$v_x = 0$ 的状态将始终保持如此。因此， $\partial_t\rho = 0$，密度分布也就不会随时间改变。显然，可以叠加一个均匀的 v_x ，使流体图样仅发生平流。

在　　在上述假设下，流体沿 y 方向的演化可简化为　　y

$$\rho\partial_t v_y = \partial_x(2\eta\sigma_{xy}) = \partial_x(\eta\partial_x v_y). \tag{9}$$

*dittmann@ias.edu † NASA爱因斯坦学者

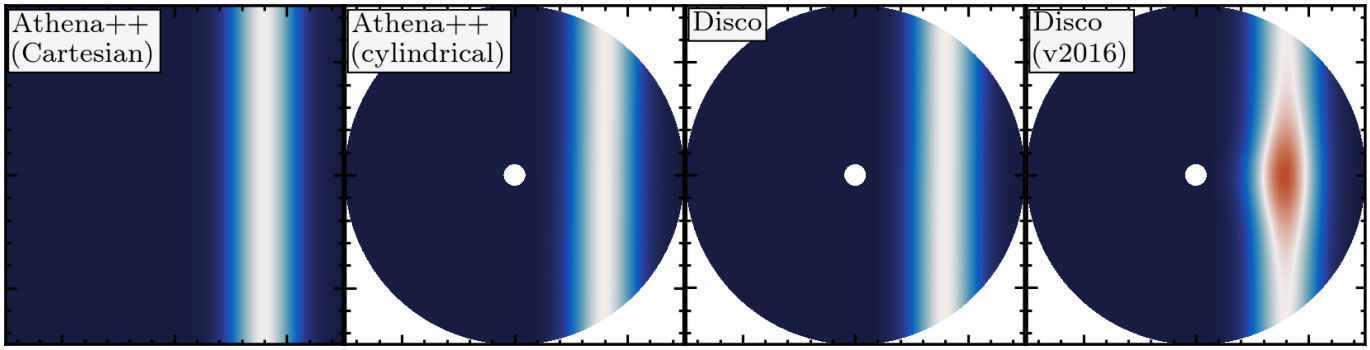


FIG. 1.— 在 $t = 0.02$ 时刻， v_y 的 $\kappa = 15$ 测试问题模拟快照。每个面板使用相同的色标，因此红色表示速度超过解析解的最大值。

为进一步简化，我们假设密度分布为简单形式： $\rho(x) = \rho_0 \exp(-\kappa x)$。在此假设以及运动黏度在全局范围内恒定的假设下， v_y 的演化可简化为

$$\partial_t v_y + \nu\kappa\partial_x v_y - \nu\partial_x^2 v_y = 0. \tag{10}$$

方程（10）的一个解，其中 $t > 0$ 为

$$v_y(x,t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{(x-\kappa\nu t)^2}{4\nu t}\right), \tag{11}$$

具有任意的初始振幅尺度 A。因此，初始高斯剪切分布会随时间扩散，其方差按 $\sigma^2 = 2\nu t$ 演化，中心则以速度 $\nu\kappa$ 沿密度梯度移动。令 $\kappa = 0$即可将其化为文献中先前使用的标准速度剪切测试。

尽管这个测试在解析上相当简单，但若在不便的坐标系中计算该问题的解（例如，使剪切和密度分布的方向与坐标轴不对齐，或使用极坐标求解这个笛卡尔坐标问题的演化），则可对黏性应力张量的每个分量构成非平凡的测试。

值得注意的是，在前述推导中，我们忽略了能量方程。原则上，黏性耗散可能会加热流体并引入压力梯度，从而使速度场的演化变得复杂。因此，实际使用时，将此测试与快速冷却结合起来以维持 $\partial_x(c_s^2\rho) = 0$，或采用固定 $c_s \ll v$ 的等温状态方程，是一种有用的方法。我们在下文采用后一种策略，它为利用此问题测试特定代码的收敛性设定了可达到误差的下限。

3. 示例

下文中，我们将三种不同的代码应用于此问题，以检验代码的准确性，并突出说明此测试能够识别出恒定密度版本测试所遗漏错误的能力。

我们通过选择初始标准差 σ_0 和振幅 v_0来构造初始状态。前者与运动黏度共同决定有效初始时间 $t_0 = \sigma_0^2/(2\nu)$和振幅 $A = v_0\sqrt{4\nu t_0}$。下文中，我们使用了 $v_0 = 10^{-3}$, $\sigma_0 = 0.1$, $\nu = 1$。我们将速度高斯分布的初始位置设为 $x_0 = 0.5$ ，并运行每次模拟直至 $t = 0.02$。例如，我们使用均匀和非均匀背景开展了一系列测试，具体为 $\kappa = 0$ 和 $\kappa = 15$。

为作演示，我们在两种不同的代码中实现了这一测试问题：`Athena++` (Stone 等（2020）) 和`Disco`。我们的`Athena++` 模拟采用了笛卡尔坐标（均匀网格）和柱坐标（径向网格间距对数均匀）两种设置。我们的`Disco`模拟均采用柱坐标，但使用径向线性间隔的网格，并在 ϕ方向上采用可变数量的网格单元，以实现近似等长宽比的网格单元；在`Disco` 中，我们同时使用了Duffell (2016年）中描述的近似黏性格式（“`v2016`”），以及Dittmann 和 Ryan (2021）中描述的完整剪切黏度。[1] 每种情况下，我们都采用二阶龙格-库塔时间步进和二阶分段线性重构。

图1 展示了 v_y 分布，其中包含在 $t = 0.02$ 下采用 $\kappa = 15$ 密度分布进行的多种模拟。就目测而言，`Athena++` 和`Disco` 彼此（以及解析解）吻合良好，因为速度峰的位置已从 $x = 0.5$ 移至 $x = 0.8$），而`Disco v2016` 则出现了显著偏差。

图 2 展示了各个代码在此测试问题的 $\kappa = 0$ 和 $\kappa = 15$ 版本中的收敛性，或未能收敛的情况。值得注意的是，各代码在均匀密度背景下表现良好，但 `Discov2016` 的局限性在 $\kappa \neq 0$时显露出来。只测试 $\kappa = 0$ 情况，可能会让人对代码的准确性过于自信，因此应优先采用 $\kappa \gg 1$ 。

[1] 具体而言， `Disco v2016` 黏度实现 *assumes* 假定动力黏度在全局范围内均匀分布；当代码被用于模拟环双星盘等系统时，这导致了各种错误结果（有关进一步讨论，请参见Dittmann 和 Ryan 2024的附录A）。这一限制同样适用于开隙行星的模拟等情况。

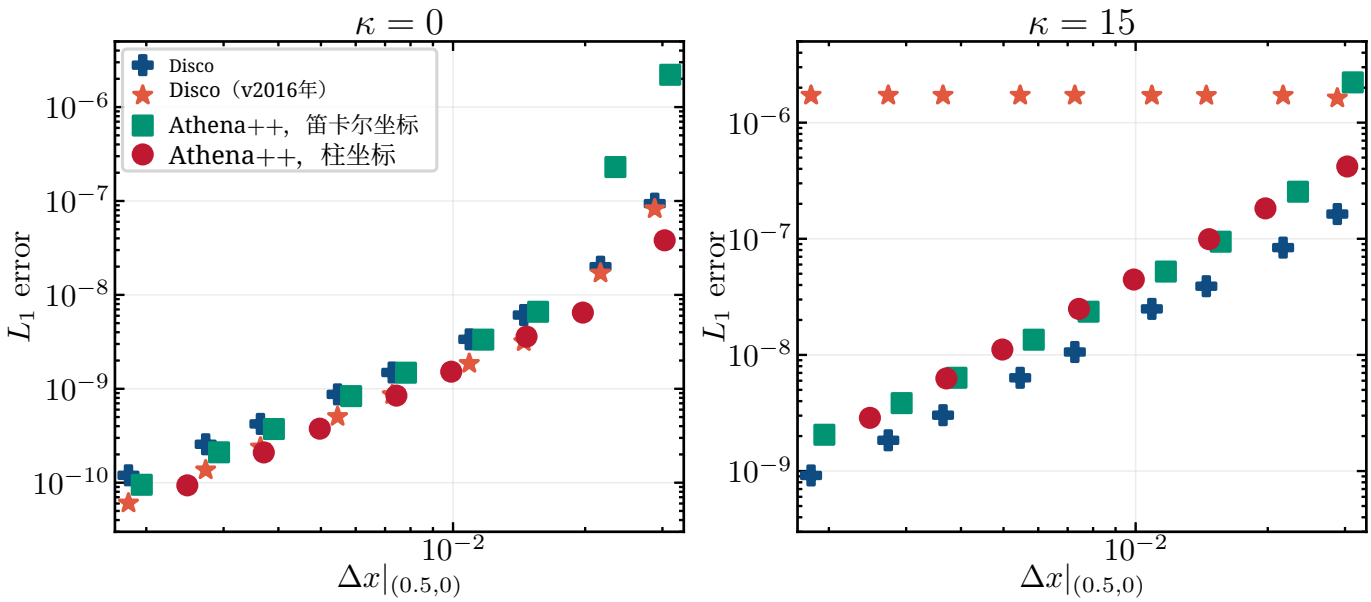


FIG. 2.— L_1 在每次模拟中 y–速度的误差随 $x = 0$处网格尺寸的变化情况，5， $y = 0$ （注意，虽然 `Disco` 和笛卡尔坐标模拟使用了尺寸均匀的网格，但柱坐标 `Athena++` 模拟使用了 $\Delta r \propto r\Delta\phi \propto r$）。在 $\kappa = 0$处，每种代码均以二阶精度收敛。然而，对于 $\kappa = 15$， `Disco v2016` 未能收敛到解析解。

4. 摘要

我们希望，这个更严格、甚至可以说“改进过”的高斯速度剪切问题，能够对测试未来的数值格式有所助益。如上所示，与均匀密度版本相比，它具有更强的区分能力，同时本身也是一项更全面的测试。

致谢

AJD 获得了 NASA 哈勃奖学金资助（编号 HST-HF2-51553.001）。该奖学金由太空望远镜科学研究所授予；该研究所由大学天文研究协会代表 NASA 运营，依据合同 NAS5-26555。圆周理论物理研究所的研究部分由加拿大政府通过创新、科学和经济发展部，以及安大略省通过学院与大学部提供支持。我们感谢 Paul Duffell 对本文的评论，并感谢他提出附录的建议。

参考文献

Dittmann, A. J., & Ryan, G. 2021,ApJ, 921, 71,doi: 10.3847/1538-4357/ac1bbd —. 2024年, ApJ, 967, 12, doi: 10.3847/1538-4357/ad2f1e D'Orazio, D. J., Haiman, Z., & MacFadyen, A. 2013年, MNRAS, 436, 2997, doi: 10.1093/mnras/stt1787

Duffell, P. C. 2016年, 《天体物理学杂志增刊》, 226, 2, doi: 10.3847/0067-0049/226/1/2 Stone, J. M., Tomida, K., White, C. J., &Felker, K. G. 2020年, 《天体物理学杂志增刊》, 249, 4, doi: 10.3847/1538-4365/ab929bStone, J. M., Mullen, P. D., Fielding, D., 等。2024年, arXiv 电子印本, arXiv:2409.16053, doi: 10.48550/arXiv.2409.16053

附录

COMPRESSIBLE NAVIER-STOKES IN CURVILINEAR COORDINATES

本文简要推导曲线坐标下的纳维-斯托克斯方程，重点讨论数值代码（如 Disco）所需的黏性通量和源项。

密度为 ρ、速度$\mathbf{v}$、比内能为 ϵ 的单流体，其应力张量$\mathbf{T}$ 在引力场$\mathbf{g}$ 下的动量方程和能量方程为：

$$\partial_t(\rho) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{A1}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + \mathbf{T}) = \rho\mathbf{g} \tag{A2}$$

$$\partial_t\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\mathbf{v} + \rho\epsilon\mathbf{v} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{g} \tag{A3}$$

在纳维-斯托克斯方程中，应力张量包括各向同性压力 P以及黏性应力 τ：$\mathbf{T} = P\mathbf{1} - \tau$。曲线坐标系由其度量张量 γ_{ij}定义，其中 $i,j\in\{1,2,3\}$。向量和张量可在坐标基中表示为逆变分量 v^i 或协变分量 v_i，也可在正交基 $v^i = v_i$中表示。在柱极坐标系中，v^ϕ 表示角速度，v_ϕ 表示比角动量，而 v^ϕ 表示线速度在 ϕ 方向上的分量。纳维–斯托克斯系统可写成坐标形式：

$$\partial_t(\rho) + \nabla_j\left(\rho v^j\right) = 0, \tag{A4}$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla_j\left(\rho v_i v^j + T_i^j\right) = \rho g_i, \tag{A5}$$

$$\partial_t\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \nabla_j\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 v^j + \rho\epsilon v^j + T_k^j v^k\right) = \rho v^j g_j, \tag{A6}$$

其中 ∇_i 是度量张量 γ_{ij}对应的协变导数。数值算法要求我们用偏导数 ∂_i 而不是协变导数来表示这些方程。以下两个恒等式适用于向量$\mathbf{v}$和对称张量$\mathbf{T}$：

$$\nabla_j v^j = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_j\left(\sqrt{\gamma}v^j\right), \tag{A7}$$

$$\nabla_j T_i^j = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_j\left(\sqrt{\gamma}T_i^j\right) - \tfrac{1}{2}T^{jk}\partial_i\gamma_{jk}, \tag{A8}$$

其中 $\gamma = \det\gamma_{ij}$ 是度量张量的行列式。因此，可将可压缩 Navier–Stokes 方程组写成显式坐标形式：

$$\partial_t(\rho) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_j\left(\sqrt{\gamma}\rho v^j\right) = 0, \tag{A9}$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_j\left[\sqrt{\gamma}\left(\rho v_i v^j + T_i^j\right)\right] = \tfrac{1}{2}\left(\rho v^j v^k + T^{jk}\right)\partial_i\gamma_{jk} + \rho g_i, \tag{A10}$$

$$\partial_t\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_j\left[\sqrt{\gamma}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 v^j + \rho\epsilon v^j + T_k^j v^k\right)\right] = \rho v^j g_j. \tag{A11}$$

对于具有通量 $\mathbf{F}$ 和源项 S 的量 U，一般的守恒律可写为：

$$\partial_t U + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_j\left(\sqrt{\gamma}F^j\right) = S. \tag{A12}$$

为构造有限体积公式中的数值格式，考虑一个控制体积 V，其边界为∂V。该边界的单位法向量为 $\mathbf{n}$ (即 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$)、二维度量张量为 Σ_{ab}，面积元为$\sqrt{\Sigma}d^2x$，其中 $\Sigma = \det\Sigma_{ab}$。对 A12 式在 V 上积分，并应用斯托克斯定理，可得关于 U 在 V中的质量演化方程：

$$\frac{d}{dt}\int_V U\sqrt{\gamma}d^3x = -\int_{\partial V} F^j n_j\sqrt{\Sigma}d^2x + \int_V S\sqrt{\gamma}d^3x. \tag{A13}$$

有限体积数值格式通过离散化积分、确定近似数值通量并进行时间积分，来近似求解该方程。其简单示意如下：

$$\frac{d}{dt}U\Delta V \approx -\sum_{f\in\text{faces}} F^j n_j^{(f)}\Delta A_f + S\Delta V, \tag{A14}$$

其中， $\Delta V = \int_V \sqrt{\gamma} d^3x$ 是 V的体积，边界 ∂V 由有限个面 f 组成，每个面都有单位法向量$\mathbf{n}^{(f)}$ 和面积 $\Delta A_f = \int_f \sqrt{\Sigma} d^2x$。因此，数值格式所需的通量为每个面上的 $F^j n_j^{(f)} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^{(f)}$，即通量与该面单位法向量的内积。如果像许多数值格式那样，面与坐标系对齐（例如，在笛卡尔代码中，坐标 x、 y、 z 为常数的曲面，或在柱极坐标代码中，坐标 r、 ϕ、 z 为常数的曲面），那么 j 方向上所需的通量就是其正交归一分量：$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^{(j)} = F^{\hat{j}}$。

在纳维–斯托克斯系统中，我们有：

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \end{pmatrix} \qquad F^{\hat{j}} = \begin{pmatrix} \rho v^{\hat{j}} \\ \rho v_i v^{\hat{j}} + T_i^{\hat{j}} \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) v^{\hat{j}} + T_k^{\hat{j}} v^k \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left(\rho v^j v^k + T^{jk}\right) \partial_i \gamma_{jk} + \rho g_i \\ \rho v^j g_j \end{pmatrix} \tag{A15}$$

应力张量 $T_{jk} = P\delta_{jk} - \tau_{jk}$ 其中 τ_{jk} 是黏性应力张量。黏性应力取决于速度梯度的对称部分，具体而言，即剪切 σ_{jk} 和散度 Θ:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla_k v^k \qquad\qquad \Theta = \nabla_k v^k. \tag{A16}$$

在所有坐标系中，剪切张量都是对称的 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 且无迹 $\sigma_i^i = \gamma^{ij}\sigma_{ij} = \gamma_{ij}\sigma^{ij} = 0$。黏性应力张量为：

$$\tau_{ij} = 2\eta\sigma_{ij} + \zeta\gamma_{ij}\Theta, \tag{A17}$$

with 动力黏度 $\eta \geq 0$ 和体积黏度 $\zeta \geq 0$ （运动黏度为 $\nu = \eta/\rho$）。

Ex因此，通量和源项分别为：

$$F^{\hat{j}} = \begin{pmatrix} \rho v^{\hat{j}} \\ \rho v_i v^{\hat{j}} + \left(P - \zeta\Theta\right) n_i^{(j)} - 2\eta\sigma_i^{\hat{j}} \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P - \zeta\Theta\right) v^{\hat{j}} - 2\eta\sigma_k^{\hat{j}} v^k \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left(\rho v^j v^k + \left(P - \zeta\Theta\right)\gamma^{jk} - 2\eta\sigma^{jk}\right)\partial_i\gamma_{jk} + \rho g_i \\ \rho v^j g_j \end{pmatrix} \tag{A18}$$

CARTESIAN COORDINATES

在笛卡尔坐标中， $\gamma_{ij} = \mathsf{diag}(1,\ 1,\ 1)$。逆变、协变和正交归一张量分量均相等： $v^x = v_x = v^x = v_{\hat{x}}$。剪切张量和散度为：

$$\sigma_i{}^j = \begin{pmatrix} \partial_x v^x - \frac{1}{3}\Theta & \frac{1}{2}\left(\partial_x v^y + \partial_y v^x\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_x v^z + \partial_z v^x\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_x v^y + \partial_y v^x\right) & \partial_y v^y - \frac{1}{3}\Theta & \frac{1}{2}\left(\partial_y v^z + \partial_z v^y\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_x v^z + \partial_z v^x\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_y v^z + \partial_z v^y\right) & \partial_z v^z - \frac{1}{3}\Theta\ . \end{pmatrix} \tag{B1}$$

$$\Theta = \partial_x v^x + \partial_y v^y + \partial_z v^z \tag{B2}$$

黏性能量通量取决于剪切张量与速度的点积：

$$(\mathbf{v}\cdot\sigma)^j = v^k\sigma_k{}^j = \begin{pmatrix} v^x\partial_x v^x + \frac{1}{2}v^y\left(\partial_y v^x + \partial_x v^y\right) + \frac{1}{2}v^z\left(\partial_z v^x + \partial_x v^z\right) - \frac{1}{3}v^x\Theta \\ \frac{1}{2}v^x\left(\partial_x v^y + \partial_y v^x\right) + v^y\partial_y v^y + \frac{1}{2}v^z\left(\partial_z v^y + \partial_y v^z\right) - \frac{1}{3}v^y\Theta \\ \frac{1}{2}v^x\left(\partial_x v^z + \partial_z v^x\right) + \frac{1}{2}v^y\left(\partial_y v^z + \partial_z v^y\right) + v^z\partial_z v^z - \frac{1}{3}v^z\Theta \end{pmatrix} \tag{B3}$$

守恒变量和源项很简单：

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^x \\ \rho v^y \\ \rho v^z \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \end{pmatrix}, \qquad\qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ \rho\left(v^x g_x + v^y g_y + v^z g_z\right) \end{pmatrix}. \tag{B4}$$

通量显式写出时只是稍显繁琐:

$$F^{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \rho v^x \\ \rho {v^x}^2 + P - 2\eta \partial_x v^x + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta \\ \rho v^x v^y - \eta\left(\partial_x v^y + \partial_y v^x\right) \\ \rho v^x v^z - \eta\left(\partial_x v^z + \partial_z v^x\right) \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) v^x - 2\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^x \end{pmatrix} \tag{B5}$$

$$F^{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \rho v^y \\ \rho v^x v^y - \eta\left(\partial_x v^y + \partial_y v^x\right) \\ \rho {v^y}^2 + P - 2\eta \partial_y v^y + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta \\ \rho v^y v^z - \eta\left(\partial_y v^z + \partial_z v^y\right) \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) v^y - 2\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^y \end{pmatrix} \tag{B6}$$

$$F^{\hat{z}} = \begin{pmatrix} \rho v^z \\ \rho v^x v^z - \eta\left(\partial_x v^z + \partial_z v^x\right) \\ \rho v^y v^z - \eta\left(\partial_y v^z + \partial_z v^y\right) \\ \rho {v^z}^2 + P - 2\eta \partial_z v^z + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) v^z - 2\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^z \end{pmatrix} \tag{B7}$$

CYLINDRICAL POLAR COORDINATES

柱坐标（r, ϕ, z）的度量张量为 $\gamma_{ij} = \mathsf{diag}(1, r^2, 1)$。径向和垂直张量分量与笛卡尔情形相同，但方位分量满足 $v_\phi = r^2 v^\phi$, $v^\phi = v_{\hat{\phi}} = r v^\phi$。我们用 v^r、 v^ϕ 和 v^z 表示径向、角向（例如以 [rad/s] 为单位测量）和垂直速度。各维度的单位法向量为:

$$n_i^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n_i^{(\phi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n_i^{(z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{C1}$$

散度为:

$$\Theta = \nabla_k v^k = \partial_r v^r + \partial_\phi v^\phi + \partial_z v^z + \tfrac{1}{r} v^r. \tag{C2}$$

这些坐标下的剪切张量为:

$$\sigma_i{}^j = \begin{pmatrix} \partial_r v^r - \frac{1}{3}\Theta & \frac{1}{2}\left(\partial_r v^\phi + \frac{1}{r^2}\partial_\phi v^r\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_r v^z + \partial_z v^r\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_\phi v^r + r^2 \partial_r v^\phi\right) & \partial_\phi v^\phi + \frac{1}{r} v^r - \frac{1}{3}\Theta & \frac{1}{2}\left(\partial_\phi v^z + r^2 \partial_z v^\phi\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_z v^r + \partial_r v^z\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_z v^\phi + \frac{1}{r^2}\partial_\phi v^z\right) & \partial_z v^z - \frac{1}{3}\Theta \end{pmatrix}. \tag{C3}$$

与速度点乘（用于计算能量通量）:

$$\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^j = v^k \sigma_k{}^j = \begin{pmatrix} v^r \partial_r v^r + \frac{1}{2} v^\phi\left(\partial_\phi v^r + r^2 \partial_r v^\phi\right) + \frac{1}{2} v^z\left(\partial_z v^r + \partial_r v^z\right) - \frac{1}{3} v^r \Theta \\ \frac{1}{2} v^r\left(\partial_r v^\phi + \frac{1}{r^2}\partial_\phi v^r\right) + v^\phi \partial_\phi v^\phi + \frac{1}{r} v^\phi v^r + \frac{1}{2} v^z\left(\partial_z v^\phi + \frac{1}{r^2}\partial_\phi v^z\right) - \frac{1}{3} v^\phi \Theta \\ \frac{1}{2} v^r\left(\partial_r v^z + \partial_z v^r\right) + \frac{1}{2} v^\phi\left(\partial_\phi v^z + r^2 \partial_z v^\phi\right) + v^z \partial_z v^z - \frac{1}{3} v^z \Theta \end{pmatrix} \tag{C4}$$

守恒变量和源项为:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^r \\ r^2 \rho v^\phi \\ \rho v^z \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 \\ r\rho {v^\phi}^2 + \frac{1}{r}\left(P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) - \frac{2}{r}\eta\left(\partial_\phi v^\phi + \frac{1}{r} v^r\right) + \rho g_r \\ \rho g_\phi \\ \rho g_z \\ \rho\left(v^r g_r + v^\phi g_\phi + v^z g_z\right) \end{pmatrix}. \tag{C5}$$

通量为:

$$F^{\hat{r}} = F^{r} = = \begin{pmatrix} \rho v^{r} \\ \rho v^{r\,2} + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta - 2\eta\partial_r v^{r} \\ r^2\rho v^{\phi} v^{r} - \eta\left(\partial_{\phi} v^{r} + r^2\partial_r v^{\phi}\right) \\ \rho v^{z} v^{r} - \eta\left(\partial_z v^{r} + \partial_r v^{z}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) v^{r} - 2\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^{r} \end{pmatrix}, \tag{C6}$$

$$F^{\hat{\phi}} = rF^{\phi} = \begin{pmatrix} r\rho v^{\phi} \\ r\rho v^{r} v^{\phi} - r\eta\left(\partial_r v^{\phi} + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi} v^{r}\right) \\ r^3\rho v^{\phi\,2} + rP + r\left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta - 2r\eta\left(\partial_{\phi} v^{\phi} + \frac{1}{r}\partial_r v^{r}\right) \\ r\rho v^{z} v^{\phi} - r\eta\left(\partial_z v^{\phi} + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi} v^{z}\right) \\ r\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) v^{\phi} - 2r\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^{\phi} \end{pmatrix}, \tag{C7}$$

$$F^{\hat{z}} = F^{z} = \begin{pmatrix} \rho v^{z} \\ \rho v^{r} v^{z} - \eta\left(\partial_r v^{z} + \partial_z v^{r}\right) \\ r^2\rho v^{\phi} v^{z} - \eta\left(\partial_{\phi} v^{z} + r^2\partial_z v^{\phi}\right) \\ \rho v^{z\,2} + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta - 2\eta\partial_z v^{z} \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) v^{z} - 2\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^{z} \end{pmatrix}. \tag{C8}$$

SPHERICAL POLAR COORDINATES

球极坐标（R, θ, ϕ）的度量张量为 $\gamma_{ij} = \mathrm{diag}(1,\ R^2,\ R^2\sin^2\theta)$。径向和张量分量的变换与笛卡尔情形相同，纬向分量满足 $v_{\theta} = R^2 v^{\theta}$, $v^{\theta} = v_{\hat{\theta}} = R v^{\theta}$，方位分量满足 $v_{\phi} = R^2\sin^2\theta v^{\phi}$, $v^{\phi} = v_{\hat{\phi}} = R\sin\theta v^{\phi}$。我们用逆变速度分量$v^R$、 v^{θ}和 v^{ϕ} 给出表达式（注意， v^{θ} 和 v^{ϕ} 是以例如 [rad/s]为单位测量的角速度）。各维度的单位法向量为:

$$n_i^{(R)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n_i^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n_i^{(phi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\sin\theta \end{pmatrix} \tag{D1}$$

散度为:

$$\Theta = \nabla_k v^k = \partial_R v^R + \partial_{\theta} v^{\theta} + \partial_{\phi} v^{\phi} + \tfrac{2}{R} v^R + \cot\theta\ v^{\theta}. \tag{D2}$$

这些坐标中的剪切张量为:

$$\sigma_i{}^j = \begin{pmatrix} \partial_R v^R - \frac{1}{3}\Theta & \frac{1}{2}\left(\partial_R v^{\theta} + \frac{1}{R^2}\partial_{\theta} v^R\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_R v^{\phi} + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\partial_{\phi} v^R\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_{\theta} v^R + R^2\partial_R v^{\theta}\right) & \partial_{\theta} v^{\theta} + \frac{1}{R} v^R - \frac{1}{3}\Theta & \frac{1}{2}\left(\partial_{\theta} v^{\phi} + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\phi} v^{\theta}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_{\phi} v^R + R^2\sin^2\theta\ \partial_R v^{\phi}\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_{\phi} v^{\theta} + \sin^2\theta\ \partial_{\theta} v^{\phi}\right) & \partial_{\phi} v^{\phi} + \frac{1}{R} v^R + \cot\theta\ v^{\theta} - \frac{1}{3}\Theta \end{pmatrix}. \tag{D3}$$

与速度点乘（用于能量通量）:

$$\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^j = v^k\sigma_k{}^j = \begin{pmatrix} v^R\partial_R v^R + \frac{1}{2}v^{\theta}\left(\partial_{\theta} v^R + R^2\partial_R v^{\theta}\right) + \frac{1}{2}v^{\phi}\left(\partial_{\phi} v^R + R^2\sin^2\theta\ \partial_R v^{\phi}\right) - \frac{1}{3}v^R\Theta \\ \frac{1}{2}v^R\left(\partial_R v^{\theta} + \frac{1}{R^2}\partial_{\theta} v^R\right) + v^{\theta}\partial_{\theta} v^{\theta} + \frac{1}{2}v^{\phi}\left(\partial_{\phi} v^{\theta} + \sin^2\theta\ \partial_{\theta} v^{\phi}\right) - \frac{1}{3}v^{\theta}\Theta \\ \frac{1}{2}v^R\left(\partial_R v^{\phi} + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\partial_{\phi} v^R\right) + \frac{1}{2}v^{\theta}\left(\partial_{\theta} v^{\phi} + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\phi} v^{\theta}\right) + v^{\phi}\partial_{\phi} v^{\phi} - \frac{1}{3}v^{\phi}\Theta \end{pmatrix} \tag{D4}$$

守恒变量为:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^R \\ R^2\rho v^{\theta} \\ R^2\sin^2\theta\ \rho v^{\phi} \\ \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon \end{pmatrix}. \tag{D5}$$

源项为:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ R\rho v^{\theta\,2} + R\sin^2\theta\ \rho v^{\phi\,2} + \frac{2}{R}\left(P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) - \frac{2}{R}\eta\left(\partial_{\theta} v^{\theta} + \partial_{\phi} v^{\phi} + \frac{2}{R} v^R + \cot\theta\ v^{\theta}\right) + \rho g_r \\ R^2\sin\theta\cos\theta\ \rho v^{\phi\,2} + \cot\theta\left(P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right) - 2\cot\theta\ \eta\left(\partial_{\phi} v^{\phi} + \frac{1}{R} v^R + \cot\theta\ v^{\theta}\right) + \rho g_{\theta} \\ \rho g_{\phi} \\ \rho\left(v^r g_r + v^{\phi} g_{\phi} + v^z g_z\right) \end{pmatrix}. \tag{D6}$$

通量为：

$$F^{\hat{R}} = F^{R} = \begin{pmatrix} \rho v^{R} \\ \rho {v^{R}}^{2} + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta - 2\eta\partial_{R}v^{R} \\ R^{2}\rho v^{\theta}v^{R} - \eta\left(\partial_{\theta}v^{R} + R^{2}\partial_{R}v^{\theta}\right) \\ R^{2}\sin^{2}\theta\ \rho v^{\phi}v^{R} - \eta\left(\partial_{\phi}v^{R} + R^{2}\sin^{2}\theta\ \partial_{R}v^{\phi}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\rho v^{2} + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right)v^{R} - 2\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^{R} \end{pmatrix}, \tag{D7}$$

$$F^{\hat{\theta}} = RF^{\theta} = \begin{pmatrix} R\rho v^{\theta} \\ R\rho v^{r}v^{\theta} - R\eta\left(\partial_{R}v^{\theta} + \frac{1}{R^{2}}\partial_{\theta}v^{R}\right) \\ R^{3}\rho {v^{\theta}}^{2} + RP + R\left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta - 2R\eta\left(\partial_{\theta}v^{\theta} + \frac{1}{R}\partial_{R}v^{R}\right) \\ R^{3}\sin^{2}\theta\rho v^{\phi}v^{\theta} - R\eta\left(\partial_{\phi}v^{\theta} + \sin^{2}\theta\ \partial_{\theta}v^{\phi}\right) \\ R\left(\frac{1}{2}\rho v^{2} + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right)v^{\theta} - 2R\eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^{\theta} \end{pmatrix}, \tag{D8}$$

$$F^{\hat{\phi}} = R\sin\theta\ F^{\phi} = \begin{pmatrix} R\sin\theta\ \rho v^{\phi} \\ R\sin\theta\ \rho v^{R}v^{\phi} - R\sin\theta\ \eta\left(\partial_{R}v^{\phi} + \frac{1}{R^{2}\sin^{2}\theta}\partial_{\phi}v^{R}\right) \\ R^{3}\sin\theta\rho v^{\theta}v^{\phi} - \eta\left(\partial_{\theta}v^{\phi} + \frac{1}{\sin^{2}\theta}\partial_{\phi}v^{\theta}\right) \\ R^{3}\sin^{3}\theta\rho {v^{\phi}}^{2} + R\sin\theta\ P + R\sin\theta\ \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta - 2R\sin\theta\ \eta\left(\partial_{\phi}v^{\phi} + \frac{1}{R}v^{R} + \cot\theta v^{\theta}\right) \\ R\sin\theta\ \left(\frac{1}{2}\rho v^{2} + \rho\epsilon + P + \left(\frac{2}{3}\eta - \zeta\right)\Theta\right)v^{\phi} - 2R\sin\theta\ \eta\left(\mathbf{v}\cdot\sigma\right)^{\phi} \end{pmatrix}. \tag{D9}$$