arXiv:2603.03268v1 [math.PR] 3 Mar 2026

随机 Volterra 方程的马尔可夫提升的指数遍历性与有限维近似

Yushi Hamaguchi*†

2026年3月4日

摘要

本文研究一类随机 Volterra 方程（随机 Volterra 方程）的长时间渐近行为及平稳解的存在性。为应对随机 Volterra 方程的非马尔可夫性质，我们采用马尔可夫化提升技术，将马尔可夫提升表述为 Gelfand 三元组上的随机演化方程（随机演化方程）的解。我们的主要目标是通过广义 Harris 定理建立该马尔可夫提升的遍历性，进而得到原始随机 Volterra 方程的渐近结果。尽管随机演化方程具有高度退化的无限维性质，带来了诸多挑战，但我们通过构造广义耦合和距离函数实现了这一目标；这些构造利用了其系数中非局部算子所产生的结构性质。此外，我们证明，随机演化方程在路径空间上的不变概率测度，以及更一般地说，其平稳分布，可以由有限维随机微分方程的不变概率测度和平稳分布弱地近似。这为原始随机 Volterra 方程的平稳解带来了新的近似结果，同时也为统计物理学中广泛使用的马尔可夫嵌入概念的有效性提供了严格的数学框架。

关键词：随机 Volterra 方程；随机演化方程；马尔可夫提升；遍历性。**2020年数学主题分类**：37A25；60H15；45D05；60G22。

1 引言

随机微分方程（SDE）的长期渐近行为分析以及平稳解的存在性，是随机分析中的基本问题。本文研究以下形式的随机 *Volterra* 方程（SVE）的这些性质：

$$X_t = x(t) + \int_0^t K_b(t-s)b(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t K_\sigma(t-s)\sigma(X_s)\,\mathrm{d}W_s, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

在此，$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 分别表示漂移项和扩散系数，W 是一个 d维布朗运动，而 x 是给定的 $\mathbb{R}^n$值函数，称为强迫项；它可以是随机的，但与布朗运动独立。引入（矩阵值）函数 K_b，$K_\sigma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$，即所谓的核，可以使我们对具有样本路径粗糙性和记忆效应的动力学进行建模，而这些特征无法通过随机微分方程刻画。典型例子包括数理金融中的粗糙波动率模型 [6] ，以及统计物理中的（过阻尼）广义朗之万方程[41, 45, 64]。然而，随机 Volterra 方程（1.1）固有的非马尔可夫性质给长时间渐近行为的分析带来了重大挑战，因为关于马尔可夫过程遍历性的标准结果——这类结果是研究随机微分方程的核心——无法直接应用。此外，随机 Volterra 方程（1.1）的解通常不属于半鞅框架，这又带来了另一项重大挑战，因为此时无法直接使用经典的伊藤微积分。

*京都大学理学研究科数学系。电子邮箱：hamaguchi@math.kyoto-u.ac.jp
†作者获得了日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI）资助，项目编号为 22K13958。

为克服这些非马尔可夫和非半鞅特征所带来的困难，文献中发展出了各种“马尔可夫化提升”技术。通过引入合适的马尔可夫动力学，即所谓的马尔可夫提升（它们通常在无穷维空间中演化），可以将随机 Volterra 方程的解表示为此类提升的投影。构造随机 Volterra 方程的马尔可夫提升，至少有两种成熟的方法。第一种方法通过某些测度的拉普拉斯变换来表示核，例如 [13, 14, 32, 33, 36] 在多种框架中采用了这种方法。该方法与广义朗之万方程的马尔可夫嵌入 [25, 43] 以及粗糙波动率模型的多因子近似有关 [1, 3, 5]；另见 [2, 34] 关于随机 Volterra 方程最优控制问题应用的研究。第二种方法基于对辅助过程动力学的分析，例如条件未来路径或过去路径，见 [8, 20, 27, 60]。我们还提及近期工作 [9], , 该工作引入了一个抽象框架，以统一 [8, 32]中的两种不同方法。值得注意的是，我们此前的研究 [32, 33] 所建立的方法，使我们能够在 Gelfand 三元组上的随机演化方程框架内研究马尔可夫提升。凭借希尔伯特空间结构以及与单调随机偏微分方程成熟理论的联系，这一框架尤为易于处理；该理论由 Pardoux 开创 [53, 54] ，并由 Krylov 和 Rozovskiˇı [40]进一步发展；另见 [21, 47, 55]关于单调随机偏微分方程的全面论述的专著。

本文采用并进一步推广了 [32, 33]的方法。具体而言，假设核 K_b 和 K_σ 具有如下表示：$K_b(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta t} M_b(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)$ 以及 $K_\sigma(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta t} M_\sigma(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)$，其中 μ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的博雷尔测度，$M_b, M_\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 是满足适当可积性条件的可测映射，则我们将 SVE (1.1) 转化为以下 SEE：

$$\mathrm{d}Y_t(\theta) = -\theta Y_t(\theta)\,\mathrm{d}t + M_b(\theta)b(\mu[Y_t])\,\mathrm{d}t + M_\sigma(\theta)\sigma(\mu[Y_t])\,\mathrm{d}W_t, \quad t \geq 0,\ \theta \in [0,\infty). \tag{1.2}$$

这里，$\mu[Y_t]$ 表示一个由积分 $\mu[Y_t] = \int_{[0,\infty)} Y_t(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)$ 定义的非局部项。该 SEE 在由希尔伯特空间构成的 Gelfand 三元组 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$ 中得到严格表述；该三元组由相对于测度 μ 的加权 L^2空间组成。这个 Gelfand 三元组的加权可积结构体现了核 $K_b(t)$ 和 $K_\sigma(t)$ 在 $t = 0$处的奇异性。本文假设这些核在原点附近分别仅满足 L^1和 L^2，因此允许它们在 $t \downarrow 0$时发散。这种可积性选择是最小的，因为它对应于使 (1.1) 中的勒贝格积分和随机积分有定义所必需的条件。由此得到的 SEE (1.2) 的解 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的时间齐次马尔可夫过程，由公式$X_t = \mu[Y_t]$可恢复原始 SVE (1.1) 的解。从这个意义上说，无限维过程 Y 是 X的马尔可夫提升。关于这一框架的详细介绍，请参阅第2节。

我们的首要目标是建立这一马尔可夫提升的遍历性。具体而言，我们的主要结果（定理 3.8）给出了与随机演化方程（1.2）相关联的转移概率趋向其唯一不变概率测度的谱隙型估计与指数弱收敛。这些结果进而保证了原始随机 Volterra 方程（1.1）的长时间渐近行为以及平稳解的存在性，如推论 3.10所示。据我们所知，讨论此类随机 Volterra 方程提升之遍历性的唯一现有工作是预印本 [9]；另见 [8] ，其中在假定核对强正则性的同时，利用基于条件未来路径的另一类提升，研究了随机 Volterra 方程的长时间极限分布。在 [9], 中，作者引入马尔可夫提升的抽象框架，以证明某种形式的遍历性，而不依赖于随机演化方程的具体结构。然而，这种一般性需要对系数的利普希茨常数和增长条件施加严格的技术性假设（类似约束也出现在 [10]中，该处在不借助马尔可夫提升的情况下研究了随机 Volterra 方程的极限分布），并且其中不能期望得到谱隙。相比之下，本文通过采用更为自然的李雅普诺夫型条件，并转而对扩散系数假定一致椭圆性 σ，不仅给出了指数弱遍历性，还给出了随机演化方程（1.2）的谱隙型估计。谱隙本身至关重要，因为它保证了不变概率测度的稳定性，下文将对此加以阐述。我们的结果也可与相关工作[7, 18, 37], 相类比，其中通过依赖于由特定仿射结构所产生的 Volterra 型黎卡提方程的分析，研究了一类称为仿射 Volterra 过程的特定随机 Volterra 方程的遍历性。我们还提及最近的预印本 [24], , 该文针对具有线性漂移系数的随机 Volterra 方程建立了所谓的“伪平稳性” b。对于给定的解过程，这一概念指的仅仅是

边缘分布或至多某一阶矩在时间平移下的不变性。相比之下，我们并不假定系数具有线性或仿射结构，并且由此得到的原始随机 Volterra 方程（1.1）的平稳解具有严格平稳性，即所有有限维分布在时间平移下都是不变的。我们主要结果的详细陈述见第 3节。

我们的主要结果的证明基于 Hairer、Mattingly 和 Scheutzow 提出的广义 Harris 定理 [29] ，并在 [11, 16]中进一步推广；另请参阅专著 [42]。该定理将经典 Harris 定理（例如，参见 [28, 48]）推广到更广泛的情形，其中涉及加权Wasserstein型距离。经典 Harris 定理最初用于建立关于全变差距离的遍历性。这一推广对我们的框架至关重要，因为马尔可夫提升通常不具备强Feller性质（见 [32,定理 3.4]）；因此，我们不应期待关于全变差距离的遍历性。我们在第2节中回顾 [29] 所给广义 Harris 定理的精确表述。在这一框架下，最关键且最具挑战性的一步，是构造一个合适的距离（类）函数 d ，使其满足该定理要求的“压缩”条件和“d-小”条件。在 [12], 中，作者根据转移概率之间广义耦合的概念，给出了一组可验证的充分条件，以确保广义 Harris 定理的假设成立。因此，我们的任务归结为构造适当的广义耦合及相应的类距离函数。然而，这一构造仍非易事，因为它需要针对模型的特定结构进行深入分析。我们必须克服的一个尤为棘手的挑战是，随机演化方程 (1.2) 是一个高度退化的无穷维系统，这意味着状态空间 $\mathcal{H}$ 通常是无穷维的，而以布朗运动 W表示的噪声则是有限维的。事实上，如果原始随机 Volterra 方程 (1.1) 中的驱动噪声 W 是一维的，那么该噪声甚至可以只有一维，而随机演化方程 (1.2) 的状态空间仍然是无穷维的。这与通过广义耦合方法研究“有效椭圆”退化随机偏微分方程遍历性的一些已有工作（例如， [12, 23, 26, 29, 52]）形成鲜明对比；在这些工作中，假设噪声维数足够大，从而确保决定模得到充分激发。尽管面临这些挑战，我们仍通过利用随机演化方程 (1.2) 中由其系数里的非局部算子 $\mu[\cdot]$所诱导的特定结构性质，成功构造出广义耦合和距离函数，使其满足 [12, 29]一般结果中要求的条件。在抽象情形下，这些特定结构特征通常会丢失；例如，[9], 在上述更严格条件下，通过直接估计转移概率之间的同步耦合，建立了随机 Volterra 方程的抽象马尔可夫提升的遍历性。还值得指出的是，作为证明的副产物，我们推导出了随机演化方程 (1.2) 的渐近对数 Harnack 不等式。这一结果将我们先前的工作 [32, 第 4], 节从仅适用于标量核的情形，推广到涉及矩阵值核的更一般情形，其中 K_b 和 K_σ 可以不同，且K_b 不一定是平方可积的。该不等式本身也具有重要意义，因为它蕴含了相关马尔可夫半群的若干关键性质，包括渐近强Feller性质、渐近不可约性以及不变概率测度的唯一性，同时还给出梯度估计和渐近热核估计；关于这些概念和一般结果，请参见 [4, 定理 2.1]。主要结果的详细证明将在第4节给出。

作为上述谱隙结果的一项应用，定理5.3 证明了，SEE（1.2）的不变概率测度，以及更一般地，其路径空间上的平稳分布，可以由有限维马尔可夫随机微分方程的相应测度弱地逼近。通过推论1.1，这些结果可推广至原始 SVE（5.6），从而拓展了此前关于随机 Volterra 方程马尔可夫近似的研究，例如[1, 3, 5]。这些工作关注的是在有限时间范围内对随机 Volterra 方程解进行有限维近似，而平稳解的近似仍是一个悬而未决的问题。此外，我们的近似结果为“马尔可夫嵌入”概念所依据的原理提供了严格论证。这一概念是统计物理中一种启发式但强有力的思想，其历史可追溯至 Mori [51]和 Zwanzig [63] 的开创性工作，并已广泛用于广义朗之万方程的分析（例如，参见 [25, 43]及其中的参考文献）。具体而言，该方法通过引入辅助变量，将非马尔可夫过程表示为高维马尔可夫系统的投影。此过程通常假设核可表示为有限个指数函数之和，此时相应的辅助马尔可夫动力学是有限维的。相比之下，对于一般的核（例如下文讨论的幂律核），相应的马尔可夫动力学则变为无穷维，且在物理学文献中通常被解释为“形式极限” [19, 43]。尽管此类无穷维系统的遍历性已在特定情形下得到严格确立

[22], 但有限维近似的平稳解与极限无穷维系统的平稳解之间的联系，尚未得到充分探讨。尽管我们的马尔可夫提升采用的表述方式与 [22], 中使用的经典 Mori–Zwanzig 方法略有不同，我们的结果仍为这些近似所对应的平稳解的收敛性提供了严格论证。由此，我们的工作为在广泛物理背景下验证马尔可夫嵌入类方法的有效性，提供了严格的数学框架。尤其是，我们的结果有望为相关概念奠定坚实的数学基础，例如 [38] 中在统计物理背景下形式推导的所谓泛函福克–普朗克方程（另见 [35]和 [19, 第 13] 章，其中给出了随机偏微分方程文献中的形式推导）。关于近似结果的详细陈述见第5节。

最后，在本引言部分结束之际，我们讨论一下本研究结果的适用范围与局限性，并着眼于其在广义朗之万方程理论中的应用。广义朗之万方程是统计物理中的一个核心课题，用于描述粒子与热浴接触时的动力学，其中摩擦表现出记忆效应 [41, 64]。在 [45], 中，作者推导出一个具有幂律核的一维过阻尼广义朗之万方程。通过对温度和玻尔兹曼常数等物理常数进行归一化，所得的无量纲方程可表示为:

$$X_t = X_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} V'(X_s)\,\mathrm{d}s + G_t, \quad t > 0, \tag{1.3}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$ 是一个常数， $V:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个外势，而 G 是一个中心高斯过程。为满足涨落耗散定理（这是统计物理中的一项基本原理，它确立了摩擦核与随机力之间的精确关系，而这一关系是系统达到热平衡所必需的 [64]），过程 G 必须是赫斯特参数为 $\alpha/2$、并按常数因子 $\sqrt{2/\Gamma(1+\alpha)}$ 缩放的分数布朗运动（见 [45, 第 2 节和 3]）。在这种情况下，利用分数布朗运动的 Mandelbrot–van Ness 表示（例如，见 [49, 定理 1.3。1]），方程（1.3）可改写为

$$X_t = x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} V'(X_s)\,\mathrm{d}s + \frac{\sqrt{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{2}}\,\mathrm{d}W_s, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

带有强迫项

$$x(t) = X_0 + \frac{\sqrt{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} \int_{-\infty}^0 \left\{ (t-s)^{\frac{\alpha-1}{2}} - (-s)^{\frac{\alpha-1}{2}} \right\} \mathrm{d}W_s, \quad t > 0,$$

其中 $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是双边布朗运动。该模型对应于具有分数阶（或幂律）核 $K_b(t) = \Gamma^{-1}(\alpha_b) t^{\alpha_b - 1}$ 和 $K_\sigma(t) = \Gamma^{-1}(\alpha_\sigma)\, t^{\alpha_\sigma - 1}$ 的随机 Volterra 方程（1.1），其中指数 $\alpha_b \in (0, 1)$ 和 $\alpha_\sigma \in (1/2, 1)$ 满足关系式 $\alpha_b = 2\alpha_\sigma - 1 = \alpha$。值得注意的是，两个核 K_b 和 K_σ 并不相同，且都在 $t = 0$处具有奇异性。更重要的是，对于 $\alpha \le 1/2$，正则性存在差异： K_b 仅局部可积，而 K_σ 在原点附近局部平方可积。现有研究 [8, 9, 13, 14, 20, 36, 60], （包括我们自己的工作 [32, 33], ）通常要求两个核都局部平方可积，而本文建立的马尔可夫提升一般框架（第2节）消除了这一限制。具体而言，通过扩展[32, 33], ，该框架允许漂移核 K_b 局部 L^1 ，这对于分析过阻尼广义朗之万方程至关重要，但以往方法无法处理。不过需要指出的是，我们关于遍历性的主要结果（第3节和第5节）要求核 $K_b(t)$ 和 $K_\sigma(t)$ 在 $t \to \infty$处呈指数衰减，因此不适用于上述纯幂律核。相反，我们的主要结果适用于 tempered 分数阶核（又称伽马分数阶核） $K_b(t) = \Gamma^{-1}(\alpha_b)\, t^{\alpha_b - 1} e^{-\kappa_b t}$和 $K_\sigma(t) = \Gamma^{-1}(\alpha_\sigma)\, t^{\alpha_\sigma - 1} e^{-\kappa_\sigma t}$，其中 $\alpha_b \in (0, 1)$、 $\alpha_\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $\kappa_b, \kappa_\sigma > 0$。这类核出现在具有亚扩散–扩散交叉行为的动力学中，其特征是短时间范围内呈现亚扩散行为，随后在长时间极限下转变为正常扩散 [46, 50, 58]。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍广义 Harris 定理和马尔可夫提升框架所需的预备知识。关于遍历性的主要结果及其相关推论将在第3节陈述，而这些结果证明中的关键步骤则放在第4节。第5 节专门对平稳解的有限维近似进行详细分析。最后，一些技术性引理汇集在附录中。

2 预备知识

本节介绍分析所需的预备知识。首先，我们概述本文中使用的记号。接下来，我们回顾 [29] 中提出的广义 Harris 定理，并遵循 [32, 33]中的方法，引入并进一步拓展随机 Volterra 方程的马尔可夫提升框架；这两个框架是后续章节的主要工具。

在本文中，有限维欧几里得空间上的标准欧几里得范数和内积分别记为 $|\cdot|$ 和 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。对于矩阵 A，$A^\top$ 表示其转置，$|A|_{\mathrm{op}}$ 表示其算子范数。对于方阵 A，$\mathrm{tr}[A]$ 表示其迹。我们将 $n\times n$ 单位矩阵记为$I_{n\times n}$。

对于可分巴拿赫空间$(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$以及每个 $T>0$，我们用 $C([0,T];\mathcal{X})$表示由 $\mathcal{X}$值连续函数（定义于 $[0,T]$）构成的可分巴拿赫空间，其范数为$\|f\|_{C([0,T];\mathcal{X})}:=\sup_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_{\mathcal{X}}$。类似地，我们将 $L^2(0,T;\mathcal{X})$定义为由 $\mathrm{d}t$-等价类组成的、$(0,T)$上平方可积函数的可分巴拿赫空间，其范数为$\|f\|_{L^2(0,T;\mathcal{X})}:=(\int_0^T\|f(t)\|_{\mathcal{X}}^2\mathrm{d}t)^{1/2}$。在此基础上，我们用 $C([0,\infty);\mathcal{X})$表示 $\mathcal{X}$值连续函数在 $[0,\infty)$上的集合，并配备度量

$$d_{C([0,\infty);\mathcal{X})}(f,g):=\sum_{T\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^T}\left\{\|f-g\|_{C([0,T];\mathcal{X})}\wedge 1\right\},\tag{2.1}$$

这使其成为一个完备可分度量空间。类似地，$L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathcal{X})$ 表示由 $\mathrm{d}t$-等价关系划分的博雷尔可测映射 $f\colon(0,\infty)\to\mathcal{X}$构成的集合，这些映射在每个有限区间 $(0,T)$ 上平方可积。该空间配备度量

$$d_{L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathcal{X})}(f,g):=\sum_{T\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^T}\left\{\|f-g\|_{L^2(0,T;\mathcal{X})}\wedge 1\right\}.\tag{2.2}$$

这也使 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathcal{X})$ 成为一个完备可分度量空间。在本文中，讨论其分布时，我们严格区分单个函数与其等价类。

对于赋范空间 $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$, $L(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)$ 表示从 $\mathcal{X}_1$ 到 $\mathcal{X}_2$的有界线性算子集合。该集合配备算子范数 $\|\cdot\|_{L(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)}$。当 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 是可分希尔伯特空间时，$L_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)\subset L(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)$ 表示从 $\mathcal{X}_1$ 到 $\mathcal{X}_2$的希尔伯特–施密特算子空间。该空间是一个可分希尔伯特空间，并配备希尔伯特–施密特范数$\|\cdot\|_{L_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)}$。

对于每个可测空间（$E,\mathcal{E}$），$\mathcal{P}(E)$ 表示 E 上所有概率测度的集合。对于每个 $x\in E$，$\delta_x\in\mathcal{P}(E)$ 表示位于点 x 的狄拉克测度。对于每个 $A\in\mathcal{E}$，$\mathbb{1}_A\colon E\to\{0,1\}$ 表示 A 的示性函数。对于 $\nu_1,\ \nu_2\in\mathcal{P}(E)$，$\mathscr{C}(\nu_1,\nu_2)\subset\mathcal{P}(E\times E)$ 表示 ν_1 与 ν_2 之间耦合的集合；也就是说，如果 ν 是乘积空间（$E\times E,\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$）上的概率测度，其第一和第二边缘分布分别为 ν_1 和 ν_2，则 $\nu\in\mathscr{C}(\nu_1,\nu_2)$。对于 $\nu_1,\ \nu_2\in\mathcal{P}(E)$，$d_{\mathrm{TV}}(\nu_1,\nu_2):=\sup_{A\in\mathcal{E}}|\nu_1(A)-\nu_2(A)|$ 表示全变差距离，已知它具有如下耦合表示:

$$d_{\mathrm{TV}}(\nu_1,\nu_2)=\inf_{\nu\in\mathscr{C}(\nu_1,\nu_2)}\int_{E\times E}\mathbb{1}_{\{x_1\neq x_2\}}\,\nu(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2).$$

对于定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上、取值于 E 的随机变量 ξ，我们将其在 $\mathbb{P}$ 下的分布记为 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(\xi):=\mathbb{P}\circ\xi^{-1}\in\mathcal{P}(E)$。在 $\mathbb{P}$ 下的期望记为 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot]$；若上下文中概率测度 $\mathbb{P}$ 明确，则简记为 $\mathbb{E}[\cdot]$。对于定义在 E 上的每个概率核 $P\colon E\times\mathcal{E}\to[0,1]$，以及每个有界可测函数 $f\colon E\to\mathbb{R}$，我们定义 $Pf\colon E\to\mathbb{R}$，使得 $(Pf)(x):=\int_E f(x')\,P(x,\mathrm{d}x')$，其中 $x\in E$。此定义可扩展到可测函数 $f\colon E\to[0,\infty]$，此时 Pf 的取值可能属于 $[0,\infty]$。此外，对于每个 $\nu\in\mathcal{P}(E)$，我们定义 $P^*\nu\in\mathcal{P}(E)$，使得 $(P^*\nu)(A):=\int_E P(x,A)\,\nu(\mathrm{d}x)$，其中 $A\in\mathcal{E}$。当 E 是拓扑空间时，始终假设其配备了 Borel σ-代数 $\mathcal{E}=\mathcal{B}(E)$。

2.1 广义Harris定理

现在我们回顾 Hairer、Mattingly 和 Scheutzow [29] 提出的广义 Harris 定理。该定理为谱隙型估计以及马尔可夫半群向其唯一不变概率测度弱收敛提供了一般判据。

设 E 是一个波兰空间。与 [29], 中一样，我们称函数 $d\colon E\times E\to[0,\infty)$ 为类距离函数，如果它是对称、下半连续的，并且满足 $d(x_1,x_2)=0$ 当且仅当 $x_1=x_2$。给定一个类距离函数 $d\colon E\times E\to[0,\infty)$，我们定义 $\mathbb{W}_d\colon \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)\to[0,\infty]$ 如下：

$$\mathbb{W}_d(\nu_1,\nu_2):=\inf_{\nu\in\mathscr{C}(\nu_1,\nu_2)}\int_{E\times E}d(x_1,x_2)\,\nu(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2),\quad \nu_1,\nu_2\in\mathcal{P}(E). \tag{2.3}$$

注意，若 d 是 E上的距离函数，则 $\mathbb{W}_d$ 与通常的 L^1-Wasserstein度量一致。另一方面，若 $d(x_1,\ x_2)=1\!\!1_{\{x_1\neq x_2\}}$，则 $\mathbb{W}_d$ 与全变差距离一致。沿用 [29], ，我们采用以下两个对分析至关重要的概念。

定义 2.1. 设 $P\colon E\times\mathcal{B}(E)\to[0,1]$ 是波兰空间 E上的概率核，且 $d\colon E\times E\to[0,1]$ 是一个类距离函数（有界于1）。

- 若存在常数 $\alpha\in(0,\ 1)$，使得.....则称类距离函数 d 对 P 是收缩的。

$$\mathbb{W}_d(P(x_1,\cdot),P(x_2,\cdot))\le\alpha d(x_1,x_2)$$

  对任意 $x_1,\ x_2\in E$，只要 $d(x_1,\ x_2)<1$。

- 若存在常数 $\varepsilon>0$，使得.....则称集合 $B\subset E$ 是 P的-小集。

$$\mathbb{W}_d(P(x_1,\cdot),P(x_2,\cdot))\le1-\varepsilon$$

  对任意 $x_1,\ x_2\in B$。

备注 2.2. 上述收缩性条件对满足 $d(x_1,\ x_2)=1$ 的点对 $(x_1,\ x_2)$ 不施加任何限制，尽管这个集合可能很大。值得注意的是，如果取 $d(x_1,\ x_2)=1\!\!1_{\{x_1\neq x_2\}}$，这对应于全变差距离，那么对于任意概率核，收缩性都显然成立，因为条件$d(x_1,\ x_2)<1$ 蕴含 $x_1=x_2$。在这种情形下，d-小集的概念与“小集”的概念一致；后者是经典Harris定理中关于全变差距离的遍历性的关键假设之一（例如参见 [28, 48]）。更多详细讨论见 [29, 第 4]节。此外，[11,例 3.1] 给出了一个简单例子：概率核 P定义在 $([0,1),\ \mathcal{B}([0,1)))$ 上，其中整个状态空间 $[0,1)$ 关于欧几里得度量 d 是 d-小的，而经典意义下不存在非平凡小集。

设 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 是一个马尔可夫半群，即定义在波兰空间 E 上的一族概率核，使得$P_0f=f$ 且对于任意 $s,\ t\ge0$ 以及任意有界可测函数 $f\colon\ E\to\mathbb{R}$。下面总结本文中使用的一些基本术语：

- 如果对于任意 $t\ge0$ 以及任意有界连续函数 $f\colon\ E\to\mathbb{R}$，映射 $E\ni x\mapsto P_tf(x)$ 连续，则称 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 满足 *Feller* 性质 。
- 如果对于任意有界可测函数 $f\colon\ E\to\mathbb{R}$，映射 $[0,\infty)\times E\ni(t,\ x)\mapsto P_tf(x)$ 是 $\mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{B}(E)$-可测的，则称 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 是可测的 。如果$\{P_t\}_{t\ge0}$ 是随机连续的且满足 Feller 性质，则显然满足此条件；这里，随机连续性 是指对于所有 $x\in E$ 以及每个有界连续函数 $f\colon\ E\to\mathbb{R}$，$\lim_{t\downarrow0}P_tf(x)=f(x)$。事实上，这些性质与半群性质共同意味着，对于每个有界连续函数 $f\colon\ E\to\mathbb{R}$，$(t,\ x)\mapsto P_tf(x)$ 联合可测；通过标准的单调类论证，这一结论可推广到所有有界可测函数。

- 若对于任意 $t\ge0$，均有 $P_t^*\pi=\pi$，则称概率测度 $\pi\in\mathcal{P}(E)$ 是 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 的不变概率测度 。

- 若存在常数$\gamma_V,C_V,K_V>0$，使得满足以下界，则称可测函数 $V\colon E\to[0,\infty)$ 是 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 的李雅普诺夫函数 。

$$P_tV(x)\le C_Ve^{-\gamma_Vt}V(x)+K_V \tag{2.4}$$

  对任意 $x\in E$ 和任意 $t\ge0$成立。

定理 2.3（广义 Harris 定理；[29, 定理 4.8 和推论 4。11]）。设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为可测马尔可夫半群，其状态空间为波兰空间 E，且满足 *Feller* 性质[1]。假设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$具有连续李雅普诺夫函数 $V\colon E\to[0,\infty)$。进一步假设存在类距离函数 $d\colon E\times E\to[0,1]$ 满足下列条件：

- $d_0\leq\sqrt{d}$ 在 E 上的某个相容度量 d_0 下。
- 存在 $t_1>0$，使得对每个 $t\geq t_1$，类距离函数 d 对 P_t 都是收缩的。
- 存在 $t_2>0$ 使得，对每个 $t\geq t_2$，水平集 $\{x\in E\,|\,V(x)\leq 4K_V\}$ 对于 d是 P_t-小的，其中 $K_V>0$ 是式 (2.4) 中出现的常数。

于是，$\{P_t\}_{t\geq 0}$ 存在唯一的不变概率测度 $\pi\in\mathcal{P}(E)$。此外，存在常数$r>0$ 和 $t_0>0$，使得以下谱隙型估计成立：

$$\mathbb{W}_{d_V}\big(P_t^*\nu_1,P_t^*\nu_2\big)\leq e^{-rt}\mathbb{W}_{d_V}(\nu_1,\nu_2) \tag{2.5}$$

对所有 $\nu_1,\nu_2\in\mathcal{P}(E)$ 以及所有 $t\geq t_0$ 均成立。这里，$d_V\colon E\times E\to[0,\infty)$ 是由下式定义的类距离函数

$$d_V(x_1,x_2):=\sqrt{d(x_1,x_2)\big(1+V(x_1)+V(x_2)\big)}$$

对于 $x_1,x_2\in E$。

注 2.4。(i) 如果类距离函数 $d\colon E\times E\to[0,1]$ 本身就是 E上的相容度量，那么第一个假设显然成立。

(ii) 如果 V 是 $\{P_t\}_{t\geq 0}$的李雅普诺夫函数，那么每个不变概率测度 π 都必须满足$\int_E V(x)\,\pi(\mathrm{d}x)<\infty$；见 [11, 引理 4。1]因此，在（$\nu_1=\delta_x$ 和 $\nu_2=\pi$）中取值可立即由（2.5）得到如下指数遍历性：存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\mathbb{W}_{d_V}\big(P_t(x,\cdot),\pi\big)\leq C\big(1+V(x)^{1/2}\big)e^{-rt}$$

对所有 $x\in E$ 和所有 $t\geq 0$均成立。

(iii) 如 [30, 命题 2.8], 所示，估计式（2.5）给出了 L^2-谱隙估计 e

$$\sup_{\substack{f\in L^2(E,\pi)\\ f\neq\pi f}}\frac{\|P_tf-\pi f\|_{L^2(E,\pi)}}{\|f-\pi f\|_{L^2(E,\pi)}}\leq e^{-rt},$$

前提是有界的 d_V-利普希茨函数集在 $L^2(E,\pi)$ 中稠密，且马尔可夫半群$\{P_t\}_{t\geq 0}$关于 π可逆。[2]这里，$(L^2(E,\pi)\|\cdot\|_{L^2(E,\pi)})$ 表示由（等价类的）π-平方可积实值函数构成的希尔伯特空间，而 $\pi f:=\int_E f(x)\,\pi(\mathrm{d}x)$。

为应用广义 Harris 定理，关键且在实践中颇具挑战的一步是构造一个满足定理 d 2.3 中所有要求的距离（类）函数；构造李雅普诺夫函数 V同样至关重要，通常需要单独处理。在 [12], 中，作者根据转移概率 2.3 之间所谓的广义耦合，给出了一组可验证的充分条件，以确保满足定理 $P_t(x_1,\cdot)$ 和 $P_t(x_2,\cdot)$ 的相关假设，其中 $x_1,x_2\in E$。因此，我们需要解决的问题归结为如何构造一个“良好”的广义耦合和一个距离（类）函数 d。然而，后一项工作并非易事，因为它需要针对每个模型进行深入分析。我们将在下一小节介绍的随机 Volterra 方程马尔可夫提升框架中处理这一问题，其中提升后的随机演化方程（1.2）的具体结构起着关键作用。更多细节请参见第 4.1 节。

[1]在 [29, 推论 411], 中，默认假设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的可测性成立。[2]注意，集合中有界的 d_V-Lipschitz 函数在 $L^2(E,\pi)$ 中的稠密性，只要 $d_0\leq\sqrt{d}$ 对于某个定义在 d_0 上的相容度量 E，便自动成立。

2.2 随机 Volterra 方程的马尔可夫提升

本小节中，我们回顾并进一步推广此前工作 [32, 33] 中建立的马尔可夫提升框架（另见 [34]）。在此之前，先给出以下关于随机 Volterra 方程（1.1）的标准适定性结果。

命题 2.5. 设 $K_b, K_\sigma : (0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为可测映射，满足 $\int_0^T |K_b(t)|_{\mathrm{op}}\,dt < \infty$ and $\int_0^T |K_\sigma(t)|_{\mathrm{op}}^2\,dt < \infty$，对任意 $T > 0$均成立。假设 $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 为可测映射，满足 $|b(x)-b(x')| \le C_{b,\mathrm{Lip}}|x-x'|$ and $|\sigma(x)-\sigma(x')| \le C_{\sigma,\mathrm{Lip}}|x-x'|$，对所有 $x, x' \in \mathbb{R}^n$ 均成立，其中常数为$C_{b,\mathrm{Lip}}, C_{\sigma,\mathrm{Lip}} > 0$。设给定一个满足通常条件的滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$、一个 d 维 $\mathbb{F}$-布朗运动 W，以及一个 $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}((0,\infty))$-可测映射 $x : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$，使得 $\int_0^T |x(t)|^2\,dt < \infty$ a.s.，对任意 $T > 0$均成立。则存在唯一的渐进可测过程$X = (X_t)_{t>0}$，满足 $\int_0^T |X_t|^2\,dt < \infty$ a.s.，对任意 $T > 0$ 均成立，并且式 (1.1) 中的等式对 $dt \otimes d\mathbb{P}$-几乎处处的 $(t,\omega) \in (0,\infty) \times \Omega$ 成立。唯一性是指任意两个这样的解在 $(0,\infty) \times \Omega$ 上 $dt \otimes d\mathbb{P}$- 几乎处处相等。

上述结果可通过应用 [31, 命题 2.4]（另见 [62, 定理 3.1]），并结合针对强迫项 x 的标准局部化论证来证明；由于该过程在随机分析中已是标准做法，此处为简洁起见省略细节。我们将 SVE (1.1) 的解空间视为波兰空间 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$，并赋予由 (2.2) 定义的完备度量。根据 [44]，中的 Yamada–Watanabe 型结果，在命题 2.5 的设定下，SVE (1.1) 依分布唯一。因此，解 X 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 上的 dt-等价类的分布，由强迫项 x 的 dt-等价类的分布唯一确定。

备注 2.6。 在命题 2.5 的设定下，核 K_b 和 K_σ 仅被假设为（局部） L^1 和 L^2，我们不能期待解 X具有逐路径时间正则性。若要恢复逐路径正则性，就需要对核 K_b 和 K_σ 施加额外条件；例如参见 [62, 定理 3。3]。

现在 介绍一个马尔可夫提升框架。首先，引入以下定义。

定义 2.7. 若三元组 (μ, M_b, M_σ) 满足以下条件，则称其为提升基： μ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的博雷尔测度， $M_b, M_\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 是矩阵值博雷尔可测映射，且它们满足

$$\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta) < \infty, \tag{2.6}$$

$$\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-3/2} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta) < \infty \quad \text{and} \tag{2.7}$$

$$\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-1/2} |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta) < \infty. \tag{2.8}$$

若存在一个提升基 (μ, M_b, M_σ)，使得核对 $K_b, K_\sigma : (0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足可提升的 条件，则称该核对 使得

$$K_b(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta t} M_b(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta) \quad \text{and} \quad K_\sigma(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta t} M_\sigma(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta) \tag{2.9}$$

对于任意 $t \in (0, \infty)$。在这种情况下，我们称提升基 (μ, M_b, M_σ) 生成对 (K_b, K_σ) .

备注 2.8. (i) 对 [34, 引理 4.1] 稍作修改即可证明，核对 (K_b, K_σ) 可提升，当且仅当每个矩阵分量 $K^{i,}{}_b{}^j$，$K^{i,}{}_\sigma{}^j : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 对于 $i, j \in \{1,\dots,n\}$ 均具有如下形式

$$K_b^{i,j} = K_b^{i,j,+} - K_b^{i,j,-} \quad \text{and} \quad K_\sigma^{i,j} = K_\sigma^{i,j,+} - K_\sigma^{i,j,-}$$

对于某些完全单调函数 $K^{i,}{}_b{}^{j,\pm}, K^{i,}{}_\sigma{}^{j,\pm} : (0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$\int_0^T K_b^{i,j,\pm}(t)\,\mathrm{d}t < \infty \quad \text{and} \quad \int_0^T t^{-1/2} K_\sigma^{i,j,\pm}(t)\,\mathrm{d}t < \infty \tag{2.10}$$

对于任意 $T \in (0,\infty)$. 特别地，根据 [32, 引理 2。1], 每个可提升对 (K_b, K_σ) 都满足 s

$$\int_0^T |K_b(t)|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{d}t < \infty \quad \text{and} \quad \int_0^T |K_\sigma(t)|_{\mathrm{op}}^2\,\mathrm{d}t < \infty \tag{2.11}$$

对于任意 $T \in (0, \infty)$。

(ii) 若 $(K_b,1, K_\sigma,1)$ 和 $(K_b,2, K_\sigma,2)$ 均可提升，则对于任意 $A_b,1, A_b,2, A_\sigma,1, A_\sigma,2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$，对 $(A_{b,1}K_{b,1}+A_{b,2}K_{b,2}, A_{\sigma,1}K_{\sigma,1} + A_{\sigma,2}K_{\sigma,2})$ 也可提升。事实上，给定一个提升基 $(\mu_i, M_{b,i}, M_{\sigma,i})$，它对每个 $i \in \{1,2\}$ 生成 $(K_{b,i}, K_{\sigma,i})$，则由下式给出的提升基 (μ, M_b, M_σ)

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \quad M_b = \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mu} A_{b,1}M_{b,1} + \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\mu} A_{b,2}M_{b,2}, \quad M_\sigma = \frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\mu} A_{\sigma,1}M_{\sigma,1} + \frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\mu} A_{\sigma,2}M_{\sigma,2},$$

生成 $(A_{b,1}K_{b,1} + A_{b,2}K_{b,2}, A_{\sigma,1}K_{\sigma,1} + A_{\sigma,2}K_{\sigma,2})$。

(iii) 对于给定的核可提升对 (K_b, K_σ)，生成该对的一组提升基 (μ, M_b, M_σ) 并不唯一。事实上，测度 μ的选择具有灵活性；然而，一旦给定测度 μ，映射M_b 和 M_σ 满足 (2.9) 后，便在一个 μ-零测集之外唯一确定。

(iv) 对提升基 (μ, M_b, M_σ) 所要求的、表面上较为技术性的可积性条件 (2.6)、(2.7) 和 (2.8)，与其生成的核 K_b and K_σ 所满足的条件 (2.10) 和 (2.11) 相关。当我们考虑 $K_b = K_\sigma = KI_{n\times n}$ 为某个标量完全单调函数 $K : (0,\infty) \to [0,\infty)$ 的情形时，这组条件是自然的；文献 [32, 33] 采用了这一情形。事实上，在这种情况下，伯恩斯坦定理保证存在唯一的博雷尔测度 μ on $[0,\infty)$，使得对任意 $t > 0$，$K(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta t}\,\mu(\mathrm{d}\theta)$。根据 [32, 引理 2.1],，对任意 $T \in (0,\infty)$，条件 $\int_0^T t^{-1/2}K(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ 等价于测度 μ 满足可积性条件 (2.6)；此外，这两个条件都意味着，对任意 $T \in (0,\infty)$，都有 $\int_0^T K(t)^2\,\mathrm{d}t < \infty$，这是沃尔泰拉型随机积分 $\int_0^t K(t-s)\,\mathrm{d}W_s$ 有定义所必需的条件。在这种情况下，三元组 $(\mu, I_{n\times n}, I_{n\times n})$ 是一个提升基，并在定义 2.7 的意义下生成 $(KI_{n\times n}, KI_{n\times n})$。因此，我们的可积性条件 (2.6)、(2.7) 和 (2.8) 是基准情形在以下情形下的自然推广：两个矩阵值核 K_b and K_σ 可以不同，而 K_b 仅为（局部） L^1。文献 [34] 中也采用了类似的可积性条件。

例 2.9. (i)（指数和型核）考虑以下核

$$K_b^{\exp}(t) = \sum_{i=1}^N e^{-\kappa_i t}M_{b,i}, \quad K_\sigma^{\exp}(t) = \sum_{i=1}^N e^{-\kappa_i t}M_{\sigma,i}, \quad t > 0,$$

其中，对每个 $i \in \{1,\dots,N\}$，$M_{b,i}$、$M_{\sigma,i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $N \in \mathbb{N}$，且 $\kappa_i \geq 0$ 是互不相同的常数。此类核常用于近似更一般的核，例如广义朗之万方程马尔可夫嵌入 [25, 43] 和粗糙波动率模型的多因子近似研究 [1, 3, 5]。显然，上述核对 $(K_b^{\exp}$、$K_\sigma^{\exp})$ 是可提升的。作为生成该核对的提升基 $(\mu$、M_b、$M_\sigma)$，我们可以取

$$\mu = \sum_{i=1}^N \delta_{\kappa_i}, \quad M_b(\theta) = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{\kappa_i\}}(\theta)M_{b,i}, \quad M_\sigma(\theta) = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{\kappa_i\}}(\theta)M_{\sigma,i}.$$

在这种情况下，我们有 $\operatorname{supp}\mu = \{\kappa_i\}_{i=1}^N$。

(ii)（Te 截断分数阶核，也称为伽马分数阶核）考虑核 els

$$K_b^{\mathrm{frac}}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_b)}t^{\alpha_b-1}e^{-\kappa_b t}I_{n\times n}, \quad K_\sigma^{\mathrm{frac}}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_\sigma)}t^{\alpha_\sigma-1}e^{-\kappa_\sigma t}I_{n\times n}, \quad t > 0,$$

其中 $\alpha_b \in (0,1)$，$\alpha_\sigma \in (\frac{1}{2},1)$，且 $\kappa_b, \kappa_\sigma \in [0,\infty)$。$\kappa_b = \kappa_\sigma = 0$ 的情形对应于黎曼–刘维尔分数阶导数和 Caputo 分数阶导数 [57]，中出现的分数阶核，这些导数出现在过阻尼广义朗之万方程 (1.4) 中。相比之下，κ_b 和/或 κ_σ 为正的情形对应于指数截断分数阶核。这类核出现在表现出亚扩散–扩散交叉行为 [46, 50, 58] 的动力学中。值得注意的是，与 α_σ 不同，我们允许 α_b 小于 $1/2$，因此 K_b^{frac} 不一定是局部平方可积的。这对于应用于 [45]，中导出的过阻尼广义朗之万方程 (1.4) 至关重要；根据涨落耗散定理，指数 α_b 和 α_σ 满足关系 $\alpha_b = 2\alpha_\sigma - 1 \in (0,1)$。上述核对 $(K_b^{\mathrm{frac}}, K_\sigma^{\mathrm{frac}})$ 是可提升的。为此，令 γ_b 和 γ_σ 为满足以下条件的常数

$$(2\alpha_b - 1) \vee \frac{1}{2} < \gamma_b < \left(2\alpha_b + \frac{1}{2}\right) \wedge 1 \quad \text{and} \quad (2\alpha_\sigma - 1) \vee \frac{1}{2} < \gamma_\sigma < \left(2\alpha_\sigma - \frac{1}{2}\right) \wedge 1.$$

例如，我们可以取 $\gamma_b = \frac{\alpha_b+1}{2}$ 和 $\gamma_\sigma = \alpha_\sigma$，但这里我们保留上述灵活性。令

$$\begin{aligned}
\mu(\mathrm{d}\theta) &= \left\{(\theta-\kappa_b)^{-\gamma_b}\mathbb{1}_{(\kappa_b,\infty)}(\theta) + (\theta-\kappa_\sigma)^{-\gamma_\sigma}\mathbb{1}_{(\kappa_\sigma,\infty)}(\theta)\right\}\mathrm{d}\theta,\\
M_b(\theta) &= \Gamma(\alpha_b)^{-1}\Gamma(1-\alpha_b)^{-1}\left\{(\theta-\kappa_b)^{-\gamma_b} + (\theta-\kappa_\sigma)^{-\gamma_\sigma}\mathbb{1}_{(\kappa_\sigma,\infty)}(\theta)\right\}^{-1}(\theta-\kappa_b)^{-\alpha_b}\mathbb{1}_{(\kappa_b,\infty)}(\theta)I_{n\times n},\\
M_\sigma(\theta) &= \Gamma(\alpha_\sigma)^{-1}\Gamma(1-\alpha_\sigma)^{-1}\left\{(\theta-\kappa_b)^{-\gamma_b}\mathbb{1}_{(\kappa_b,\infty)}(\theta) + (\theta-\kappa_\sigma)^{-\gamma_\sigma}\right\}^{-1}(\theta-\kappa_\sigma)^{-\alpha_\sigma}\mathbb{1}_{(\kappa_\sigma,\infty)}(\theta)I_{n\times n}.
\end{aligned}$$

直接计算可得，(μ, M_b, M_σ) 是一个提升基，它按照定义 2.7 的含义生成 $(K_b^{\mathrm{frac}}, K_\sigma^{\mathrm{frac}})$。在这种情况下，我们有 $\operatorname{supp}\mu = [\kappa_b \wedge \kappa_\sigma, \infty)$。

设 μ 是 $[0,\infty)$ 上满足 (2.6 的博雷尔测度。我们用 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mu$ 表示所有 μ-等价类的集合，其中包含满足以下条件的博雷尔可测映射 $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$

$$\|y\|_{\mathcal{H}} := \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-1/2}|y(\theta)|^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} < \infty.$$

我们在 $\mathcal{H}$ 上赋予内积

$$\langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{H}} := \int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-1/2}\langle y_1(\theta), y_2(\theta)\rangle\,\mu(\mathrm{d}\theta), \quad y_1, y_2 \in \mathcal{H},$$

由此诱导出 $\mathcal{H}$上的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$。于是，$(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ 是一个可分希尔伯特空间。通过 Riesz 同构 $y \mapsto \langle y, \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$，我们将 $\mathcal{H}$ 的拓扑对偶 $\mathcal{H}^*$ 与其自身 $\mathcal{H}$ 等同。此外，我们用 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\mu$表示所有 μ-等价类的集合，其中包含满足以下条件的博雷尔可测映射 $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$

$$\|y\|_{\mathcal{V}} := \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{1/2}|y(\theta)|^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} < \infty.$$

我们赋予 $\mathcal{V}$ 范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$。于是，$(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ 是一个可分自反巴拿赫空间，且嵌入$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ 是连续稠密的。将 $\mathcal{H}^*$ 与 $\mathcal{H}$ 等同后，我们有连续稠密嵌入 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$，其中 $\mathcal{V}$ 的拓扑对偶 $\mathcal{V}^*$ 现在等同于所有 μ-等价类的博雷尔可测映射 $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ 所构成的空间，使得

$$\|y\|_{\mathcal{V}^*} := \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-3/2}|y(\theta)|^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} < \infty.$$

注意，$\mathcal{V}^*$ 与 $\mathcal{V}$之间的对偶配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}$与 $\mathcal{H}$上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ 相容，即当 $y_1 \in \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^*$ 且 $y_2 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$时，$\langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathcal{H}}$。因此，我们有一个*Gelfand* 三元组 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$。

如 [32, 引理2.5], 所示，空间 $\mathcal{V}$ 连续嵌入到 $L^1(\mu) = L^1(\mu;\mathbb{R}^n)$ ，但 $\mathcal{H}$ 与 $L^1(\mu)$之间一般没有关系。对每个 $y \in \mathcal{V}$，我们令

$$\mu[y] := \int_{[0,\infty)} y(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta).$$

于是，映射 $\mu[\cdot]\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ 是一个有界线性算子。此外，如 [32, 引理 2.5], 所示，以下结论成立：

引理 2.10. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C_{\mu,\varepsilon} > 0$ ，使得

$$\big|\mu[y]\big|^2 \le \varepsilon\|y\|_{\mathcal{V}}^2 + C_{\mu,\varepsilon}\|y\|_{\mathcal{H}}^2$$

对于任意 $y \in \mathcal{V}$。

注 2.11. (i) 由于对于任意 $y_1, y_2 \in \mathcal{V}$， $\|y_1+y_2\|_{\mathcal{V}}^2 + \|y_1-y_2\|_{\mathcal{V}}^2 = 2(\|y_1\|_{\mathcal{V}}^2 + \|y_2\|_{\mathcal{V}}^2)$，巴拿赫空间 $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ 成为配备诱导范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ 的内积的希尔伯特空间。类似地，巴拿赫空间 $(\mathcal{V}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{V}^*})$ 成为配备诱导范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^*}$ 的内积的希尔伯特空间。

(ii) 对每个 $y \in \mathcal{H}\setminus\mathcal{V}$，我们令 $\|y\|_{\mathcal{V}} = \infty$。于是，函数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$ 是下半连续的，因此是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-可测的（例如，参见 [47, 练习 4.2.3]）。

(iii) 我们有 $\mathcal{B}(\mathcal{V}) = \{A \cap \mathcal{V} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$，且 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{A \cap \mathcal{H} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{V}^*)\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{V}^*)$，其中 Borel σ-代数由各自的范数拓扑生成。事实上，由于自然嵌入$i\colon \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ 是连续且单射的，卢津–苏斯林定理（例如，参见 [39, 定理 15.1]）表明，对于任意 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$，都有 $B = i(B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，从而 $\mathcal{B}(\mathcal{V}) \subset \{A \cap \mathcal{V} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$。另一方面，同样由 $i\colon \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ 的连续性可得 $\{A \cap \mathcal{V} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{V})$，从而$\mathcal{B}(\mathcal{V}) = \{A \cap \mathcal{V} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$。关系 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{A \cap \mathcal{H} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{V}^*)\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{V}^*)$ 可用类似方法证明。

设 (μ, M_b, M_σ) 是一个提升基，并设 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 是博雷尔可测映射。我们将 (1.2) 视为定义在上述 Gelfand 三元组上的随机演化方程 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$。在定义随机演化方程 (1.2) 的解之前，我们先对这些系数作几点说明。

注 2.12。 (i) 根据可积性条件 (2.7)，映射 $\mathcal{M}_b\colon x \mapsto (\theta \mapsto M_b(\theta)x)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathcal{V}^*$的有界线性算子，并且有

$$\|\mathcal{M}_b\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{V}^*)} \le \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-3/2}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} < \infty.$$

类似地，根据 (2.8)，映射 $\mathcal{M}_\sigma\colon x \mapsto (\theta \mapsto M_\sigma(\theta)x)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathcal{H}$的有界线性算子，并且有

$$\|\mathcal{M}_\sigma\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} \le \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-1/2}|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} < \infty.$$

(ii) 对每个 $t \ge 0$，定义 $\mathcal{S}(t)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ by $(\mathcal{S}(t)y)(\theta) := e^{-\theta t}y(\theta)$，$\theta \in [0,\infty)$，其中 $y \in \mathcal{H}$。如引理 2.5] 所示，$\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的压缩半群，其相应的无穷小生成元 $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ y \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{3/2}|y(\theta)|^2\,\mu(\mathrm{d}\theta) < \infty \right\},$$
$$(\mathcal{A}y)(\theta) = -\theta y(\theta), \quad \theta \in [0,\infty), \quad \text{for } y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

此外，还有

$$\langle \mathcal{A}y, y\rangle_{\mathcal{H}} = \|y\|_{\mathcal{H}}^2 - \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \le 0 \tag{2.12}$$

对任意 $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$。此外，对于任意 $t > 0$， $\mathcal{S}(t)$ 是从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{V}$ 的有界线性算子，而 $\mathcal{S}(\cdot): y \mapsto (\mathcal{S}(t)y)_{t\in(0,T]}$ 是从 $\mathcal{H}$ 到 $L^2(0,T;\mathcal{V})$ 的有界线性算子。更多详情请参见 [32,第 2] 节。

(iii) 对每个 $t \geq 0$，容易看出，对于任意 $y \in \mathcal{H}$， $\|\mathcal{S}(t)y\|_{\mathcal{V}^*} \leq \|y\|_{\mathcal{V}^*}$。因此，算子$\sim\mathcal{S}(t): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$（视为映射到 $\mathcal{V}^*$）可唯一延拓为压缩线性算子 $\mathcal{S}(t): \mathcal{V}^* \to \sim\mathcal{V}^*$。于是，族 $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ 在较大的希尔伯特空间 $\mathcal{V}^*$ 上构成一个压缩半群。按照引理 2.5]，的证明中的相同论证，我们可以证明， $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ 的无穷小生成元 $\sim\quad\sim\quad\sim\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*$ 由下式给出

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \left\{ y \in \mathcal{V}^* \;\middle|\; \int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-3/2}\theta^2 |y(\theta)|^2 \,\mu(\mathrm{d}\theta) < \infty \right\},$$
$$(\widetilde{\mathcal{A}}y)(\theta) = -\theta y(\theta), \quad \theta \in [0,\infty), \quad \text{for } y \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}).$$

注意，对于任意 $y \in \mathcal{V}$， $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{V}$，且范数等价关系为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\|y\|_{\mathcal{V}} \leq \|y\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}})} \leq \|y\|_{\mathcal{V}}$，其中$\|y\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}})} := (\|\widetilde{\mathcal{A}}y\|^2_{\mathcal{V}^*} + \|y\|^2_{\mathcal{V}^*})^{1/2}$。算子 $\widetilde{\mathcal{A}}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ 是算子$\mathcal{A}$: $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$（视为映射到 $\mathcal{V}^*$）的唯一延拓。结合等式 (2.12)、 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{V}$ 中的稠密性，以及对偶配对 ${}_{\mathcal{V}^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ 与 $\mathcal{H}$ 中内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ 的相容性，我们得到

$$\langle\widetilde{\mathcal{A}}y, y\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} = \|y\|^2_{\mathcal{H}} - \|y\|^2_{\mathcal{V}} \leq 0 \tag{2.13}$$

$\sim\quad\sim$对任意 $y \in \mathcal{V}$。为简便起见，在下文中，算子 $\mathcal{S}(t)$ 和 $\mathcal{A}$ 将分别仍记为 $\mathcal{S}(t)$ 和 $\mathcal{A}$。

定义 2.13。 设 (μ, M_b, M_σ) 为一个提升基，并设 $b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 为博雷尔可测映射。假设给定了一个 d维布朗运动 W，定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上，并相对于满足通常条件的滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$。若一个取值于$\mathcal{H}$的适应过程 Y 是随机演化方程 (1.2) 的解，且满足以下条件：

(i) 样本路径 $t \mapsto Y_t$ 几乎必然在 $\mathcal{H}$ 中强连续，并且对任意 $T > 0$几乎必然满足 $\int_0^T \|Y_t\|^2_{\mathcal{V}}\,\mathrm{d}t < \infty$。

(ii) For any $T > 0$, $\int_0^T \left\{|b(\mu[Y_t])| + |\sigma(\mu[Y_t])|^2\right\}\mathrm{d}t < \infty$ a.s.

(iii) 对任意 $t \geq 0$，以下等式在 $\mathcal{V}^*$ 中几乎处处成立：

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left\{\mathcal{A}Y_s + \mathcal{M}_b b(\mu[Y_s])\right\}\mathrm{d}s + \int_0^t \mathcal{M}_\sigma\sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s. \tag{2.14}$$

备注 2.14. (i) 根据 $\mathcal{H}$ 值过程 Y 的循序可测性、定义 2.13 (i) 中的可积性条件，以及 $\mathcal{B}(\mathcal{V}) = \{A \cap \mathcal{V} \,|\, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 这一事实，过程$\sim$ $\sim$
$Y := Y\mathbb{1}_{\mathcal{V}}(Y)$ 是一个 $\mathcal{V}$ 值的渐进可测过程，并且对 $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}$-几乎处处的 $\sim\quad\sim(t,\omega) \in [0,\infty)\times\Omega$，有 $Y_t = Y_t$ 属于 $\mathcal{H}$。随后，由 $\mu[Y_t]$ 和 $\mathcal{A}Y_t$ 定义过程 $\mu[Y_t]$ 和 $\mathcal{A}Y_t$，它们分别是 $\mathbb{R}^n$ 值和 $\mathcal{V}^*$ 值的渐进可测过程。为简单起见，在不致引起混淆时，我们仍将这个版本 $\sim Y$ 记作 Y。

(ii) 在（2.14）右端，对s 的积分被理解为 $\mathcal{V}^*$中的 Bochner积分，而对W_s 的积分被理解为 $\mathcal{H}$中的随机积分。得益于定义 2.13中的可积性条件 (i) 和 (ii)，这些积分是良定义的；另见备注 2.12。解 Y 是一个取值于 $\mathcal{H}$的连续适应过程，但它不一定是 $\mathcal{H}$中的半鞅；只有将其视为 $\mathcal{V}^*$中的过程时，才能将其看作半鞅。这是因为，式（2.14）中的$\mathcal{V}^*$值 Bochner 积分（其取值确实属于 $\mathcal{H}$）作为一个 $\mathcal{H}$值过程，不一定具有有界变差。

(iii) SEE (1.2) 的解的定义遵循 Gelfand 三元组上单调随机偏微分方程的标准“变分方法”。这一框架由 Pardoux [53, 54] 开创，随后由 Krylov 和 Rozovskiĭ [40]进一步发展；另见相关专著 [21, 47, 55]。事实上，正如下文命题 2.15 的证明所示，具有利普希茨连续系数 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和$\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 的 SEE (1.2) 满足 Gelfand 三元组 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$上的标准“单调性条件”。文献中通常将定义 2.13 意义下的解称为“变分解”。此外，通过将算子 $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ 视为压缩半群 $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ 在 $\mathcal{V}^*$上的无穷小生成元，这类解还可以解释为最大希尔伯特空间 $\mathcal{V}^*$ 上的“解析强解”。在此框架下，系数 $y \mapsto \mathcal{M}_b b(\mu[y\mathbb{1}_{\mathcal{V}}(y)])$ 和 $y \mapsto \mathcal{M}_\sigma \sigma(\mu[y\mathbb{1}_{\mathcal{V}}(y)])$ 被视为从 $\mathcal{V}^*$到 $\mathcal{V}^*$和 $L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{V}^*)$ 的可测映射。然而，需要注意的是，这些系数作为从 $\mathcal{V}^*$ （甚至从 $\mathcal{H}$）到各自目标空间的映射，通常并不连续。

命题 *2.15*. 设给定一个 d 维布朗运动 W，其定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上，并且相对于满足通常条件的滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 。设 (μ, M_b, M_σ) 为一个提升基，并设 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 为可测映射。假设存在常数 C_b、$_{\mathrm{Lip}}$、C_σ、$_{\mathrm{Lip}} > 0$，使得对所有 x、$x' \in \mathbb{R}^n$，有 $|b(x) - b(x')| \leq C_b$、$_{\mathrm{Lip}}|x - x'|$ 以及 $|\sigma(x) - \sigma(x')| \leq C_\sigma$、$_{\mathrm{Lip}}|x - x'|$。则以下断言成立：

(*i*) 对于任意 $\mathcal{H}$-值的、$\mathcal{F}_0$-可测随机变量 Y_0，存在唯一解 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$，它是随机演化方程 (1.2)，并满足给定的初始条件 Y_0。此外，该解在 $\mathcal{H}$上构成一个时间齐次马尔可夫过程。

(ii) 存在一个常数 $C > 0$，它仅取决于提升基(μ, M_b, M_σ) 以及常数$C_{b,\ \mathrm{Lip}}$ 和$C_{\sigma,\ \mathrm{Lip}}$，使得对于由同一个 Y 和 Y' 驱动的 *SEE*(1.2) 的任意两个解d维布朗运动 W，我们都有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2 \,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq Ce^{CT}\left(1 + \|Y_0\|_{\mathcal{H}}^2\right) \tag{2.15}$$

and

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t - Y_t'\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \|Y_t - Y_t'\|_{\mathcal{V}}^2 \,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq Ce^{CT}\|Y_0 - Y_0'\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{2.16}$$

对任意 $T > 0$，几乎处处成立。

(iii) 记由(μ, M_b, M_σ)生成的可提升核对为(K_b, K_σ)。设 Y是 *SEE*(1.2)的一个解。则，$\mathbb{R}^n$值渐进可测过程 $X_t := \mu[Y_t]$, $t \geq 0$，是具有如下强迫项的 *SVE*(1.1) 的解：$x(t) = \mu[\mathcal{S}(t)Y_0] = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta t} Y_0(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)$，其中 $t > 0$。

证明。为确立断言 (i) 中所述的适定性，我们结合标准的局部化技术，应用关于单调随机偏微分方程适定性的一般结果（例如参见 [47, 定理 4.2。4]），为此，我们验证 [47, 定理 4.2。4] 所要求的以下条件 (H1)–(H4)（其中 $\alpha = 2$采用其记号）：

(H1)（半连续性）对于任意 y_1，y_2，$y_3 \in \mathcal{V}$，函数

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \big\langle \mathcal{A}(y_1 + \lambda y_2) + \mathcal{M}_b b\big(\mu[y_1 + \lambda y_2]\big), y_3\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} \in \mathbb{R}$$

是连续的。

(H2)（弱单调性）存在一个常数 $C_{\mathrm{H2}} \in \mathbb{R}$，使得对于任意 y_1，$y_2 \in \mathcal{V}$，均有

$$\begin{aligned} &2\big\langle \mathcal{A}(y_1 - y_2) + \mathcal{M}_b\big(b(\mu[y_1]) - b(\mu[y_2])\big), y_1 - y_2\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[y_1]) - \sigma(\mu[y_2])\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2 \\ &\leq C_{\mathrm{H2}}\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

(H3)（强制性）存在常数 $C_{\mathrm{H3,\ 1}} \in \mathbb{R}$、 $C_{\mathrm{H3,\ 2}} > 0$ 和 $C_{\mathrm{H3,\ 3}} > 0$，使得对于任意 $y \in \mathcal{V}$，均有

$$2\langle \mathcal{A}y + \mathcal{M}_b b(\mu[y]), y\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \big\|\mathcal{M}_\sigma \sigma(\mu[y])\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})} \le C_{\mathrm{H3},1}\|y\|^2_{\mathcal{H}} - C_{\mathrm{H3},2}\|y\|^2_{\mathcal{V}} + C_{\mathrm{H3},3}.$$

(H4) (有界性) 存在一个常数 $C_{\mathrm{H4}} > 0$，使得对于任意 $y \in \mathcal{V}$，都有

$$\big\|\mathcal{A}y + \mathcal{M}_b b(\mu[y])\big\|_{\mathcal{V}^*} \le C_{\mathrm{H4}}\big(1 + \|y\|_{\mathcal{V}}\big).$$

首先，由于 $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, $\mu[\cdot]$: $\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$, b： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{M}_b$： $\mathbb{R}^n \to \mathcal{V}^*$ 均（强）连续，因此条件 **(H1)**（半连续性）成立。其次，注意到对于任意 y_1， $y_2 \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
&2\big\langle \mathcal{A}(y_1 - y_2) + \mathcal{M}_b\big(b(\mu[y_1]) - b(\mu[y_2])\big), y_1 - y_2\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[y_1]) - \sigma(\mu[y_2])\big)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}\\
&\le 2\langle \mathcal{A}(y_1 - y_2), y_1 - y_2\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + 2\|\mathcal{M}_b\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{V}^*)} C_{b,\mathrm{Lip}}\big|\mu[y_1 - y_2]\big|\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{V}}\\
&\qquad + \|\mathcal{M}_\sigma\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} C^2_{\sigma,\mathrm{Lip}}\big|\mu[y_1 - y_2]\big|^2\\
&\le 2\|y_1 - y_2\|^2_{\mathcal{H}} - \frac{3}{2}\|y_1 - y_2\|^2_{\mathcal{V}} + \big(2\|\mathcal{M}_b\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{V}^*)} C^2_{b,\mathrm{Lip}} + \|\mathcal{M}_\sigma\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} C^2_{\sigma,\mathrm{Lip}}\big)\big|\mu[y_1 - y_2]\big|^2,
\end{aligned}$$

其中最后一步用到了（2.13）和杨氏不等式。根据引理 2.10 ，取 $\varepsilon > 0$ $=\varepsilon = 2^{-1}\big(2\|\mathcal{M}_b\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{V}^*)} C^2_{b,\mathrm{Lip}} + \|\mathcal{M}_\sigma\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} C^2_{\sigma,\mathrm{Lip}}\big)^{-1}$，可得

$$\begin{aligned}
&2\big\langle \mathcal{A}(y_1 - y_2) + \mathcal{M}_b\big(b(\mu[y_1]) - b(\mu[y_2])\big), y_1 - y_2\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[y_1]) - \sigma(\mu[y_2])\big)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}\\
&\le \widetilde{C}_{\mathrm{H2}}\|y_1 - y_2\|^2_{\mathcal{H}} - \|y_1 - y_2\|^2_{\mathcal{V}},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 $\widetilde{C}_{\mathrm{H2}} := 2 + C_{\mu,\varepsilon}\big(2\|\mathcal{M}_b\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{V}^*)} C^2_{b,\mathrm{Lip}} + \|\mathcal{M}_\sigma\|^2_{L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})} C^2_{\sigma,\mathrm{Lip}}\big)$，且 $C_{\mu,\varepsilon} > 0$ 由引理 2.10 得到。特别地，条件 **(H2)**（弱单调性）成立。同样，注意到 b： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 σ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$具有线性增长性质，经过与上文类似的计算可确认条件 **(H3)**（强制性）也成立。最后，由于 $\mathcal{A}$： $\mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, $\mathcal{M}_b$： $\mathbb{R}^n \to \mathcal{V}^*$ 和 $\mu[\cdot]$： $\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ 是有界线性算子，且 $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 具有线性增长，因此条件 **(H4)** （有界性）成立。

基于上述条件（H1）–（H4）， [47, 定理 4.2。4] 可知，只要 $\mathcal{H}$- 值、 $\mathcal{F}_0$-可测初始条件 Y_0 平方可积，随机演化方程（1.2）就存在一个（唯一的）解 Y满足

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t\|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^T \|Y_t\|^2_{\mathcal{V}}\,\mathrm{d}t\right] < \infty$$

对任意 $T > 0$ 均成立。对于一般的 Y_0 （不一定平方可积），我们考虑由 $A_N := \{N - 1 \le \|Y_0\|_{\mathcal{H}} < N\}$ 定义的 Ω 的 $\mathcal{F}_0$-可测划分 $\{A_N\}_{N\in\mathbb{N}}$。记 $Y^N = (Y^N_t)_{t\ge 0}$ 为初始条件为 $Y_0 \mathbb{1}_{A_N}$ 的随机演化方程（1.2）的解，并令 $Y_t := \sum_{N=1}^\infty Y^N_t \mathbb{1}_{A_N}$ （ $t \ge 0$），则可知 $Y = (Y_t)_{t\ge 0}$ 是满足定义 2.13 意义下、初始条件为 Y_0 的随机演化方程（1.2）的一个解。由下文将证明的断言（ii）中的估计（2.16）可得解的唯一性。随机演化方程（1.2）的解构成时间齐次马尔可夫过程这一事实，同样可由关于单调随机偏微分方程的一般结果 [47,命题 4.3。5] 得出。

接下来，我们证明断言（ii）。具体而言，我们着重证明估计（2.16），因为估计（2.15）可用类似方法推导。设 Y和 Y' 是（1.2）的两个解。对平方范数 $\|\cdot\|^2_{\mathcal{H}}$（见 [47, 定理 4.2。5] 或下文引理 2.19 ）应用伊藤公式，可得 $\mathcal{H}$值过程 $Y - Y'$ 满足

$$\begin{aligned}
&\big\|Y_t - Y'_t\big\|^2_{\mathcal{H}}\\
&= \big\|Y_0 - Y'_0\big\|^2_{\mathcal{H}} + 2\int_0^t \Big\langle Y_s - Y'_s, \mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[Y'_s])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle_{\mathcal{H}}\\
&\quad + \int_0^t \Big\{2\Big\langle \mathcal{A}(Y_s - Y'_s) + \mathcal{M}_b\big(b(\mu[Y_s]) - b(\mu[Y'_s])\big), Y_s - Y'_s\Big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \Big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[Y'_s])\big)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}\Big\}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎处处成立。由单调性估计（2.17），可得

$$\begin{aligned}&\left\|Y_t - Y_t'\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s \\ &\leq \left\|Y_0 - Y_0'\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_{\mathrm{H2}} \int_0^t \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^t \left\langle Y_s - Y_s', \mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[Y_s'])\big)\,\mathrm{d}W_s \right\rangle_{\mathcal{H}}\end{aligned} \tag{2.18}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然成立。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，令 $\tau_N := \inf\{t \geq 0 \,|\, \|Y_t - Y_t'\|_{\mathcal{H}}^2 > N \text{ or } \int_0^t \|Y_s - Y_s'\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s > N\}$。由于 Y 和 Y' 是取值于 $\mathcal{H}$ 的连续适应过程，且对任意 $\int_0^T \|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2$ 和 $\int_0^T \|Y_t'\|_{\mathcal{V}}^2$，$t < \infty$ 和 $t < \infty$ 几乎必然成立，因此 $\{\tau_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是一列递增的停时，满足 $\lim_{N\to\infty} \tau_N = \infty$ 几乎必然成立。固定 $N \in \mathbb{N}$。由于 $\mathcal{M}_\sigma \in L(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})$，$\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 是利普希茨连续的，且 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$，根据停止时 τ_N 的定义可知，(2.18) 右端的随机积分在 τ_N 处停止后是一个鞅。因此，对 (2.18) 两边取条件期望 $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_0]$，得到

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_N} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq \left\|Y_0 - Y_0'\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_{\mathrm{H2}} \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,s\wedge\tau_N]} \left\|Y_r - Y_r'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \mathrm{d}s \tag{2.19}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然成立。此外，将条件Burkholder–Davis–Gundy不等式[3] 应用于（2.18）表明，对某个万有常数 $C_{\mathrm{BDG}} > 0$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_N]} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \\ &\leq \left\|Y_0 - Y_0'\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_{\mathrm{H2}} \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,s\wedge\tau_N]} \left\|Y_r - Y_r'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \mathrm{d}s \\ &\quad + 2C_{\mathrm{BDG}}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_N} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \left\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[Y_s'])\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right]\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 0$几乎必然成立。由于根据停止时 τ_N 的定义，$\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_N]} \|Y_s - Y_s'\|_{\mathcal{H}}^2 | \mathcal{F}_0] < \infty$几乎必然成立，上述估计与杨氏不等式给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_N]} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] &\leq \left\|Y_0 - Y_0'\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_{\mathrm{H2}} \int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,s\wedge\tau_N]} \left\|Y_r - Y_r'\right\|_{\mathcal{H}}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \mathrm{d}s \\ &\quad + 2C_{\mathrm{BDG}}^2\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_N} \left\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[Y_s'])\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2 \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right]\end{aligned} \tag{2.20}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然成立。关于（2.20）右端最后一项条件期望，由于 $\mathcal{M}_\sigma \in L(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})$，$\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$是利普希茨连续的，且 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$，存在仅依赖于 μ，M_σ 以及 σ 的利普希茨常数 $C_{\sigma,\ \mathrm{Lip}}$ 的常数 $\widetilde{C} > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_N} \left\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[Y_s'])\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2 \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq \widetilde{C}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_N} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \tag{2.21}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然成立。结合（2.19）、（2.20）和（2.21），我们得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_N]} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^{t\wedge\tau_N} \left\|Y_s - Y_s'\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right]$$

[3]对于滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ \mathbb{P})$ 上任意一维连续鞅 $M = (M_t)_{t\geq 0}$ 以及任意 $A \in \mathcal{F}_0$，对鞅 $(M_t 1\!\!1_A)_{t\geq 0}$ 应用标准的Burkholder–Davis–Gundy不等式可得 $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |M_t| 1\!\!1_A] \leq C_{\mathrm{BDG}}\mathbb{E}[\langle M\rangle_T^{1/2} 1\!\!1_A]$，这意味着对于任意 $T > 0$，$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |M_t||\mathcal{F}_0] \leq C_{\mathrm{BDG}}\mathbb{E}[\langle M\rangle_T^{1/2}|\mathcal{F}_0]$ 几乎处处成立。

$$\leq C\|Y_0 - Y_0'\|_{\mathcal{H}}^2 + C\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,s\wedge\tau_N]} \|Y_r - Y_r'\|_{\mathcal{H}}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \mathrm{d}s$$

对于任意 $t \geq 0$，几乎处处成立，其中常数 $C > 0$ 仅依赖于提升基 $(\mu,\ M_b,\ M_\sigma)$ 以及常数$C_{b,\ \mathrm{Lip}}$ 和 $C_{\sigma,\ \mathrm{Lip}}$。因此，由格朗沃尔不等式可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_N]} \|Y_t - Y_t'\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^{T\wedge\tau_N} \|Y_t - Y_t'\|_{\mathcal{V}}^2 \,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq Ce^{CT}\|Y_0 - Y_0'\|_{\mathcal{H}}^2$$

对任意 $T > 0$ 几乎处处成立。然后，取极限 $N \to \infty$ 并应用条件单调收敛定理，即可得到所需的估计（2.16）。利用强制性 (H3) 而非单调性（2.17），即可按上述相同方式证明估计（2.15）；因此省略其证明。

现在证明断言 (iii)。设 $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ 是随机演化方程 (1.2) 的一个解，按照定义 2.13的意义理解。通过对初始条件 Y_0应用标准的局部化技术，不失一般性，可假设 $\mathbb{E}[\|Y_0\|_{\mathcal{H}}^2] < \infty$。此时，由（2.15）可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|Y_t\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2 \,\mathrm{d}t\right] < \infty. \tag{2.22}$$

注意，按照定义 2.13的意义，随机演化方程 (1.2) 的解 Y 可视为定义在 $\mathcal{V}^*$上的解析强解；参见备注 2.14。因此，[15, 第 5]章中的论证表明，它在以下意义下也是定义在 $\mathcal{V}^*$ 上的解析温和解：

$$Y_t = \mathcal{S}(t)Y_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_b b(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_\sigma\sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s \quad \text{in } \mathcal{V}^* \tag{2.23}$$

对任意 $t \geq 0$，几乎处处成立；另见 [17, 命题 2.9 和命题 2.10]，了解希尔伯特可分空间上随机微分方程解析强解、弱解和温和解之间关系的更多详情。令 $m \in \mathbb{N}$，并定义映射 $\mu_m[\cdot]\colon \mathcal{V}^* \to \mathbb{R}^n$ 和 $\mu_m[\cdot]\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ 如下：

$$\mu_m[y] := \int_{[0,m)} y(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta) \quad \text{for } y \in \mathcal{V}^*, \quad \text{and}$$
$$\overline{\mu}_m[y] := \mu[y] - \mu_m[y] = \int_{[m,\infty)} y(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta) \quad \text{for } y \in \mathcal{V}.$$

显然，$\mu_m[\cdot]$ 是从 $\mathcal{V}^*$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界线性算子，且 $\mu_m[\cdot]$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界线性算子。此外，根据柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$\|\overline{\mu}_m[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{y\in\mathcal{V}\\ \|y\|_{\mathcal{V}}\leq 1}} |\overline{\mu}_m[y]| \leq \sup_{\substack{y\in\mathcal{V}\\ \|y\|_{\mathcal{V}}\leq 1}} \int_{[m,\infty)} |y(\theta)|\,\mu(\mathrm{d}\theta) \leq \left(\int_{[m,\infty)} (1+\theta)^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2}.$$

注意到测度 2.6 的可积性条件 μ，由控制收敛定理可得

$$\lim_{m\to\infty} \|\overline{\mu}_m[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.24}$$

我们将算子 $\mu_m[\cdot] \in L(\mathcal{V}^*;\mathbb{R}^n)$ 应用于 (2.23) 的两边。由于从 $\mathcal{V}^*$到 $\mathbb{R}^n$ 的任意有界线性算子都与 $\mathcal{V}^*$ 上的 Bochner 积分和随机积分可交换（例如，见 [15, 命题 1.6 和命题 430]），我们得到

$$\mu_m[Y_t] = \mu_m[\mathcal{S}(t)Y_0] + \int_0^t \mu_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_b]b(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mu_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_\sigma]\sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.25}$$

对任意 $t \geq 0$，几乎处处成立。我们在 (2.25) 的每一项中取极限 $m \to \infty$。回忆到，对于几乎处处的 $t \geq 0$，$x(t) = \mu[\mathcal{S}(t)Y_0]$，$K_b(t) = \mu[\mathcal{S}(t)\mathcal{M}_b]$ 且 $K_\sigma(t) = \mu[\mathcal{S}(t)\mathcal{M}_\sigma]$。为了证明断言 (iii)，只需证明对任意 $T > 0$，

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\overline{\mu}_m[Y_t]\right|^2 \mathrm{d}t\right] = 0, \tag{2.26}$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t)Y_0]\right|^2 \mathrm{d}t\right] = 0, \tag{2.27}$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\int_0^t \overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_b]b(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t\right] = 0, \quad \text{and} \tag{2.28}$$

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\int_0^t \overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_\sigma]\sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s\right|^2 \mathrm{d}t\right] = 0. \tag{2.29}$$

首先，(2.26)由(2.22)和(2.24)得出。类似地，由于映射 $\mathcal{S}(\cdot)\colon y \mapsto (\mathcal{S}(t)y)^{t\in[0,T]}$ 是从 $\mathcal{H}$ 到 $L^2(0,T;\mathcal{V})$的有界线性算子，再由(2.24)可得(2.27)。对于(2.28)中的期望，由杨氏卷积不等式可得

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\int_0^t \overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_b]b(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t\right] \leq \left(\int_0^T \left|\overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t)\mathcal{M}_b]\right|_{\mathrm{op}} \mathrm{d}t\right)^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|b(\mu[Y_t])\right|^2 \mathrm{d}t\right].$$

由于 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 呈线性增长且 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)$，由(2.22)可知 $\mathbb{E}[\int_0^T |b(\mu[Y_t])|^2\,\mathrm{d}t] < \infty$。此外，注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t)\mathcal{M}_b]\right|_{\mathrm{op}} \mathrm{d}t &\leq \int_0^T \int_{[m,\infty)} e^{-\theta t}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{[m,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta) \\
&\leq \left(\int_{[m,\infty)} \theta^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} \left(\int_{[m,\infty)} \theta^{-3/2}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式中用到了 Tonelli 定理和初等不等式 $\int_0^T e^{-\theta t}\,\mathrm{d}t \leq \theta^{-1}$，第三个不等式中用到了柯西–施瓦茨不等式。回顾关于 μ 和 M_b的可积性条件(2.6)和(2.7)，控制收敛定理保证上述估计中的最后一项在 $m \to \infty$时收敛于零。因此，我们得到(2.28)。剩下需要证明(2.29)。由 Itˆo 等距性和杨氏卷积不等式可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\int_0^t \overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_\sigma]\sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s\right|^2 \mathrm{d}t\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^t \left|\overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t-s)\mathcal{M}_\sigma]\sigma(\mu[Y_s])\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right] \\
&\leq \int_0^T \left|\overline{\mu}_m[\mathcal{S}(t)\mathcal{M}_\sigma]\right|_{\mathrm{op}}^2 \mathrm{d}t\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\sigma(\mu[Y_t])\right|^2 \mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

对任意 $m \in \mathbb{N}$。由于 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 呈线性增长，且 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)$，由 (2.22) 可得 $\mathbb{E}[\int_0^T |\sigma(\mu[Y_t])|^2\,\mathrm{d}t] < \infty$。结合以下事实：$\mathcal{M}_\sigma \in L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$，以及 $\mathcal{S}(\cdot) \in L(\mathcal{H};L^2(0,T;\mathcal{V}))$，再加上 (2.24) 中给出的收敛性，可知 (2.29) 成立。因此，在 (2.25) 中取极限$m \to \infty$，可得断言 (iii) 成立。证明至此完成。 □

定义

$$\Lambda := \left\{\eta : [0,\infty) \to \mathcal{H} \;\middle|\; t \mapsto \eta_t \text{ is strongly continuous in } \mathcal{H} \text{ and } \int_0^T \|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t < \infty \text{ for any } T > 0\right\}$$

and

$$d_\Lambda(\eta,\eta') := \sum_{T\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^T}\{\|\eta-\eta'\|_{\Lambda_T}\wedge 1\} \quad \text{for } \eta,\eta'\in\Lambda, \tag{2.30}$$

其中

$$\|\eta\|_{\Lambda_T} := \left(\sup_{t\in[0,T]}\|\eta_t\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \quad \text{for } \eta\in\Lambda. \tag{2.31}$$

于是，(Λ, d_Λ) 是一个完备可分度量空间；参见引理 A.3。序列 $\{\eta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 Λ 中收敛到元素 $\eta\in\Lambda$（关于度量 d_Λ），当且仅当对任意 $T>0$，均有 $\lim_{k\to\infty}\|\eta_k-\eta\|_{\Lambda_T}=0$。根据引理 A.3 中的最后一个断言（另见备注 A.4 (ii)），对于完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上随机演化方程 (1.2) 的每个解 Y，样本路径映射 $\Omega\ni\omega\mapsto(Y_t(\omega))_{t\geq 0}$ 定义了一个取值于 Λ 的博雷尔可测随机变量。在命题 2.15 的设定下，Λ 上解 Y 的路径律由 $\mathcal{H}$ 上初始条件 Y_0 的分布确定。这源于随机演化方程 (1.2) 的依分布唯一性，该唯一性由路径唯一性以及一般随机微分方程的 Yamada–Watanabe 型结果保证（例如，参见附录 E）。当 Y_0 服从给定的初始分布 $\nu\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 时，我们将路径空间 Λ 上解 Y 的分布记为 $\mathbf{P}^\nu\in\mathcal{P}(\Lambda)$。与随机演化方程 (1.2) 相关的 $\mathcal{H}$ 上的马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 定义如下

$$P_t(y,A) := \mathbf{P}^{\delta_y}\big(\{\eta\in\Lambda\mid \eta_t\in A\}\big),\quad y\in\mathcal{H},\ A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),\ t\geq 0.$$

估计（2.16）尤其表明，马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在 $\mathcal{H}$ 上满足 Feller 性质。此外，马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 显然是随机连续的，因此是可测的。

备注 2.16. (i) 比 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的 Feller 性质更一般地，估计（2.16）表明映射 $\nu\mapsto\mathbf{P}^\nu$ 从 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{P}(\Lambda)$ 连续，其中两者均赋有各自的概率测度弱收敛拓扑。对于每个 $\tau\in[0,\infty)$，记 $\mathscr{S}_\tau\colon\Lambda\to\Lambda$ 为 Λ 上的时间平移算子，其定义为 $\mathscr{S}_\tau\eta := (\eta_{t+\tau})_{t\geq 0}$，对每个 $\eta\in\Lambda$ 均成立。时齐马尔可夫性质蕴含 $\mathbf{P}^\nu\circ\mathscr{S}_\tau^{-1}=\mathbf{P}^{P_\tau^*\nu}$。

(ii) 考虑具有由提升基 (μ, M_b, M_σ) 生成的可提升核对 (K_b, K_σ) 的随机 Volterra 方程 (1.1)。给定形式为 $x(t)=\mu[\mathcal{S}(t)Y_0]$ 的自由项 x，其中某个取值于 $\mathcal{H}$ 的随机变量 Y_0 服从给定概率测度 $\nu\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$，我们用 $\mathbf{Q}^\nu\in\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 表示解 $X=(X_t)_{t>0}$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 上的 $\mathrm{d}t$-等价类的分布。由命题 2.15 (iii)，有 $\mathbf{Q}^\nu=\mathbf{P}^\nu\circ\mu[\cdot]^{-1}$。这里稍微滥用一下记号，将 $\mu[\cdot]$ 理解为从 Λ 到 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 的映射，它将每个 $\eta\in\Lambda$ 映射为 $(\mu[\eta_t])_{t\geq 0}$ 的 $\mathrm{d}t$-等价类。由于 $\mathcal{V}\ni y\mapsto\mu[y]\in\mathbb{R}^n$ 是有界线性算子，根据 Λ 的定义，映射 $\mu[\cdot]\colon\Lambda\to L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 是连续的。因此，$\mathcal{P}(\mathcal{H})\ni\nu\mapsto\mathbf{P}^\nu\in\mathcal{P}(\Lambda)$ 的连续性意味着 $\mathcal{P}(\mathcal{H})\ni\nu\mapsto\mathbf{Q}^\nu\in\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 关于概率测度弱收敛拓扑的连续性。稍微滥用一下记号，我们对每个 $\tau\in[0,\infty)$，仍将 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 上的时间平移算子 $\xi\mapsto\xi_{\cdot+\tau}$ 记为 $\mathscr{S}_\tau$。于是有 $\mathbf{Q}^\nu\circ\mathscr{S}_\tau^{-1}=\mathbf{Q}^{P_\tau^*\nu}$。

为应用 [29] 的广义 Harris 定理（见定理 2.3），构造一个合适的距离（类）函数至关重要。为此，“换范数”技术在我们的框架中起着关键作用。更确切地说，我们引入如下定义。

定义 2.17. 设 $(\mu,\ M_b,\ M_\sigma)$ 为一个提升基。我们称可测映射 $\Phi\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个可容许权函数，如果矩阵 $\Phi(\theta)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称、正定的并且满足

$$|\Phi(\theta)|_{\mathrm{op}}\leq C_\Phi(1+\theta)^{-1/2} \quad\text{and}\quad \big|\Phi(\theta)^{-1}\big|_{\mathrm{op}}\leq C_\Phi(1+\theta)^{1/2} \tag{2.32}$$

对 μ-几乎处处的 $\theta\in[0,\infty)$ 对某个常数 $C_\Phi>0$。对每个可容许权函数 Φ，定义

$$\|y\|_\Phi := \left(\int_{[0,\infty)}\langle\Phi(\theta)y(\theta),y(\theta)\rangle\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} \quad \text{for } y\in\mathcal{H},$$

$$
\begin{aligned}
|||y|||_{\Phi} &:= \left(\int_{[0,\infty)} \theta \langle \Phi(\theta) y(\theta), y(\theta) \rangle \, \mu(\mathrm{d}\theta) \right)^{1/2} \quad \text{for } y \in \mathcal{V}, \\
\mu_{b,\Phi}[y] &:= \int_{[0,\infty)} M_b(\theta)^\top \Phi(\theta) y(\theta) \, \mu(\mathrm{d}\theta) \quad \text{for } y \in \mathcal{V}, \\
\mu_{\sigma,\Phi}[y] &:= \int_{[0,\infty)} M_\sigma(\theta)^\top \Phi(\theta) y(\theta) \, \mu(\mathrm{d}\theta) \quad \text{for } y \in \mathcal{H}, \quad \text{and} \\
Q_{\sigma,\Phi} &:= \int_{[0,\infty)} M_\sigma(\theta)^\top \Phi(\theta) M_\sigma(\theta) \, \mu(\mathrm{d}\theta).
\end{aligned}
$$

此外，定义映射 $d_\Phi\colon\ \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to [0,1]$ 为

$$
d_\Phi(y_1, y_2) := \|y_1 - y_2\|_\Phi \wedge 1 \quad \text{for } y_1, y_2 \in \mathcal{H}.
$$

注记 2.18。 (i) 注意，对于可容许权函数 $\Phi_0(\theta) = (1+\theta)^{-1/2} I_{n\times n}$，$\|y\|_{\mathcal{H}} = \|y\|_{\Phi_0}$ 和 $\|y\|_{\mathcal{V}} = (\|y\|_{\Phi_0}^2 + |||y|||_{\Phi_0}^2)^{1/2}$。

(ii) 对于每个可容许权函数 Φ，映射 $y \mapsto \|y\|_\Phi$ 在 $\mathcal{H}$中定义了一个等价范数。该范数由内积诱导

$$
\langle y_1, y_2 \rangle_\Phi := \int_{[0,\infty)} \langle \Phi(\theta) y_1(\theta), y_2(\theta) \rangle \, \mu(\mathrm{d}\theta), \quad y_1, y_2 \in \mathcal{H}.
$$

映射 $d_\Phi\colon\ \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to [0,1]$ 是 $\mathcal{H}$ 上的距离函数，与 $\mathcal{H}$原有的范数拓扑相容。类似地，映射 $y \mapsto (\|y\|_\Phi^2 + |||y|||_\Phi^2)^{1/2}$ 在 $\mathcal{V}$中定义了一个等价范数。若通过 Riesz 同构 $y \mapsto \langle y, \cdot \rangle_\Phi$ 将 $\mathcal{H}^*$ 与 $\mathcal{H}$ 等同，其中采用内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$，该同构可能不同于同构 $y \mapsto \langle y, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$，则 $\mathcal{V}^*$ 与 $\mathcal{V}$ 之间相应的对偶配对$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}^*,\, \mathcal{V},\, \Phi}$ 由有界双线性泛函$\mathcal{H} \times \mathcal{V} \ni (y_1,\ y_2) \mapsto \langle y_1,\ y_2 \rangle_\Phi \in \mathbb{R}$ 到 $\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}$的唯一延拓给出。

(iii) 对于每个可容许权函数 Φ，根据定义显然有

$$
\langle \mathcal{A} y, y \rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi} = -|||y|||_\Phi^2 \tag{2.33}
$$

对于任意 $y \in \mathcal{V}$。上的可积性条件 (2.7)以及关于 的界 (2.32)保证映射 $_{,\Phi}[\cdot]$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界线性算子。这是关于对偶配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi}$ 的 $\mathcal{M}_b \in L(\mathbb{R}^n; \mathcal{V}^*)$ 的伴随算子，也就是说，

$$
\langle \mathcal{M}_b x, y \rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi} = \int_{[0,\infty)} \big\langle \Phi(\theta) M_b(\theta) x, y(\theta) \big\rangle \, \mu(\mathrm{d}\theta) = \langle x, \mu_{b,\Phi}[y] \rangle \tag{2.34}
$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathcal{V}$。类似地， M_σ 上的可积性条件 (2.8) 以及关于 Φ 的界 (2.32) 保证映射 $\mu_{\sigma,\Phi}[\cdot]$ 是从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的有界线性算子。这是关于内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$ 的 $\mathcal{M}_\sigma \in L(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})$ 的伴随算子，也就是说，

$$
\langle \mathcal{M}_\sigma x, y \rangle_\Phi = \int_{[0,\infty)} \big\langle \Phi(\theta) M_\sigma(\theta) x, y(\theta) \big\rangle \, \mu(\mathrm{d}\theta) = \langle x, \mu_{\sigma,\Phi}[y] \rangle \tag{2.35}
$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathcal{H}$。此外，根据（2.8）和（2.32），矩阵 $Q_{\sigma,\,\Phi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 定义良好。该矩阵是对称的，并满足

$$
\big\| \mathcal{M}_\sigma x \big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d; (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi))} = \mathrm{tr}\big[x^\top Q_{\sigma,\Phi} x \big] \tag{2.36}
$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^{n\times d}$。这里，$\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^d; (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi))}$ 表示从欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 到配备内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$ 的可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的算子的希尔伯特–施密特范数。

应用 [47, 定理 4.2。5] （在 $\alpha = 2$ 其记号下）[4] 于我们的情形，可得平方范数 $\|\cdot\|_\Phi^2$ 的以下伊藤公式。

引理 2.19。 设给定一个 d维布朗运动 W，定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上，并相对于满足通常条件的滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$。设 (μ, M_b, M_σ) 为一个提升基。设 Y 是一个 $\mathcal{H}$ 值连续适应过程， B 和 Σ 分别是 $\mathcal{V}^*$ 值和 $L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})$值渐进可测过程。假设对任意 $T > 0$，都有 $\int_0^T \{\|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2 + \|B_t\|_{\mathcal{V}^*}^2 + \|\Sigma_t\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2\}\mathrm{d}t < \infty$几乎处处成立，且 Y 满足

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t B_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t \Sigma_s \,\mathrm{d}W_s$$

对所有 $t \geq 0$，在 $\mathcal{V}^*$ 中几乎处处成立。于是，对任意可容许权函数 Φ，有

$$\|Y_t\|_\Phi^2 = \|Y_0\|_\Phi^2 + \int_0^t \left\{2\langle B_s, Y_s\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi} + \|\Sigma_s\|_{L_2(\mathbb{R}^d;(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi))}^2\right\}\mathrm{d}s + 2\int_0^t \langle Y_s, \Sigma_s \,\mathrm{d}W_s\rangle_\Phi \tag{2.37}$$

对所有 $t \geq 0$，几乎处处成立。

注 2.20。如前所述，(2.37) 中的配对 $\langle B_s, Y_s\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi}$ 应理解为$\sim$ $\sim\langle B_s, Y_s\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi}$意义下的配对，其中 $Y := Y\mathbb{1}_{\mathcal{V}}(Y)$ 是 Y 的一个 $\mathcal{V}$值渐进可测版本；参见注 2.14。需要强调的是，过程 Y通常不是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的半鞅；事实上，只有将其视为较大空间 $\mathcal{V}^*$中的过程时，才能将其看作半鞅。尽管如此，上述伊藤公式对 $\mathcal{H}$上的平方（等价）范数 $\|\cdot\|_\Phi^2$ 仍然成立，并且过程 $(\|Y_t\|_\Phi^2)_{t\geq 0}$是一个非负半鞅。

3 主要结果

我们现在陈述主要结果。本节中关键断言（定理 3.2、定理 3.4和命题 3.6）的证明推迟到第 4 节，而关于遍历性的主要定理（定理 3.8）则凭借定理 2.3 中回顾的广义 Harris 定理，作为这些结果的直接推论得出。

对于给定的提升基 (μ, M_b, M_σ) 以及可测映射 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$，我们引入如下假设。

假设 1.

- $\kappa :=$ 下确界支撑 $\mu > 0$.
- 对 μ-几乎处处的 $\theta \in [0,\infty)$，矩阵 $M_\sigma(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称且正定的。
- 存在常数 $C_{b,\mathrm{Lip}}$ $C_{\sigma,\mathrm{Lip}} > 0$，使得 $|b(x) - b(x')| \leq C_{b,\mathrm{Lip}}|x - x'|$ 且 $|\sigma(x) - \sigma(x')| \leq C_{\sigma,\mathrm{Lip}}|x - x'|$ 对所有 $x, x' \in \mathbb{R}^n$均成立。
- 存在常数 $C_{\mathrm{UE}} > 0$，使得 $\langle\sigma(x)\sigma(x)^\top\xi,\xi\rangle \geq \frac{|\xi|^2}{C_{\mathrm{UE}}}$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。

注 3.1. (i) 在假设 1中，对于利普希茨常数 $C_{b,\mathrm{Lip}}$ 和 $C_{\sigma,\mathrm{Lip}}$ （即 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 与 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$）的取值，我们不作任何限制。这与 [8, 9, 10],形成对照：后者在利普希茨常数与增长常数足够小、从而使系统耗散的假设下，建立了随机 Volterra 方程及其马尔可夫提升的各种长时间渐近行为（无谱隙）结果。相反，我们要求扩散系数σ的一致椭圆性。值得注意的是，这并不意味着随机演化方程（1.2）的扩散在整个状态空间 $\mathcal{H}$上是一致椭圆的。恰恰相反，该系统是高度退化的，因为只有有限维噪声 W 作用于无穷维状态空间。特别地，噪声维数 d 可以小至一，只要维数 n （原随机 Volterra 方程（1.1）的）为一。

[4]尽管 [47, 定理 4.2。5] 假设关于 $\mathbb{P}$满足一些额外的可积性条件，但通过标准的局部化论证可以去掉这些条件。另请参见 [55, 引理 2。14] 其中有一个类似的结果（证明比 [47, 定理 4.2。5]更简单），且不要求关于 $\mathbb{P}$的可积性假设。

（ii）对于例 2.9（i）中用以生成指数和型核（$K_b^{\exp}$， $K_\sigma^{\exp}$）的提升基，只要 $\kappa_i > 0$ 与M_σ，且对每个 $i \in \{1, \ldots, N\}$，$_i$ 为对称正定，则假设 1 的第一与第二条件成立。此时，我们有 κ：$=$inf supp $\mu =$ min$\{\kappa_1, \ldots, \kappa_N\}$。至于例 2.9（ii）中用以生成 tempered 分数阶核（K_b^{frac}， K_σ^{frac}）的提升基，只要 $0 < \kappa_\sigma \le \kappa_b$，则假设 1 的第一与第二条件成立。此时，我们有 κ：$=$inf supp $\mu = \kappa_\sigma$。应当指出，要求 κ：$=$inf supp $\mu > 0$ 使得这些核必须进行指数调 tempering。

以下定理是应用[29] 的广义 Harris 定理（另见定理 2.3）的关键要素。此外，我们建立了一个渐近对数 *Harnack* 不等式，该不等式本身也具有独立的研究价值。特别地，它保证了不变概率测度的唯一性（例如，参见 [4, 定理 2。1]）。下文中，我们使用定义2.17和（2.3）中引入的记号。

定理 3.2。设提升基(μ, M_b, M_σ) 和可测映射 b：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, σ：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$满足假设*1*。令 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ 为与随机演化方程(1.2)相关联的马尔可夫半群。则存在一个可容许权函数 Φ：$[0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$，它仅依赖于$(\mu, M_b, M_\sigma)$ 以及常数$C_{b,\mathrm{Lip}}$,$C_{\sigma,\mathrm{Lip}}$和 C_{UE}，使得以下断言成立：

(i) 对任意 $t \ge \frac{4}{\kappa}$对数^2，距离函数 d_Φ 关于 P_t是收缩的。具体而言，对于任意 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ 满足$d_\Phi(y_1, y_2) < 1$，有

$$\mathbb{W}_{d_\Phi}(P_t(y_1,\cdot), P_t(y_2,\cdot)) \le \frac{3}{4} d_\Phi(y_1, y_2). \tag{3.1}$$

(ii) 对任意 $R > 0$ 以及任意 $t \ge \frac{4R^2+2}{\kappa}$对数$(8R)$，集合 $\overline{B}_\Phi(R)$：$= \{y \in \mathcal{H} \mid \|y\|_\Phi \le R\}$ 关于 P_t是 d_Φ-小集。具体而言，对于任意 $y_1, y_2 \in \overline{B}_\Phi(R)$，有

$$\mathbb{W}_{d_\Phi}(P_t(y_1,\cdot), P_t(y_2,\cdot)) \le 1 - \frac{1}{4}\exp(-2R^2). \tag{3.2}$$

(iii) 以下渐近对数 *Harnack* 不等式成立：对于任意 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$，任意 $t \ge 0$ 以及任意有界 *Borel* 可测函数 f：$\mathcal{H} \to [1,\infty)$ 满足

$$\|\nabla_\Phi \log f\|_\infty := \sup_{\substack{y,y'\in\mathcal{H}\\ y\ne y'}} \frac{|\log f(y) - \log f(y')|}{\|y-y'\|_\Phi} < \infty,$$

有

$$P_t \log f(y_1) \le \log P_t f(y_2) + \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\Phi^2 + e^{-\kappa t/2}\|y_1 - y_2\|_\Phi \|\nabla_\Phi \log f\|_\infty. \tag{3.3}$$

特别地，马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ 至多存在一个不变概率测度。

上述定理的证明见第4.1节。

注 3.3。 除了不变概率测度的唯一性之外，断言 (iii) 中的渐近对数 Harnack 不等式还意味着马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ 具有 渐近强 *Feller* 和渐近不可约性。此外，它还给出了梯度估计 以及渐近热核估计；更多细节请参见 [4, 定理 2。1]在我们之前的工作 [32, 第 4]，节中，我们针对具有标量完全单调核的 SVE 的马尔可夫提升建立了渐近对数 Harnack 不等式，这对应于情形 $M_b = M_\sigma = I_{n\times n}$。当前的断言 (iii) 将这一结果显著扩展到了矩阵值核的情形，其中 K_b 和 K_σ 可能不同，从而允许 K_b 不一定是平方可积的情形。

构造李雅普诺夫函数是应用 [29] 的广义 Harris 定理的另一个重要步骤（另见定理 2.3）。以下假设为李雅普诺夫函数存在性提供了一个抽象判据。关于其表述，我们再次采用定义 2.17中引入的记号。

假设 2。 存在一个可容许权函数 $\Psi:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 以及常数 $\delta \in (0,\ 1)$、$\rho > 0$ 和 $C_{\mathrm{Lyap}} > 0$，使得

$$\big\langle b(\mu[y]), \mu_{b,\Psi}[y]\big\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[y])^{\top} Q_{\sigma,\Psi}\sigma(\mu[y])\big] \le \delta|||y|||_{\Psi}^{2} - \rho\|y\|_{\Psi}^{2} + C_{\mathrm{Lyap}} \tag{3.4}$$

对任意 $y \in \mathcal{V}$。

定理 3.4. 假设提升基 (μ, M_b, M_σ) 和可测映射 $b:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$满足假设 2。假设随机演化方程 *(1.2)* 弱适定，并记 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的相应可测马尔可夫半群。那么，函数 $V(y) := \|y\|_{\Psi}^{2}$ 是 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ 的李雅普诺夫函数。此外，若 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 是 $\{P_t\}_{t\ge 0}$的不变概率测度，则有如下估计：

$$\int_{\mathcal{H}} \Big\{\rho\|y\|_{\Psi}^{2} + (1-\delta)|||y|||_{\Psi}^{2}\Big\}\,\pi(\mathrm{d}y) \le C_{\mathrm{Lyap}}. \tag{3.5}$$

特别地，我们有 $\pi(\mathcal{V}) = 1$ 以及 $\int_{\mathcal{V}} \|y\|_{\mathcal{V}}^{2}\,\pi(\mathrm{d}y) < \infty$。

上述定理的证明见第 4.2 节。

备注 3.5. 假设2 中的条件与 [21, 第7], 章中关于抽象 Gelfand 三元组上的一类一般单调随机偏微分方程最终有界性的研究所用的李雅普诺夫型条件$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^{*}$ 有关。该研究表明，若嵌入 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ 是紧的，则最终有界性条件蕴含不变概率测度的存在。然而，这一经典结果不能直接应用于我们的框架，因为在通常感兴趣的情形下，嵌入 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ 并不紧；引理 A.1 刻画了我们框架中该嵌入的紧性。缺乏紧性带来了超出一般框架标准结果的技术挑战，因为仅有假设 2 不足以推出不变概率测度的存在；关于这一困难的详细讨论见备注 4.4 。为确保不变概率测度的存在（以及唯一性和指数遍历性），必须将定理 3.4 中的李雅普诺夫方法与定理 d_Φ3.2 (i) 和 (ii) 中针对特定距离 d_Φ所建立的压缩性和 d_Φ-小性条件相结合，正如下文定理 3.8 将要展示的。

容易证明，若假设 2 满足以下条件： $\kappa := \inf \mathrm{supp}\,\mu > 0$，且映射 $b:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和$\sigma:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 具有次线性增长；在这种情况下，所需条件对任意可容许权函数 Ψ均成立。以下命题的证明也留待第 4.2 节给出，它为假设 2提供了另一个可验证但非平凡的充分条件。在此背景下，权函数 Ψ 选择上的灵活性至关重要。

命题 3.6。对于提升基 (μ, M_b, M_σ) 和可测映射 $b:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 以及 $\sigma:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$，假设 *2* 在以下条件成立时满足：

- $\kappa := \inf \mathrm{supp}\,\mu > 0$。
- 对于 μ-几乎处处的 $\theta \in [0,\infty)$，矩阵 $M_b(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称半正定的。
- 存在常数 $C_{b,\mathrm{LG}}$ $C'_{b,\mathrm{LG}} > 0$ 和一个常数 $\gamma > 0$，满足 $\gamma \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\ \mu(\mathrm{d}\theta) < 1$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|b(x)| \le C_{b,\mathrm{LG}}(1+|x|) \quad \textit{and} \quad \langle b(x), x\rangle \le \gamma|x|^{2} + C'_{b,\mathrm{LG}}.$$

- 存在常数 $p \in (0,\ 1)$ 以及 $C_{\sigma,\mathrm{subLG}} > 0$，使得 $|\sigma(x)| \le C_{\sigma,\mathrm{subLG}}(1+|x|^{p})$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。

备注 3.7。 (i) 在上述条件下，除了强制性条件 $b\ \langle b\ (x)\ x\rangle \le \gamma|x|^{2} + C'_{b,\ \mathrm{LG}}$以及上文引入的特定正数 γ 之外，我们不对漂移系数的线性增长常数施加任何限制。这类强制性条件常见于随机微分方程的 Lyapunov 型估计中。然而，值得注意的是，在随机 Volterra 方程（1.1）的背景下，要在这种瞬时条件下控制系统并非易事，因为其动力学呈现出

由于核的存在而具有路径依赖性。同样，从随机演化方程（1.2）的角度来看，这也并非易事，因为其系数中包含正则性较低的非局部项 $\mu[y]$ 。尽管如此，定理 3.4 和命题 3.6 给出了适当的 Lyapunov 型估计。这些估计的一个关键要素是构造可容许权函数 Ψ ，该函数利用随机演化方程（1.2）的特定结构，以满足假设2的要求。更多详情请参见第 4.2节。

(ii) 由 (2.6), (2.7) 以及假设 $\kappa := \operatorname{supp}\mu > 0$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta) \le \left(\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} \left(\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-3/2}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2} < \infty.$$

若 (K_b, K_σ) 由提升基 (μ, M_b, M_σ) 生成，则量 $\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta)$ 与积分 $\int_0^\infty |K_b(t)|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{d}t$ 密切相关。事实上，由表示式 $K_b(t) = \int_{[\kappa,\infty)} e^{-\theta t} M_b(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)$ 及 Tonelli 定理可得

$$\int_0^\infty |K_b(t)|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty \int_{[\kappa,\infty)} e^{-\theta t}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}t = \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta) < \infty.$$

此外，由 Fubini 定理可得

$$\int_0^\infty K_b(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{[\kappa,\infty)} e^{-\theta t} M_b(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}t = \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1} M_b(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta).$$

因此，若存在一个向量 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ （与 θ 无关），使得 $M_b(\theta)v = |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}} v$ 对 μ-几乎处处的 $\theta \in [0,\infty)$ 成立，则以下恒等式成立：

$$\left|\int_0^\infty K_b(t)\,\mathrm{d}t\right|_{\mathrm{op}} = \int_0^\infty |K_b(t)|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{d}t = \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta) = \left|\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1} M_b(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right|_{\mathrm{op}}.$$

(iii) 对于例 2.9 (i) 中生成指数和型核 $(K_b^{\exp}, K_\sigma^{\exp})$ 的提升基，只要 $\kappa_i > 0$ 且 $M_{b,i}$ 对每个 $i \in \{1,\dots,N\}$ 是对称且半正定的，命题 3.6 中的第一和第二条件即成立。此时，我们有 $\kappa := \inf \operatorname{supp}\,\mu = \min\{\kappa_1,\dots,\kappa_N\}$ 以及 $\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{|M_{b,i}|_{\mathrm{op}}}{\kappa_i}$。至于例 2.9 (ii) 中生成 tempered 分数阶核 $(K_b^{\mathrm{frac}}, K_\sigma^{\mathrm{frac}})$ 的提升基，只要 $\kappa_b, \kappa_\sigma > 0$，命题 3.6 中的第一和第二条件即成立。此时，我们有 $\kappa := \inf \operatorname{supp}\mu = \kappa_b \wedge \kappa_\sigma$以及 $\int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta) = \int_0^\infty |K_b(t)|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{d}t = \kappa_b^{-\alpha_b}$。这些观察与注 3.1 (ii) 相当。

作为定理 3.2 和定理3.4的直接推论，并根据 [29]中的广义 Harris定理（另见定理 2.3），我们得到关于马尔可夫提升的指数遍历性的以下主要结果。

定理 3.8。设提升基 (μ, M_b, M_σ) 和可测映射 $b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$满足假设*1* 和假设 *2*。那么，对于与随机演化方程 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ (*SEE*) （1.2）相关的马尔可夫半群，以下断言成立：

(*i*) 存在常数 r、$t_0 > 0$，使得以下谱隙型估计成立：

$$\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(P_t^*\nu_1, P_t^*\nu_2) \le e^{-rt}\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(\nu_1,\nu_2) \tag{3.6}$$

对于所有 $t \ge t_0$ *a nd all* ν_1、$\nu_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$，其中 $d_{\Phi,\Psi}: \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to [0,\infty)$ 是一个由下式给出的类距离函数

$$d_{\Phi,\Psi}(y_1,y_2) := \sqrt{\big(\|y_1-y_2\|_\Phi \wedge 1\big)\big(1+\|y_1\|_\Psi^2+\|y_2\|_\Psi^2\big)}, \quad y_1,y_2 \in \mathcal{H}, \tag{3.7}$$

和 Φ 以及 Ψ分别是定理*3.2* 和假设*2*中给出的可容许权函数。

(ii) 定理 存在唯一的不变概率测度 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$，对应于 $\{P_t\}_{t\geq 0}$，且满足

$$\pi(\mathcal{V}) = 1 \quad and \quad \int_{\mathcal{V}} \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \, \pi(\mathrm{d}y) < \infty. \tag{3.8}$$

此外，存在一个常数 $C > 0$，使得以下指数遍历性成立：

$$\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(P_t(y,\cdot),\pi) \leq C(1+\|y\|_{\Psi})e^{-rt} \tag{3.9}$$

对所有 $y \in \mathcal{H}$ 以及所有 $t \geq 0$，均成立。

备注 3.9。 (i) 估计 (3.9) 立即推出 $P_t(y,\cdot)$ 弱地收敛到不变概率测度 π，在 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中，当 $t \to \infty$ 对任意 $y \in \mathcal{H}$ 均成立。此外，注意到存在一个常数$C > 0$ 使得

$$\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{\left(\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{H}} \wedge 1\right)\left(1 + 2\|y_1\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\|y_2\|_{\mathcal{H}}^2\right)} \leq C d_{\Phi,\Psi}(y_1, y_2) \tag{3.10}$$

对所有 y_1， $y_2 \in \mathcal{H}$。因此，(3.9) 给出了以下 L^1-Wasserstein距离下的指数遍历性：

$$\mathbb{W}_{\mathcal{H}}(P_t(y,\cdot),\pi) \leq C(1+\|y\|_{\mathcal{H}})e^{-rt} \tag{3.11}$$

对所有 $y \in \mathcal{H}$ 以及所有 $t \geq 0$，对某个常数 $C > 0$ 成立，其中 $\mathbb{W}_{\mathcal{H}}$： $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ 是由下式定义的 L^1-Wasserstein（扩展）度量[5]

$$\mathbb{W}_{\mathcal{H}}(\nu_1,\nu_2) := \inf_{\nu \in \mathscr{C}(\nu_1,\nu_2)} \int_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{H}} \, \nu(\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2), \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{H}). \tag{3.12}$$

（ii）指数弱遍历性（3.9）（或（3.11））在包括大数定律、中心极限定理、平均原理和扩散近似在内的极限定理中有多种应用；参见 [42, 第5章和 6]。我们将在未来的研究中更详细地探讨这些主题。另一方面，“谱隙”结果（3.6）本身在证明不变概率测度的稳定性方面发挥着关键作用；参见 [29, 第4节。1]在第5节中，我们利用这一谱隙结果分析不变概率测度的有限维近似 $\pi \in \mathcal{P}$（$\mathcal{H}$）。

根据备注 2.16中的记号和观察，直接由定理 3.8可得以下推论。

推论 3.10。 在定理 *3.8*的设定下，以下断言成立：

(i) 概率测度 $\mathbf{P}^{\pi} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 在 Λ 上的时间平移下保持不变，即对于所有 $\tau \geq 0$， $\mathcal{P}(\Lambda)$ 中有 $\mathbf{P}^{\pi} \circ \mathscr{S}_{\tau}^{-1} = \mathbf{P}^{\pi}$。此外，对于每个 $y \in \mathcal{H}$，收敛性 $\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{P}^{\delta_y} \circ \mathscr{S}_{\tau}^{-1} = \mathbf{P}^{\pi}$ 在 $\mathcal{P}(\Lambda)$ 中弱地成立。

(ii) 概率测度 $Q^{\pi} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 上的时间平移下保持不变，即对于所有 $\tau \geq 0$， $\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 中有 $Q^{\pi} \circ \mathscr{S}_{\tau}^{-1} = Q^{\pi}$。此外，对于每个 $y \in \mathcal{H}$，收敛性 $lim_{\tau\to\infty} Q^{\delta_y} \circ \mathscr{S}_{\tau}^{-1} = Q^{\pi}$ 在 $\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 中弱地成立。

证明。由于 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 关于 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 不变，且对任意 $y \in \mathcal{H}$，$_{t\to\infty} P_t(y,\cdot) = \pi$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中弱地收敛，因此结合恒等式 $\mathrm{P}^{\nu} \circ \mathscr{S}_{\tau}^{-1} = \mathrm{P}^{P_{\tau}^*\nu}$ 在 $\mathcal{P}(\Lambda)$ 中成立，以及对 $\tau \geq 0$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$，$\mathrm{Q}^{\nu} \circ \mathscr{S}_{\tau}^{-1} = \mathrm{Q}^{P_{\tau}^*\nu}$ 在 $\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 中成立，再利用 $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \ni \nu \mapsto \mathrm{P}^{\nu} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 和 $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \ni \nu \mapsto \mathrm{Q}^{\nu} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 在弱意义下的连续性（见备注 2.16），即可得到这些断言。 □

注 3.11. 严格来说，$\mathbf{Q}^{\pi} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n$ 上关于时间平移的不变性3.10 (ii) 中已得到证明，但这并不直接意味着该过程本身的有限维分布具有平稳性。尽管如此，我们仍可在后者意义下构造随机 Volterra 方程（SVE）（1.1）的一个平稳解

[5]扩展度量 $\mathbb{W}_{\mathcal{H}}$: $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ 是 $\{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \mid \int_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}} \, \nu(\mathrm{d}y) < \infty\}$ 上的度量，而在此集合之外它可以取无穷值。

。事实上，在定理 3.8 的设定下，$\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 关于 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 和$\pi(\mathcal{V}) = 1$ 的不变性保证了

$$\mathbf{P}^\pi\big(\{\eta \in \Lambda \mid \eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_\ell} \in \mathcal{V}\}\big) = \int_{\mathcal{V}} \pi(\mathrm{d}y_0) \int_{\mathcal{V}} P_{t_1}(y_0, \mathrm{d}y_1) \int_{\mathcal{V}} P_{t_2-t_1}(y_1, \mathrm{d}y_2) \cdots \int_{\mathcal{V}} P_{t_\ell - t_{\ell-1}}(y_{\ell-1}, \mathrm{d}y_\ell) = 1$$

对任意 $t_1, \dots, t_\ell \in [0,\infty)$.[6] 基于这一观察，结合 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$，我们可以定义一个相容的有限维分布族 $\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\dots,t_\ell)} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)$，其定义如下

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\dots,t_\ell)}(A_1 \times \cdots \times A_\ell) := \mathbf{P}^\pi\big(\{\eta \in \Lambda \mid \eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_\ell} \in \mathcal{V} \text{ and } \mu[\eta_{t_1}] \in A_1, \dots, \mu[\eta_{t_\ell}] \in A_\ell\}\big)$$

对任意 $A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $t_1, \dots, t_\ell \in [0,\infty)$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$。令 $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}$ 为所有映射 $\xi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ 构成的空间，并赋予由柱集族 $\{\{\xi \in (\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)} \mid \xi_t \in A\} \mid t \in [0,\infty),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ 生成的 σ-代数。根据柯尔莫哥洛夫扩张定理，在可测空间 $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上存在唯一的概率测度 $\mathbf{Q}^\pi$，使得

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi\left(\left\{\xi \in (\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)} \;\middle|\; (\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_\ell}) \in \cdot\right\}\right) = \widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\dots,t_\ell)} \quad \text{in } \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)$$

对于任意 $t_1, \dots, t_\ell \in [0,\infty)$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$。概率测度 $\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 表示过程 $X := \mu[Y] = (\mu[Y_t])_{t\geq 0}$ 本身的分布（而非其在 $\mathbf{Q}^\pi \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 中的 $\mathrm{d}t$-等价类），其中Y 是具有初始分布 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 的随机演化方程 (1.2) 的一个解。根据命题 2.15 (iii)，X 是随机 Volterra 方程 (1.1) 的解。此外，推论 3.10 (i) 表明，概率测度 $\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 在 $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的时间平移作用下是不变的，即对于所有$\tau \geq 0$，$\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi \circ \mathscr{S}_\tau^{-1} = \widetilde{\mathbf{Q}}^\pi$ 属于 $\mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$。这里，如备注 2.16 中所示，略微滥用记号，我们再次用 $\mathscr{S}_\tau$ 表示 $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的时间平移算子 $(\xi_t)_{t\geq 0} \mapsto (\xi_{t+\tau})_{t\geq 0}$。$\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi$ 的这种平移不变性恰好意味着 $\mathbb{R}^n$-值过程 $X = \mu[Y]$ 是严格平稳的。我们强调，$\mathbf{Q}^\pi \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 与 $\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 是不同的对象；前者刻画过程 $X = \mu[Y]$ 的 $\mathrm{d}t$-等价类的分布，后者则刻画过程 $X = \mu[Y]$ 本身的有限维分布（可将其视为 $\mathrm{d}t$-等价类中的一个“良好代表”）。与推论 3.10 (ii) 不同，由于映射 $\Lambda \ni \eta \mapsto (\mu[\eta_{t_1} 1\!\!1_{\mathcal{V}}(\eta_{t_1})], \dots, \mu[\eta_{t_\ell} 1\!\!1_{\mathcal{V}}(\eta_{t_\ell})]) \in (\mathbb{R}^n)^\ell$ 对固定的 $t_1, \dots, t_\ell \in [0,\infty)$ 通常不具连续性，我们目前的结果并不意味着平移后的有限维分布弱收敛。

我们进一步考察与 SVE (1.1) 对应的平稳分布 $\mathbf{Q}^\pi \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 和 $\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$。诚然，与 SEE (1.2) 相关的状态空间 $\mathcal{H}$、定义在 $\mathcal{H}$ 上的马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$，以及不变概率测度 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$，都取决于生成核 K_b 和 K_σ的提升基 (μ, M_b, M_σ) 的具体选择。尽管如此，我们自然会预期，原始 SVE (1.1) 的平稳分布只取决于核 K_b, K_σ 和系数 b, σ，而与提升基的具体选择无关。下面的定理将在某种意义上表明，事实确实如此。

定理 3.12. 设 (K_b, K_σ) 是一对可提升核，且 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 是可测映射。假设 $(\mu_1, M_b, 1, M_\sigma, 1)$ 和 $(\mu_2, M_b, 2, M_\sigma, 2)$ 是两个提升基，它们均生成 (K_b, K_σ)，并且各自都满足假设 1 和假设 2。对于 $i \in \{1,2\}$，考虑 Gelfand 三元组 $\mathcal{V}_i \hookrightarrow \mathcal{H}_i \hookrightarrow \mathcal{V}_i^*$ 上与 $(\mu_i, M_{b,i}, M_{\sigma,i})$ 相关的随机演化方程 (1.2)，并分别将解在路径空间 Λ_i 上的路径分布、相应的马尔可夫半群及其不变概率测度记为 $\{P_i^{\nu_i}\}_{\nu_i \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)} \subset \mathcal{P}(\Lambda_i)$、$\{P_{i,t}\}_{t\geq 0}$ 和 $\pi_i \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)$。此外，令 $\mathbf{Q}_i^{\pi_i} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 和 $\widetilde{\mathbf{Q}}_i^{\pi_i} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 为分别按照备注 2.16 (ii) 和备注 3.11 构造的平稳分布。则有

$$\mathbf{Q}_1^{\pi_1} = \mathbf{Q}_2^{\pi_2} \quad \textit{in } \mathcal{P}\big(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)\big) \tag{3.13}$$

[6] 由 $\mathcal{B}(\mathcal{V}) = \{A \cap \mathcal{V} \mid A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和引理 A.3 可知，我们有 $\{\eta \in \Lambda \mid \eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_\ell} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{B}(\Lambda)$；更一般地，对于任意 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{V}^\ell) = \mathcal{B}(\mathcal{V})^{\otimes \ell}$，有 $\{\eta \in \Lambda \mid (\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_\ell}) \in A\} \in \mathcal{B}(\Lambda)$。然而请注意，对于任意 $t \geq 0\}$，集合 $\{\eta \in \Lambda \mid \eta_t \in \mathcal{V}$ 未必是 Λ 中的博雷尔集，因为对于每个 $\eta \in \Lambda$，$t \mapsto \eta_t$ 在 $\mathcal{V}$ 中不一定连续。

and

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_1^{\pi_1} = \widetilde{\mathbf{Q}}_2^{\pi_2} \quad \textit{in } \mathcal{P}\big((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}\big). \tag{3.14}$$

证明。由于 $(\mu_1,\ M_{b,\,1},\ M_{\sigma,\,1})$ 和 $(\mu_2,\ M_{b,\,2},\ M_{\sigma,\,2})$ 均生成相同的核 K_b 和 K_σ，根据拉普拉斯变换对博雷尔测度的刻画可知

$$M_{b,1}(\theta)\,\mu_1(\mathrm{d}\theta) = M_{b,2}(\theta)\,\mu_2(\mathrm{d}\theta) \quad \text{and} \quad M_{\sigma,1}(\theta)\,\mu_1(\mathrm{d}\theta) = M_{\sigma,2}(\theta)\,\mu_2(\mathrm{d}\theta).$$

此外，由于 $M_{\sigma,\,i}(\theta)$ 对 μ_i-几乎处处 $\theta \in [0,\infty)$ 根据假设 1 对每个 $i \in \{1,2\}$ 都是正定的，我们得知两个测度 μ_1 和 μ_2 等价。令 $\mu := \mu_1 + \mu_2$。显然，对于 $i \in \{1,2\}$，我们有 $0 < \frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\mu} < 1$ μ-几乎处处成立。定义

$$\overline{M}_b(\theta) := \frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\overline{\mu}}(\theta) M_{b,i}(\theta) \quad \text{and} \quad \overline{M}_\sigma(\theta) := \frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\overline{\mu}}(\theta) M_{\sigma,i}(\theta)$$

对每个 $\theta \in [0,\infty)$ 和 $i \in \{1,2\}$。注意，M_b 和 $\overline{M}_\sigma$ 与 $i \in \{1,2\}$ 无关。此外，(μ, M_b, M_σ) 构成定义 2.7 意义下的提升基，并满足假设 1 中的前两个条件。对于给定的映射 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$，考虑 Gelfand 三元组 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$ 上与 (μ, M_b, M_σ) 相关的随机演化方程 (1.2)，并记相应的马尔可夫半群在 $\mathcal{H}$ 上为 $\{P_t\}_{t\geq 0}$。对每个 $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$，记 $\mathbf{P}^\nu$ 为初始分布为 ν 的解的路径律，它是相应路径空间 Λ 上的一个概率测度。

设 $i \in \{1,2\}$ 固定。定义 $\Xi_i\colon\ \mathcal{V}_i^* \to \mathcal{V}^*$，由 $\Xi_i y_i\colon = \frac{\mathrm{d}\mu_i}{\mathrm{d}\mu}\, y_i$ 对每个 $y_i \in \mathcal{V}_i^*$ 给出。显然，该乘法算子 Ξ_i 属于 $L(\mathcal{V}_i^*, \mathcal{V}^*)$、$L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H})$ 和 $L(\mathcal{V}_i, \mathcal{V})$。此外，我们有

$$\mu_i[y_i] = \overline{\mu}[\Xi_i y_i] \quad \text{for any } y_i \in \mathcal{V}_i. \tag{3.15}$$

因此，对随机演化方程(1.2)对应于提升基$(\mu_i, M_{b,i}, M_{\sigma,i})$、给定初始分布 $\nu_i \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)$的每个解 $Y_i = (Y_{i,t})_{t\geq 0}$，过程$(\Xi_i Y_{i,t})_{t\geq 0}$ 是随机演化方程(1.2)对应于提升基(μ, M_b, M_σ)、初始分布为 $\nu_i \circ \Xi_i^{-1} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$的一个解。因此，我们有

$$\mathbf{P}_i^{\nu_i} \circ \Xi_i^{-1} = \overline{\mathbf{P}}^{\nu_i \circ \Xi_i^{-1}} \quad \text{in } \mathcal{P}\big(\overline{\Lambda}\big) \text{ for any } \nu_i \in \mathcal{P}\big(\mathcal{H}_i\big), \tag{3.16}$$

其中，略有记号滥用，我们仍用与之前相同的符号 Ξ_i 表示映射 $\Lambda_i \ni (\eta_{i,t})_{t\geq 0} \mapsto (\Xi_i \eta_{i,t})_{t\geq 0} \in \Lambda$。特别地，对任意 $\nu_i \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)$和 $t \geq 0$，在 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$中有$(P_{i,t}^* \nu_i) \circ \Xi_i^{-1} = P_t^*(\nu_i \circ \Xi_i^{-1})$。因此，对于关于马尔可夫半群 $\{P_{i,t}\}_{t\geq 0}$的不变概率测度 $\pi_i \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_i)$，我们有

$$\overline{P}_t^*\big(\pi_i \circ \Xi_i^{-1}\big) = (P_{i,t}^* \pi_i) \circ \Xi_i^{-1} = \pi_i \circ \Xi_i^{-1}$$

对于 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$，任意 $t \geq 0$。这表明 $\pi_i \circ \Xi_i^{-1} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 是马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$的不变概率测度。对于每个 $i \in \{1,2\}$，这一结论仍然成立。然而，由于提升基 $(\mu,\ M_b,\ M_\sigma)$ 和映射 b，σ 满足假设 1，定理 3.2 (iii) 表明，定义在$\{P_t\}_{t\geq 0}$ 上的马尔可夫半群 $\mathcal{H}$ 至多有一个不变概率测度。因此，必有

$$\pi_1 \circ \Xi_1^{-1} = \pi_2 \circ \Xi_2^{-1} \quad \text{in } \mathcal{P}\big(\overline{\mathcal{H}}\big). \tag{3.17}$$

注意，对于每个 $i \in \{1,2\}$，

$$\mathbf{Q}_i^{\pi_i} = \mathbf{P}_i^{\pi_i} \circ \mu_i[\cdot]^{-1} = \big(\mathbf{P}_i^{\pi_i} \circ \Xi_i^{-1}\big) \circ \overline{\mu}[\cdot]^{-1} = \overline{\mathbf{P}}^{\pi_i \circ \Xi_i^{-1}} \circ \overline{\mu}[\cdot]^{-1}$$

在 $\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 中，其中第一个等式正是概率测度 $\mathbf{Q}_i^{\pi_i} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 的定义，第二个等式由 (3.15) 得出，第三个等式则由 (3.16) 得出。由此再结合 (3.17)，即可得到所需的第一个等式 (3.13)。为证明第二个等式 (3.14)，任取 $t_1, \ldots, t_\ell \in [0,\infty)$ 和 $A_1, \ldots, A_\ell \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\ell \in \mathbb{N}$。固定 $i \in \{1,2\}$。定义 $B_i, C_i \in \mathcal{B}(\Lambda_i)$ 和 $B, C \in \mathcal{B}(\Lambda)$ 如下：

$$B_i := \{(\eta_{i,t})_{t\geq 0} \in \Lambda_i \mid \eta_{i,t_1}, \ldots, \eta_{i,t_\ell} \in \mathcal{V}_i\}, \quad C_i := \{(\eta_{i,t})_{t\geq 0} \in B_i \mid \mu_i[\eta_{i,t_1}] \in A_1, \ldots, \mu_i[\eta_{i,t_\ell}] \in A_\ell\},$$

$$\mathcal{B} := \{ (\eta_t)_{t\geq 0} \in \Lambda \mid \eta_{t_1}, \ldots, \eta_{t_\ell} \in \overline{\mathcal{V}} \}, \qquad C := \{ (\eta_t)_{t\geq 0} \in B \mid \mu[\eta_{t_1}] \in A_1, \ldots, \mu[\eta_{t_\ell}] \in A_\ell \}.$$

根据 (3.15)，我们可以看出 在 $C_i = B_i \cap (\Xi_i^{-1} C)$ 。此外，注意到备注 3.11，我们有 $\mathbf{P}_i^{\pi_i}(B_i) = 1$。因此，

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_i^{\pi_i} \left(\left\{ (\xi_t)_{t\geq 0} \in (\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)} \;\middle|\; \xi_{t_1} \in A_1, \ldots, \xi_{t_\ell} \in A_\ell \right\} \right) = \mathbf{P}_i^{\pi_i}(C_i) = \mathbf{P}_i^{\pi_i}\left(\Xi_i^{-1}\overline{C}\right) = \overline{\mathbf{P}}^{\pi_i \circ \Xi_i^{-1}}(\overline{C}),$$

其中，第一个等式源于概率测度 $\widetilde{\mathbf{Q}}_i^{\pi_i} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 的定义，第二个等式源于 $C_i = B_i \cap (\Xi_i^{-1} C)$ 和 $\mathbf{P}_i^{\pi_i}(B_i) = 1$，第三个等式则源于（ 3.16 ）。上述结果与（ 3.17 ）保证了 $\widetilde{\mathbf{Q}}_1^{\pi_1} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 和 $\widetilde{\mathbf{Q}}_2^{\pi_2} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 的所有有限维分布均相同，从而证明了所需的第二个等式（3.14）。证明完毕。 □

4 主要结果的证明

本节给出定理 3.2、定理 3.4 和命题 3.6的证明。技术上最具挑战性的部分是定理 3.2的证明，其中“范数变换”技巧和“广义耦合方法”发挥着关键作用；参见第 4.1节。“范数变换”技巧也用于构造定理3.4 和命题 3.6中的李雅普诺夫函数，详情见第4.2节。

4.1 定理 3.2的证明：压缩性、 d-小性与渐近对数 Harnack 不等式

正如文献 [12], 所示，为了构造一个满足文献 [29] 中广义 Harris 定理所要求条件的“良好”距离（类）函数 2.3）（见定理 ），一种易于处理的策略是考虑概率测度的广义耦合。我们沿用这一思路来证明定理 3.2。其中最重要且技术性最强的一点，是构造合适的可容许权函数和满足 [12]中所要求条件的广义耦合；见下文引理4.2 。

首先，我们给出以下标准引理，它将定理 3.2 的证明归结为考虑映射 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 有界的情形。

引理 4.1. 设 (μ, M_b, M_σ) 为一个提升基。假设 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 是满足 $|b(x)-b(x')| \leq C_{b,\mathrm{Lip}}|x-x'|$ 且 $|\sigma(x)-\sigma(x')| \leq C_{\sigma,\mathrm{Lip}}|x-x'|$ 的可测映射，其中对所有 $x, x' \in \mathbb{R}^n$，上述不等式均成立，且常数为 $C_{b,\mathrm{Lip}}, C_{\sigma,\mathrm{Lip}} > 0$。对每个 $N \in \mathbb{N}$，定义截断映射 $b^N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma^N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$，使得

$$b^N(x) := \begin{cases} b(x) & \text{if } |x| \leq N, \\ b\left(\dfrac{N}{|x|}x\right) & \text{if } |x| > N, \end{cases} \quad \text{and} \quad \sigma^N(x) := \begin{cases} \sigma(x) & \text{if } |x| \leq N, \\ \sigma\left(\dfrac{N}{|x|}x\right) & \text{if } |x| > N. \end{cases}$$

设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{P_t^N\}_{t\geq 0}$ 分别为与系数为 (b,σ) 和 (b^N,σ^N) 的随机微分方程 *(1.2)* 相关联的马尔可夫半群。那么，对任意 $t \geq 0$ 和任意 $y \in \mathcal{H}$，我们有 $\lim_{N\to\infty} P_t^N(y,\cdot) = P_t(y,\cdot)$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中弱收敛。

证明。 令 $N \in \mathbb{N}$ 固定。注意

$$|b^N(x) - b^N(x')| \leq C_{b,\mathrm{Lip}}|x-x'| \quad \text{and} \quad |\sigma^N(x) - \sigma^N(x')| \leq C_{\sigma,\mathrm{Lip}}|x-x'| \tag{4.1}$$

对所有 x， $x' \in \mathbb{R}^n$，以及

$$|b(x) - b^N(x)| \leq C_{b,\mathrm{Lip}}|x|\mathbb{1}_{\{|x|>N\}} \quad \text{and} \quad |\sigma(x) - \sigma^N(x)| \leq C_{\sigma,\mathrm{Lip}}|x|\mathbb{1}_{\{|x|>N\}} \tag{4.2}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$。固定任意一个 $y \in \mathcal{H}$。根据命题 2.15，在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上，由同一个 d 维布朗运动 W 驱动，系数分别为 (b,σ) 和 (b^N,σ^N) 的随机微分方程 (1.2) 存在唯一解 Y 和 Y^N，使得 $Y_0 = Y_0^N = y$。注意，对于任意 $t \geq 0$，$\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y_t) = P_t(y,\cdot)$，且 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y_t^N) = P_t^N(y,\cdot)$。此外，由 (2.15) 可得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \|Y_t\|_{\mathcal{H}}^2 + \|Y_t^N\|_{\mathcal{H}}^2 \right\} + \int_0^T \left\{ \|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2 + \|Y_t^N\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} \mathrm{d}t \right] < \infty \tag{4.3}$$

对于任意 $T>0$。

对平方范数应用引理 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ 2.19 中的伊藤公式 于 $\mathcal{H}$值过程 $Y-Y^N$，可得

$$\|Y_t-Y_t^N\|_{\mathcal{H}}^2=\int_0^t F^N\big(Y_s,Y_s^N\big)\,\mathrm{d}s+2\int_0^t\Big\langle Y_s-Y_s^N,\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma^N(\mu[Y_s^N])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle_{\mathcal{H}} \tag{4.4}$$

对任意 $t\geq 0$，几乎处处成立，其中函数 $F^N\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$F^N(y_1,y_2):=2\Big\langle\mathcal{A}(y_1-y_2)+\mathcal{M}_b\big(b(\mu[y_1])-b^N(\mu[y_2])\big),y_1-y_2\Big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}+\big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[y_1])-\sigma^N(\mu[y_2])\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2$$

对 y_1，$y_2\in\mathcal{V}$。与命题 2.15 的证明类似，由（4.1）、（4.2）和（2.13），结合引理 2.10、$\mathcal{M}_b\in L(\mathbb{R}^n;\mathcal{V}^*)$、$\mathcal{M}_\sigma\in L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$ 以及杨氏不等式可知，存在一个常数$C>0$，它仅依赖于提升基 (μ,M_b,M_σ) 以及常数 $C_{b,\mathrm{Lip}}$ 和 $C_{\sigma,\mathrm{Lip}}$，使得

$$F^N(y_1,y_2)\leq C\big\{\|y_1-y_2\|_{\mathcal{H}}^2+\big|\mu[y_1]\big|^2\mathbb{1}_{\{|\mu[y_1]|>N\}}\big\} \tag{4.5}$$

对任意 y_1，$y_2\in\mathcal{V}$。此外，由（4.1）、（4.2）和（4.3），以及 $\mathcal{M}_\sigma\in L(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$ 这一事实可知，右端（4.4）中的随机积分在 $\mathbb{P}$ 下是鞅。因此，对（4.4）两边取期望，应用（4.5）并使用格朗沃尔不等式，可得

$$\mathbb{E}\big[\|Y_t-Y_t^N\|_{\mathcal{H}}^2\big]\leq Ce^{Ct}\mathbb{E}\left[\int_0^t\big|\mu[Y_s]\big|^2\mathbb{1}_{\{|\mu[Y_s]|>N\}}\,\mathrm{d}s\right]$$

对任意 $t\geq 0$。由于 $\mu[\cdot]\in L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathbb{E}[\int_0^t\|Y_s\|_{\mathcal{V}}^2\mathrm{d}s]<\infty$，由控制收敛定理，上式右端在 $N\to\infty$ 时趋于零，从而对任意 $t\geq 0$ 有 $\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}[\|Y_t-Y_t^N\|_{\mathcal{H}}^2]=0$。这特别意味着，对任意 $t\geq 0$，$\lim_{N\to\infty}P_t^N(y,\cdot)=P_t(y,\cdot)$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中弱地收敛。至此证明完毕。

□

若 $b\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 与 $\sigma\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$ 满足假设 1 中的条件，则引理 4.1 中的截断映射$b^N\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 与 $\sigma^N\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$ 以相同的常数$C_{b,\mathrm{Lip}},C_{\sigma,\mathrm{Lip}}$ 和 C_{UE}满足同样的条件。此外，对每个可容许权函数 Φ，映射 $\mathbb{W}_{d_\Phi}\colon\mathcal{P}(\mathcal{H})\times\mathcal{P}(\mathcal{H})\to[0,1]$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上的一个度量，它生成弱收敛的拓扑。因此，在证明定理 3.2 时，我们可以不失一般性地假设系数 b与 σ 有界。关键在于构造一个可容许权函数 Φ，它仅依赖于提升基 (μ,M_b,M_σ) 以及常数 $C_{b,\mathrm{Lip}},C_{\sigma,\mathrm{Lip}}$ 和 C_{UE}，而与 b 和 σ 的具体界无关。

以下引理是定理3.2证明中最关键的一步。下文中，对于可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 上的两个概率测度 ν_1,ν_2，若 ν_1 关于 ν_2 绝对连续，则 $D_{\mathrm{KL}}(\nu_1\|\nu_2):=\int_E\log\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\nu_2}\,\mathrm{d}\nu_1$ 表示 Kullback–Leibler 散度，也称为相对熵。

引理 *4.2.* 假设提升基 (μ,M_b,M_σ) 和可测映射 $b\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$\sigma\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$ 满足假设 *1*。进一步假设映射 $\sigma\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$ 有界。那么，存在一个可容许权函数 $\Phi\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}$、一族 $\{(Y^{y_1,y_2}_t,\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t)\}_{t\geq0,\,y_1,y_2\in\mathcal{H}}$ 取值于 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 的随机变量 $(Y^{y_1,y_2}_t,\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t)$，定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上，以及一族 $\{\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,y_2}_t\}_{t\geq0,\,y_1,y_2\in\mathcal{H}}$ 概率测度，定义在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上，且满足 $\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,y_2}_t\sim\mathbb{P}$，使得对任意 $t\geq0$ 和 $y_1,y_2\in\mathcal{H}$，以下性质均成立：

$$\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y_t^{y_1,y_2})=P_t(y_1,\cdot), \tag{4.6}$$

$$\mathrm{Law}_{\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,y_2}_t}(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2})=P_t(y_2,\cdot), \tag{4.7}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\big\|Y_t^{y_1,y_2}-\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big\|_\Phi\Big]\leq e^{-\kappa t/2}\|y_1-y_2\|_\Phi, \tag{4.8}$$

$$D_{\mathrm{KL}}\big(\mathbb{P}\big\|\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,y_2}_t\big)\leq\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|_\Phi^2. \tag{4.9}$$

可容许权函数 Φ 可以选取为仅依赖于提升基 (μ,M_b,M_σ) 以及假设*1*中常数 $C_{b,\mathrm{Lip}}$，$C_{\sigma,\mathrm{Lip}}$和 C_{UE}。

备注 4.3. 在 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 上，随机变量对 $(Y^{y_1}_{\cdot,t}\ {}^{y_2}, \widehat{Y}^{y_1}_{\cdot,t}\ {}^{y_2})$ 在 $\mathbb{P}$ 下的联合分布可以视为两个概率测度 $P_t(y_1,\cdot)\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 和 $P_t(y_2,\cdot)\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 之间的广义耦合，因为尽管第一个边缘分布 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y^{y_1}_{\cdot,t}\ {}^{y_2})$ 与 $P_t(y_1,\cdot)$ 一致，第二个边缘分布 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(\widehat{Y}^{y_1}_{\cdot,t}\ {}^{y_2})$ 却未必与 $P_t(y_2,\cdot)$ 一致。相反，$\widehat{Y}^{y_1}_{\cdot,t}\ {}^{y_2}$ 应满足约束 (4.7)、(4.8) 和 (4.9)。我们将 $\widehat{Y}^{y_1}_{\cdot,t}\ {}^{y_2}$ 定义为受控随机演化方程的解（见下文 (4.10)），其中漂移项包含一个（有限维）控制过程。回顾一下，随机演化方程 (1.2) 是一个高度退化的无穷维系统。因此，为满足约束 (4.7)、(4.8) 和 (4.9)，我们必须通过有限维控制过程控制无穷维空间 $\mathcal{H}$ 中的动力学。对于具有退化噪声的一般无穷维模型而言，这是一个重大挑战，因此需要进行模型依赖分析。我们构造广义耦合的方法基于随机演化方程 (1.2) 的特定结构，其中对积分算子 $\mu[\cdot]\in L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)$（该算子在 $\mathcal{H}$ 中不连续）进行仔细处理至关重要。为处理 $\mu[\cdot]$ 的影响，我们采用基于定义 2.17 的“范数变换”技巧。一个关键思路是构造合适的可容许权函数 $\Phi_{\mathfrak{a}}$，使其依赖于控制参数 $\mathfrak{a}$，从而使算子 $\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[\cdot]$（见定义 2.17）在某种意义上逼近 $\mu[\cdot]$。

引理的证明 4.2。回顾 $\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$ 根据假设 1。固定一个常数元组 $\mathfrak{a}=(m,\ \delta,\ L,\ R)$，其分量为 $m,\ \delta,\ L,\ R>0$，这些常数将在后面确定。定义 $\Phi_{\mathfrak{a}}:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 如下

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta):=M_\sigma(\theta)^{-1}\mathbb{1}_{[\kappa,m)\cap A_L\cap B_R}(\theta)+\Big(\delta\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_\sigma(\theta)\Big)^{-1}\mathbb{1}_{([\kappa,m)\setminus A_L)\cap B_R}(\theta)\\+I_{n\times n}\mathbb{1}_{[\kappa,m)\setminus B_R}(\theta)+m^{1/2}\theta^{-1/2}I_{n\times n}\mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta)\end{aligned}$$

对于 $\theta\in[0,\infty)$，其中集合 $A_L,\ B_R\in\mathcal{B}([0,\infty))$ 定义如下

$$\begin{aligned}A_L&:=\Big\{\theta\in[0,\infty)\ \Big|\ M_\sigma(\theta)\in\mathbb{R}^{n\times n}\text{ is symmetric, positive definite and satisfies }\big|M_\sigma(\theta)^{-1}\big|_{\mathrm{op}}\le L\Big\},\\B_R&:=\Big\{\theta\in[0,\infty)\ \Big|\ M_\sigma(\theta)\in\mathbb{R}^{n\times n}\text{ is symmetric, positive definite and satisfies }\big|M_\sigma(\theta)\big|_{\mathrm{op}}\le R\Big\}.\end{aligned}$$

根据构造可知，$\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称、正定的，并且满足

$$\begin{aligned}\big|\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)\big|_{\mathrm{op}}&\le\max\{L,\delta^{-1}\kappa^{-1/2},1\}\mathbb{1}_{[\kappa,m)}(\theta)+m^{1/2}\theta^{-1/2}\mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta),\\\big|\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{-1}\big|_{\mathrm{op}}&\le\max\{\delta m^{1/2}+R,1\}\mathbb{1}_{[\kappa,m)}(\theta)+m^{-1/2}\theta^{1/2}\mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta),\end{aligned}$$

对任意 $\theta\ge\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$。因此，(2.32) 对 μ-几乎处处 $\theta\in[0,\infty)$ 成立，其中某个常数为 $C_{\Phi_{\mathfrak{a}}}>0$（可能依赖于 $\mathfrak{a}=(m,\ \delta,\ L,\ R)$），因此 $\Phi_{\mathfrak{a}}$ 是一个可容许权函数。

令 W 为定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 d 维布朗运动，其相对于满足通常条件的滤过 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$。在本证明中，我们用 $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示概率测度 $\mathbb{P}$ 下的期望。固定 $y_1,y_2\in\mathcal{H}$。令 $Y=Y^{y_1,y_2}=Y^{y_1}$ 为具有初始条件 $Y_0=y_1$ 的随机演化方程 (1.2) 的解。显然，关系式 (4.6) 成立。现在我们引入定义在与 Y 相同的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的下列受控随机演化方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\widehat{Y}_t(\theta)=-\theta\widehat{Y}_t(\theta)\,\mathrm{d}t+\Big\{M_b(\theta)b(\mu[\widehat{Y}_t])+\lambda_{\mathfrak{a}}M_\sigma(\theta)\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_t-\widehat{Y}_t\big]\Big\}\,\mathrm{d}t+M_\sigma(\theta)\sigma(\mu[\widehat{Y}_t])\,\mathrm{d}W_t\\\qquad\qquad t\ge0,\ \theta\in[0,\infty),\\\widehat{Y}_0(\theta)=y_2(\theta),\quad\theta\in[0,\infty),\end{cases}\tag{4.10}$$

其中，$\lambda_{\mathfrak{a}}>0$ 是一个依赖于 $\mathfrak{a}=(m,\delta,L,R)$ 的常数，稍后也将确定。这里，算子 $\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[\cdot]\in L(\mathcal{H};\mathbb{R}^n)$ 的定义与定义 2.17 中相同。与命题 2.15 的证明类似，将单调随机偏微分方程的一般结果 [47, 定理 4.2.4] 应用于受控随机演化方程 (4.10)，可知 (4.10) 存在唯一解 $\widehat{Y}=\widehat{Y}^{y_1,y_2}$（其定义方式与定义 2.13 相同）。此外，对于任意 $T>0$，有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\Big\{\|Y_t\|_{\mathcal{H}}^2+\|\widehat{Y}_t\|_{\mathcal{H}}^2\Big\}+\int_0^T\Big\{\|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2+\|\widehat{Y}_t\|_{\mathcal{V}}^2\Big\}\,\mathrm{d}t\right]<\infty.\tag{4.11}$$

对平方范数应用伊藤公式 $\|\cdot\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}$ 引理2.19 中所述的 $\mathcal{H}$值连续适应$\widehat{}$过程 $Y-Y$ 可得

$$\begin{aligned}\big\|Y_t-\widehat{Y}_t\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}&=\big\|y_1-y_2\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\int_0^t\Big\langle Y_s-\widehat{Y}_s,\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle_{\Phi_{\mathfrak{a}}}\\&\quad+\int_0^t\Big\{2\Big\langle\mathcal{A}\big(Y_s-\widehat{Y}_s\big)+\mathcal{M}_b\big(b(\mu[Y_s])-b(\mu[\widehat{Y}_s])\big)-\lambda_{\mathfrak{a}}\mathcal{M}_\sigma\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big],Y_s-\widehat{Y}_s\Big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Phi_{\mathfrak{a}}}\\&\qquad+\Big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Phi_{\mathfrak{a}}}))}\Big\}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

对于任意 $t\geq0$ 几乎处处。回顾定义2.17 以及公式（2.33）、（2.34）、（2.35）和（2.36），上式可改写为

$$\begin{aligned}&\big\|Y_t-\widehat{Y}_t\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\int_0^t\big|\!\big|\!\big|Y_s-\widehat{Y}_s\big|\!\big|\!\big|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}\,\mathrm{d}s+2\lambda_{\mathfrak{a}}\int_0^t\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big]\big|^2\,\mathrm{d}s\\&=\big\|y_1-y_2\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\int_0^t\Big\langle\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big],\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle\\&\quad+\int_0^t\Big\{2\Big\langle b(\mu[Y_s])-b(\mu[\widehat{Y}_s]),\mu_{b,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big]\Big\rangle+\mathrm{tr}\Big[\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)^\top Q_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\Big]\Big\}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

对于任意 $t\geq0$，几乎处处成立。将通常的伊藤公式应用于函数 $e^{\kappa t}$ 与实值半鞅 $\|Y_t-\widehat{Y}_t\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}$ 的乘积，可得

$$\begin{aligned}&e^{\kappa t}\big\|Y_t-\widehat{Y}_t\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\int_0^t e^{\kappa s}\big|\!\big|\!\big|Y_s-\widehat{Y}_s\big|\!\big|\!\big|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}\,\mathrm{d}s+2\lambda_{\mathfrak{a}}\int_0^t e^{\kappa s}\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big]\big|^2\,\mathrm{d}s\\&=\big\|y_1-y_2\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\int_0^t e^{\kappa s}\Big\langle\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big],\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle\\&\quad+\int_0^t e^{\kappa s}\Big\{\kappa\|Y_s-\widehat{Y}_s\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\Big\langle b(\mu[Y_s])-b(\mu[\widehat{Y}_s]),\mu_{b,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big]\Big\rangle\\&\qquad+\mathrm{tr}\Big[\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)^\top Q_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\Big]\Big\}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

对于任意 $t\geq0$ 几乎处处。由于 $\kappa=\inf\operatorname{supp}\mu$，我们有 $\kappa\|Y_s-\widehat{Y}_s\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}\leq\big|\!\big|\!\big|Y_s-\widehat{Y}_s\big|\!\big|\!\big|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}$。根据这一估计以及映射 $b\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$（见假设1），可得

$$\begin{aligned}&e^{\kappa t}\big\|Y_t-\widehat{Y}_t\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+\int_0^t e^{\kappa s}\big|\!\big|\!\big|Y_s-\widehat{Y}_s\big|\!\big|\!\big|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}\,\mathrm{d}s+2\lambda_{\mathfrak{a}}\int_0^t e^{\kappa s}\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big]\big|^2\,\mathrm{d}s\\&\leq\big\|y_1-y_2\big\|^2_{\Phi_{\mathfrak{a}}}+2\int_0^t e^{\kappa s}\Big\langle\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s-\widehat{Y}_s\big],\big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle+\int_0^t e^{\kappa s}F_{\mathfrak{a}}\big(Y_s-\widehat{Y}_s\big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{4.12}$$

对于任意 $t\geq0$，几乎处处成立，其中函数 $F_{\mathfrak{a}}\colon\ \mathcal{V}\to[0,\infty)$ 定义如下

$$F_{\mathfrak{a}}(y):=2C_{b,\mathrm{Lip}}\big|\mu[y]\big|\big|\mu_{b,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\big|+C^2_{\sigma,\mathrm{Lip}}\big|Q_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big|_{\mathrm{op}}\big|\mu[y]\big|^2,\quad y\in\mathcal{V}.$$

我们给出 $F_{\mathfrak{a}}(y)$ 关于 $\big|\!\big|\!\big|y\big|\!\big|\!\big|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}$ 和$|\mu_{\sigma,\ \Phi_{\mathfrak{a}}}[y]|$ 的估计，其中每个 $y\in\mathcal{V}$ 均成立。根据三角不等式，我们有

$$F_{\mathfrak{a}}(y)\leq2C_{b,\mathrm{Lip}}\Big\{\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\big|+\big|\overline{\mu}_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\big|\Big\}\big|\mu_{b,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\big|+2C^2_{\sigma,\mathrm{Lip}}\big|Q_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big|_{\mathrm{op}}\Big\{\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\big|^2+\big|\overline{\mu}_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\big|^2\Big\},\tag{4.13}$$

其中 $\mu_{\overline{\sigma},\Phi_{\mathfrak{a}}}[\cdot]\in L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\overline{\mu}_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]:=\mu[y]-\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]=\int_{[0,\infty)}\big(I_{n\times n}-M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)\big)y(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta),\quad y\in\mathcal{V}.$$

我们对三项 $|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]|$、$|\mu_{b,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]|$ 和 $|Q_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}|_{\mathrm{op}}$ 进行估计。首先，关于 $|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]|$，注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\left(I_{n\times n}-M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)\right)\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{-1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\\
&=\left|\left(I_{n\times n}-M_\sigma(\theta)\left(\delta\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_\sigma(\theta)\right)^{-1}\right)\left(\delta\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_\sigma(\theta)\right)^{1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{([\kappa,m)\setminus A_L)\cap B_R}(\theta)\\
&\quad+\left|I_{n\times n}-M_\sigma(\theta)\right|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{[\kappa,m)\setminus B_R}(\theta)+m^{-1/2}\theta^{1/2}\left|I_{n\times n}-m^{1/2}\theta^{-1/2}M_\sigma(\theta)\right|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta)\\
&\le\delta\theta^{1/2}\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)\setminus A_L}(\theta)+\left(1+|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)\setminus B_R}(\theta)+m^{-1/2}\theta^{1/2}\left(1+|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2\mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta)
\end{aligned}$$

对任意 $\theta\ge\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$，由此结合柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{\mu}_{\sigma,\ \Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\right|\\
&\le\left\{\int_{[\kappa,\infty)}\theta^{-1}\left|\left(I_{n\times n}-M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)\right)\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{-1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}^{1/2}\left\{\int_{[0,\infty)}\theta\left|\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}y(\theta)\right|^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}^{1/2}\\
&\le\alpha(m,\delta,L,R)^{1/2}|||y|||_{\Phi_{\mathfrak{a}}},
\end{aligned}\tag{4.14}$$

其中 $\alpha(m,\ \delta,\ L,\ R)\ge0$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
\alpha(m,\delta,L,R):=\delta\int_{[\kappa,\infty)\setminus A_L}\theta^{-1/2}\mu(\mathrm{d}\theta)+\int_{[\kappa,\infty)\setminus B_R}\theta^{-1}\left(1+|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2\mu(\mathrm{d}\theta)\\
+m^{-1/2}\int_{[m,\infty)}\theta^{-1/2}\left(1+|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2\mu(\mathrm{d}\theta).
\end{aligned}$$

根据 和 上的可积性条件（2.6）和（2.8），结合假设 $\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$，可知常数 $\alpha(m,\ \delta,\ L,\ R)$ 是有限的。接下来，关于 $|\mu_{b,\ \Phi_{\mathfrak{a}}}[y]|$，注意到

$$\begin{aligned}
&\left|M_b(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\\
&=\left|M_b(\theta)^\top M_\sigma(\theta)^{-1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{[\kappa,m)\cap A_L\cap B_R}(\theta)+\left|M_b(\theta)^\top\left(\delta\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_\sigma(\theta)\right)^{-1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{([\kappa,m)\setminus A_L)\cap B_R}(\theta)\\
&\quad+|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{[\kappa,m)\setminus B_R}(\theta)+m^{1/2}\theta^{-1/2}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta)\\
&\le\beta(m,\delta,L)\theta^{-1/2}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(\theta)
\end{aligned}$$

对任意 $\theta\ge\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$，其中常数 $\beta(m,\ \delta,\ L)>0$ 由下式给出

$$\beta(m,\delta,L):=\max\left\{Lm^{1/2},\delta^{-1},m^{1/2}\right\}.$$

因此，利用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
\left|\mu_{b,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\right|&\le\left\{\int_{[\kappa,\infty)}\theta^{-1}\left|M_b(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}\right|_{\mathrm{op}}^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}^{1/2}\left\{\int_{[0,\infty)}\theta\left|\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}y(\theta)\right|^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}^{1/2}\\
&\le\left\{\beta(m,\delta,L)\int_{[\kappa,\infty)}\theta^{-3/2}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}^{1/2}|||y|||_{\Phi_{\mathfrak{a}}}.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

类似地，关于 $|Q_{\sigma,\ \Phi_{\mathfrak{a}}}|_{\mathrm{op}}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)M_\sigma(\theta)\right|_{\mathrm{op}}\\
&=|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\mathbb{1}_{[\kappa,m)\cap A_L\cap B_R}(\theta)+\left|M_\sigma(\theta)\left(\delta\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_\sigma(\theta)\right)^{-1}M_\sigma(\theta)\right|_{\mathrm{op}}\mathbb{1}_{([\kappa,m)\setminus A_L)\cap B_R}(\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \mathbb{1}_{[\kappa,m)\setminus B_R}(\theta) + m^{1/2}\theta^{-1/2}|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \mathbb{1}_{[m,\infty)}(\theta) \\
&\le \beta(m,\delta,L)\theta^{-1/2}|M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(\theta)
\end{aligned}
$$

对于任意 $\theta \ge \kappa := \inf \operatorname{supp} \mu > 0$。因此，我们有

$$
\left|Q_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\right|_{\mathrm{op}} \le \beta(m,\delta,L) \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1/2} |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \, \mu(\mathrm{d}\theta). \tag{4.16}
$$

将（4.13）与（4.14）、（4.15）和（4.16）结合起来，并利用杨氏不等式，可得 t

$$
F_{\mathfrak{a}}(y) \le \left(\varepsilon(m,\delta,L,R) + \frac{1}{2}\right) |||y|||_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + C(m,\delta,L)\left|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[y]\right|^2 \tag{4.17}
$$

对任意 $y \in \mathcal{V}$，其中常数 $\varepsilon(m,\delta,L,R) \ge 0$ 和 $C(m,\delta,L) > 0$ 由.....给出 y

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(m,\delta,L,R) := 2C_{b,\mathrm{Lip}} &\left\{\alpha(m,\delta,L,R)\beta(m,\delta,L) \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-3/2} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \, \mu(\mathrm{d}\theta)\right\}^{1/2} \\
&+ 2C_{\sigma,\mathrm{Lip}}^2 \alpha(m,\delta,L,R)\beta(m,\delta,L) \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1/2} |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \, \mu(\mathrm{d}\theta)
\end{aligned}
$$

and

$$
C(m,\delta,L) := 2\beta(m,\delta,L)\left\{C_{b,\mathrm{Lip}}^2 \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-3/2} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \, \mu(\mathrm{d}\theta) + C_{\sigma,\mathrm{Lip}}^2 \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1/2} |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}^2 \, \mu(\mathrm{d}\theta)\right\}.
$$

根据 M_b 和 M_σ上的可积性条件（2.7）和（2.8），结合 $\kappa := \inf \operatorname{supp} \mu > 0$，表达式 $\varepsilon(m,\delta,L,R)$ 和 $C(m,\delta,L)$ 中出现的所有积分均有限。

通过选择合适的参数 $m,\delta,L,R > 0$，常数 $\varepsilon(m,\delta,L,R) \ge 0$ 可以任意小。事实上，注意到

$$
\begin{aligned}
\alpha(m,\delta,L,R)\beta(m,\delta,L) = \delta \max&\left\{Lm^{1/2}, \delta^{-1}, m^{1/2}\right\} \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_L} \theta^{-1/2} \, \mu(\mathrm{d}\theta) \\
&+ \max\left\{Lm^{1/2}, \delta^{-1}, m^{1/2}\right\} \int_{[\kappa,\infty)\setminus B_R} \theta^{-1}\left(1 + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2 \mu(\mathrm{d}\theta) \\
&+ m^{-1/2} \max\left\{Lm^{1/2}, \delta^{-1}, m^{1/2}\right\} \int_{[m,\infty)} \theta^{-1/2}\left(1 + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2 \mu(\mathrm{d}\theta).
\end{aligned}
$$

注意，根据假设 1，有 $\mu([\kappa,\infty) \setminus (\bigcup_{L>0} A_L)) = 0$ 以及 $\mu([\kappa,\infty) \setminus (\bigcup_{R>0} B_R)) = 0$。再次回顾 2.6）和（2.8）关于 μ 和 M_σ的可积性条件，以及假设 $\kappa := \inf \operatorname{supp} \mu > 0$，由控制收敛定理可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{L\to\infty} \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_L} \theta^{-1/2} \, \mu(\mathrm{d}\theta) = 0, \\
&\lim_{R\to\infty} \int_{[\kappa,\infty)\setminus B_R} \theta^{-1}\left(1 + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2 \mu(\mathrm{d}\theta) = 0, \quad \text{and} \\
&\lim_{m\to\infty} \int_{[m,\infty)} \theta^{-1/2}\left(1 + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2 \mu(\mathrm{d}\theta) = 0.
\end{aligned}
$$

根据 $m > 0$ 设置 $\delta = \delta_m > 0$ 和 $L = L_m > 0$，使得

$$
\delta_m := m^{-1/2}\left\{\int_{[m,\infty)} \theta^{-1/2}\left(1 + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\right)^2 \mu(\mathrm{d}\theta) + \frac{1}{m}\right\}^{1/2} \quad \text{and}
$$

$$L_m := \left\{ \int_{[m,\infty)} \theta^{-1/2} \big(1 + |M_\sigma(\theta)|_{\mathrm{op}}\big)^2 \, \mu(\mathrm{d}\theta) + \frac{1}{m} \right\}^{-1/2},$$

我们看到

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{R\to\infty} \alpha(m, \delta_m, L_m, R)\beta(m, \delta_m, L_m) = 0.$$

因此，我们有

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{R\to\infty} \varepsilon(m, \delta_m, L_m, R) = 0.$$

因此，存在常数 $m, \delta, L, R > 0$，使得 $\varepsilon(m, \delta, L, R) \le \frac{1}{2}$。固定这样一组参数$\mathfrak{a} = (m, \delta, L, R)$，并令 $\lambda_{\mathfrak{a}} = C(m, \delta, L) > 0$。于是，由 (4.12) 和 (4.17) 可得

$$\begin{aligned} & e^{\kappa t} \big\| Y_t - \widehat{Y}_t \big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + \lambda_{\mathfrak{a}} \int_0^t e^{\kappa s} \big| \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s - \widehat{Y}_s\big] \big|^2 \, \mathrm{d}s \\ & \le \big\| y_1 - y_2 \big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + 2 \int_0^t e^{\kappa s} \Big\langle \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s - \widehat{Y}_s\big], \big(\sigma(\mu[Y_s]) - \sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big) \, \mathrm{d}W_s \Big\rangle \end{aligned} \tag{4.18}$$

对任意 $t \ge 0$，几乎处处成立。我们强调，常数 $\lambda_{\mathfrak{a}} > 0$ 和可容许权函数 $\Phi_{\mathfrak{a}}$ 仅依赖于提升基 (μ, M_b, M_σ) 以及假设 1 中的常数 $C_{b,\mathrm{Lip}}, C_{\sigma,\mathrm{Lip}} > 0$。根据先验估计 (4.11)，再结合以下事实：$\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[\cdot] \in L(\mathcal{H}; \mathbb{R}^n)$ 且 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$，以及 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 的利普希茨连续性，(4.18) 右端的随机积分在概率测度 $\mathbb{P}$下是一个鞅。因此，对 (4.18) 两边关于 $\mathbb{P}$ 取期望，可得

$$\mathbb{E}\left[e^{\kappa t} \big\| Y_t - \widehat{Y}_t \big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + \lambda_{\mathfrak{a}} \int_0^t e^{\kappa s} \big| \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s - \widehat{Y}_s\big] \big|^2 \, \mathrm{d}s \right] \le \big\| y_1 - y_2 \big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 \tag{4.19}$$

对任意 $t \ge 0$。

对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，令 $\sigma(x)^\dagger \in \mathbb{R}^{d\times n}$ 为矩阵 $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 的伪逆。根据假设 1，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有 $\sigma(x)^\dagger = \sigma(x)^\top (\sigma(x)\sigma(x)^\top)^{-1}$, $\sigma(x)\sigma(x)^\dagger = I_{n\times n}$ 以及 $|\sigma(x)^\dagger|_{\mathrm{op}} \le C^{1/2}$ UE 。定义过程 $u = u^{y_1,y_2}$ 和 $\mathscr{E} = \mathscr{E}^{y_1,y_2}$ 如下:

$$u_t := \lambda_{\mathfrak{a}} \sigma(\mu[\widehat{Y}_t])^\dagger \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_t - \widehat{Y}_t\big], \quad t \ge 0,$$

and

$$\mathscr{E}_t := \exp\left(- \int_0^t \langle u_s, \mathrm{d}W_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |u_s|^2 \, \mathrm{d}s \right), \quad t \ge 0.$$

注意，u 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的渐进可测过程，且对于任意 $T > 0$，$\int_0^T |u_t|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立；此外，$\mathscr{E}$ 在概率测度 $\mathbb{P}$ 下是一个正局部鞅。现在我们证明随机指数 $\mathscr{E}$ 在概率测度 $\mathbb{P}$ 下是一个鞅。为此，只需证明 $\mathscr{E}$ 属于 (DL)类，也就是说，对于任意 $T > 0$，随机变量族 $\{\mathscr{E}_\tau \,|\, \tau \in \mathcal{T}_T\}$ 关于 $\mathbb{P}$一致可积，其中 $\mathcal{T}_T$ 表示所有满足 $\tau \le T$ 几乎处处成立的停时 τ 组成的集合。固定 $T > 0$ 和 $\tau \in \mathcal{T}_T$。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，定义

$$\tau_N := \tau \wedge \inf\left\{ t \in [0,T] \,\middle|\, \int_0^t \big| \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s - \widehat{Y}_s\big] \big|^2 \, \mathrm{d}s \ge N \right\}.$$

由于 $u\mathbb{1}_{[0,\tau_N]}$ 满足诺维科夫条件，停止过程 $\mathscr{E}_{\cdot\wedge\tau_N}$ 是一个 $\mathbb{P}$-鞅，因此，在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上由 $\mathrm{d}\mathbb{P}_{\tau_N}\mathrm{d}\mathbb{P} := \mathscr{E}_{\tau_N}$ 定义的测度 $\widehat{\mathbb{P}}_{\tau_N} \sim \mathbb{P}$ 是一个概率测度。根据吉尔саноф诺夫定理，过程

$$\widehat{W}_t^{\tau_N} := W_t + \int_0^{t\wedge\tau_N} u_s \, \mathrm{d}s, \quad t \in [0,T],$$

是一个布朗 $\widehat{}$相对于 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 在概率测度 $\mathbb{P}_{\tau_N}$下的运动。由 (4.18)，我们有 e

$$e^{\kappa(t\wedge\tau_N)} \big\| Y_{t\wedge\tau_N} - \widehat{Y}_{t\wedge\tau_N} \big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + \lambda_{\mathfrak{a}} \int_0^{t\wedge\tau_N} e^{\kappa s} \big| \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\big[Y_s - \widehat{Y}_s\big] \big|^2 \, \mathrm{d}s$$

$$\le \|y_1-y_2\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + 2\int_0^{t\wedge\tau_N} e^{\kappa s}\Big\langle \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s], \big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\,\mathrm{d}\widehat{W}_s^{\tau_N}\Big\rangle$$
$$- 2\lambda_{\mathfrak{a}}\int_0^{t\wedge\tau_N} e^{\kappa s}\Big\langle \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s], \big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])^{\dagger}\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s]\Big\rangle\,\mathrm{d}s$$

对任意 $t\in[0,T]$ $\mathbb{P}_{\tau_N}$-几乎处处成立。注意到 $\|\sigma\|_{\mathrm{op},\infty}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\sigma(x)|_{\mathrm{op}}<\infty$ 根据本引理中的（时间）假设，我们看到，上式右端出现的停止随机积分是在概率测度 $\mathbb{P}_{\tau_N}$ 下的鞅。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big\langle \mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s], \big(\sigma(\mu[Y_s])-\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\big)\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])^{\dagger}\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s]\Big\rangle\Big|\\
&\le 2\|\sigma\|_{\mathrm{op},\infty}C_{\mathrm{UE}}^{1/2}\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s]\big|^2\\
&\le 2\|\sigma\|_{\mathrm{op},\infty}C_{\mathrm{UE}}^{1/2}\int_{[0,\infty)}\big|M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}\big|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\|Y_s-\widehat{Y}_s\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2,
\end{aligned}$$

其中最后一步用到了柯西–施瓦茨不等式。注意到 $\int_{[0,\infty)}|M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)<\infty$，这由关于2.8）的可积性条件 M_σ 以及可容许权重2.32）的界函数 $\Phi_{\mathfrak{a}}$ 推出。因此，记 $\mathbb{E}_{\tau_N}[\cdot]$ 为关于 $\mathbb{P}_{\tau_N}$ 的期望，我们有

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}_{\tau_N}\Big[e^{\kappa(t\wedge\tau_N)}\|Y_{t\wedge\tau_N}-\widehat{Y}_{t\wedge\tau_N}\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2+\lambda_{\mathfrak{a}}\int_0^{t\wedge\tau_N}e^{\kappa s}\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_s-\widehat{Y}_s]\big|^2\,\mathrm{d}s\Big]\\
&\le \|y_1-y_2\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 + C\int_0^t\widehat{\mathbb{E}}_{\tau_N}\Big[e^{\kappa(s\wedge\tau_N)}\|Y_{s\wedge\tau_N}-\widehat{Y}_{s\wedge\tau_N}\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2\Big]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

对任意 $t\in[0,T]$，其中

$$C:=4\lambda_{\mathfrak{a}}\|\sigma\|_{\mathrm{op},\infty}C_{\mathrm{UE}}^{1/2}\int_{[0,\infty)}\big|M_\sigma(\theta)^\top\Phi_{\mathfrak{a}}(\theta)^{1/2}\big|_{\mathrm{op}}^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)<\infty.$$

由格朗沃尔不等式可得

$$\widehat{\mathbb{E}}_{\tau_N}\Big[e^{\kappa\tau_N}\|Y_{\tau_N}-\widehat{Y}_{\tau_N}\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2+\lambda_{\mathfrak{a}}\int_0^{\tau_N}e^{\kappa t}\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_t-\widehat{Y}_t]\big|^2\,\mathrm{d}t\Big]\le e^{CT}\|y_1-y_2\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2.$$

该估计给出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathscr{E}_{\tau_N}\log\mathscr{E}_{\tau_N}\big]&=\widehat{\mathbb{E}}_{\tau_N}\Big[-\int_0^{\tau_N}\langle u_t,\mathrm{d}\widehat{W}_t^{\tau_N}\rangle+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_N}|u_t|^2\,\mathrm{d}t\Big]\\
&\le\frac{C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}^2}{2}\widehat{\mathbb{E}}_{\tau_N}\Big[\int_0^{\tau_N}\big|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}[Y_t-\widehat{Y}_t]\big|^2\,\mathrm{d}t\Big]\\
&\le\frac{C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}}{2}e^{CT}\|y_1-y_2\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2.
\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$，并利用法图引理，可得

$$\mathbb{E}\big[\mathscr{E}_\tau\log\mathscr{E}_\tau\big]\le\frac{C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}}{2}e^{CT}\|y_1-y_2\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2.$$

该界对任意 $\tau\in\mathcal{T}_T$ 均成立，因此，在 $\mathbb{P}$ 下，族 $\{\mathscr{E}_\tau\,|\,\tau\in\mathcal{T}_T\}$ 一致可积。由于 $T>0$ 是任意的，我们看到局部鞅 $\mathscr{E}$ 属于 (DL)类。因此， $\mathscr{E}$ 在概率测度 $\mathbb{P}$ 下是鞅。

对每个 $t\ge0$，定义 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度 $\widehat{\mathbb{P}}_t=\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,\ y_2}\sim\mathbb{P}$，其定义为 $\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_t}{\mathrm{d}\mathbb{P}}:=\mathscr{E}_{t\wedge\cdot}$ 根据 $\mathbb{P}$，随机指数 $\mathscr{E}$ 具有鞅性质，这意味着 $\widehat{\mathbb{P}}_t$ 是一个概率测度。因此，根据吉尔саНоф定理，过程

$$\widehat{W}_s:=W_s+\int_0^s u_r\,\mathrm{d}r,\quad s\in[0,t],$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$相对于 $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,t]}$ 在 $\mathbb{P}_t$下是布朗运动。注意，过程 $(Y_s)_{s\in[0,t]}$ 满足以下由布朗运动 W驱动的随机演化方程$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，定义在 $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)$ 上：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widehat{Y}_s(\theta) = -\theta\widehat{Y}_s(\theta)\,\mathrm{d}s + M_b(\theta)b(\mu[\widehat{Y}_s])\,\mathrm{d}s + M_\sigma(\theta)\sigma(\mu[\widehat{Y}_s])\,\mathrm{d}\widehat{W}_s, \quad s\in[0,t],\ \theta\in[0,\infty), \\ \widehat{Y}_0(\theta) = y_2(\theta), \quad \theta\in[0,\infty). \end{cases}$$

因此，由随机演化方程（1.2）的依分布唯一性（该性质由路径唯一性以及适用于一般随机微分方程的 Yamada–$\widehat{\ }$ Watanabe 型结果保证（参见例如 [47, 附录 E]）），我们得到 $\mathrm{Law}^{\widehat{\mathbb{P}}_t}(Y_t) = P_t(y_2, \cdot)$，从而证明了（4.7）。此外，

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{KL}}\big(\mathbb{P}\big\|\widehat{\mathbb{P}}_t\big) &= \mathbb{E}\left[\log\frac{1}{\mathscr{E}_t}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t |u_s|^2\,\mathrm{d}s\right] \\ &\le \frac{C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\mu_{\sigma,\Phi_{\mathfrak{a}}}\left[Y_s - \widehat{Y}_s\right]\right|^2\mathrm{d}s\right] \\ &\le \frac{C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}}{2}\|y_1 - y_2\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由（4.19）得出。另一方面，再次应用（4.19）可得

$$\mathbb{E}\Big[\big\|Y_t - \widehat{Y}_t\big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}\Big] \le \mathbb{E}\Big[\big\|Y_t - \widehat{Y}_t\big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2\Big]^{1/2} \le e^{-\kappa t/2}\big\|y_1 - y_2\big\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}.$$

现在定义一个可容许权函数 $\Phi: [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 如下：$\Phi := C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}\Phi_{\mathfrak{a}}$，它仅依赖于提升基（$\mu$, M_b, M_σ）以及假设 1 中的常数$C_{b,\ \mathrm{Lip}}$, $C_{\sigma,\ \mathrm{Lip}}$和 $C_{\mathrm{UE}}C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}\|\cdot\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 = \|\cdot\|_{\Phi}^2$。注意到$C_{\mathrm{UE}}\lambda_{\mathfrak{a}}\|\cdot\|_{\Phi_{\mathfrak{a}}}^2 = \|\cdot\|_{\Phi}^2$，我们得到所需的估计（4.8）和（4.9）。证明完成。 □

现在我们可以证明定理 3.2。

定理 3.2 的证明。 根据引理 4.1 及其后续讨论，不失一般性，我们可以假设 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 有界。令 Φ, $\{(Y^{y_1,\ y_2}_{\cdot,\ t}, \widehat{Y}^{y_1,\ y_2}_{\cdot,\ t})\}_{t\ge0,\ y_1,\ y_2\in\mathcal{H}}$ 和 $\{\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\}_{t\ge0,\ y_1,\ y_2\in\mathcal{H}}$ 为引理 4.2 中构造的对象。注意，可容许权函数 Φ 仅依赖于提升基 (μ, M_b, M_σ) 以及常数 $C_{b,\ \mathrm{Lip}}$, $C_{\sigma,\ \mathrm{Lip}}$ 和 C_{UE}，而与 σ 的上界无关。

对每个 $t\ge0$ 和 $y_1, y_2\in\mathcal{H}$，由 (4.7)，我们有

$$d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big), P_t(y_2,\cdot)\big) = d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big), \mathrm{Law}_{\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}}\big(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big)\big) \le d_{\mathrm{TV}}\big(\mathbb{P}, \widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big). \tag{4.20}$$

然而，全变差距离的著名不等式（参见例如 [59, 引理 2.5 和公式 (2.25)]）给出

$$d_{\mathrm{TV}}\big(\mathbb{P}, \widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big) \le \sqrt{\frac{1}{2}D_{\mathrm{KL}}\big(\mathbb{P}\big\|\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big)}$$

and

$$d_{\mathrm{TV}}\big(\mathbb{P}, \widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big) \le 1 - \frac{1}{2}\exp\Big(-D_{\mathrm{KL}}\big(\mathbb{P}\big\|\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big)\Big).$$

将这些不等式应用于（4.20），并利用估计（4.9），可得

$$d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big), P_t(y_2,\cdot)\big) \le \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_{\Phi} \tag{4.21}$$

and

$$d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big), P_t(y_2,\cdot)\big) \le 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_{\Phi}^2\right) \tag{4.22}$$

对于任意 $t\ge0$ 和 $y_1, y_2\in\mathcal{H}$。断言 (i) 和 (ii) 现由 (4.6)、(4.8)、(4.21) 和 (4.22) 根据 [12,定理 2。4]为确保完备性，我们在下文给出其证明细节。

对于每个 $t \geq 0$ 和 $y_1,\ y_2 \in \mathcal{H}$，根据“耦合引理”（例如参见 [61, 定理 4.1]），存在一个 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 值随机变量 $(\mathscr{Y}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2},\ \widehat{\mathscr{Y}}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2})$，定义在概率空间 $(\Omega',\ \mathcal{F}',\ \mathbb{P}')$ 上，使得 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}'}(\mathscr{Y}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}) = \mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(\widehat{Y}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2})$，$\mathrm{Law}_{\mathbb{P}'}(\widehat{\mathscr{Y}}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}) = P_t(y_2,\ \cdot)$，并且

$$\mathbb{P}'\big(\widehat{\mathscr{Y}}^{y_1,y_2}_t \neq \mathscr{Y}^{y_1,y_2}_t\big) = d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big), P_t(y_2,\cdot)\big).$$

此外，根据“粘合引理”（例如，参见 [42, 引理 4.3.2]），我们可以在概率空间 $(\Omega'', \mathcal{F}'', \mathbb{P}'')$ 上构造一个取值于 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 的随机变量 $(\xi^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \eta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \zeta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2})$，使得 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}''}(\xi^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \eta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}) = \mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \widehat{Y}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2})$，且 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}''}(\eta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \zeta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}) = \mathrm{Law}_{\mathbb{P}'}(\widehat{\mathscr{Y}}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \mathscr{Y}^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2})$。注意，

$$\mathrm{Law}_{\mathbb{P}''}(\xi^{y_1,y_2}_t) = \mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y^{y_1,y_2}_t) = P_t(y_1,\cdot)$$

由（4.6），以及

$$\mathrm{Law}_{\mathbb{P}''}(\zeta^{y_1,y_2}_t) = \mathrm{Law}_{\mathbb{P}'}(\mathscr{Y}^{y_1,y_2}_t) = P_t(y_2,\cdot).$$

因此，联合分布 $\mathrm{Law}_{\mathbb{P}''}(\xi^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \zeta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})$ 是两个概率测度 $P_t(y_1,\cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 和 $P_t(y_2,\cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 之间的（真正的）耦合。此外，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}''}\big[\big\|\xi^{y_1,y_2}_t - \eta^{y_1,y_2}_t\big\|_\Phi\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\big\|Y^{y_1,y_2}_t - \widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big\|_\Phi\big]$$

and

$$\mathbb{P}''\big(\eta^{y_1,y_2}_t \neq \zeta^{y_1,y_2}_t\big) = \mathbb{P}'\big(\widehat{\mathscr{Y}}^{y_1,y_2}_t \neq \mathscr{Y}^{y_1,y_2}_t\big) = d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big), P_t(y_2,\cdot)\big).$$

回顾度量 $d_\Phi(y_1,y_2) := \|y_1 - y_2\|_\Phi \wedge 1$ 的定义，并利用 $(\xi^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \eta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2}, \zeta^{y_1}_{\cdot,t}{}^{y_2})$ 的上述性质，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_{d_\Phi}(P_t(y_1,\cdot), P_t(y_2,\cdot)) &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}''}\big[d_\Phi(\xi^{y_1,y_2}_t, \zeta^{y_1,y_2}_t)\big] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}''}\big[\big\|\xi^{y_1,y_2}_t - \eta^{y_1,y_2}_t\big\|_\Phi\big] + \mathbb{P}''\big(\eta^{y_1,y_2}_t \neq \zeta^{y_1,y_2}_t\big) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\big\|Y^{y_1,y_2}_t - \widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big\|_\Phi\big] + d_{\mathrm{TV}}\big(\mathrm{Law}_{\mathbb{P}}\big(\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big), P_t(y_2,\cdot)\big).
\end{aligned}$$

结合（4.8）与（4.21），这表明

$$\mathbb{W}_{d_\Phi}(P_t(y_1,\cdot), P_t(y_2,\cdot)) \leq \left(e^{-\kappa t/2} + \frac{1}{2}\right)\|y_1 - y_2\|_\Phi \tag{4.23}$$

对所有 $t \geq 0$ 以及所有 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$。此外，用（4.22）代替（4.21），我们得 ain

$$\mathbb{W}_{d_\Phi}(P_t(y_1,\cdot), P_t(y_2,\cdot)) \leq e^{-\kappa t/2}\|y_1 - y_2\|_\Phi + 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|^2_\Phi\right) \tag{4.24}$$

对所有 $t \geq 0$ 以及所有 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$。

一方面，若 $t \geq \frac{4}{\kappa}^2$ $d_\Phi\ y_1\ y_2\ < 1$ 4 23 $e^{-\kappa t/2}$ +log 且 (,), $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$ $\|y_1 - y_2\|_\Phi = d_\Phi\ y_1\ y_2$ 3 1 d_Φ 则估计 (.)与以及 (,) 相结合，得到 (.)。这表明距离函数对 P_t 是收缩的，从而确立了断言（i）。另一方面，对任意 $R > 0$，若 $t \geq \frac{4R^2+2}{\kappa}\log(8R)$ 且$y_1, y_2 \in B_\Phi(R) := \{y \in \mathcal{H} \mid \|y\|_\Phi \leq R\}$，则估计 (4.24) 连同 $\|y_1 - y_2\|_\Phi \leq 2R$ 且$e^{-\kappa t/2}2R + 1 - \frac{1}{2}e^{-2R^2} \leq 1 - \frac{1}{4}e^{-2R^2}$ 蕴含估计 (3.2)。这表明集合 $B_\Phi(R)$ 对 P_t 是d_Φ-小的，从而明了断言（ii）。

现在还需证明断言（iii）。令 $t \geq 0$和 $y_1,\ y_2 \in \mathcal{H}$ 固定，并令 $f\colon\ \mathcal{H} \to [1,\infty)$ 是一个满足 $\|\nabla_\Phi \log f\|_\infty < \infty$的有界 Borel 可测函数。由（4.6）以及 log f的利普希茨连续性，我们有

$$P_t \log f(y_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\log f(Y^{y_1,y_2}_t)\big] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\log f\big(\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big)\big] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\|Y^{y_1,y_2}_t - \widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\|_\Phi\big]\|\nabla_\Phi \log f\|_\infty$$

此外，由詹森不等式和（4.7），可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\log f\big(\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t\big)\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\log\left(\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,y_2}_t}{\mathrm{d}\mathbb{P}} f(\widehat{Y}^{y_1,y_2}_t)\right)\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\log\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}^{y_1,y_2}_t}\right]$$

$$\leq \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} f\big(\widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\big)\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}}\right]$$
$$= \log P_t f(y_2) + D_{\mathrm{KL}}\big(\mathbb{P}\big\|\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big).$$

因此，我们得到

$$P_t \log f(y_1) \leq \log P_t f(y_2) + D_{\mathrm{KL}}\big(\mathbb{P}\big\|\widehat{\mathbb{P}}_t^{y_1,y_2}\big) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\|Y_t - \widehat{Y}_t^{y_1,y_2}\|_\Phi\big]\|\nabla_\Phi \log f\|_\infty.$$

结合 (4.8) 和 (4.9)，该估计得出断言 (iii) 中所需的渐近对数 Harnack 不等式 (3.3)。最后，根据 [4, 定理 2.1], 渐近对数 Harnack 不等式保证，对于 $\{P_t\}_{t\geq 0}$，若不变概率测度存在，则必定唯一。证明完毕。 □

4.2 定理 3.4 和命题 3.6的证明：李雅普诺夫函数的构造

接下来，我们旨在为随机演化方程 (1.2) 构造一个李雅普诺夫函数。首先，我们在假设 2 中的抽象条件下证明定理 2。

定理 3.4 的证明。固定 $y \in \mathcal{H}$，并设 $(Y, W, \Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是随机演化方程 (1.2) 的一个弱解，其初始条件为 y; 本定理假设该方程依分布存在唯一性。注意，对于任意 $t \geq 0$, $P_t(y,\cdot) = \mathrm{Law}_{\mathbb{P}}(Y_t)$。令 $\Psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\delta \in (0,1)$, $\rho > 0$ 和 $C_{\mathrm{Lyap}} > 0$ 如假设 2 中所述。对引理 2.19 中平方的（等价）范数 $\|\cdot\|_\Psi^2$ 应用伊藤公式，并利用公式 (2.33) 、 (2.34) 、 (2.35) 和 (2.36)，我们得到

$$\begin{aligned}\|Y_t\|_\Psi^2 + 2\int_0^t |||Y_s|||_\Psi^2\,\mathrm{d}s = \|y\|_\Psi^2 + 2\int_0^t \left\{\big\langle b(\mu[Y_s]), \mu_{b,\Psi}[Y_s]\big\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[Y_s])^\top Q_{\sigma,\Psi}\sigma(\mu[Y_s])\big]\right\}\mathrm{d}s \\ + 2\int_0^t \big\langle \mu_{\sigma,\Psi}[Y_s], \sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s\big\rangle\end{aligned} \tag{4.25}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然。因此，由假设 3.4中的条件（2，可知

$$\|Y_t\|_\Psi^2 + 2\int_0^t \Big\{\rho\|Y_s\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||Y_s|||_\Psi^2\Big\}\mathrm{d}s \leq \|y\|_\Psi^2 + 2C_{\mathrm{Lyap}}t + 2\int_0^t \big\langle \mu_{\sigma,\Psi}[Y_s], \sigma(\mu[Y_s])\,\mathrm{d}W_s\big\rangle \tag{4.26}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然。我们强调，根据该假设， $\rho > 0$ 和 $1-\delta > 0$。对每个 $N \in \mathbb{N}$，定义停止时 τ_N 如下:

$$\tau_N := \inf\left\{t \geq 0 \,\middle|\, \int_0^t \big|\sigma(\mu[Y_s])^\top \mu_{\sigma,\Psi}[Y_s]\big|^2\,\mathrm{d}s \geq N\right\}.$$

注意到 $\lim_{N\to\infty}\tau_N = \infty$ 几乎必然。显然，等式（4.26）右侧的随机积分在τ_N 处停止后是一个鞅。因此，在等式（4.26）两边取期望，并将 t 替换为 $t\wedge\tau_N$，可得

$$\mathbb{E}\left[\|Y_{t\wedge\tau_N}\|_\Psi^2 + 2\int_0^{t\wedge\tau_N}\Big\{\rho\|Y_s\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||Y_s|||_\Psi^2\Big\}\mathrm{d}s\right] \leq \|y\|_\Psi^2 + 2C_{\mathrm{Lyap}}t.$$

令 $N\to\infty$ 趋于极限，并利用法图引理，可得

$$\mathbb{E}\left[\|Y_t\|_\Psi^2 + 2\int_0^t \Big\{\rho\|Y_s\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||Y_s|||_\Psi^2\Big\}\mathrm{d}s\right] \leq \|y\|_\Psi^2 + 2C_{\mathrm{Lyap}}t \tag{4.27}$$

对于任意 $t \geq 0$。另一方面，对 $e^{2\rho t}\|Y_t\|_\Psi^2$ 应用伊藤公式，并利用（4.25）、（3.4），再运用与上述类似的停止时论证，可得

$$\mathbb{E}\left[e^{2\rho t}\|Y_t\|_\Psi^2 + 2(1-\delta)\int_0^t e^{2\rho s}|||Y_s|||_\Psi^2\,\mathrm{d}s\right] \leq \|y\|_\Psi^2 + \frac{C_{\mathrm{Lyap}}(e^{2\rho t}-1)}{\rho} \tag{4.28}$$

对于任意 $t \geq 0$。

估计（4.28）特别意味着

$$\int_{\mathcal{H}} \|y'\|_{\Psi}^2 \, P_t(y, \mathrm{d}y') \leq e^{-2\rho t} \|y\|_{\Psi}^2 + \frac{C_{\mathrm{Lyap}}}{\rho}$$

对所有 $t \geq 0$ 和所有 $y \in \mathcal{H}$ 均成立。因此，函数 $V = \|\cdot\|_{\Psi}^2$ 是 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的李雅普诺夫函数。

定义下半连续函数 $U\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$，使得 $U(y)\colon = \rho\|y\|_{\Psi}^2 + (1-\delta)|||y|||_{\Psi}^2$ 对 $y \in \mathcal{H}$ 成立。对于每个 $t > 0$，定义概率核 $\nu_t\colon \mathcal{H} \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to [0,1]$，使得 $\nu_t(y, A)\colon = \frac{1}{t}\int_0^t P_s(y, A)\,\mathrm{d}s$ 对每个 $y \in \mathcal{H}$ 和 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 均成立；由于马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 满足可测性假设，该概率核定义良好。然后，由估计（4.27），我们有

$$\int_{\mathcal{H}} U(y') \, \nu_t(y, \mathrm{d}y') \leq \frac{\|y\|_{\Psi}^2}{2t} + C_{\mathrm{Lyap}} \tag{4.29}$$

对任意 $y \in \mathcal{H}$ 和 $t > 0$。假设给定一个不变概率测度 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H}$，对应于 $\{P_t\}_{t\geq 0}$。注意到 π 关于 ν_t 对任意 $t > 0$均为不变的。因此，利用估计式（4.29），对任意 $N \in \mathbb{N}$和 $t > 0$，有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}} \{U(y) \wedge N\} \, \pi(\mathrm{d}y) &= \int_{\mathcal{H}} \int_{\mathcal{H}} \{U(y') \wedge N\} \, \nu_t(y, \mathrm{d}y') \, \pi(\mathrm{d}y) \\
&\leq \int_{\mathcal{H}} \left\{ \int_{\mathcal{H}} U(y') \, \nu_t(y, \mathrm{d}y') \wedge N \right\} \pi(\mathrm{d}y) \\
&\leq \int_{\mathcal{H}} \left\{ \frac{\|y\|_{\Psi}^2}{2t} \wedge N \right\} \pi(\mathrm{d}y) + C_{\mathrm{Lyap}}.
\end{aligned}$$

控制收敛定理保证，上述最后一行中的积分在 $t \to \infty$ 时对每个固定的 $N \in \mathbb{N}$ 都趋于零。因此，先令 $t \to \infty$ 取极限，再令 $N \to \infty$，并应用单调收敛定理，可得 $\int_{\mathcal{H}} U(y)\ \pi(\mathrm{d}y) \leq C_{\mathrm{Lyap}}$。这表明估计式（3.5）成立。由于 $y \mapsto (\rho\|y\|_{\Psi}^2 + (1-\delta)|||y|||_{\Psi}^2)^{1/2}$ 在 $\mathcal{V}$ 上定义了一个与 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ 等价的范数，估计式（3.5）保证 $\pi(\mathcal{V}) = 1$，且 $\int_{\mathcal{V}} \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \, \pi(\mathrm{d}y) < \infty$。证明至此完成。 □

注 4.4. 由于映射 $y \mapsto (\rho\|y\|_{\Psi}^2 + (1-\delta)|||y|||_{\Psi}^2)^{1/2}$ 在 $\mathcal{V}$ 上定义了一个与 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$等价的范数，因此估计（4.29）结合马尔可夫不等式可推出

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t\geq 1} \nu_t\big(y, \mathcal{H} \setminus \overline{B}_{\mathcal{V}}(R)\big) = 0 \quad \text{for any } y \in \mathcal{H}, \tag{4.30}$$

其中 $\overline{B}_{\mathcal{V}}(R) := \{y \in \mathcal{V} \mid \|y\|_{\mathcal{V}} \leq R\}$。根据引理 A.1，若对每个 $m > 0$，supp $\mu \cap [0,m]$ 均为有限集，则嵌入 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ 是紧的，因此对于任意 $R > 0$，集合 $B_{\mathcal{V}}(R)$ 是 $\mathcal{H}$ 的紧子集。因此，在这种情况下，（4.30）意味着，对于任意 $y \in \mathcal{H}$，概率测度族 $\{\nu_t(y,\cdot)\}_{t\geq 1}$ 在 $\mathcal{H}$ 上是紧的；进而（假设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 满足 Feller 性质）Krylov–Bogoliubov 定理（参见例如 [15, 推论 11.8]）保证马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$存在一个不变概率测度 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$。然而，若某个 $m > 0$对应的 supp $\mu \cap [0,m]$ 是无限集（这是我们感兴趣的典型情形），则根据引理 A.1，嵌入 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ 不是紧的，因此（4.30）不再能推出 $\{\nu_t(y,\cdot)\}_{t\geq 1}$的紧性。在这种情况下，仅凭估计（4.29）不足以得出不变概率测度存在的结论。另请参见注 3.5 和注 A.2 中的讨论。

接下来，我们证明命题 3.6，它为假设2提供了一个可验证的充分条件。与引理 4.2 的证明一样，“范数变换”技巧在此起着关键作用。一个核心思路是构造一个可容许权函数 Ψ_m，使其依赖于参数 $m > 0$，从而使算子 $\mu_{b,\,\Psi_m}[\cdot]$ 以某种意义逼近随机演化方程（SEE）(1.2) 中出现的积分算子 $\mu[\cdot]$。这一策略与引理 4.2 证明中采用的方法相似：当时构造了可容许权函数 $\Phi_{\mathfrak{a}}$，通过算子 $\mu_{\sigma,\,\Phi_{\mathfrak{a}}}[\cdot]$ 来逼近 $\mu[\cdot]$。

命题 3.6 的证明。 假设提升基 $(\mu,\ M_b,\ M_\sigma)$ 和映射 $b\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 以及 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$ 满足命题 3.6中的条件。固定一个常数 $m>\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$，其取值稍后确定。定义

$$\Psi_m(\theta):=\Big(m^{-1}\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_b(\theta)\Big)^{-1}\mathbb{1}_{A_m}(\theta)+\theta^{-1/2}I_{n\times n}\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)\setminus A_m}(\theta),\quad \theta\in[0,\infty),$$

其中

$$A_m:=\{\theta\in[\kappa,m)\mid M_b(\theta)\text{ is symmetric, nonnegative definite and satisfies }|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\le m\}.$$

与引理 4.2 的证明类似，我们可以证明 $\Psi_m\colon\ [0,\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个可容许权函数。此外，我们定义一个有界线性算子 $\mu_{b,\Psi_m}[\cdot]:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^n$，其定义为

$$\overline{\mu}_{b,\Psi_m}[y]:=\mu[y]-\mu_{b,\Psi_m}[y]=\int_{[0,\infty)}\big(I_{n\times n}-M_b(\theta)^\top\Psi_m(\theta)\big)y(\theta)\,\mu(\mathrm{d}\theta)$$

对于 $y\in\mathcal{V}$。

固定 $y\in\mathcal{V}$。根据假设，我们有

$$\begin{aligned}
&\big\langle b(\mu[y]),\mu_{b,\Psi_m}[y]\big\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[y])^\top Q_{\sigma,\Psi_m}\sigma(\mu[y])\big]\\
&=\big\langle b(\mu[y]),\mu[y]\big\rangle-\big\langle b(\mu[y]),\overline{\mu}_{b,\Psi_m}[y]\big\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[y])^\top Q_{\sigma,\Psi_m}\sigma(\mu[y])\big]\\
&\le\gamma|\mu[y]|^2+C'_{b,\mathrm{LG}}+C_{b,\mathrm{LG}}\big(1+|\mu[y]|\big)\big|\overline{\mu}_{b,\Psi_m}[y]\big|+\frac{1}{2}C^2_{\sigma,\mathrm{subLG}}|Q_{\sigma,\Psi_m}|_{\mathrm{op}}\big(1+|\mu[y]|^p\big)^2.
\end{aligned}$$

由于 $p\in(0,1)$，杨氏不等式给出：对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，

$$\big\langle b(\mu[y]),\mu_{b,\Psi_m}[y]\big\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[y])^\top Q_{\sigma,\Psi_m}\sigma(\mu[y])\big]\le(\gamma+\varepsilon)|\mu[y]|^2+\frac{C^2_{b,\mathrm{LG}}}{\varepsilon}\big|\overline{\mu}_{b,\Psi_m}[y]\big|^2+C_{m,\varepsilon},\tag{4.31}$$

其中 $C_{m,\varepsilon}>0$ 是一个仅依赖于 $|Q_{\sigma,\Psi_m}|_{\mathrm{op}}$, ε, $C'_{b,\mathrm{LG}}$, $C_{\sigma,\mathrm{subLG}}$ 和 p 的常数。现在我们用 $|||y|||^2_{\Psi_m}$ 来估计 $|\mu[y]|^2$ 和 $|\mu_{b,\Psi_m}[y]|^2$。首先，回顾假设 $\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$，柯西–施瓦茨不等式以及可容许权函数 Ψ_m 的定义可得

$$\begin{aligned}
|\mu[y]|^2&\le\left\{\int_{[\kappa,\infty)}\theta^{-1}\big|\Psi_m(\theta)^{-1/2}\big|^2_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}\left\{\int_{[0,\infty)}\theta\big|\Psi_m(\theta)^{1/2}y(\theta)\big|^2\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}\\
&=\left\{m^{-1}\int_{A_m}\theta^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)+\int_{A_m}\theta^{-1}|M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\,\mu(\mathrm{d}\theta)+\int_{[\kappa,\infty)\setminus A_m}\theta^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\right\}|||y|||^2_{\Psi_m}.
\end{aligned}\tag{4.32}$$

其次，注意到

$$\begin{aligned}
&\Big|\big(I_{n\times n}-M_b(\theta)^\top\Psi_m(\theta)\big)\Psi_m(\theta)^{-1/2}\Big|^2_{\mathrm{op}}\\
&=\left|\left(I_{n\times n}-M_b(\theta)\left(m^{-1}\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_b(\theta)\right)^{-1}\right)\left(m^{-1}\theta^{1/2}I_{n\times n}+M_b(\theta)\right)^{1/2}\right|^2_{\mathrm{op}}\mathbb{1}_{A_m}(\theta)\\
&\qquad+\theta^{1/2}\big|I_{n\times n}-\theta^{-1/2}M_b(\theta)\big|^2_{\mathrm{op}}\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)\setminus A_m}(\theta)\\
&\le m^{-1}\theta^{1/2}\mathbb{1}_{A_m}(\theta)+2\theta^{1/2}\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)\setminus A_m}(\theta)+2\theta^{-1/2}|M_b(\theta)|^2_{\mathrm{op}}\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)\setminus A_m}(\theta)
\end{aligned}$$

对于任意 $\theta\ge\kappa:=\inf\operatorname{supp}\mu>0$，我们有

$$\big|\overline{\mu}_{b,\Psi_m}[y]\big|^2$$

$$\leq \left\{ \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1} \left| \big(I_{n\times n} - M_b(\theta)^\top \Psi_m(\theta)\big) \Psi_m(\theta)^{-1/2} \right|_{\mathrm{op}}^2 \mu(\mathrm{d}\theta) \right\} \left\{ \int_{[0,\infty)} \theta \left| \Psi_m(\theta)^{1/2} y(\theta) \right|^2 \mu(\mathrm{d}\theta) \right\}$$

$$\leq \left\{ m^{-1} \int_{A_m} \theta^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) + 2 \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_m} \theta^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) + 2 \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_m} \theta^{-3/2} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}^2\, \mu(\mathrm{d}\theta) \right\} |||y|||_{\Psi_m}^2. \quad (4.33)$$

结合（4.31）、（4.32）和（4.33），我们得到

$$\big\langle b(\mu[y]), \mu_{b,\Psi_m}[y] \big\rangle + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[y])^\top Q_{\sigma,\Psi_m} \sigma(\mu[y])\big] \leq \delta_{m,\varepsilon} |||y|||_{\Psi_m}^2 + C_{m,\varepsilon},$$

其中常数 $\delta_{m,\varepsilon} > 0$ 定义为

$$\delta_{m,\varepsilon} := (\gamma + \varepsilon) \left\{ m^{-1} \int_{A_m} \theta^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) + \int_{A_m} \theta^{-1} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\, \mu(\mathrm{d}\theta) + \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_m} \theta^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) \right\}$$
$$+ \frac{C_{b,\mathrm{LG}}^2}{\varepsilon} \left\{ m^{-1} \int_{A_m} \theta^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) + 2 \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_m} \theta^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) + 2 \int_{[\kappa,\infty)\setminus A_m} \theta^{-3/2} |M_b(\theta)|^2\, \mu(\mathrm{d}\theta) \right\}.$$

由 μ 和 M_b满足的可积性条件（2.6）和（2.7），以及假设 $\kappa := \inf \operatorname{supp} \mu > 0$，可知定义 $\delta_{m,\varepsilon}$ 中出现的所有积分均有限。此外，根据假设，我们有$\gamma \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\, \mu(\mathrm{d}\theta) < 1$ 和 $\mu([\kappa,\infty) \setminus \bigcup_{m>\kappa} A_m) = 0$。因此，由控制收敛定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{m\to\infty} \delta_{m,\varepsilon} = \gamma \int_{[\kappa,\infty)} \theta^{-1} |M_b(\theta)|_{\mathrm{op}}\, \mu(\mathrm{d}\theta) < 1.$$

因此，我们可以取充分小的 $\varepsilon \in (0,1)$ 和充分大的 $m \in (\kappa,\infty)$，使得 $\delta_{m,\varepsilon} < 1$。最后，注意到 $|||y|||_{\Psi_m}^2 \geq \kappa \|y\|_{\Psi_m}^2$ 且 $\kappa := \inf \operatorname{supp} \mu > 0$，我们有

$$\big\langle b(\mu[y]), \mu_{b,\Psi_m}[y] \big\rangle + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\big[\sigma(\mu[y])^\top Q_{\sigma,\Psi_m} \sigma(\mu[y])\big] \leq \frac{1+\delta_{m,\varepsilon}}{2} |||y|||_{\Psi_m}^2 - \frac{\kappa(1-\delta_{m,\varepsilon})}{2} \|y\|_{\Psi_m}^2 + C_{m,\varepsilon}.$$

这表明，可容许权函数 $\Psi = \Psi_m$ 以及常数 $\delta = 1+\delta_{m,2}$ $^{\varepsilon} \in (0,1)$、$\rho = {}^{\kappa}(1-\delta_{m,2}$ $^{\varepsilon} > 0)$ 和 $C_{\mathrm{Lyap}} = C_{m,}$ $_{\varepsilon} > 0$满足假设 2 。证明至此完成。 □

5 不变概率测度的有限维近似

本节将通过与之对应的（有限维）随机微分方程，建立与（无限维）随机演化方程（ $\pi \in \mathcal{P}$（$\mathcal{H}$）相关的不变概率测度和$\mathbf{P}^\pi \in \mathcal{P}$（$\Lambda$）平稳分布的近似结果。特别是，这里给出的结果拓展了以往关于随机 Volterra 方程马尔可夫近似的研究，例如 [1, 3, 5]。此外，正如引言中所述，我们的方法提供了一个严格的数学框架，为统计物理中广泛使用的马尔可夫嵌入类程序的有效性提供支持。

设 (μ, M_b, M_σ) 为一个提升基。我们引入一个有限族序列 $\{(\Delta_k, a_k, M_{b,k}, M_{\sigma,k})\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中每个 $k \in \mathbb{N}$ 对应一个有限族 $(\Delta_k, a_k, M_{b,k}, M_{\sigma,k}) = \{(\Delta_k^{(i)}, a_k^{(i)}, M_{b\,k}^{(i)}, , M(i)_{\sigma,k})\}_{i=1}^{I_k}$，其中

$$\big(\Delta_k^{(i)}, a_k^{(i)}, M_{b,k}^{(i)}, M_{\sigma,k}^{(i)}\big) \in \mathcal{B}([0,\infty)) \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$$

对于满足以下条件的 $i \in \{1,\ldots,I_k\}$（其中 $I_k \in \mathbb{N}$）：

- For each $k \in \mathbb{N}$ and $i \in \{1,\ldots,I_k\}$, the set $\Delta_k^{(i)} \in \mathcal{B}([0,\infty))$ is bounded and satisfies $\mu(\Delta_k^{(i)}) > 0$.

- 对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $i,\ j \in \{1,\dots,I_k\}$，其中 $i \neq j$，有 $\Delta_k^{(i)} \cap \Delta_k^{(j)} = \emptyset$。
- 设定

$$\varepsilon_k := \max_{i\in\{1,\dots,I_k\}} \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\theta\in\Delta_k^{(i)}} \frac{|\theta - a_k^{(i)}|}{1+\theta} + \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-3/2} \left| M_b(\theta) - \sum_{i=1}^{I_k} M_{b,k}^{(i)} \mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}}(\theta) \right|_{\mathrm{op}}^2 \mu(\mathrm{d}\theta) \right)^{1/2} + \left(\int_{[0,\infty)} (1+\theta)^{-1/2} \left| M_\sigma(\theta) - \sum_{i=1}^{I_k} M_{\sigma,k}^{(i)} \mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}}(\theta) \right|_{\mathrm{op}}^2 \mu(\mathrm{d}\theta) \right)^{1/2}, \tag{5.1}$$

  成立：$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$。

注意到，和满足可积性条件（2.7）和（2.8），这样的序列总是存在的，并且可以通过用简单函数逼近 L^2-函数的标准论证轻松构造。我们将满足上述条件的序列 $\{(\Delta_k, a_k, M_{b,k}, M_{\sigma,k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 称为提升基（μ, M_b, M_σ）的逼近分量 。

设给定可测映射 $b\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$。令 W 为定义在完备概率空间（$\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P}$）上的 d维布朗运动，其相对于满足通常条件的滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$定义。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，考虑定义在（$\mathbb{R}^n$）^{I_k} 上的以下有限维随机微分方程，其中 $Z_k = (Z_{k,t})_{t\geq 0} = ((Z_{k\ t}^{(i)})_{i=1}^{I_k})_{t\geq 0}$是一个伊藤过程：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_{k,t}^{(i)} = -a_k^{(i)} Z_{k,t}^{(i)}\,\mathrm{d}t + M_{b,k}^{(i)}\, b\left(\sum_{j=1}^{I_k} \mu\big(\Delta_k^{(j)}\big) Z_{k,t}^{(j)} \right) \mathrm{d}t + M_{\sigma,k}^{(i)}\, \sigma\left(\sum_{j=1}^{I_k} \mu\big(\Delta_k^{(j)}\big) Z_{k,t}^{(j)} \right) \mathrm{d}W_t, \\ t \geq 0,\ i \in \{1,\dots,I_k\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

如果系数 $b\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 是利普希茨连续的，则上述随机微分方程是强适定的，且其解在 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上构成一个时间齐次马尔可夫过程。

备注 5.1。 对过程 $e^{a_k^{(i)} t} Z_{k\ t}^{(i)}$ 应用伊藤公式, 对于每个 $i \in \{1,\dots,I_k\}$，我们看到随机微分方程（5.2）的解 Z_k 满足

$$Z_{k,t}^{(i)} = e^{-a_k^{(i)} t} Z_{k,0}^{(i)} + \int_0^t e^{-a_k^{(i)}(t-s)} M_{b,k}^{(i)}\, b(X_{k,s})\,\mathrm{d}s + \int_0^t e^{-a_k^{(i)}(t-s)} M_{\sigma,k}^{(i)}\, \sigma(X_{k,s})\,\mathrm{d}W_s$$

对于 $t \geq 0$ 和 $i \in \{1,\dots,I_k\}$，其中 $X_{k,\ t} := \sum_{i=1}^{I_k} \mu(\Delta_k^{(i)}) Z_{k\ t}^{(i)}$，。两边同乘以 $\mu(\Delta_k^{(i)})$ 并对 $i \in \{1,\dots,I_k\}$ 求和，可得取值于 $\mathbb{R}^n$ 的渐进可测（且连续）过程$X_k = (X_{k,\ t})_{t\geq 0}$ 满足以下随机 Volterra 方程：

$$X_{k,t} = x_k(t) + \int_0^t K_{b,k}(t-s) b(X_{k,s})\,\mathrm{d}s + \int_0^t K_{\sigma,k}(t-s)\sigma(X_{k,s})\,\mathrm{d}W_s, \quad t \geq 0, \tag{5.3}$$

其中

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{I_k} e^{-a_k^{(i)} t} \mu\big(\Delta_k^{(i)}\big) Z_{k,0}^{(i)}, \quad K_{b,k}(t) = \sum_{i=1}^{I_k} e^{-a_k^{(i)} t} \mu\big(\Delta_k^{(i)}\big) M_{b,k}^{(i)}, \quad K_{\sigma,k}(t) = \sum_{i=1}^{I_k} e^{-a_k^{(i)} t} \mu\big(\Delta_k^{(i)}\big) M_{\sigma,k}^{(i)},$$

对于 $t \geq 0$。注意，强迫项 x_k 和核$K_{b,\ k}$ 以及$K_{\sigma,\ k}$ 均属于例2.9 (i)中所示的（有限）指数和型。

对于每个 $\nu_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$，我们将 $\mathbf{P}_k^{\nu_k} \in \mathcal{P}(C([0,\infty); (\mathbb{R}^n)^{I_k}))$ 记为具有初始分布 $Z_k = (Z_{k,t})_{t\geq 0}$的近似随机微分方程（5.2）的解 ν_k的分布，其中 $C([0,\infty); (\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 是以下函数所构成的波兰空间：

$(\mathbb{R}^n)^{I_k}$值连续函数的空间 $[0,\infty)$，其配备了由（2.1）定义的完备度量。相应的马尔可夫半群 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$ 在 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上定义如下：

$$P_{k,t}(z_k, A_k) := \mathbf{P}_k^{\delta_{z_k}}\left(\{\zeta_k \in C([0,\infty);(\mathbb{R}^n)^{I_k}) \mid \zeta_{k,t} \in A_k\}\right)$$

对于 $z_k \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$、 $A_k \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 和 $t \geq 0$。

本节旨在说明，对于马尔可夫半群 $\pi_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$，其不变概率测度 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$ 在适当意义下“收敛”于与随机演化方程（1.2）相关的马尔可夫半群 $(\mathcal{H})$ 的不变概率测度 $\pi \in \mathcal{P}$。除了不变概率测度的收敛性，我们还研究有限维随机微分方程（5.2）的平稳分布 $\mathbf{P}_k^{\pi_k} \in \mathcal{P}(C([0,\infty);(\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 如何“收敛”到随机演化方程（1.2）的极限平稳分布 $\mathbf{P}^{\pi} \in \mathcal{P}(\Lambda)$。更精确的表述见下文定理 5.3 。

由于随机演化方程（1.2）和近似随机微分方程（5.2）定义在不同的状态空间上，为了比较它们的解，我们必须以适当的方式将有限维空间 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 嵌入 $\mathcal{H}$ 。为此，对每个 $k \in \mathbb{N}$，引入有界线性算子 $\Upsilon_k : (\mathbb{R}^n)^{I_k} \to \mathcal{V}$ 如下：

$$(\Upsilon_k z_k)(\theta) := \sum_{i=1}^{I_k} z_k^{(i)} \mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}}(\theta), \quad \theta \in [0,\infty),$$

对于 $z_k = (z_k^{(i)})_{i=1}^{I_k} \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$。注意，

$$\left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{i=1}^{I_k} \int_{\Delta_k^{(i)}} (1+\theta)^{-1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) \left|z_k^{(i)}\right|^2\right)^{1/2} \quad \text{and} \quad \left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{V}} = \left(\sum_{i=1}^{I_k} \int_{\Delta_k^{(i)}} (1+\theta)^{1/2}\, \mu(\mathrm{d}\theta) \left|z_k^{(i)}\right|^2\right)^{1/2}$$

对于每个 $z_k = (z_k^{(i)})_{i=1}^{I_k} \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$。映射 $z_k \mapsto \|\Upsilon_k z_k\|_{\mathcal{H}}$ 和 $z_k \mapsto \|\Upsilon_k z_k\|_{\mathcal{V}}$ 在有限维空间 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$上定义了（等价的）范数，因为每个 $\Delta_k^{(i)}$ 都有界且满足 $\mu(\Delta_k^{(i)}) > 0$。

引理 5.2。 给定一个提升基 (μ, M_b, M_σ) 及其逼近分量 $\{(\Delta_k, a_k, M_{b,k}, M_{\sigma,k})\}_{k\in\mathbb{N}}$。假设 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ 均为利普希茨连续。

(i) 假设给定一个定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的 d 维布朗运动 W ，其滤过为 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$，并满足通常条件。那么，对于任意$k \in \mathbb{N}$ 以及任意 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 值的 $\mathcal{F}_0$-可测随机变量 $Z_{k,0}$，随机微分方程 (5.2) 都有唯一解$Z_k = (Z_{k,t})_{t\geq 0}$ ，且其初始条件为 $Z_{k,0}$。该解构成 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上的时间齐次马尔可夫过程，其马尔可夫半群 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$ 是随机连续的，并具有 *Feller* 性质。

(ii) 存在一个常数 $C_0 > 0$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，随机微分方程(5.2) $Z_k = (Z_{k,t})_{t\geq 0}$ 的任意解，以及随机演化方程(1.2) $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ 的任意解，由同一个 d维布朗运动W 驱动，并定义在完备概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上，则有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\|\Upsilon_k Z_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \left\|\Upsilon_k Z_{k,t}\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq C_0 e^{C_0 T}\left(1 + \left\|\Upsilon_k Z_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right) \tag{5.4}$$

and

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\|Y_t - \Upsilon_k Z_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \left\|Y_t - \Upsilon_k Z_{k,t}\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \\ &\leq C_0 e^{C_0 T}\left\|Y_0 - \Upsilon_k Z_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + C_0 e^{C_0 T} \varepsilon_k^2 \left(1 + \left\|\Upsilon_k Z_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right),\end{aligned} \tag{5.5}$$

对任意 $T > 0$ 几乎必然成立，其中 $\varepsilon_k > 0$ 是 (5.1) 中所定义的常数。

(iii) 若假设 2 进一步成立，则存在自然数 k_0，使得对于每一个 $k \in \mathbb{N}$（满足$k \geq k_0$），马尔可夫半群 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$（与随机微分方程 (5.2) 相关联）至少具有一个不变概率测度 $\pi_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$。此外，有

$$\sup_{k\geq k_0}\sup_{\pi_k\in\Pi_k}\int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}}\left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{V}}^2\pi_k(\mathrm{d}z_k)<\infty, \tag{5.6}$$

其中 $\Pi_k \subset \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 表示 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$ 的所有不变概率测度构成的（非空）集合。

证明。对每个 $k \in \mathbb{N}$，由于定义在 (5.2) 上的随机微分方程的系数 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 是利普希茨连续的，断言~(i) 可由有限维随机微分方程的标准结果推出。此外，存在一个常数 $C_k > 0$（可能依赖于 $k \in \mathbb{N}$），使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_{k,t}\right|^2\,\middle|\,\mathcal{F}_0\right]\leq\widetilde{C}_k e^{\widetilde{C}_k T}\left(1+\left|Z_{k,0}\right|^2\right)<\infty \tag{5.7}$$

对任意 $T > 0$，几乎必然成立。这里，$|\cdot|$ 表示 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上的标准欧几里得范数。

为证明断言 (ii) 和 (iii)，我们引入一些额外记号，供本证明中使用。对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{V}_k := \{\Upsilon_k z_k \,|\, z_k \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}\}$。注意 $\mathcal{V}_k \subset \mathcal{V}$。此外，对任意满足 $z_k = (z_k^{(i)})_{i=1}^{I_k} \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 的 $y_k = \Upsilon_k z_k \in \mathcal{V}_k$，我们有

$$\mu[y_k] = \mu\big[\Upsilon_k z_k\big] = \sum_{i=1}^{I_k}\mu\big(\Delta_k^{(i)}\big)z_k^{(i)}.$$

我们定义 $\mathcal{A}_k\colon\ \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_k$ 以及 $\mathcal{M}_{b,\,k}$，$\mathcal{M}_{\sigma,\,k}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}_k$ 为

$$\mathcal{A}_k y_k := -\sum_{i=1}^{I_k} a_k^{(i)} z_k^{(i)} \mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}}$$

对于 $y_k = \Upsilon_k z_k$，满足 $z_k = (z_k^{(i)})_{i=1}^{I_k} \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$，且

$$\mathcal{M}_{b,k}x := \sum_{i=1}^{I_k} M_{b,k}^{(i)} x \mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}},\quad \mathcal{M}_{\sigma,k}x := \sum_{i=1}^{I_k} M_{\sigma,k}^{(i)} x \mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}},$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$。回顾 5.1 中 ε_k 的定义，对于任意 $y_k = \Upsilon_k z_k \in \mathcal{V}_k$，满足 $z_k = (z_k^{(i)})_{i=1}^{I_k} \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$，有

$$\begin{aligned}\left\|(\mathcal{A}_k-\mathcal{A})y_k\right\|_{\mathcal{V}^*} &= \left(\sum_{i=1}^{I_k}\int_{\Delta_k^{(i)}}(1+\theta)^{-3/2}\left|\theta-a_k^{(i)}\right|^2\left|z_k^{(i)}\right|^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2}\\ &\leq \varepsilon_k\left(\sum_{i=1}^{I_k}\int_{\Delta_k^{(i)}}(1+\theta)^{1/2}\left|z_k^{(i)}\right|^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2}\\ &= \varepsilon_k\|y_k\|_{\mathcal{V}}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

此外，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\left\|(\mathcal{M}_{b,k}-\mathcal{M}_b)x\right\|_{\mathcal{V}^*} = \left(\int_{[0,\infty)}(1+\theta)^{-3/2}\left|\left(\sum_{i=1}^{I_k}M_{b,k}^{(i)}\mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}}(\theta)-M_b(\theta)\right)x\right|^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2}\leq\varepsilon_k|x| \tag{5.9}$$

and

$$\left\|(\mathcal{M}_{\sigma,k}-\mathcal{M}_\sigma)x\right\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_{[0,\infty)}(1+\theta)^{-1/2}\left|\left(\sum_{i=1}^{I_k}M_{\sigma,k}^{(i)}\mathbb{1}_{\Delta_k^{(i)}}(\theta)-M_\sigma(\theta)\right)x\right|^2\mu(\mathrm{d}\theta)\right)^{1/2}\leq\varepsilon_k|x|. \tag{5.10}$$

现在我们证明断言（ii）中的估计（5.4）。回顾（5.7），再结合 $\|\Upsilon_k \cdot\|_{\mathcal{H}}$、$\|\Upsilon_k \cdot\|_{\mathcal{V}}$ 和 $|\cdot|$ 是有限维空间 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上的等价范数这一事实，只需证明存在一个常数 $C_0 > 0$ 和一个数 $k_1 \in \mathbb{N}$，使得对任意满足 $k \geq k_1$ 的 $k \in \mathbb{N}$，（5.4）均成立。暂且固定任意一个 $k \in \mathbb{N}$。设 $Z_k =$ （$Z_{k,t}$）是随机微分方程（5.2）的一个解，并令 $Y_{k,t} := \Upsilon_k Z_{k,t}$，其中 $t \geq 0$。根据上述观察，取值于 $\mathcal{V}_k$ 的过程 $Y_k =$ $(Y_{k,t})$ 满足

$$Y_{k,t} = Y_{k,0} + \int_0^t \left\{\mathcal{A}_k Y_{k,s} + \mathcal{M}_{b,k} b(\mu[Y_{k,s}])\right\} \mathrm{d}s + \int_0^t \mathcal{M}_{\sigma,k} \sigma(\mu[Y_{k,s}]) \, \mathrm{d}W_s \tag{5.11}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎处处成立。对 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ 应用引理 2.19 中的伊藤公式 Y_k 可得

$$\left\|Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|Y_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t f_k(Y_{k,s}) \, \mathrm{d}s + 2\int_0^t \left\langle Y_{k,s}, \mathcal{M}_{\sigma,k} \sigma(\mu[Y_{k,s}]) \, \mathrm{d}W_s \right\rangle_{\mathcal{H}} \tag{5.12}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎处处成立，其中 $f_k\colon \mathcal{V}_k \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f_k(y_k) := 2\left\langle \mathcal{A}_k y_k + \mathcal{M}_{b,k} b(\mu[y_k]), y_k \right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \left\|\mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[y_k])\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2, \quad y_k \in \mathcal{V}_k.$$

将 f_k 分解为 $f_k = f_k^{(1)} + f_{(2)k}$，其中

$$\begin{aligned}
f_k^{(1)}(y_k) &:= 2\left\langle \mathcal{A} y_k, y_k \right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + 2\left\langle \mathcal{M}_b b(\mu[y_k]), y_k \right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + \left\|\mathcal{M}_\sigma \sigma(\mu[y_k])\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2, \\
f_k^{(2)}(y_k) &:= 2\left\langle (\mathcal{A}_k - \mathcal{A}) y_k, y_k \right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} + 2\left\langle (\mathcal{M}_{b,k} - \mathcal{M}_b) b(\mu[y_k]), y_k \right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}} \\
&\quad + \left\langle (\mathcal{M}_{\sigma,k} - \mathcal{M}_\sigma)\sigma(\mu[y_k]), (\mathcal{M}_{\sigma,k} + \mathcal{M}_\sigma)\sigma(\mu[y_k]) \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})},
\end{aligned}$$

对于 $y_k \in \mathcal{V}_k$。一方面，类似于命题 2.15 (ii) 的证明，利用（2.13），$\mathcal{M}_b \in L(\mathbb{R}^n; \mathcal{V})$，$\mathcal{M}_\sigma \in L(\mathbb{R}^n; \mathcal{H})$，由 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$的线性增长性质，以及引理 2.10和杨氏不等式，我们可知存在一个常数 $C_1 > 0$，其与 k无关，使得

$$f_k^{(1)}(y_k) \leq C_1 \|y_k\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{3}{2}\|y_k\|_{\mathcal{V}}^2 + C_1$$

对于任意 $y_k \in \mathcal{V}_k$。另一方面，由（5.8）、（5.9）和（5.10），结合 b 和 σ 的线性增长性质以及 $\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V}; \mathbb{R}^n)$ 这一事实，我们可知存在一个常数 $C_2 > 0$，同样与 k无关，使得

$$f_k^{(2)}(y_k) \leq C_2 \varepsilon_k \left(1 + \|y_k\|_{\mathcal{V}}^2\right)$$

对任意 $y_k \in \mathcal{V}_k$。现在，我们选择 $k_1 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $k \geq k_1$，都有 $C_2\varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$。根据假设，$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$，因此这是可行的。令 $k \geq k_1$。于是，我们有

$$f_k(y_k) = f_k^{(1)}(y_k) + f_k^{(2)}(y_k) \leq C_1 \|y_k\|_{\mathcal{H}}^2 - \|y_k\|_{\mathcal{V}}^2 + C_1 + \frac{1}{2} \tag{5.13}$$

对任意 $y_k \in \mathcal{V}_k$。由式（5.12）和式（5.13），我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t \left\|Y_{k,s}\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s \\
&\leq \left\|Y_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + C_1 \int_0^t \left\|Y_{k,s}\right\|_{\mathcal{H}}^2 \mathrm{d}s + \left(C_1 + \frac{1}{2}\right) t + 2\int_0^t \left\langle Y_{k,s}, \mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[Y_{k,s}]) \, \mathrm{d}W_s \right\rangle_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然成立。根据这一估计，采用与命题 2.15 (ii) 的证明类似的论证，可以证明

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\|Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \left\|Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \leq C_0 e^{C_0 T}\left(1 + \left\|Y_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right)$$

对任意 $T>0$ 几乎必然成立，其中 $C_0>0$ 是一个与 k 无关的常数。因此，式（5.4）对所有 $k\geq k_1$ 均成立。这证明了断言 (i)。

接下来，我们证明断言（ii）中的（5.5）。固定 $k\in\mathbb{N}$。根据（5.11），对引理 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ 中的2.19 所述过程 $Y-Y_k$ 应用伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}\|Y_t-Y_{k,t}\|_{\mathcal{H}}^2=\|Y_0-Y_{k,0}\|_{\mathcal{H}}^2+\int_0^t g_k(Y_s,Y_{k,s})\,\mathrm{d}s\\+2\int_0^t\Big\langle Y_s-Y_{k,s},\big(\mathcal{M}_\sigma\sigma(\mu[Y_s])-\mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[Y_{k,s}])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle_{\mathcal{H}}\end{aligned}\tag{5.14}$$

对任意 $t\geq 0$ 几乎处处成立，其中函数 $g_k\colon\mathcal{V}\times\mathcal{V}_k\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{aligned}g_k(y,y_k):=2\big\langle\mathcal{A}y+\mathcal{M}_b b(\mu[y])-\mathcal{A}_k y_k-\mathcal{M}_{b,k}b(\mu[y_k]),y-y_k\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}\\+\big\|\mathcal{M}_\sigma\sigma(\mu[y])-\mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[y_k])\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2,\quad(y,y_k)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}_k.\end{aligned}$$

将 g_k 分解为 $g_k=g_k^{(1)}+g_k^{(2)}$，其中

$$\begin{aligned}g_k^{(1)}(y,y_k)&:=2\big\langle\mathcal{A}(y-y_k),y-y_k\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}+2\big\langle\mathcal{M}_b\big(b(\mu[y])-b(\mu[y_k])\big),y-y_k\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}\\&\quad+\big\|\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[y])-\sigma(\mu[y_k])\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2,\\g_k^{(2)}(y,y_k)&:=2\big\langle(\mathcal{A}-\mathcal{A}_k)y_k,y-y_k\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}+2\big\langle(\mathcal{M}_b-\mathcal{M}_{b,k})b(\mu[y_k]),y-y_k\big\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}}\\&\quad+2\Big\langle(\mathcal{M}_\sigma-\mathcal{M}_{\sigma,k})\sigma(\mu[y_k]),\mathcal{M}_\sigma\big(\sigma(\mu[y])-\sigma(\mu[y_k])\big)\Big\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}\\&\quad+\big\|(\mathcal{M}_\sigma-\mathcal{M}_{\sigma,k})\sigma(\mu[y_k])\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathcal{H})}^2,\end{aligned}$$

对于 $(y,\ y_k)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}_k$。类似于命题 2.15 （ii）的证明，利用（2.13），$\mathcal{M}_b\in L(\mathbb{R}^n;\ \mathcal{V})$，$\mathcal{M}_\sigma\in L(\mathbb{R}^n;\ \mathcal{H})$，以及 $b\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 和 $\sigma\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times d}$的利普希茨连续性，再结合引理 2.10和杨氏不等式，可知存在一个常数 $C_3>0$，它与 k无关，使得

$$g_k^{(1)}(y,y_k)\leq C_3\|y-y_k\|_{\mathcal{H}}^2-\frac{3}{2}\|y-y_k\|_{\mathcal{V}}^2$$

对任意 $(y,\ y_k)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}_k$。另一方面，利用（5.8）、（5.9）、（5.10）、b 与 σ的利普希茨连续性，以及 $\mu[\cdot]\in L(\mathcal{V};\ \mathbb{R}^n)$，并结合杨氏不等式，可知存在一个常数 $C_4>0$，与 k无关，使得

$$g_k^{(2)}(y,y_k)\leq\frac{1}{2}\|y-y_k\|_{\mathcal{V}}^2+C_4\varepsilon_k^2\left\{1+\|y_k\|_{\mathcal{V}}^2\right\}$$

对任意 $(y,\ y_k)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}_k$。综合上述估计，我们得到

$$g_k(y,y_k)=g_k^{(1)}(y,y_k)+g_k^{(2)}(y,y_k)\leq C_3\|y-y_k\|_{\mathcal{H}}^2-\|y-y_k\|_{\mathcal{V}}^2+C_4\varepsilon_k^2\left\{1+\|y_k\|_{\mathcal{V}}^2\right\}\tag{5.15}$$

对任意 $(y,\ y_k)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}_k$。由（5.14）和（5.15），我们有

$$\begin{aligned}&\|Y_t-Y_{k,t}\|_{\mathcal{H}}^2+\int_0^t\|Y_s-Y_{k,s}\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}s\\&\leq\|Y_0-Y_{k,0}\|_{\mathcal{H}}^2+C_3\int_0^t\|Y_s-Y_{k,s}\|_{\mathcal{H}}^2\,\mathrm{d}s+C_4\varepsilon_k^2\int_0^t\left\{1+\|Y_{k,s}\|_{\mathcal{V}}^2\right\}\mathrm{d}s\\&\quad+2\int_0^t\Big\langle Y_s-Y_{k,s},\big(\mathcal{M}_\sigma\sigma(\mu[Y_s])-\mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[Y_{k,s}])\big)\,\mathrm{d}W_s\Big\rangle_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然。由此，用与命题 2.15 （ii）的证明相同的方法，我们可以证明存在一个常数 $C_5 > 0$，与 k无关，使得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|Y_t - Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \left\|Y_t - Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \\ &\leq C_5 e^{C_5 T}\left\|Y_0 - Y_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + C_5 e^{C_5 T}\varepsilon_k^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{1 + \left\|Y_{k,t}\right\|_{\mathcal{V}}^2\right\} \mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right]\end{aligned}$$

对任意 $T > 0$。将该估计与（5.4）结合可知，（5.5）对任意 $T > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 以及某个常数 $C_0 > 0$均成立。

最后，我们证明断言（iii）。此外，我们假设假设条件2 成立。回顾定义2.17中的记号。令 $k \in \mathbb{N}$ 固定。令 Ψ 为假设条件2中的可容许权函数。根据（5.11），对 $\|\cdot\|_\Psi^2$ 应用引理2.19 中的伊藤公式 Y_k 可得

$$\left\|Y_{k,t}\right\|_\Psi^2 = \left\|Y_{k,0}\right\|_\Psi^2 + \int_0^t h_k(Y_{k,s})\,\mathrm{d}s + 2\int_0^t \left\langle Y_{k,s}, \mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[Y_{k,s}])\,\mathrm{d}W_s\right\rangle_\Psi \tag{5.16}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎处处成立，其中 $h_k\colon\ \mathcal{V}_k \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h_k(y_k) := 2\left\langle \mathcal{A}_k y_k + \mathcal{M}_{b,k} b(\mu[y_k]), y_k\right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Psi} + \left\|\mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[y_k])\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_\Psi))}^2,\quad y_k \in \mathcal{V}_k.$$

将 h_k 分解为 $h_k = h_k^{(1)} + h_k^{(2)}$，其中

$$\begin{aligned}h_k^{(1)}(y_k) &:= 2\left\langle \mathcal{A} y_k, y_k\right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Psi} + 2\left\langle b(\mu[y_k]), \mu_{b,\Psi}[y_k]\right\rangle + \mathrm{tr}\left[\sigma(\mu[y_k])^\top Q_{\sigma,\Psi}\sigma(\mu[y_k])\right], \\ h_k^{(2)}(y_k) &:= 2\left\langle (\mathcal{A}_k - \mathcal{A}) y_k, y_k\right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Psi} + 2\left\langle (\mathcal{M}_{b,k} - \mathcal{M}_b) b(\mu[y_k]), y_k\right\rangle_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V},\Psi} \\ &\quad + \left\langle (\mathcal{M}_{\sigma,k} - \mathcal{M}_\sigma)\sigma(\mu[y_k]), (\mathcal{M}_{\sigma,k} + \mathcal{M}_\sigma)\sigma(\mu[y_k])\right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d;(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_\Psi))}\end{aligned}$$

对于 $y_k \in \mathcal{V}_k$。结合等式（2.33）与假设条件3.4）中的估计2，可得

$$h_k^{(1)}(y_k) \leq -2\left\{\rho\|y_k\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||y_k|||_\Psi^2\right\} + 2C_{\mathrm{Lyap}}$$

对于任意 $y_k \in \mathcal{V}_k$。由于映射 $y \mapsto (\rho\|y\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||y|||_\Psi^2)^{1/2}$ 在 $\mathcal{V}$ 上定义了一个与 $\|\cdot\|_\mathcal{V}$等价的范数，根据（5.8）、（5.9）和（5.10），结合 b 的线性增长：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 以及 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$，并且由于$\mu[\cdot] \in L(\mathcal{V};\ \mathbb{R}^n)$，可知存在一个常数 $C_6 > 0$，与 k 无关，使得

$$h_k^{(2)}(y_k) \leq C_6\varepsilon_k\left\{1 + \rho\|y_k\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||y_k|||_\Psi^2\right\}$$

对于任意 $y_k \in \mathcal{V}_k$。现在我们取 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意满足 $k \geq k_0$ 的 $k \in \mathbb{N}$，都有 $C_6\varepsilon_k \leq 1$，并固定这样一个 $k_\circ$。于是，我们有

$$h_k(y_k) = h_k^{(1)}(y_k) + h_k^{(2)}(y_k) \leq -\left\{\rho\|y_k\|_\Psi^2 + (1-\delta)|||y_k|||_\Psi^2\right\} + 2C_{\mathrm{Lyap}} + 1 \tag{5.17}$$

对于任意 $y_k \in \mathcal{V}_k$。由（5.16）和（5.17），可得

$$\begin{aligned}&\left\|Y_{k,t}\right\|_\Psi^2 + \int_0^t \left\{\rho\left\|Y_{k,s}\right\|_\Psi^2 + (1-\delta)\left|\left|\left|Y_{k,s}\right|\right|\right|_\Psi^2\right\}\mathrm{d}s \\ &\leq \left\|Y_{k,0}\right\|_\Psi^2 + (2C_{\mathrm{Lyap}} + 1)t + 2\int_0^t \left\langle Y_{k,s}, \mathcal{M}_{\sigma,k}\sigma(\mu[Y_{k,s}])\,\mathrm{d}W_s\right\rangle_\Psi\end{aligned} \tag{5.18}$$

对任意 $t \geq 0$ 几乎必然成立。令 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$ 为与随机微分方程（5.2）相关联的 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上的马尔可夫半群。对每个$t > 0$，定义概率核 $\nu_{k,\ t}\colon (\mathbb{R}^n)^{I_k} \times \mathcal{B}((\mathbb{R}^n)^{I_k}) \to [0,1]$ 如下：$\nu_{k,\ t}(z_k,\ A_k) := \frac{1}{t}\int_0^t P_{k,\ s}(z_k,\ A_k)\,\mathrm{d}s$

对于 $z_k \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 和 $A_k \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$。仿照定理 3.4 的证明（参见第 4.2 节），回想$Y_{k,\,t} = \Upsilon_k Z_{k,\,t}$，估计（5.18）保证

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \left\{\rho\|\Upsilon_k z_k'\|_\Psi^2 + (1-\delta)\|\!|\Upsilon_k z_k'|\!\|_\Psi^2\right\} \nu_{k,t}(z_k, \mathrm{d}z_k') \le \frac{\|\Upsilon_k z_k\|_\Psi^2}{t} + 2C_{\mathrm{Lyap}} + 1$$

对所有 $t > 0$ 和所有 $z_k \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$均成立。由于 $z_k \mapsto (\rho\|\Upsilon_k z_k\|_\Psi^2 + (1-\delta)\|\!|\Upsilon_k z_k|\!\|_\Psi^2)^{1/2}$ 在有限维空间 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上定义了一个范数，上述估计立即表明，对于任意 $z_k \in (\mathbb{R}^n)^{I_k}$，概率测度族$\{\nu_{k,t}(z_k, \cdot)\}_{t\ge1}$ 在 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 上是紧的；见注 4.4。因此，根据 Krylov–Bogoliubov 定理（例如，参见 [15, 推论 11.8]），可知至少存在一个 $\{P_{k,t}\}_{t\ge0}$的不变概率测度$\pi_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$。此外，基于上述得到的 $\nu_{k,t}$ 的估计，采用与定理 3.4 证明最后部分类似的论证（见第 4.2 节）可得

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \left\{\rho\|\Upsilon_k z_k\|_\Psi^2 + (1-\delta)\|\!|\Upsilon_k z_k|\!\|_\Psi^2\right\} \pi_k(\mathrm{d}z_k) \le 2C_{\mathrm{Lyap}} + 1.$$

由于 $y \mapsto (\rho\|y\|_\Psi^2 + (1-\delta)\|\!|y|\!\|_\Psi^2)^{1/2}$ 在 $\mathcal{V}$ 上定义了一个与 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$等价的范数，由此可见（5.6）成立。证明至此完成。 □

在引理 5.2 (iii) 的设定下，对每个满足 $k \ge k_0$ 的 $\pi_k \in \Pi_k$，以 π_k 为初始分布的近似随机微分方程 (5.2) 的解 $Z_k = (Z_{k,t})_{t\ge0}$ 的分布 $\mathbf{P}_k^{\pi_k} \in \mathcal{P}(C([0,\infty); (\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 在 $C([0,\infty); (\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 上的时间平移下不变；关于随机演化方程 (1.2) 的平稳分布 $\mathbf{P}^\pi \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 的相应结果，参见推论 3.10 (i)。

稍作记号滥用，我们继续用 Υ_k 表示将每个 $\zeta_k = (\zeta_{k,t})_{t\ge0} \in C([0,\infty); (\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 映到 $(\Upsilon_k\zeta_{k,t})_{t\ge0} \in \Lambda$ 的映射。于是，我们可以将 Υ_k 视为从 $C([0,\infty); (\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 到 Λ 的连续映射。对每个 $T \in (0,\infty)$，在 $\mathcal{P}(\Lambda)$ 上由下式定义扩展伪度量 $\mathbb{W}_{\Lambda_T}$：$\mathcal{P}(\Lambda) \times \mathcal{P}(\Lambda) \to [0,\infty]$

$$\mathbb{W}_{\Lambda_T}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) := \inf_{\mathfrak{p} \in \mathscr{C}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)} \int_{\Lambda\times\Lambda} \|\eta_1 - \eta_2\|_{\Lambda_T}\, \mathfrak{p}(\mathrm{d}\eta_1, \mathrm{d}\eta_2) \tag{5.19}$$

对于 $\mathfrak{p}_1$，$\mathfrak{p}_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$，其中，$\|\cdot\|_{\Lambda_T}$在 Λ 上的半范数由（2.31）定义。

以下定理是本节的主要结果，证明了$\mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}$ 作为波兰空间 Λ 上的概率测度弱收敛至$\mathbf{P}^\pi$。

定理 5.3. 假设给定一个提升基 (μ, M_b, M_σ) 以及可测映射 $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$，它们满足假设 *1* 和假设 *2*。令 $\{(\Delta_k, a_k, M_{b,k}, M_{\sigma,k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 (μ, M_b, M_σ) 的一个逼近分量。令 $k_0 \in \mathbb{N}$ 为引理 *5.2 (iii)* 中给出的数。对于满足 $k \ge k_0$ 的每个$k \in \mathbb{N}$，令 $\Pi_k \subset \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 为与随机微分方程 *(5.2)* 相关联的马尔可夫半群 $\{P_{k,t}\}_{t\ge0}$ 的所有不变概率测度构成的（非空）集合。此外，令 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 为与随机演化方程 *(1.2)* 相关联的马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\ge0}$ 的（唯一）不变概率测度。那么，对于任意给定的 $T \in (0,\infty)$，我们有

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{\Lambda_T}\left(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}\right) = 0. \tag{5.20}$$

注 5.4. (i) 回顾波兰空间 Λ上的（有界）度量 d_Λ：$\Lambda \times \Lambda \to [0,1]$。记 $\mathbb{W}_\Lambda$：$\mathcal{P}(\Lambda) \times \mathcal{P}(\Lambda) \to [0,1]$ 为相应的 Wasserstein度量，即

$$\mathbb{W}_\Lambda(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) := \inf_{\mathfrak{p} \in \mathscr{C}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)} \int_{\Lambda\times\Lambda} d_\Lambda(\eta_1, \eta_2)\, \mathfrak{p}(\mathrm{d}\eta_1, \mathrm{d}\eta_2)$$

对于 $\mathfrak{p}_1$，$\mathfrak{p}_2 \in \mathcal{P}(\Lambda)$。任意 $T \in (0,\infty)$ 下的收敛性结果（5.20）立即推出 th at

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_\Lambda\left(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}\right) = 0,$$

这等价于$\mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}$ 在$\mathbf{P}^\pi$ 下于 $\mathcal{P}(\Lambda)$中的（均匀）弱收敛。结果（5.20）将弱收敛性与收敛序列的一种一致可积性结合起来。

(ii) 由于求值映射 $\Lambda \ni \eta = (\eta_t)_{t\geq 0} \mapsto \eta_0 \in \mathcal{H}$ 关于半范数 $\|\cdot\|_{\Lambda_T}$是利普希茨连续的，因此路径空间 Λ 上平稳分布的收敛性结果（5.20）蕴含不变概率测度关于 L^1-Wasserstein（扩展）度量 $\mathbb{W}_{\mathcal{H}}$ 的如下收敛性结果： $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ 由（3.12）定义：

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{\mathcal{H}}\big(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\big) = 0, \tag{5.21}$$

这进一步意味着 $\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 中一致弱收敛至 π。然而，我们的结果并不意味着 $\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ 的拓扑下弱收敛至 π，尽管它们可以视为 $\mathcal{V}$上的概率测度。这是因为求值映射在 $\mathcal{V}$中不一定连续；一般而言，它仅在 $\mathcal{H}$ 中连续。

在深入讨论技术细节之前，我们先概述定理 5.3的证明思路。首先，我们将证明关于不变概率测度的以下收敛性结果：

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\big) = 0, \tag{5.22}$$

其中，类距离函数 $d_{\Phi,\Psi}$： $\mathcal{H}\times\mathcal{H} \to [0,\infty)$由定理 3.8 (i) 中的 (3.7) 定义。回顾 (3.10) 中的标准不等式可知，(5.22) 意味着不变概率测度在 L^1-Wasserstein 意义下收敛，如 (5.21) 所示。接下来，结合 (5.21) 与稳定性估计 (5.5)，我们将证明路径空间 Λ 上平稳分布关于半范数 $\|\cdot\|_{\Lambda_T}$ 的收敛性 (5.20)，对任意 $T \in (0,\infty)$ 均成立。证明中最重要的一步是推导出 (5.22)。在这一步中，定理 3.8 (i) 中关于马尔可夫半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 相对于类距离函数$d_{\Phi,\Psi}$ 的“谱隙”结果起着关键作用。在此步骤中，我们借鉴了 [29, 第4节。1]中的思路。

定理 5.3 的证明。 首先，我们证明不变概率测度的收敛性结果（5.22）。注意到

$$\sup_{k\geq k_0} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\big) < \infty,$$

这由类距离函数 3.7）的定义（$d_{\Phi,\ \Psi}$ 以及估计（3.8）和（5.6）得出。此外，类似于 [29, 引理 4。14], 的证明，我们可以很容易地验证存在一个常数$C_1 > 0$ 使得

$$d_{\Phi,\Psi}(y_1,y_3) \leq C_1\big\{d_{\Phi,\Psi}(y_1,y_2) + d_{\Phi,\Psi}(y_2,y_3)\big\}$$

对任意 $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{H}$。这意味着

$$\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(\nu_1,\nu_3) \leq C_1\big\{\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(\nu_1,\nu_2) + \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(\nu_2,\nu_3)\big\} \tag{5.23}$$

对任意 $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$。

固定 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq k_0$ 且 $\pi_k \in \Pi_k$。令 $t_1 := t_0 \vee \log(2C_1)\ r$ ，~~其中~~ $r > 0$ 和 $t_0 > 0$ 是定理 3.8 (i) 中出现的常数，且 $C_1 > 0$ 是（5.23）中出现的常数。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\big) &= \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(P_{t_1}^*\pi, (P_{k,t_1}^*\pi_k) \circ \Upsilon_k^{-1}\big) \\
&\leq C_1 \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(P_{t_1}^*\pi, P_{t_1}^*(\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1})\big) + C_1 \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(P_{t_1}^*(\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}), (P_{k,t_1}^*\pi_k) \circ \Upsilon_k^{-1}\big) \\
&\leq C_1 e^{-rt_1} \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\big) + C_1 \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(P_{t_1}^*(\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}), (P_{k,t_1}^*\pi_k) \circ \Upsilon_k^{-1}\big),
\end{aligned}$$

其中，我们在第一行分别使用了 π 和 π_k 关于 P_{t_1} 和P_{k,t_1}的不变性，在第二行使用了估计（5.23），并在第三行使用了谱隙估计（3.6）。由于$\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}) < \infty$ 和$C_1 e^{-rt_1} \leq \frac{1}{2}$，我们得到

$$\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\big) \leq 2C_1 \mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\big(P_{t_1}^*(\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}), (P_{k,t_1}^*\pi_k) \circ \Upsilon_k^{-1}\big). \tag{5.24}$$

现在我们估计（5.24）的右端项。设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个完备概率空间，其上定义了一个取值于 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 的随机变量 $Z_{k,0}$，其服从 π_k 给定的分布，以及一个 d 维布朗运动

运动 W，且独立于 $Z_{k,0}$。设 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 是由 $Z_{k,0}$ 和 W 生成的滤过的增广。设 $Y=(Y_t)_{t\geq 0}$ 是具有 $\mathcal{H}$ 值初始条件 $Y_0=\Upsilon_k Z_{k,0}$ 的随机演化方程（SEE）（1.2）的解，且设 $Z_k=(Z_{k,t})_{t\geq 0}$ 是具有 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 值初始条件 $Z_{k,0}$ 的随机微分方程（SDE）（5.2）的解，二者均由同一个布朗运动 W 驱动。于是，在 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 上、关于 $\mathbb{P}$，这两个随机变量 $(Y_{t_1},\Upsilon_k Z_{k,t_1})$ 组成的联合分布构成了概率测度 $P^*_{t_1}(\pi_k\circ\Upsilon_k^{-1})\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 与 $(P^*_{k,t_1}\pi_k)\circ\Upsilon_k^{-1}\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 之间的一个耦合。因此，我们有

$$\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\left(P^*_{t_1}\left(\pi_k\circ\Upsilon_k^{-1}\right),\left(P^*_{k,t_1}\pi_k\right)\circ\Upsilon_k^{-1}\right)\leq\mathbb{E}\left[d_{\Phi,\Psi}\left(Y_{t_1},\Upsilon_k Z_{k,t_1}\right)\right].$$

回顾类距离函数 $d_{\Phi,\Psi}$ 的定义（3.7），由上述估计和柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\left(P^*_{t_1}\left(\pi_k\circ\Upsilon_k^{-1}\right),\left(P^*_{k,t_1}\pi_k\right)\circ\Upsilon_k^{-1}\right)\\&\leq\mathbb{E}\left[\left\|Y_{t_1}-\Upsilon_k Z_{k,t_1}\right\|_\Phi\wedge 1\right]^{1/2}\left\{1+\mathbb{E}\left[\left\|Y_{t_1}\right\|_\Psi^2\right]+\mathbb{E}\left[\left\|\Upsilon_k Z_{k,t_1}\right\|_\Psi^2\right]\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

回顾，$\|\cdot\|_\Phi$ 和 $\|\cdot\|_\Psi$ 是 $\mathcal{H}$ 上的范数，且与 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$等价。由于$Y_0=\Upsilon_k Z_{k,0}$ 和分布$\mathbb{P}(Z_{k,0})=\pi_k\in\mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$，利用估计式（2.15）、（5.4）和（5.5），可得

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\left(P^*_{t_1}\left(\pi_k\circ\Upsilon_k^{-1}\right),\left(P^*_{k,t_1}\pi_k\right)\circ\Upsilon_k^{-1}\right)&\leq C_2\varepsilon_k^{1/2}\left(1+\mathbb{E}\left[\left\|\Upsilon_k Z_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}^2\right]\right)^{3/4}\\&=C_2\varepsilon_k^{1/2}\left(1+\int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}}\left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{H}}^2\pi_k(\mathrm{d}z_k)\right)^{3/4},\end{aligned}\tag{5.25}$$

其中 $C_2>0$ 是一个不依赖于 k 或 π_k 的常数。

由（5.24）和（5.25），结合（5.6），可得

$$\sup_{\pi_k\in\Pi_k}\mathbb{W}_{d_{\Phi,\Psi}}\left(\pi,\pi_k\circ\Upsilon_k^{-1}\right)\leq C_3\varepsilon_k^{1/2}$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $k\geq k_0$的情形，其中 $C_3>0$ 是一个与 k无关的常数。由于 $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$，可得（5.22）。回顾标准估计式（3.10），类距离函数$d_{\Phi,\Psi}$上的收敛性（5.22）蕴含不变概率测度的-Wasserstein 收敛性（5.21）。

固定任意的 $T\in(0,\infty)$。我们的下一个目的是证明 (5.20)。为此，固定 $k\geq k_0$、$\pi_k\in\Pi_k$和 $\nu_k\in\mathscr{C}(\pi,\pi_k\circ\Upsilon_k^{-1})$。定义 $\Gamma_k\colon\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k}\to\mathcal{H}\times\mathcal{H}$，使得对于 $(y,z_k)\in\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k}$，有 $\Gamma_k(y,z_k):=(y,\Upsilon_k z_k)$。显然，映射 Γ_k 连续且单射。因此，根据卢津–苏斯林定理（例如，参见[39, 定理 15.1]），对于任意 $\Xi\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})$，我们得到 $\Gamma_k(\Xi)\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})$。于是，我们可以定义集合函数 $\widetilde{\nu}_k\colon\mathcal{B}(\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})\to[0,1]$，使得对于 $\Xi\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})$，有 $\widetilde{\nu}_k(\Xi):=\nu_k(\Gamma_k(\Xi))$。同样，由于 Γ_k 是单射，我们看到集合函数 $\widetilde{\nu}_k$ 是一个 σ-可加测度。此外，由于

$$\widetilde{\nu}_k(\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})=\nu_k(\mathcal{H}\times\Upsilon_k((\mathbb{R}^n)^{I_k}))=\pi_k(\Upsilon_k^{-1}(\Upsilon_k((\mathbb{R}^n)^{I_k})))=\pi_k((\mathbb{R}^n)^{I_k})=1,$$

我们有 $\widetilde{\nu}_k\in\mathcal{P}(\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})$。注意到

$$\widetilde{\nu}_k(A\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})=\nu_k(A\times\Upsilon_k((\mathbb{R}^n)^{I_k}))=\nu_k(A\times\mathcal{H})=\pi(A)\quad\text{for any } A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),\tag{5.26}$$

$$\widetilde{\nu}_k(\mathcal{H}\times B)=\nu_k(\mathcal{H}\times\Upsilon_k(B))=\pi_k(\Upsilon_k^{-1}(\Upsilon_k(B)))=\pi_k(B)\quad\text{for any } B\in\mathcal{B}\left((\mathbb{R}^n)^{I_k}\right),\text{ and}\tag{5.27}$$

$$\widetilde{\nu}_k(\Gamma_k^{-1}(C))=\nu_k(\Gamma_k(\Gamma_k^{-1}(C)))=\nu_k(C\cap(\mathcal{H}\times\Upsilon_k((\mathbb{R}^n)^{I_k})))=\nu_k(C)\quad\text{for any } C\in\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H}).\tag{5.28}$$

考虑一个完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，其上定义了一个取值于 $\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 的随机变量 $(Y_0,Z_{k,0})$，其分布为 $\widetilde{\nu}_k\in\mathcal{P}(\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k})$；此外，还有一个与 $(Y_0,Z_{k,0})$ 独立的 d 维布朗运动 W。我们在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上配备由 $(Y_0,Z_{k,0})$ 和 W 生成的增广滤过 $\mathbb{F}$。在此设定下，令 $Y=(Y_t)_{t\geq 0}$ 为具有给定 $\mathcal{H}$ 值初始条件 Y_0 的 SEE (1.2) 的解，令 $Z_k=(Z_{k,t})_{t\geq 0}$ 为具有给定 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 值初始条件 $Z_{k,0}$ 的近似随机微分方程 (5.2) 的解。由 (5.26) 和 (5.27)，$(Y_t)_{t\geq 0}$ 与 $(\Upsilon_k Z_{k,t})_{t\geq 0}$ 的路径在

$\Lambda \times \Lambda$ 构成概率测度 $\mathbf{P}^{\pi} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 与 $\mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 之间的耦合。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{W}_{\Lambda_T}\left(\mathbf{P}^{\pi}, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \left\|Y_t - \Upsilon_k Z_{k,t}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^T \left\|Y_t - \Upsilon_k Z_{k,t}\right\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \left\|Y_0 - \Upsilon_k Z_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}} + C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \varepsilon_k \left(1 + \left\|\Upsilon_k Z_{k,0}\right\|_{\mathcal{H}}\right)\right] \\
&= \int_{\mathcal{H}\times(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \left\{C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \left\|y - \Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{H}} + C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \varepsilon_k \left(1 + \left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{H}}\right)\right\} \widetilde{\nu}_k(\mathrm{d}y, \mathrm{d}z_k) \\
&= C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \int_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \left\|y - y'\right\|_{\mathcal{H}} \nu_k(\mathrm{d}y, \mathrm{d}y') + C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \varepsilon_k \left(1 + \int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{H}} \pi_k(\mathrm{d}z_k)\right),
\end{aligned}
$$

其中，第二个不等式中使用了估计（5.5）和条件詹森不等式，最后一个等式中使用了关系式（5.27）和（5.28）。对 $\nu_k \in \mathscr{C}$（π，$\pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}$）取下确界，再对 $\pi_k \in \Pi_k$取上确界，可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\pi_k\in\Pi_k} \mathbb{W}_{\Lambda_T}\left(\mathbf{P}^{\pi}, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}\right) \\
&\leq C_0^{1/2} e^{C_0 T/2} \sup_{\pi_k\in\Pi_k} \mathbb{W}_{\mathcal{H}}\left(\pi, \pi_k \circ \Upsilon_k^{-1}\right) + C_0 e^{C_0 T/2} \varepsilon_k \left(1 + \sup_{\pi_k\in\Pi_k} \int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{H}} \pi_k(\mathrm{d}z_k)\right).
\end{aligned}
$$

由（5.21）和（5.6），可知上式右端在 $k \to \infty$时趋于零，因此（5.20）成立。证明完毕。

□

备注 5.5。 定理5.3 的证明还给出了收敛式（5.20）的定量估计。具体而言，我们得到收敛阶为 $O(\varepsilon_k^{1/2})$，其中 ε_k 由（5.1）定义。指数 $1/2$ 源自类距离函数 $d_{\Phi,\,\Psi}$的定义（3.7）中的平方根。不过需要注意的是，该收敛阶不一定是最优的。

路径空间 Λ 上平稳分布的收敛结果 (5.20)——而不仅仅是不变概率测度的收敛性 (5.21)——的一个重要推论是，它使我们能够推导出原始随机 Volterra 方程 (1.1) 的相应收敛性，正如下文推论 5.6 所示。回顾备注 2.16 (ii)、推论 3.10 (ii) 和注 3.11 中的观察：原始随机 Volterra 方程 (1.1) 的平稳分布 $\mathrm{Q}^{\pi} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 和 $\widetilde{\mathrm{Q}}^{\pi} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 是由 $\mathrm{P}^{\pi} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 构造的；前者刻画了平稳解的 $\mathrm{d}t$-等价类的分布，而后者刻画了平稳解本身的有限维分布 $\widetilde{\mathrm{Q}}^{\pi}_{(t_1,\ldots,t_\ell)} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{\ell})$。另请回顾，根据定理 3.12，$\mathrm{Q}^{\pi}$ 和 Q^{π} 在以下意义下与提升基 (μ, M_b, M_σ) 的选取无关。

为了借助有限维随机微分方程 (5.2) 建立关于 Q^{π} 和 Q^{π} 近似的相应结果，我们引入以下额外记号。如备注 2.16 (ii) 中所述，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\nu_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$，令 $\mathrm{Q}_k^{\nu_k} := (\mathrm{P}_k^{\nu_k} \circ \Upsilon_k^{-1}) \circ \mu[\cdot]^{-1} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$，其中 $\mu[\cdot]$ 被视为从 Λ 到 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 的连续映射。这表示 $\mathbb{R}^n$ 值过程 $X_{k,t} := \sum_{i=1}^{I_k} \mu(\Delta_k^{(i)}) Z_{k\,t}^{(i)}$，，$t \geq 0$ 的 $\mathrm{d}t$-等价类的分布，其中 $(\mathbb{R}^n)^{I_k}$ 值过程 $Z_k = (Z_{k,t})_{t\geq 0}$ 是初始分布为 ν_k 的近似随机微分方程 (5.2) 的解。回顾一下，$X_k = (X_{k,t})_{t\geq 0}$ 是具有指数和型核的近似随机 Volterra 方程 (5.3) 的解；见备注 5.1。此外，我们用 $\widetilde{\mathrm{Q}}_k^{\nu_k} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 表示 $X_k = (X_{k,t})_{t\geq 0}$ 的分布（而非其 $\mathrm{d}t$-等价类）。该概率测度与有限维分布族 $\widetilde{\mathrm{Q}}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}^{\nu_k} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{\ell})$ 相一致，其中 $t_1, \ldots, t_\ell \geq 0$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$，其中

$$
\widetilde{\mathbf{Q}}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}^{\nu_k}(A_1 \times \cdots \times A_\ell) = \mathbf{P}_k^{\nu_k}\left(\left\{\zeta_k = (\zeta_{k,t})_{t\geq 0} \in C([0,\infty);(\mathbb{R}^n)^{I_k}) \;\middle|\; \mu[\Upsilon_k \zeta_{k,t_1}] \in A_1, \ldots, \mu[\Upsilon_k \zeta_{k,t_\ell}] \in A_\ell\right\}\right)
$$

对于任意 $A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$。这些记号与注 3.11 中引入的记号类似。注意，给定马尔可夫半群 $\{P_{k,t}\}_{t\geq 0}$ 的一个不变概率测度 $\pi_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$，分布 $\mathsf{Q}_k^{\pi_k} \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}_k^{\pi_k} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)})$ 分别在 $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 和 $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的时间平移下保持不变。

与（5.19）类似，对于每个 $T \in (0,\mathcal{P}\ L^2_{\mathrm{loc}}\ 0\ \infty\ \mathbb{R}^n \to [0,\infty] \quad \mathcal{P}\ L^2_{\mathrm{loc}}\ 0\ \infty\ \mathbb{R}^n$ $_{0\ T\ \mathbb{R}^n}$ ∞ $\times$ ），我们定义扩展伪度量 $\mathbb{W}_{L^2(\cdot;\cdot)}$：$\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,;\mathbb{R}^n))$ ((,;)) 于 ((,;)) 上，定义如下：

$$\mathbb{W}_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}(\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2) := \inf_{\mathfrak{q}\in\mathscr{C}(\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2)} \int_{L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)\times L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)} \big\|\xi_1-\xi_2\big\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\,\mathfrak{q}(\mathrm{d}\xi_1,\mathrm{d}\xi_2)$$

对于 $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2 \in \mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$。此外，对于每个 $\ell\in\mathbb{N}$，我们定义扩展度量 $\mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}$：$\mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)\times\mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell) \to [0,\infty]$ 于 $\mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)$ 上，定义如下：

$$\mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\big(\widetilde{\mathfrak{q}}_1,\widetilde{\mathfrak{q}}_2\big) := \inf_{\widetilde{\mathfrak{q}}\in\mathscr{C}(\widetilde{\mathfrak{q}}_1,\widetilde{\mathfrak{q}}_2)} \int_{(\mathbb{R}^n)^\ell\times(\mathbb{R}^n)^\ell} \max_{j\in\{1,\dots,\ell\}} \big|x_{1,j}-x_{2,j}\big|\,\widetilde{\mathfrak{q}}\big(\mathrm{d}(x_{1,j})_{j=1}^\ell,\mathrm{d}(x_{2,j})_{j=1}^\ell\big)$$

对于 $\widetilde{\mathfrak{q}}_1,\widetilde{\mathfrak{q}}_2 \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)$，其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准欧几里得范数。

现在我们可以陈述定理5.3的一个推论。

推论 **y 5.6.** 在定理 *5.3*的相同设定下，对任意 $T\in(0,\infty)$ 以及 $\ell\in\mathbb{N}$，我们有 e

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\pi_k\in\Pi_k} \mathbb{W}_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\big(\mathbf{Q}^\pi,\mathbf{Q}_k^{\pi_k}\big)=0, \tag{5.29}$$

and

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\pi_k\in\Pi_k}\sup_{t_1,\dots,t_\ell\in[0,T]} \mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\Big(\widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi}_{(t_1,\dots,t_\ell)},\widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\dots,t_\ell)}\Big)=0. \tag{5.30}$$

备注 5.7。对于 dt-等价类的分布，收敛性结果 (5.29) 是 (5.20) 的直接推论，这是由映射 $\mu[\cdot]\colon \Lambda\to L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)$ 的连续性所致，正如下面证明的第一部分所示。相比之下，有限维分布的收敛性结果 (5.30) 不那么显然，因为逐点求值 $\eta\mapsto(\mu[\eta_{t_1}1\!\!1_{\mathcal{V}}(\eta_{t_1})],\dots,\mu[\eta_{t_\ell}1\!\!1_{\mathcal{V}}(\eta_{t_\ell})])$ 从 Λ 到 $(\mathbb{R}^n)^\ell$ 不一定连续，而且对于固定的时间参数，(5.20) 不一定意味着 $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ 中的弱收敛；另见注 5.4 (ii)。尽管如此，利用引理 2.10 中映射 $\mu[\cdot]$: $\mathcal{V}\to\mathbb{R}^n$ 的性质，并结合关于不变概率测度的 $\mathcal{V}$-范数的可积性结果 (3.8) 和 (5.6)，我们可以由 (5.20) 推导出 (5.30)。这一推导详述于证明的第二部分。

推论的证明 *5.6*。收敛性（5.29）可由（5.20）及以下估计立即得到：

$$\|\mu[\eta]\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)} \le \|\mu[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)}\left(\int_0^T \|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le \|\mu[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)}\|\eta\|_{\Lambda_T}$$

对任意 $\eta\in\Lambda$ 均成立。事实上，对任意 $k\ge k_0$、$\pi_k\in\Pi_k$ 和 $\mathfrak{p}_k\in\mathscr{C}\left(\mathbf{P}^\pi,\ \mathbf{P}_k^{\pi_k}\circ\Upsilon_k^{-1}\right)$，注意到由下式给出的概率测度 $\mathfrak{q}_k\in\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\ \infty;\mathbb{R}^n)\times L^2_{\mathrm{loc}}(0,\ \infty;\ \mathbb{R}^n)$

$$\mathfrak{q}_k(D) := \mathfrak{p}_k\left(\big\{(\eta,\eta')\in\Lambda\times\Lambda\ \big|\ \big(\mu[\eta],\mu[\eta']\big)\in D\big\}\right),\quad D\in\mathcal{B}\big(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)\times L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)\big),$$

构成概率测度 $\mathbf{Q}^\pi\in\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n))$ 与 $\mathbf{Q}_k^{\pi_k}\in\mathcal{P}(L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\ \mathbb{R}^n))$ 之间的耦合。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\big(\mathbf{Q}^\pi,\mathbf{Q}_k^{\pi_k}\big) &\le \int_{L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)\times L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^n)} \big\|\xi-\xi'\big\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\,\mathfrak{q}_k(\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\xi')\\
&= \int_{\Lambda\times\Lambda}\big\|\mu[\eta-\eta']\big\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\,\mathfrak{p}_k(\mathrm{d}\eta,\mathrm{d}\eta')\\
&\le \|\mu[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)}\int_{\Lambda\times\Lambda}\|\eta-\eta'\|_{\Lambda_T}\,\mathfrak{p}_k(\mathrm{d}\eta,\mathrm{d}\eta').
\end{aligned}$$

取 i　　对 $\mathfrak{p}_k \in \mathscr{C}(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1})$ 取下确界，再对 $\pi_k \in \Pi_k$ 取上确界，我们得到

$$\sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{L^2(0,T;\mathbb{R}^n)}\big(\mathbf{Q}^\pi, \mathbf{Q}_k^{\pi_k}\big) \le \|\mu[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{\Lambda_T}\big(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}\big).$$

由于 $\|\mu[\cdot]\|_{L(\mathcal{V};\mathbb{R}^n)} < \infty$，由（5.20），得到（5.29）。

为证明有限维分布的收敛性（5.30），令 $k \ge k_0$，$\pi_k \in \Pi_k$，$t_1, \ldots\ldots, t_\ell \in [0,T]$以及 $\mathfrak{p}_k \in \mathscr{C}(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1})$ 固定。注意到备注 3.11 以及 $\Upsilon_k \colon (\mathbb{R}^n)^{I_k} \to \mathcal{V}$，可知

$$\mathfrak{p}_k\left(\left\{(\eta,\eta') \in \Lambda \times \Lambda \,\middle|\, \eta_{t_1}, \ldots, \eta_{t_\ell}, \eta'_{t_1}, \ldots, \eta'_{t_\ell} \in \mathcal{V}\right\}\right) = 1.$$

将 $\widetilde{\mathfrak{q}}_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell \times (\mathbb{R}^n)^\ell)$ 定义为

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_k(E) := \mathfrak{p}_k\left(\left\{(\eta,\eta') \in \Lambda \times \Lambda \,\middle|\, \begin{array}{l} \eta_{t_1}, \ldots, \eta_{t_\ell}, \eta'_{t_1}, \ldots, \eta'_{t_\ell} \in \mathcal{V} \text{ and} \\ \big((\mu[\eta_{t_j}])_{j=1}^\ell, (\mu[\eta'_{t_j}])_{j=1}^\ell\big) \in E \end{array}\right\}\right), \quad E \in \mathcal{B}\big((\mathbb{R}^n)^\ell \times (\mathbb{R}^n)^\ell\big).$$

于是可知，$\widetilde{\mathfrak{q}}_k$ 是概率测度 $\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\ldots,t_\ell)} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)$ 与 $\widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)} \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^\ell)$ 之间的耦合。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\ldots,t_\ell)}, \widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}\right) &\le \int_{(\mathbb{R}^n)^\ell \times (\mathbb{R}^n)^\ell} \max_{j \in \{1,\ldots,\ell\}} \big|x_j - x'_j\big| \, \widetilde{\mathfrak{q}}_k\big(\mathrm{d}(x_j)_{j=1}^\ell, \mathrm{d}(x'_j)_{j=1}^\ell\big) \\
&= \int_{\Lambda \times \Lambda} \max_{j \in \{1,\ldots,\ell\}} \big|\mu[\eta_{t_j} - \eta'_{t_j}]\big| \mathbb{1}_{\mathcal{V}^{2\ell}}\big(\eta_{t_1}, \ldots, \eta_{t_\ell}, \eta'_{t_1}, \ldots, \eta'_{t_\ell}\big) \, \mathfrak{p}_k(\mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\eta').
\end{aligned}$$

任取一个数 $\varepsilon > 0$，并令 $C_{\mu,\,\varepsilon} > 0$ 为引理 2.10中出现的常数。那么，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\ldots,t_\ell)}, \widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}\right) &\le \int_{\Lambda \times \Lambda} \max_{j \in \{1,\ldots,\ell\}} \Big(\varepsilon \|\eta_{t_j} - \eta'_{t_j}\|_{\mathcal{V}}^2 + C_{\mu,\varepsilon} \|\eta_{t_j} - \eta'_{t_j}\|_{\mathcal{H}}^2\Big)^{1/2} \mathfrak{p}_k(\mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\eta') \\
&\le \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^\ell \left\{ \int_\Lambda \|\eta_{t_j}\|_{\mathcal{V}} \, \mathbf{P}^\pi(\mathrm{d}\eta) + \int_{C([0,\infty);(\mathbb{R}^n)^{I_k})} \big\|\Upsilon_k \zeta_{k,t_j}\big\|_{\mathcal{V}} \, \mathbf{P}_k^{\pi_k}(\mathrm{d}\zeta_k) \right\} \\
&\quad + C_{\mu,\varepsilon}^{1/2} \int_{\Lambda \times \Lambda} \sup_{t \in [0,T]} \|\eta_t - \eta'_t\|_{\mathcal{H}} \, \mathfrak{p}_k(\mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\eta'),
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由引理 2.10得出，而第二个不等式则由以下事实得到：$\mathfrak{p}_k \in \mathscr{C}(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1})$。由 $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ 和 $\pi_k \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^n)^{I_k})$ 分别关于 $\{P_t\}_{t \ge 0}$ 和 $\{P_{k,t}\}_{t \ge 0}$ 的不变性，以及不等式 $\sup_{t \in [0,T]} \|\eta_t - \eta'_t\|_{\mathcal{H}} \le \|\eta - \eta'\|_{\Lambda_T}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\ldots,t_\ell)}, \widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}\right) \\
&\le \varepsilon^{1/2} \ell \left\{ \int_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{V}} \, \pi(\mathrm{d}y) + \int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \big\|\Upsilon_k z_k\big\|_{\mathcal{V}} \, \pi_k(\mathrm{d}z_k) \right\} + C_{\mu,\varepsilon}^{1/2} \int_{\Lambda \times \Lambda} \|\eta - \eta'\|_{\Lambda_T} \, \mathfrak{p}_k(\mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\eta').
\end{aligned}$$

对 $\mathfrak{p}_k \in \mathscr{C}(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1})$ 取下确界，然后对 $t_1, \ldots, t_\ell \in [0,T]$ 和 $\pi_k \in \Pi_k$取上确界，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{\pi_k \in \Pi_k} \sup_{t_1,\ldots,t_\ell \in [0,T]} \mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\ldots,t_\ell)}, \widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}\right) \\
&\le \varepsilon^{1/2} \ell \left\{ \int_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{V}} \, \pi(\mathrm{d}y) + \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}} \big\|\Upsilon_k z_k\big\|_{\mathcal{V}} \, \pi_k(\mathrm{d}z_k) \right\} + C_{\mu,\varepsilon}^{1/2} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \mathbb{W}_{\Lambda_T}\big(\mathbf{P}^\pi, \mathbf{P}_k^{\pi_k} \circ \Upsilon_k^{-1}\big).
\end{aligned}$$

利用（5.20），我们得到

$$\limsup_{k \to \infty} \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \sup_{t_1,\ldots,t_\ell \in [0,T]} \mathbb{W}_{(\mathbb{R}^n)^\ell}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}^\pi_{(t_1,\ldots,t_\ell)}, \widetilde{\mathbf{Q}}^{\pi_k}_{k,(t_1,\ldots,t_\ell)}\right)$$

$$\leq \varepsilon^{1/2}\ell\left\{\int_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{V}}\,\pi(\mathrm{d}y)+\sup_{k\geq k_0}\sup_{\pi_k\in\Pi_k}\int_{(\mathbb{R}^n)^{I_k}}\left\|\Upsilon_k z_k\right\|_{\mathcal{V}}\pi_k(\mathrm{d}z_k)\right\}.$$

鉴于可积性条件（3.8）和（5.6），取极限 $\varepsilon\downarrow 0$ 可得所需的断言（5.30）。证明至此完成。

□

A 附录

在定义于 Gelfand 三元组 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{V}^*$上的单调随机偏微分方程的背景下，确定嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 是否为紧嵌入至关重要。事实上，尽管存在各种一般理论，但若干基本结果——包括具有完全局部单调系数的随机偏微分方程的适定性 [47, 56]以及由最终有界性推出的遍历性 [21, 章节 7]——都要求这一紧性性质。下面的引理给出了在我们的框架下嵌入紧性的刻画。它表明，在我们感兴趣的典型情形中，嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 并非紧嵌入，这意味着上述结果无法直接应用于我们的情形。

引理 A.1。对于巴拿赫空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$（定义见第 2节），嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 是紧的，当且仅当 $\operatorname{supp}\mu\cap[0,m]$ 对任意 $m\in(0,\infty)$而言都是有限集。

注 A.2. 根据博雷尔测度的勒贝格分解 μ 在 $[0,\infty)$ 上，条件 $\operatorname{supp}\mu\cap[0,m]$ 对每个 $m\in(0,\infty)$ 都是有限集，等价于 μ 具有如下形式 $\mu=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\delta_{\theta_i}$，其中 c_i，$\theta_i\geq 0$ 且 $\lim_{i\to\infty}\theta_i=\infty$。具体而言，对于示例 2.9 (i) 中生成指数和型核的提升基，嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 确实是紧的。相反，在典型的关注情形中，例如示例 2.9 (ii) 中的 tempered 分数阶核，嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 从来不是紧的。

引理 A.1 的证明。为证明“若”部分，假设对任意 $m\in(0,\infty)$，$\operatorname{supp}\mu\cap[0,m]$ 都是有限集。如果 $\operatorname{supp}\mu$ 本身是有限集，那么希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是有限维的，因此嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$显然是紧的。否则，设 $\operatorname{supp}\mu=\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是无限集，其中 $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset[0,\infty)$ 是一个严格递增序列，且 $\lim_{i\to\infty}\theta_i=\infty$。此时，测度 μ 具有如下形式：$\mu=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\delta_{\theta_i}$，其中$c_i>0$。令 $B_{\mathcal{V}}:=\{y\in\mathcal{V}\,|\,\|y\|_{\mathcal{V}}\leq 1\}$ 为 $\mathcal{V}$中的单位球，并任取一个序列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset B_{\mathcal{V}}$。注意到对于每个 $i\in\mathbb{N}$，$\{y_k(\theta_i)\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ 有界。由康托尔对角线论证，可找到一个递增序列 $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 和一个序列 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$，使得对任意$i\in\mathbb{N}$，$\lim_{\ell\to\infty}y_{k_\ell}(\theta_i)=e_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中成立。定义 $y:=\sum_{i=1}^{\infty}e_i\mathbb{1}_{\{\theta_i\}}$。由法图引理，我们有

$$\|y\|_{\mathcal{V}}^2=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(1+\theta_i)^{1/2}|e_i|^2\leq\liminf_{\ell\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i(1+\theta_i)^{1/2}|y_{k_\ell}(\theta_i)|^2=\liminf_{\ell\to\infty}\left\|y_{k_\ell}\right\|_{\mathcal{V}}^2\leq 1,$$

因此 $y\in B_{\mathcal{V}}$。此外，由于序列 $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset[0,\infty)$ 单调递增，我们有

$$\|y_{k_\ell}-y\|_{\mathcal{H}}^2=\sum_{j=1}^{\infty}c_j(1+\theta_j)^{-1/2}\left|y_{k_\ell}(\theta_j)-e_j\right|^2\leq\sum_{j=1}^{i}c_j(1+\theta_j)^{-1/2}\left|y_{k_\ell}(\theta_j)-e_j\right|^2+(1+\theta_{i+1})^{-1}\|y_{k_\ell}-y\|_{\mathcal{V}}^2$$

对任意 $\ell\in\mathbb{N}$ 和 $i\in\mathbb{N}$。对于每个 $i\in\mathbb{N}$，右侧第一项在 $\ell\to\infty$ 时趋于零。由于 $\|y_{k_\ell}-y\|_{\mathcal{V}}\leq 2$ 且 $\lim_{i\to\infty}\theta_i=\infty$，第二项在 $\ell\in\mathbb{N}$ 中关于 $i\rightrightarrows\infty$ 一致趋于零。因此，$\lim_{\ell\to\infty}\|y_{k_\ell}-y\|_{\mathcal{H}}=0$，这证明集合 $B_{\mathcal{V}}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是序列紧的。于是，嵌入$\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 是紧的。

为证明“仅当”部分，假设存在一个 $m\in(0,\infty)$，使得 $\operatorname{supp}\mu\cap[0,m]$ 是无限集。因此，我们可以选取一个严格递增序列 $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\operatorname{supp}\mu\cap(0,m)$。令 $\theta_0=0$，并对每个 $i\in\mathbb{N}$定义$A_i:=(\frac{\theta_{i-1}+\theta_i}{2},\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2})$。根据构造，$\overline{\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}}$是包含于 $[0,m]$ 中的一列互不相交的开区间，且对于任意 $i\in\mathbb{N}$，都有 $\mu(A_i)\in(0,\infty)$。取一个 $e\in\mathbb{R}^n$ 使得 $|e|=1$。对每个 $i\in\mathbb{N}$，定义 $c_i:=\int_{A_i}(1+\theta)^{1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)\in(0,\infty)$，并令 $y_i:=\frac{1}{\sqrt{c_i}}e\mathbb{1}_{A_i}\in\mathcal{V}$。于是，对于任意 $i\in\mathbb{N}$，都有 $\|y_i\|_{\mathcal{V}}=1$。然而，对于任意满足 $i\neq j$的 $i,j\in\mathbb{N}$，我们有

$$\|y_i-y_j\|_{\mathcal{H}}^2=\frac{\int_{A_i}(1+\theta)^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)}{\int_{A_i}(1+\theta)^{1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)}+\frac{\int_{A_j}(1+\theta)^{-1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)}{\int_{A_j}(1+\theta)^{1/2}\,\mu(\mathrm{d}\theta)}\geq\frac{2}{1+m}.$$

因此， $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{H}$中没有柯西子列，这意味着嵌入 $\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 不是紧的。

□

以下引理确立了马尔可夫提升路径空间的一些基本性质。更一般地说，它讨论定义在 Gelfand 三元组上的一般单调随机偏微分方程解的路径空间。这里，我们考虑一个超越马尔可夫提升特定框架的一般设定。

引理 A.3. 设$(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ 为可分希尔伯特空间，且 $\mathcal{V}$是 $\mathcal{H}$的稠密子空间。假设 $\mathcal{V}$配备了一个范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$，使得$(\mathcal{V},\|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ 是连续嵌入到 $\mathcal{H}$中的自反可分巴拿赫空间。定义

$$\Lambda:=\left\{\eta:[0,\infty)\to\mathcal{H}\;\middle|\;t\mapsto\eta_t\ \textit{is strongly continuous in}\ \mathcal{H}\ \textit{and}\ \int_0^T\|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t<\infty\ \textit{for any}\ T>0\right\}$$

and

$$d_\Lambda(\eta,\eta'):=\sum_{T\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^T}\{\|\eta-\eta'\|_{\Lambda_T}\wedge 1\}\quad \textit{for}\ \eta,\eta'\in\Lambda,$$

其中

$$\|\eta\|_{\Lambda_T}:=\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\eta_t\|_{\mathcal{H}}^2+\int_0^T\|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\quad \textit{for}\ \eta\in\Lambda\ \textit{and}\ T\in(0,\infty).$$

那么，(Λ,d_Λ) 是完备可分度量空间，且 $\{\|\cdot\|_{\Lambda_T}\}_{T\in\mathbb{N}}$是 Λ 上的一个可数半范数族，生成(Λ,d_Λ)的拓扑。此外，*Borel* σ-代数 $\mathcal{B}(\Lambda)$ 与由族 $\{\{\eta\in\Lambda\,|\,\eta_t\in A\}\,|\,t\in[0,\infty)\ \ A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\}$生成的 σ-代数一致。

注 A.4. (i) 由于 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{H}$ 是可分巴拿赫空间，且 $\mathcal{V}\subset\mathcal{H}$ 连续嵌入，因此卢津–苏斯林定理（参见例如 [39, 定理 15.1]）推出 $\mathcal{B}(\mathcal{V})=\{A\cap\mathcal{V}\,|\,A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$。此外，通过对 $y\in\mathcal{H}\setminus\mathcal{V}$ 定义 $\|y\|_{\mathcal{V}}=\infty$，映射 $\mathcal{H}\ni y\mapsto\|y\|_{\mathcal{V}}\in[0,\infty]$ 在 $\mathcal{H}$ 上下半连续，因此是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-可测的（参见例如 [47, 练习 4.2.3]）。因此，对于每个 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-可测函数 $\eta\colon[0,\infty)\to\mathcal{H}$，积分$\int_0^T\|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\mathrm{d}t\in[0,\infty]$ 对所有 $T>0$ 都是良定义的。

(ii) 根据引理 A.3 的最后一个断言，对于完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 上任意取值于 $\mathcal{H}$ 的可测过程 $Y=(Y_t)_{t\geq0}$，若 $t\mapsto Y_t$ 在 $\mathcal{H}$ 中强连续，且对于任意 $T>0$，$\int_0^T\|Y_t\|_{\mathcal{V}}^2\mathrm{d}t<\infty$ 几乎处处成立，则样本路径映射 $\omega\mapsto(Y_t(\omega))_{t\geq0}$ 定义了一个取值于波兰空间 Λ 的 Borel 可测随机变量，其在 Λ 上的分布由“有限维分布” $\mathbb{P}((Y_{t_1},\dots,Y_{t_\ell})\in A)$（其中 $t_1,\dots,t_\ell\in[0,\infty)$、$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}^\ell)$ 和 $\ell\in\mathbb{N}$ 唯一确定。

尽管上述结果想必广为人知，并且在关于单调随机偏微分方程的研究中已被隐式地使用（例如，[47, 附录 E] 和 [33]），但通常省略正式证明。为确保完整性，我们在下文给出证明。回顾一下，对于可分巴拿赫空间 $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$，空间 $C([0,\infty);\mathcal{X})$ 上取值于$\mathcal{X}$的连续函数空间 $[0,\infty$，赋予由 (2.1) 定义的度量后，是一个完备可分度量空间。

引理的证明 *A.3*。显然，d_Λ 在 Λ上定义了一个度量，并且 $\{\|\cdot\|_{\Lambda_T}\}_{T\in\mathbb{N}}$是 Λ 上生成拓扑（Λ，d_Λ）的可数半范数族。下文将证明 Λ的完备性和可分性，并识别其相应的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\Lambda)$。为此，由嵌入$\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{H}$ 和度量 d_Λ 的定义可知

$$C([0,\infty);\mathcal{V})\hookrightarrow\Lambda\hookrightarrow C([0,\infty);\mathcal{H}).\tag{A.1}$$

为证明 Λ的完备性，令 $\{\eta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 Λ中的一个柯西序列。由连续嵌入（A.1），$\{\eta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$也是完备度量空间 C（$[0,\infty)$中的柯西序列；$\mathcal{H}$）。因此存在一个$\eta\in C$（$[0,\infty)$，使得对任意$\mathcal{H}$），$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|\eta_t^k-\eta_t\|_{\mathcal{H}}=0$成立，其中 $T\in$（0，∞）。此外，映射 $\mathcal{H}\ni y\mapsto\|y\|_{\mathcal{V}}\in[0,\infty]$的下半连续性和法图引理给出

$$\int_0^T\|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t\leq\int_0^T\liminf_{k\to\infty}\|\eta_t^k\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t\leq\liminf_{k\to\infty}\int_0^T\|\eta_t^k\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t<\infty$$

and

$$\limsup_{k\to\infty}\int_0^T \left\|\eta_t^k-\eta_t\right\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t \le \limsup_{k\to\infty}\int_0^T \liminf_{\ell\to\infty}\left\|\eta_t^k-\eta_t^\ell\right\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t \le \lim_{k,\ell\to\infty}\int_0^T \left\|\eta_t^k-\eta_t^\ell\right\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}t = 0$$

对任意 $T\in(0,\infty)$。因此，我们有 $\eta\in\Lambda$，且 $\lim_{k\to\infty} d_\Lambda(\eta^k,\ \eta)=0$。这表明该度 c 空间 (Λ,d_Λ) 是完 备的。

为证明 Λ 的可分性，回忆连续嵌入 (A.1) 以及 $C([0,\infty);\mathcal{V})$ 的可分性，只需证明 $C([0,\infty);\mathcal{V})$ 在 Λ 中稠密。固定 $\eta\in\Lambda$。我们通过令 $\eta_t:=\eta_{-t}$（对 $t\in(-\infty,0)$）将 η 的定义域扩展为 $\mathbb{R}$。于是，我们可以将 η 视为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathcal{H}$ 的强连续映射，并且对任意 $T\in(0,\infty)$，有 $\int_{[-T,T]}\|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\mathrm{d}t<\infty$。对每个 $\varepsilon>0$，令 $\phi_\varepsilon\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为支撑于 $[-\varepsilon,\varepsilon]$上的标准磨光核，并定义 $\eta_t^\varepsilon:=\int_{\mathbb{R}}\phi_\varepsilon(t-s)\eta_s\,\mathrm{d}s$（对 $t\in[0,\infty)$，其中该积分在 $\mathcal{H}$ 上作为 Bochner 积分是良定义的。一方面，由于对每个 $T>0$，$\int_{[-T,T]}\|\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\mathrm{d}t<\infty$ 可积，我们得到对每个 $\varepsilon>0$，$\eta^\varepsilon\in C([0,\infty);\mathcal{V})$，且对任意 $T>0$，$\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{[0,T]}\|\eta_t^\varepsilon-\eta_t\|_{\mathcal{V}}^2\mathrm{d}t=0$。另一方面，由于 $\mathbb{R}\ni t\mapsto\eta_t$ 在 $\mathcal{H}$ 中强连续，对任意 $T>0$，有 $\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sup_{t\in[0,T]}\|\eta_t^\varepsilon-\eta_t\|_{\mathcal{H}}=0$。因此，当 $\varepsilon\downarrow0$ 时，η^ε 在 Λ 中收敛到 η，这表明 $C([0,\infty);\mathcal{V})$ 在 Λ 中稠密。因此，Λ 是可分的。

我们证明关于 Λ 上的 Borel σ代数 $\mathcal{B}(\Lambda)$ 的最后一个断言。首先，由于 Λ和 $C([0,\infty);\mathcal{H})$ 都是波兰空间，且 $\Lambda\hookrightarrow C([0,\infty);\mathcal{H})$，卢津–苏斯林定理（例如参见 [39, 定理 15.1]）推出$\Lambda\in\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$ 和 $\mathcal{B}(\Lambda)=\{B\cap\Lambda\,|\,B\in\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))\}$。将由柱集族 $\{\{\eta\in C([0,\infty);\mathcal{H})\,|\,\eta_t\in A\}\,|\,t\in[0,\infty)\ \ A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ 在 $C([0,\infty);\mathcal{H})$ 上生成的 σ代数记为 $\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$。接下来，我们证明 $\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))=\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$。一方面，由于对 $t\in[0,\infty)$，每个求值映射 $\eta\mapsto\eta_t$ 都是从 $C([0,\infty);\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{H}$ 的连续映射，因此有 $\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))\subset\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$。另一方面，对于任意 $\check{}\eta\in C([0,\infty);\mathcal{H})$、$T>0$ 和 $r>0$，我们有

$$\left\{\eta\in C([0,\infty);\mathcal{H})\ \middle|\ \sup_{t\in[0,T]}\left\|\eta_t-\check{\eta}_t\right\|_{\mathcal{H}}<r\right\}=\bigcup_{q\in(0,r)\cap\mathbb{Q}}\ \bigcap_{s\in[0,T]\cap\mathbb{Q}}\left\{\eta\in C([0,\infty);\mathcal{H})\ \middle|\ \left\|\eta_s-\check{\eta}_s\right\|_{\mathcal{H}}\le q\right\},$$

它属于 $\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$。由于 $C([0,\infty);\mathcal{H})$ 的拓扑由上述形式的集合族生成，我们得到 $\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))\subset\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$，从而得出 $\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))=\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))$。因此，$\Lambda$ 上的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\Lambda)$ 等于 $\{B\cap\Lambda\,|\,B\in\mathcal{B}(C([0,\infty);\mathcal{H}))\}$，并与 $\{B\cap\Lambda\,|\,B\in\mathcal{G}(C([0,\infty);\mathcal{H}))\}$ 重合。由标准单调类论证可知，后者也等于由族 $\{\{\eta\in\Lambda\,|\,\eta_t\in A\}\,|\,t\in[0,\infty)\ \ A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ 生成的 σ-代数。至此证明完毕。

□

致谢

作者谨此感谢 KiyoshiKanazawa，就本工作的物理背景进行了富有见地的讨论并提出了宝贵意见。

参考文献

[1] E. Abi Jaber 和 O. El Euch，粗糙波动率模型的多因子逼近，*SIAM J. Financ.Math.*，10(2)，309–349，2019年。[2] E. Abi Jaber、E. Miller 和 H. Pham，一类随机 Volterra 方程的线性二次控制：可解性与逼近，*Ann. Appl. Probab.*，31(5)，2244–2274，2021年。[3] A. Alfonsi 和 A. Kebaier，完全单调型核的随机 Volterra 方程逼近，*Math. Comp.*，93，643–677，2024年。[4] J. Bao、F.-Y. Wang、C. Yuan，无限记忆随机系统的渐近对数 Harnack 不等式及其应用，《随机过程及其应用》，129(11)，4576–4596，2019年。[5] C. Bayer 和 S. Breneis，分数阶核随机 Volterra 方程的马尔可夫近似，*Quant. Finance*，23(1)，53–70，2023年。

[6] C. Bayer、P.K. Friz、M. Fukasawa、J. Gatheral、A. Jacquier 和 M. Rosenbaum（编），《粗糙波动率》，SIAM：工业与应用数学学会，费城，2023年。https://doi.org/10.1137/ 1.9781611977783 [7] M. Ben Alaya、M. Friesen 和 J. Kremer，Volterra Cox–Ingersoll–Ross 过程的遍历性与大数定律，《随机过程及其应用》，165，195–234，2023年。[8] F.E. Benth、N. Detering 和 P. Kr¨uhner，随机 Volterra 积分方程与一类一阶随机偏微分方程，《随机过程及其应用》，152，321–354，2022年。[9] L.A. Bianchi、S. Bonaccorsi、O. Ca˜nadas 和 M. Friesen，随机 Volterra 过程的极限定理，预印本，arXiv:2509.08466，2025年。[10] L.A. Bianchi、S. Bonaccorsi 和 M. Friesen，高斯噪声驱动的随机 Volterra 方程的极限，《随机偏微分方程：分析与计算》，13，585–630，2025年。[11] O. Butkovsky，Wasserstein 度量下马尔可夫过程的亚几何收敛速率，《Ann. Appl. Probab.》，24(2)，526–552，2014年。[12] O. Butkovsky、A. Kulik 和 M. Scheutzow，随机偏微分方程及其他马尔可夫模型的广义耦合与遍历速率，《Ann. Appl. Probab.》，30，1–39，2020年。[13] P. Carmona 和 L. Coutin，分数布朗运动与马尔可夫性质，《Electron. Commun. Probab.》，3，95–107，1998年。[14] C. Cuchiero 和 J. Teichmann，广义 Feller 过程与随机 Volterra 过程的马尔可夫提升：仿射情形，《J. Evol. Equ.》，20，1301–1348，2020年。[15] G. Da Prato 和 J. Zabczyk，《无限维随机方程》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[16] A. Durmus、G. Fort 和 `E. Moulines，马尔可夫链在 Wasserstein 距离下的亚几何收敛速率，《Ann. Inst. H. Poincar´e Probab. Statist.》52(4)，1799–1822，2016年。[17] K. Frieler 和 C. Knoche，无限维希尔伯特空间中随机微分方程的解及其对初始数据的依赖性，学位论文，比勒费尔德大学，BoBoS-Preprint，E02-04-083，2001年。[18] M. Friesen 和 P. Jin，Volterra 平方根过程：平稳性与分布的正则性，《Ann. Appl. Probab.》，34(1A)，318–356，2024年。[19] C.W. Gardiner，《随机方法手册》，第4版，施普林格，柏林，2009年。[20] I. Gasteratos 和 A. Pannier，奇异核随机 Volterra 过程的 Kolmogorov 方程，预印本，arXiv:2509.21608，2025年。[21] L. Gawarecki 和 V. Mandrekar，《无限维随机微分方程：及其在随机偏微分方程中的应用》，施普林格，柏林，2010年。[22] N.E. Glatt-Holtz、D.P. Herzog、S.A. McKinley 和 H.D. Nguyen，具有幂律记忆的广义朗之万方程与非线性势阱，《非线性》，33，2820，2020年。[23] N.E, Glatt-Holtz、J.C. Mattingly 和 G. Richards，关于非线性随机偏微分方程的唯一遍历性，《统计物理学杂志》，166(3-4)，618–649，2017年。[24] E. Gnabeyeu 和 G. Pag`es，关于随机 Volterra 积分方程的平稳性理论，预印本，arXiv:2511.03474，2025年。[25] I. Goychuk，黏弹性亚扩散：广义朗之万方程方法，载于：《化学物理进展》，150，S.A. Rice 和 A.R. Dinner（编），约翰·威利父子公司，187–253，2012年。

[26] M. Hairer，《通过渐近耦合研究随机偏微分方程的指数混合性质》，《概率论及相关领域》，124，345–380，（2002年）。[27] M. Hairer，《由分数布朗运动驱动的随机微分方程的遍历性》，《概率年刊》，33(2)，703–758，2005年。[28] M. Hairer 和 J.C. Mattingly，《再论马尔可夫链的 Harris遍历定理》，载于：随机分析、随机场与应用研讨会第六届。《概率论进展》，63，R. Dalang、M. Dozzi 和 F. Russo（编），施普林格，巴塞尔，109–117，2011年。[29] M. Hairer、J.C. Mattingly 和 M. Scheutzow，《渐近耦合与 Harris定理的一般形式及其在随机时滞方程中的应用》，《概率论及相关领域》，149，223–259，2011年。[30] M. Hairer、A.M. Stuart 和 S.J. Vollmer，《无限维空间中 Metropolis-Hastings算法的谱隙》，《应用概率年刊》，24(6)，2455–2490，2014年。[31] Y. Hamaguchi，《无限时域后向随机 Volterra积分方程与折扣控制问题》，《ESAIM控制、优化与变分》，27(101)，47页，2021年。https://doi.org/10.1051/ cocv/2021098[32] Y. Hamaguchi，《随机Volterra积分方程的马尔可夫化提升与渐近对数 Harnack 不等式》，《随机过程及其应用》，178，104482，2024年。[33] Y. Hamaguchi，《具有完全单调核和非退化噪声的随机 Volterra 方程的弱适定性》，《应用概率年刊》，35(2)，1442–1488，2025年。[34] Y. Hamaguchi，《奇异核随机 Volterra 方程最优控制的全局最大值原理：一种无限维方法》，《微分方程杂志》，446，113618，2025年。[35] P. H¨anggi 和 H. Thomas，《随机过程：时间演化、对称性与线性响应》，《物理报告》，88(4)，207–319，1982年。[36] P. Harms 和 D. Stefanovits，《分数过程的仿射表示及其在数理金融中的应用》，《随机过程及其应用》，129(4)，1185–1228，2019年。[37] A. Jacquier、A. Pannier 和 K. Spiliopoulos，《仿射 Volterra 过程的大时间行为》，《随机学》，1–25，2025年。https://doi.org/10.1080/17442508.2025.2548587[38] K. Kanazawa 和 D. Sornette，《自激Hawkes过程的场主方程理论》，《物理评论研究》，2，033442，2020年。[39] A.S. Kechris，《经典描述集合论》，施普林格出版社，纽约，1995年。[40] N.V. Krylov 和 B.L. Rozovskiĭ，《随机演化方程》，《科学与技术成果》，现代数学问题丛书，14，71–146，1979年（俄文）；英文译本载于《苏联数学杂志》，16，1233–1277，1981年。[41] R. Kubo、M. Toda 和 N. Hashitsume，《统计物理学 II》，第2版，施普林格出版社，柏林，1991年。[42] A. Kulik，《马尔可夫过程的遍历行为：及其在极限定理中的应用》，德格鲁伊特，2018年。[43] R. Kupferman，《Kac–Zwanzig热浴模型中的分数动力学》，《统计物理学杂志》，114，291–326，2004年。[44] T. Kurtz，《一般随机模型的弱解与强解》，《电子概率通讯》，19(58)，1–16，2014年。[45] L. Li、J.-G. Liu、J. Lu，《满足涨落耗散定理的分数阶随机微分方程》，《统计物理学杂志》，169，316–339，2017年。

[46] A. Liemert、T. Sandev 和 H. Kantz，《具有回火记忆核的广义朗之万方程》，《物理学 A》，466，356–369，2017年。[47] W. Liu 和 M. R¨ockner，《随机偏微分方程：导论》，施普林格，尚姆，2015年。[48] S. Meyn 和 R.L. Tweedie，《马尔可夫链与随机稳定性》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，2009年。[49] Y. Mishura，《分数布朗运动及相关过程的随机微积分》，数学讲义，施普林格，柏林，海德堡，2008年。[50] D. Molina-Garcia、T. Sandev、H. Safdari、G. Pagnini、A. Chechkin 和 R. Metzler，《从反常扩散到正常扩散的交叉：截断幂律噪声关联及其在脂质双层动力学中的应用》，《新物理学杂志》，20(10)，103027，2018年。[51] H. Mori，《时间相关函数的连分式表示》，《理论物理进展》，34，399–416，1965年。[52] H.D. Nguyen，《具有记忆的非线性随机反应扩散方程的遍历性》，《随机过程及其应用》，155，147–179，2023年。[53] ´E. Pardoux，关于单调型随机偏 ´微分´方程，巴黎科学院报告，A-B辑 275，A101–A103，1972年。[54] ´E. Pardoux，单调型随机偏 ´微分´方程，载于：偏´微分方程研讨会（1974–1975），III，第2篇，第10页，法兰西公学院，巴黎，1975年。[55] ´E. Pardoux，《随机偏微分方程：导论》，施普林格，尚姆，2021年。[56] M. R¨ockner、S. Shang 和 T. Zhang，《具有完全局部单调系数的随机偏微分方程的适定性》，《数学年刊》，390，3419–3469，2024年。[57] S.G. Samko、A.A. Kilbas 和 O.I. Marichev，《分数阶积分与导数：理论与应用》，Gordon and Breach科学出版社，伊韦尔东，瑞士，1987年。[58] T. Sandev、I.M. Sokolov、R. Metzler 和 A. Chechkin，《超越单分数动力学》，《混沌、孤子与分形》，102，210–217，2017年。[59] A.B. Tsybakov，《非参数估计导论》。施普林格统计学丛书，施普林格，纽约，2009年。[60] F. Viens 和 J. Zhang，《分数布朗运动及相关路径依赖型偏微分方程的鞅方法》，《应用概率年刊》，29(6)，3489–3540，2019年。[61] C. Villani，《最优传输：旧与新》，数学科学基础丛书，338，施普林格，柏林，海德堡，2009年。[62] X. Zhang，《巴拿赫空间中的随机 Volterra 方程与随机偏微分方程》，《泛函分析杂志》，258，1361–1425，2010年。[63] R. Zwanzig，《非线性广义朗之万方程》，《统计物理学杂志》，9，215–220，1973年。[64] R. Zwanzig，《非平衡统计力学》，牛津大学出版社，纽约，2001年。