arXiv:2603.03272v1 [math.DG] 3 Mar 2026

无挠三维异质孤子若具有调和曲率，则具有刚性

ANDREI MOROIANU、MIGUEL PINO CARMONA 和 C. S. SHAHBAZI

Abstract. 我们证明以下刚性结论：每个挠率消失且具有调和曲率的紧致三维异质孤子都是刚性的，也就是说，它是模空间中的一个孤立点。

1. Introduction

本文的主要目标是证明紧致三维流形上具有辅助挠率消失条件的异质孤子方程组的一个刚性结论。受异质超引力启发， [2, 3], 一般的异质方程组在 [13], 中被引入；该文根据双曲三维流形以及配备左不变度量的海森堡群的紧致商，对其具有非消失平行挠率的紧致三维解进行了分类。对具有辅助挠率消失条件的紧致异质孤子进行分类要困难得多，目前仍是一个开放问题。对于辅助挠率消失的情形，非平坦孤子的三维异质孤子方程组可化为以下方程组：

$$\mathrm{Ric}^g + \nabla^g \mathrm{d}\phi - \frac{1}{2} e^{2\phi} g + \kappa\, \mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g \;= 0\,, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{d}^*_{\nabla^g} \mathcal{R}^g + \mathcal{R}^g(\mathrm{d}\phi) \;= 0\,, \tag{1.2}$$

$$\delta^g \mathrm{d}\phi + |\mathrm{d}\phi|^2_g - e^{2\phi} + \kappa\, |\mathcal{R}^g|^2_g \;= 0\,, \tag{1.3}$$

对于由三维流形 M 上的黎曼度量 g 与函数 $\phi \in C^\infty(M)$ ——即该系统所谓的膨胀子 ——所组成的偶对 (g, ϕ) 。此处 ∇^g 表示 g的列维-奇维塔联络，Ric^g 为其里奇张量， $\mathcal{R}^g$ 为其黎曼曲率张量，$\mathrm{d}^*_{\nabla^g}$ 是与 ∇^g相关联的外协变导数d_{∇^g} 的形式伴随算子， δ^g 是外微分d的形式伴随算子，并且我们已定义：

$$(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g)(v_1, v_2) := \langle v_1 \lrcorner \mathcal{R}^g, v_2 \lrcorner \mathcal{R}^g \rangle_g = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{3} \mathcal{R}^g_{v_1,e_i}(e_j, e_k) \mathcal{R}^g_{v_2,e_i}(e_j, e_k)\,,$$

$$|\mathcal{R}^g|^2_g := \langle \mathcal{R}^g, \mathcal{R}^g \rangle_g = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathcal{R}^g_{e_i,e_j}, \mathcal{R}^g_{e_i,e_j} \rangle_g = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \mathcal{R}^g_{e_i,e_j}(e_k, e_l)\, \mathcal{R}^g_{e_i,e_j}(e_k, e_l)$$

关于任意局部标准正交标架 e_i和向量 v_1， $v_2 \in \mathfrak{X}(M)$。符号$\langle \cdot,\ \cdot \rangle_g$ 表示与 g相关联的行列式度量。其关联范数记为$|\cdot|^2_g$。方程 (1.1)、(1.2) 和 (1.3) 组成的方程组是本文的研究对象。

A.M. 部分得到 PNRR-III-C9-2023-I8 项目 CF 149/31.07.2023几何与动力学的共形方面的资助。M.P.C. 得到 Santander Open Academy 基金会 UNED-Santander 2024 博士前奖学金的资助。C.S.S. 部分得到西班牙政府科学部研究项目 PID2023-152822NB-I00 的资助。A.M. 与 C.S.S. 感谢奥伯沃尔法赫数学研究所 的款待及其所提供的富有启发性的研究环境。

方程 (1.1) 是该方程组的爱因斯坦方程，而 (1.2) 是关于 Levi-Civita 联络的杨-米尔斯型方程。另一方面，方程 (1.3) 通常称为该方程组的膨胀子方程。满足方程 (1.1)、(1.2) 和 (1.3) 的解 $(g,\ \phi)$ 称为挠率消失的异质弦孤子或无挠率异质弦孤子。

目前，所有已知的三维无挠率紧致异质弦孤子都是具有常数膨胀子的爱因斯坦度量。若非平坦，则这样的异质孤子是标量曲率为 $-24\kappa^{-1}$ 的双曲度量。我们将这些孤子简称为双曲的，因为度量的双曲性迫使紧致无挠率异质弦孤子具有常数膨胀子。具有非常数膨胀子的紧致无挠率异质弦孤子是否确实存在，仍是一个重大的未决问题。构造具有非常数膨胀子的非平坦无挠率异质孤子的一种自然策略，是对一个双曲孤子进行形变。本注记的主要定理证明这是不可能的，即便允许 g 的曲率是调和的而非严格双曲的，也不可能。

定理 1.1。 设(g,ϕ) 是一个无挠率、非平坦、三维紧致异质孤子，且挠率消失、曲率调和。那么，(g,ϕ) 的本质变形向量空间是零维的。

我们所考虑的本质变形 概念，是 Koisos 的 [10] 的自然推广。也就是说，本质变形是与由微分同胚作用所生成的无穷小变形正交的无穷小变形。根据前述定理，具有调和曲率的无挠率异质弦孤子是无穷小刚性的。进而，由于存在切片和局部 Kuranishi 模型（它们可由 Diez 和 Rudolph [6, 7], 的一般理论推出），这意味着它们也是无挠率异质弦孤子模空间中的孤立点。或者，我们可以将定理 4.6 视为莫斯托刚性定理在异质孤子方程组上的自然推广。

定理 1.1 分两步证明。首先，在定理 4.6 中，我们证明三维双曲的 紧致异质孤子无穷小刚性；结合推论 4.2，即可证明其刚性。然后，在定理 5.2 中，我们证明具有调和曲率的非平坦三维紧致异质弦孤子实际上是双曲的，因此也具有刚性。

2. Preliminaries

设 M 是一个配备黎曼度量g的定向三维流形。在本文中，只要不会引起混淆，我们就利用度量将 1-形式与向量场、2-形式与反对称自同态对应起来。按照我们的约定，g 的黎曼曲率张量 $\mathcal{R}^g$ 定义如下：

$$\mathcal{R}^g_{v_1,v_2}v_3 = \nabla^g_{v_1}\nabla^g_{v_2}v_3 - \nabla^g_{v_2}\nabla^g_{v_1}v_3 - \nabla^g_{[v_1,v_2]}v_3\,, \qquad v_1,v_2,v_3 \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

我们将曲率张量 $\mathcal{R}^g$ 视为 $\Omega^2(M)\otimes\Omega^2(M)$ 的一个截面，并借助底层黎曼度量 g，将反对称自同态与二形式对应起来。按照我们的约定，里奇张量 Ric^g 定义如下：

$$\mathrm{Ric}^g(v_1,v_2) = \sum_i^3 \mathcal{R}^g_{e_i v_1}(v_2,e_i)\,, \qquad v_1,v_2 \in \mathfrak{X}(M)\,,$$

其中 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是一个标准正交标架。标量曲率为 $s_g = \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric}^g$。

为便于后续参考，我们引入作用于对称张量 $\owedge$ 的 Kulkarni-Nomizu积 $A,\ B \in \Gamma($ $T^*M \otimes T^*M)$，定义如下：

$$(A \owedge B)(v_1, v_2, v_3, v_4) = A(v_1, v_3)B(v_2, v_4) + A(v_2, v_4)B(v_1, v_3) - A(v_1, v_4)B(v_2, v_3) - A(v_2, v_3)B(v_1, v_4)\,,$$

对于任意 $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4 \in \mathfrak{X}(M)$。在三维情形下，我们可以用里奇张量和标量曲率表示黎曼张量：

$$\mathcal{R}^g = -g \owedge \mathrm{Ric}^g + \frac{1}{4} s_g\, g \owedge g\,. \tag{2.1}$$

或者，我们也可以将黎曼曲率张量写为：

$$\mathcal{R}^g_{v_1,v_2} = \frac{1}{2} s_g\, v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge \mathrm{Ric}^g(v_1) + \mathrm{Ric}^g(v_2) \wedge v_1\,, \qquad v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{2.2}$$

利用前述公式，很容易证明缩并 $\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g$ 为：

$$\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g = -\mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g + s_g \mathrm{Ric}^g + \left(|\mathrm{Ric}^g|_g^2 - \frac{1}{2} s_g^2\right) g\,, \tag{2.3}$$

其中我们定义：

$$\mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g(v_1, v_2) := g(\mathrm{Ric}^g(v_1), \mathrm{Ric}^g(v_2))\,, \qquad v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

特别地，$\mathcal{R}^g$ 的范数为：

$$|\mathcal{R}^g|_g^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g) = |\mathrm{Ric}^g|_g^2 - \frac{1}{4} s_g^2\,. \tag{2.4}$$

我们还回顾一下标准的缩并的第二比安基恒等式

$$\mathrm{d}^*_{\nabla^g} \mathcal{R}^g(v_1, v_2, v_3) = d_{\nabla^g} \mathrm{Ric}^g(v_2, v_3, v_1)\,, \qquad v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{2.5}$$

利用这些公式，方程 (1.1)、(1.2) 和 (1.3) 中给出的三维异质孤子方程组可以进一步展开并化简。

命题 2.1. 当且仅当满足以下条件时，(g, ϕ) 是在三维流形 M 上挠率消失的非平坦异质孤子：

$$-\kappa \mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g + (1 + \kappa s_g)\mathrm{Ric}^g + \frac{1}{3}\left(-s_g - \frac{3\kappa}{4} s_g^2 - |\mathrm{d}\phi|_g^2 + e^{2\phi}\right) g + \nabla^g \mathrm{d}\phi = 0\,, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{d}^*_{\nabla^g}\left(-g \owedge \mathrm{Ric}^g + \frac{1}{4} s_g\, g \owedge g\right) + \left(-g \owedge \mathrm{Ric}^g + \frac{1}{4} s_g\, g \owedge g\right)(\mathrm{d}\phi) = 0\,, \tag{2.7}$$

$$s_g - 3\delta^g \mathrm{d}\phi - 2|\mathrm{d}\phi|_g^2 + \frac{1}{2} e^{2\phi} = 0\,. \tag{2.8}$$

证明. 首先，用爱因斯坦方程 (1.1) 的迹减去膨胀子方程 (1.3) 的两倍，得到 (2.8)。

另一方面，根据一般公式 (2.1)，杨-米尔斯方程 (1.2) 等价于 (2.7)。

现在，利用 (2.3)，爱因斯坦方程 (1.1) 可以等价地写为

$$-\kappa \text{里奇}^g \circ_g \text{里奇}^g + (1 + \kappa s_g)\ \text{里奇}^g + \left(\kappa\, |\text{里奇}^g|_g^2 - \frac{\kappa}{2} s_g^2 - \frac{1}{2} e^{2\phi}\right) g + \nabla^g \mathrm{d}\phi = 0\,. \tag{2.9}$$

对 (2.9) 取迹可得

$$\kappa\,|\mathrm{Ric}^g|_g^2 = \frac{1}{2}\left(-s_g + \frac{\kappa}{2}s_g^2 + \frac{3}{2}e^{2\phi} + \delta^g \mathrm{d}\phi\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}s_g + \frac{\kappa}{2}s_g^2 + \frac{5}{3}e^{2\phi} - \frac{2}{3}|\mathrm{d}\phi|_g^2\right),$$

其中，在第二个等式中，我们使用了 (2.8) 来表示 $\delta^g \mathrm{d}\phi$。代回 (2.9) 得到

$$-\kappa \mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g + (1+\kappa s_g)\mathrm{Ric}^g + \frac{1}{3}\left(-s_g - \frac{3\kappa}{4}s_g^2 - |\mathrm{d}\phi|_g^2 + e^{2\phi}\right) g + \nabla^g \mathrm{d}\phi = 0\,,$$

这就是 (2.6)。反向进行这些计算即可证明其逆命题。 □

下文中，我们将视情况采用三维异质孤子的两种表述（有时也会将二者结合），以最方便者为准。

推论 2.2。 设(g,ϕ) 是一个挠率消失的三维异质孤子。那么：

$$\mathrm{Ric}^g(\mathrm{d}\phi) = \frac{1}{2}\mathrm{d}s_g. \tag{2.10}$$

证明。 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是一个局部标准正交标架。杨–米尔斯方程写作

$$-\nabla^g_{e_j}\mathcal{R}^g(e_j, v_1, v_2, v_3) + \mathcal{R}^g(\mathrm{d}\phi, v_1, v_2, v_3) = 0, \qquad v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{X}(M)\,,$$

其中对重复下标采用求和约定。令 $v_1 = v_2 = e_i$，并对 i 求和，得到

$$-\nabla^g_{e_j}\left(\mathcal{R}^g(e_j, e_i, e_i, v_3)\right) + \mathcal{R}^g(\mathrm{d}\phi, e_i, e_i, v_3) = 0\,.$$

S由于按定义 $\mathcal{R}^g(e_i,\cdot,\cdot,e_i) = \mathrm{Ric}^g$，利用 $\mathcal{R}^g$的对称性，我们得到

$$-\nabla^g_{e_j}\mathrm{Ric}^g(e_j, v_3) + \mathrm{Ric}^g(\mathrm{d}\phi, v_3) = 0\,.$$

缩并的第二比安基恒等式为 $\nabla^g_{e_j}\mathrm{Ric}^g(e_j, v_3) = \frac{1}{2}\mathrm{d}s_g(v_3)$，结合前一个方程可得（2.10）。 □

注 2.3. 将黎曼曲率张量 $\mathcal{R}^g$ 视为 $\Omega^2(M) \otimes \Omega^2(M)$ 的截面，杨–米尔斯方程便成为 $\Omega(M) \otimes \Omega^2(M)$ 中的一个方程。通过霍奇星算子，我们得到一个同构 $\Omega^1(M) \otimes \Omega^2(M) \cong \Omega^1(M) \otimes \Omega^1(M)$，它分解为迹、斜对称部分和无迹对称部分。恒等式（2.10）恰好是这一分解中的迹分量。

接下来，我们刻画具有常数膨胀子的无迹异质溶子。

命题 2.4. 具有挠率消失 (g,ϕ) 的非平坦紧致异质弦孤子具有常数膨胀子，当且仅当它是双曲的；在这种情况下，$\kappa s_g = -24$，且 $\kappa e^{2\phi} = 48$。

证明. 首先，假设 ϕ 是常数。那么系统 (2.6)–(2.8) 化简为：

$$-\kappa \mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g + (1+\kappa s_g)\mathrm{Ric}^g - \left(\frac{\kappa}{4}s_g^2 + s_g\right) g = 0, \tag{2.11}$$

$$d_{\nabla^g}\mathrm{Ric}^g = 0, \tag{2.12}$$

$$s_g + \frac{1}{2}e^{2\phi} = 0\,, \tag{2.13}$$

在第一个等式中，我们使用（2.13）消去了 $e^{2\phi}$；在第二个等式中，我们使用了（2.5）。方程（2.13）表明 s_g 是一个负常数，而方程（2.12）说明 Ric^g 是一个 Codazzi 张量，由于

（2.11）。根据 [4, §16.12]，（M， g），它要么是爱因斯坦的，要么是局部乘积 $\mathbb{R}\times\Sigma$，其中 Σ 是一个常曲率曲面。无论哪种情况，特征值在全局上都是常数，并且根据方程（2.11），每个特征值 λ 都满足二次方程

$$\kappa\lambda^2-(1+\kappa s_g)\lambda+\left(\frac{\kappa}{4}s_g^2+s_g\right)=0\,. \tag{2.14}$$

现在我们考察这两种可能的几何结构。

若 (M,g) 局部为乘积 $\mathbb{R}\times\Sigma$，则 Ric^g 的特征值为 $(0,\mu,\mu)$，其中 $\mu\neq 0$ 和 $s_g=2\mu$。将 $\lambda=0$ 代入（2.14）得 $\frac{\kappa}{4}s_g^2+s_g=0$，由此可知 $s_g=-\frac{4}{\kappa}$（因为 $s_g\neq 0$）。因此 $\mu=\frac{1}{2}s_g=-\frac{2}{\kappa}$。现在，特征值 μ 也必须满足（2.14）；但将 $\mu=-\frac{2}{\kappa}$ 和 $s_g=-\frac{4}{\kappa}$ 代入（2.14）左端，得到

$$\kappa\cdot\frac{4}{\kappa^2}-\left(1-\kappa\cdot\frac{4}{\kappa}\right)\left(-\frac{2}{\kappa}\right)+\left(\frac{\kappa}{4}\cdot\frac{16}{\kappa^2}-\frac{4}{\kappa}\right)=\frac{4}{\kappa}-\frac{6}{\kappa}+\frac{4}{\kappa}-\frac{4}{\kappa}=-\frac{2}{\kappa}\neq 0\,,$$

这就产生了矛盾。因此，这种情况不可能发生。

若 (M,g) 是爱因斯坦的，则 $\mathrm{Ric}^g=\frac{1}{3}s_g g$。将 $\lambda=\frac{1}{3}s_g$ 代入（2.14）得

$$\frac{1}{3}s_g\left(\frac{\kappa}{12}s_g+2\right)=0\,.$$

由于 $s_g\neq 0$（否则该孤子将是平坦的），我们得到 $s_g=-\frac{24}{\kappa}$。因此 $e^{2\phi}=-2s_g=\frac{48}{\kappa}$，且 $\mathrm{Ric}^g=-\frac{8}{\kappa}g$，即（$g$， ϕ）是双曲的。□

3. Linearization of certain curvature operators

本节中，我们研究三维异质孤子方程组中出现的某些曲率算子的线性化，这是第4.2节中异质孤子方程组线性化的预备步骤。令 $h\in\Gamma(T^*M\otimes T^*M)$。对于给定的黎曼度量 g，给定曲率算子沿 h 在 g 处的微分记为 $\mathrm{d}^g(-)(h)$。由于 $\owedge$ 是线性且对称的，黎曼曲率张量的变分为：

$$\mathrm{d}_g\mathcal{R}^g(h)=-h\owedge\mathrm{Ric}^g-g\owedge\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)+\frac{1}{4}\mathrm{d}_g s_g(h)\,g\owedge g+\frac{1}{2}s_g\,g\owedge h. \tag{3.1}$$

S标准计算给出以下恒等式（参见，例如， [4, §1.174] 或 [5]）：

$$\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)=\frac{1}{2}\Delta_L^g h-\nabla^{S,g}\nabla^{g*}h-\frac{1}{2}\nabla^g\mathrm{d}\,\mathrm{tr}_g(h)\,, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{d}_g s_g(h)=\delta^g\mathrm{d}(\mathrm{tr}_g h)+\delta^g\nabla^{g*}h-g(h,\mathrm{Ric}^g)\,, \tag{3.3}$$

其中 ∇^{g*} 是 ∇^g的形式伴随算子， $\nabla^{S,\,g}$ 是 ∇^g 的对称化，并且

$$\Delta_L^g h=\nabla^{g*}\nabla^g h+h\circ_g\mathrm{Ric}^g+\mathrm{Ric}^g\circ_g h-2\mathcal{R}_0(h)$$

是 Lichnerowicz 拉普拉斯算子，其中 $\mathcal{R}_0$ 定义为

$$\mathcal{R}_0(h)(v_1,v_2)=g(\mathcal{R}(\cdot,v_1,v_2,\cdot),h)\,.$$

以下假设背景度量 g 是爱因斯坦度量。这些假设给出以下标准关系：

$$\mathcal{R}^g=-\frac{1}{12}s_g\,g\owedge g\,,\qquad \mathrm{Ric}^g=\frac{1}{3}s_g\,g\,. \tag{3.4}$$

引理 3.1. 设(M,g) 是一个三维爱因斯坦流形。那么， $h\in\Gamma(T^*M\otimes T^*M)$ 方向上 $\mathcal{R}^g\circ_g\mathcal{R}^g$和 $|\mathcal{R}|^2_g$的线性化为：

$$\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g\circ_g\mathcal{R}^g)(h)=\frac{1}{3}s_g\,\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)-\frac{1}{18}s_g^2\,h\,, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{d}_g(|\mathcal{R}|^2_g)(h)=\frac{1}{6}s_g\,\mathrm{d}_g s_g(h)\,, \tag{3.6}$$

其中 $\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)$ 与 $\mathrm{d}_g s_g(h)$ 分别是里奇张量和标量曲率的线性化。

证明。 令 $3\lambda=s_g$。 由 (2.3)，我们计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g\circ_g\mathcal{R}^g)(h)=&-\mathrm{d}_g(\mathrm{Ric}^g\circ_g\mathrm{Ric}^g)(h)+\mathrm{d}_g(s_g\mathrm{Ric}^g)(h)\\&+\mathrm{d}_g|\mathrm{Ric}^g|^2_g(h)g-s_g\mathrm{d}_g s_g(h)g+(|\mathrm{Ric}^g|^2_g-\frac{1}{2}s_g^2)h\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

我们在爱因斯坦背景上逐项求值，并将 $\mathrm{Ric}^g\in\Gamma(T^*M\otimes T^*M)$ 的线性化视为 M 上的对称二形式，而非 TM 的端omorphism。因此，对于第一项，我们有：

$$\mathrm{d}_g(\mathrm{Ric}^g\circ_g\mathrm{Ric}^g)(h)=-\lambda^2h+2\lambda\,\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)\,.$$

其中我们已考虑到，对称二形式的 复合 $(-)\circ_g(-)$ 涉及（逆）度量，因而必须加以线性化，从而得到前一方程右端的第一项。更精确地说，我们可以写成：

$$(\mathrm{Ric}^g\circ_g\mathrm{Ric}^g)(v_1,v_2)=g^*(\mathrm{Ric}^g(v_1),\mathrm{Ric}^g(v_2))\,,\qquad v_1,v_2\in\mathfrak{X}(M)\,,$$

其中 g^*表示由 g在 T^*M上诱导的度量。将 逆 度量 g^*线性化，并在给定的爱因斯坦度量上求值，即得到上述方程中的项 $-\lambda^2h$。对于第二项，我们有：

$$\mathrm{d}_g(s_g\mathrm{Ric}^g)(h)=\lambda\,\mathrm{d}_g s_g(h)\,g+3\lambda\,\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)\,.$$

对于第三项，我们计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_g|\mathrm{Ric}^g|^2_g(h)&=2g^*(\mathrm{Ric}^g,\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h))-2g^*(h,\mathrm{Ric}^g\circ_g\mathrm{Ric}^g)\\&=2\lambda\,\mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)]-2\lambda^2\,\mathrm{tr}_g h\,,\end{aligned}$$

这里我们考虑到 Ric^g 的平方范数中包含两倍的诱导度量 g^*。利用这个方程，方程 (3.7) 中的第二行可化简如下：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_g|\mathrm{Ric}^g|^2_g(h)g-s_g\mathrm{d}_g s_g(h)g+(|\mathrm{Ric}^g|^2_g-\frac{1}{2}s_g^2)h=\\&=\big(2\lambda\,\mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)]-2\lambda^2\,\mathrm{tr}_g h-3\lambda\,\mathrm{d}_g s_g(h)\big)\,g-\frac{3}{2}\lambda^2h\,.\end{aligned}$$

综上，我们得到：

$$\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g\circ_g\mathcal{R}^g)(h)=\lambda\,\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)-\frac{1}{2}\lambda^2h+\big[2\lambda\mathrm{tr}_g(\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h))-2\lambda^2\mathrm{tr}_g h-2\lambda\,\mathrm{d}_g s_g(h)\big]\,g\,,$$

但是，由于线性化标量曲率满足

$$\mathrm{d}_g s_g(h)=-g(h,\mathrm{Ric}^g)+\mathrm{tr}_g(\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h))=-\lambda\,\mathrm{tr}_g h+\mathrm{tr}_g(\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h))\,,$$

上面的括号内表达式恒等于零。因此：

$$\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g\circ_g\mathcal{R}^g)(h)=\lambda\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)-\frac{1}{2}\lambda^2h\,.$$

代回 λ，即得 (3.5)。对 (3.5) 取迹，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g)(h)] &= \lambda \mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h)] - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathrm{tr}_g h \\ &= \lambda\, \mathrm{d}_g s_g(h) + \lambda g(h, \mathrm{Ric}^g(h)) - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathrm{tr}_g h = \lambda\, \mathrm{d}_g s_g(h) + \frac{1}{2}\lambda^2 \mathrm{tr}_g h\,.\end{aligned}$$

另一方面，将关系 $\mathrm{d}_g|\mathcal{R}^g|_g^2(h) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}_g\mathrm{tr}_g(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g)$ 线性化可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_g|\mathcal{R}^g|_g^2(h) &= -\frac{1}{2} g(h, \mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g)(h)] \\ &= -\frac{1}{4}\lambda^2 \mathrm{tr}_g(h) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g)(h)]\,,\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g = \frac{1}{2}\lambda^2 g$，由 (2.3) 得到。合并这两个表达式可得

$$\mathrm{d}_g|\mathcal{R}^g|_g^2(h) = \frac{1}{2}\lambda\, \mathrm{d}_g s_g(h)\,.$$

代回 λ，即可得 (3.6)，证明完毕。 □

注 3.2。直接从其另一种表达式 (2.4) 出发对 $|\mathcal{R}^g|_g^2$ 进行线性化，是一个有用的合理性检验：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_g|\mathcal{R}^g|_g^2(h) &= \mathrm{d}_g\left(|\mathrm{Ric}^g|_g^2 - \frac{1}{4}s_g^2\right) \\ &= -2g^*(h, \mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g) + 2g^*(\mathrm{Ric}^g, \mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h)) - \frac{1}{2}s_g\, \mathrm{d}_g s_g(h) \\ &= -\frac{2}{9}s_g^2\, \mathrm{tr}_g h + \frac{2}{3}s_g\, \mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h)] - \frac{1}{2}s_g\, \mathrm{d}_g s_g(h) = \frac{1}{6}s_g \mathrm{d}_g s_g(h)\,,\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\mathrm{d}_g s_g(h) = -g(h,\ \mathrm{Ric}^g) + \mathrm{tr}_g[\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)]$ 以及 (3.4)。这正是方程 (3.6)。

4. Rigidity of hyperbolic Heterotic solitons

本节研究无挠率异质弦系统在双曲孤子附近的模的局部结构，证明这些点在模空间中是孤立点，因此具有刚性。

4.1. 切片的存在性。 令 $\mathrm{Conf}(M)$ 表示无挠率异质弦系统的构形空间，即：

$$\mathrm{Conf}(M) = \mathrm{Met}(M) \times C^\infty(M)\,.$$

我们将其视为一个驯性 Fr´echet 流形 [9]。微分同胚群 $\mathrm{Diff}(M)$ 通过拉回在构形空间上光滑地作用：

$$\Psi\colon \mathrm{Conf}(M) \times \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Conf}(M)\,, \qquad ((g,\phi), u) \mapsto (u^* g, \phi \circ u)\,.$$

对于一个固定的孤子 (g,ϕ)，我们引入轨道映射：

$$\Psi_{g,\phi}\colon \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Conf}(M), \qquad u \mapsto (u^* g, \phi \circ u)\,.$$

可以证明，其在恒等元 $e \in \mathrm{Diff}(M)$ 处的微分为：

$$\mathrm{d}_e\Psi_{g,\phi}\colon \mathfrak{X}(M) \to T_{g,\phi}\mathrm{Conf}(M), \qquad v \mapsto (\mathcal{L}_v g,\ \mathrm{d}\phi(v))\,.$$

因此，其形式上的 L^2-伴随算子为：

$$\mathrm{d}_e\Psi_{g,\phi}^*\colon T_{(g,\phi)}\mathrm{Conf}(M) \to \mathfrak{X}(M), \qquad (h,\xi) \mapsto 2\nabla^{g*} h + \xi \mathrm{d}\phi\,.$$

$\mathrm{d}_e\Psi_{g,\ \phi}$ 的符号是单射，因此它是超定椭圆的。然后，根据闭流形上的标准椭圆理论（例如参见 [12]），可得以下L^2-正交分解：

$$T_{g,\phi}\mathrm{Conf}(M) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}_e\Psi_{g,\phi}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_e\Psi^*_{g,\phi}),$$

其中两个因子都是闭子空间。

作为 Diez 和 Rudolph 所建立的一般理论的直接推论，[6], 此作用存在一个切片 [6, 定义 2.2]。为证明这一点，我们首先注意到，根据 [8], 的一项著名结果，微分同胚群对紧流形上的黎曼度量所构成空间的作用，在每个度量 $g \in \mathrm{Met}(M)$ 处都存在切片 $S_g \subset \mathrm{Met}(M)$。该作用的稳定子群是 g 的等距变换群 $\mathrm{Iso}(M,\ g)$；众所周知，由于 M 的紧致性，该群是紧致的。因此，根据 [6, 定理 3.15]，$\mathrm{Iso}(M,\ g)$ 对 $C^\infty(M)$ 的作用存在光滑切片；结合 [6, 命题 3.29]，即可证明在 tame Fr´echet 范畴中，$\mathrm{Diff}(M)$ 对 $\mathrm{Conf}(M)$ 的作用存在光滑切片。特别地，我们得到以下结果。

命题 *4.1.* 设 $(g, \phi) \in \mathrm{Conf}(M)$。存在一个光滑子流形 $S_{g,\phi} \subset \mathrm{Conf}(M)$，以及 (g, ϕ) 的一个开邻域 $U_{g,\phi} \subset \mathrm{Conf}(M)$，该邻域与 $S_{g,\phi}/\mathcal{I}_{g,\phi}$ 同胚，其中 $\mathcal{I}_{g,\phi}$ 表示 (g, ϕ) 在 $\mathrm{Diff}(M)$ 中的稳定子群。若 $\mathcal{I}_{g,\phi}$ 是平凡的，则 $U_{g,\phi}$ 是一个光滑的 *tame Fr´echet* 流形，其模型为 *tame Fr´echet* 向量空间 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_e\Psi^*_{g,\phi}) \subset T_{g,\phi}\mathrm{Conf}(M)$。

利用三维异质系统的方程，我们引入以下 Fr´echet 流形之间的光滑映射：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{\mathrm{E}} : \mathrm{Conf}(M) \to \Gamma(T^*M \otimes T^*M)\,, && (g,\phi) \mapsto \mathrm{Ric}^g + \nabla^g \mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}e^{2\phi}g + \kappa\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g\,,\\
&\mathcal{E}_{\mathrm{YM}} : \mathrm{Conf}(M) \to \Gamma(T^*M \otimes \Omega^2(M))\,, && (g,\phi) \mapsto \mathrm{d}^*_{\nabla^g}\mathcal{R}^g + \mathcal{R}^g(\mathrm{d}\phi)\,,\\
&\mathcal{E}_{\mathrm{D}} : \mathrm{Conf}(M) \to C^\infty(M)\,, && (g,\phi) \mapsto \delta^g \mathrm{d}\phi + |\mathrm{d}\phi|^2_g - e^{2\phi} + \kappa|\mathcal{R}^g|^2_g\,.
\end{aligned}$$

我们设：

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{\mathrm{E}}, \mathcal{E}_{\mathrm{YM}}, \mathcal{E}_{\mathrm{D}}) \colon \mathrm{Conf}(M) \to \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \times \Gamma(T^*M \otimes \Omega^2(M)) \times C^\infty(M)\,.$$

映射 $\mathcal{E}$ 是微分同胚等变的，即：

$$\mathcal{E}(u^*g, \phi \circ u) = (u^*\mathcal{E}_{\mathrm{E}}(g,\phi),\ u^*\mathcal{E}_{\mathrm{YM}}(g,\phi),\ \mathcal{E}_{\mathrm{D}}(g,\phi) \circ u)\ .$$

因此，挠率消失的三维异质孤子模空间定义为：

$$\mathfrak{M}(M) := \frac{\mathcal{E}^{-1}(0)}{\mathrm{Diff}(M)}\,,$$

赋予由 $\mathrm{Conf}(M)$ 上的 Fr´echet 拓扑诱导的商拓扑。由于每个 $(g, \phi) \in \mathrm{Conf}(M)$ 都存在切片 $S_{g,\phi}$，如果 $(g, \phi) \in \mathcal{E}^{-1}(0)$，那么$[g, \phi] \in \mathfrak{M}(M)$ 具有一个与 $S_{g,\phi} \cap \mathcal{E}^{-1}(0)$ 同胚的开邻域 $U_{[g,\phi]}$：

$$U_{[g,\phi]} \simeq S_{g,\phi} \cap \mathcal{E}^{-1}(0)\,,$$

在可能缩小 $S_{g,\phi}$之后。$S_{g,\phi} \cap \mathcal{E}^{-1}(0)$ 的候选切空间，正是我们沿用 Koiso [10], 的说法所称的（g, ϕ）的本质变形 $\mathbb{E}_{(g,\phi)}$ 向量空间，即：

$$\mathbb{E}_{(g,\phi)} := \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{(g,\phi)}\mathcal{E}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_e\Psi^*_{g,\phi}).$$

这一点，加上由 [6, 定理5.3], 保证的局部 Kuranishi 模型的存在，为我们提供了刚性判据，我们将在下一小节中应用这些判据。

推论 4.2. 设(g, ϕ) 满足 $\mathbb{E}_{(g,\phi)} = 0$。那么，存在 $[g, \phi] \in \mathfrak{M}(M)$ 的一个开邻域，该邻域与一个点同胚。特别地， $[g, \phi]$ 是模空间中的一个孤立点。

4.2. **本质变形**。 设 (g, ϕ) 是一个具有常数膨胀子的三维无挠异质孤子。根据命题 2.4，它是双曲爱因斯坦的:

$$\mathrm{Ric}^g = \frac{1}{3} s_g g\,, \qquad \kappa s_g = -24\,, \qquad \kappa e^{2\phi} = 48\,. \tag{4.1}$$

切片的存在意味着，模空间在 $[g, \phi]$ 处的切空间包含于线性化方程的核与切片的交集中。

设 $(h, \xi) \in \mathbb{E}_{(g,\phi)}$。我们通过对标量恒等式进行线性化来继续:

$$s_g + |\mathrm{d}\phi|_g^2 - \frac{5}{2} e^{2\phi} + 3\kappa |\mathcal{R}^g|_g^2 = 0\,, \tag{4.2}$$

这可由将膨胀子方程 (1.3) 与爱因斯坦方程 (1.1) 的迹相加得到。在给定的双曲背景 (g, ϕ) 上利用 $\mathrm{d}\phi = 0$ ，再结合方程 (3.6)，可得:

$$0 = \mathrm{d}_g s_g(h) - 5e^{2\phi}\xi + 3\kappa\, \mathrm{d}_g(|\mathcal{R}^g|_g^2)(h) = (1 + \frac{\kappa}{2} s_g)\mathrm{d}_g s_g(h) - 5e^{2\phi}\xi\,. \tag{4.3}$$

对该方程取外微分，得到:

$$(1 + \frac{\kappa}{2} s_g)\mathrm{d}[\mathrm{d}_g s_g(h)] = 5e^{2\phi}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

另一方面，在 (g, ϕ) 处对方程 (2.10) 进行线性化，得到:

$$\mathrm{d}[\mathrm{d}_g s_g(h)] = \frac{2}{3} s_g\, \mathrm{d}\xi\,,$$

将其代回前一个方程，得到:

$$0 = ((1 + \frac{\kappa}{2} s_g)\frac{2}{3} s_g - 5e^{2\phi})\mathrm{d}\xi\,,$$

现在将背景值 $\kappa s_g = -24$, $\kappa e^{2\phi} = 48$ 代入该方程，得到:

$$-\frac{64}{\kappa}\, \mathrm{d}\xi = 0\,,$$

因此， ξ 为常数。接下来证明 $\xi = 0$。

命题 4.3。 设(g, ϕ) 是一个挠率消失的双曲异质孤子。对每个$(h, \xi) \in \mathbb{E}_{(g,\phi)}$，都有 $\xi = 0$，且$\mathrm{d}_g s_g(h) = 0$。

证明。 由于 ξ 是常数，膨胀子方程(1.3)在(g, ϕ)处的线性化为:

$$-2e^{2\phi}\xi + \kappa\, \mathrm{d}_g(|\mathcal{R}^g|_g^2)(h) = 0.$$

结合引理 3.1 和背景值 $\kappa s_g = -24$, $\kappa e^{2\phi} = 48$，该方程化简为:

$$-\frac{96}{\kappa}\, \xi + \kappa \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{-24}{\kappa} \mathrm{d}_g s_g(h) = 0\,,$$

由此可得 $\kappa\,\mathrm{d}_g s_g(h) = -24\,\xi$。另一方面，对爱因斯坦方程 (1.1) 取迹并进行线性化，可得：

$$\mathrm{d}_g s_g(h) - 3e^{2\phi}\xi + 2\kappa\cdot\frac{1}{6}s_g\,\mathrm{d}_g s_g(h) = 0.$$

代入相同的背景值以及 $\mathrm{d}_g s_g(h)$ 的表达式，得到

$$0 = -7\left(-\frac{24}{\kappa}\,\xi\right) - \frac{144}{\kappa}\,\xi = \frac{24}{\kappa}\,\xi\,,$$

因此 $\xi = 0$，进而 $\mathrm{d}_g s_g(h) = 0$。 □

接下来，我们证明本质变形自动满足横向无迹条件。

引理 4.4. 设 (g,ϕ) 为一个三维双曲异质弦孤子。对于每个 $(h,\xi) \in \mathbb{E}_{(g,\phi)}$，我们有迹 $_g h = 0$。

证明。 由于 $\nabla^{g*}h = 0$ 根据切片条件，爱因斯坦流形上标量曲率的线性化 (3.3) 可简化为

$$\mathrm{d}_g s_g(h) = \delta^g \mathrm{d}\,(\mathrm{tr}_g h) - \frac{1}{3}s_g\,\mathrm{tr}_g h,$$

命题 4.3 给出 $\mathrm{d}_g s_g(h) = 0$，因此

$$\delta^g \mathrm{d}\,(\mathrm{tr}_g h) - \frac{1}{3}s_g\,\mathrm{tr}_g h = 0\,.$$

乘以 $\mathrm{tr}_g h$ 并在 M 上积分，得到

$$0 = \int_M \left(\mathrm{tr}_g h\,\delta^g \mathrm{d}\,(\mathrm{tr}_g h) - \frac{1}{3}s_g\,(\mathrm{tr}_g h)^2\right)\nu_g = \int_M \left(|\mathrm{d}(\mathrm{tr}_g h)|_g^2 - \frac{1}{3}s_g\,(\mathrm{tr}_g h)^2\right)\nu_g\,.$$

由于 $s_g < 0$，被积函数中的两项均非负，因此它们必定处处为零。特别地，$-s_g(\mathrm{tr}_g h)^2 = 0$，这意味着 $\mathrm{tr}_g h = 0$。□

现在我们将 h 刻画为无穷小爱因斯坦变形。

引理 4.5。 设 (g,ϕ) 是一个三维双曲异质孤子。对于每个 $(h,\xi) \in \mathbb{E}_{(g,\phi)}$，$h$ 都是无穷小爱因斯坦变形。

证明。 由命题 4.3 和引理 4.4 可知 $\xi = 0$、$\mathrm{tr}_g h = 0$ 和 $\nabla^{g*}h = 0$。于是，将 (1.1) 线性化并利用 (3.5)，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) - \frac{1}{2}e^{2\phi}h + \kappa\,\mathrm{d}_g(\mathcal{R}^g \circ_g \mathcal{R}^g) \\ &= (1+\frac{\kappa}{3}s_g)\,\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) - (\frac{1}{2}e^{2\phi} + \frac{\kappa}{18}s_g^2)\,h\,. \end{aligned}$$

现在，考虑到 (4.1)，我们得到

$$0 = -7\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) - (\frac{24}{\kappa} + \frac{24^2}{18\kappa})\,h = -7\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) - \frac{56}{\kappa}\,h = -7\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) + \frac{7}{3}s_g h\,,$$

由此

$$\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) = \frac{1}{3}s_g h\,. \tag{4.4}$$

完成所有这些代换后，利用（3.5）和（4.1）并化简，线性化爱因斯坦方程（1.1）可写为：

$$\mathrm{d}_g \mathrm{Ric}^g(h) = \frac{1}{3}s_g h\,.$$

对于爱因斯坦流形上的横向无迹张量，（3.2）给出

$$\mathrm{d}_g\mathrm{Ric}^g(h)=\frac{1}{2}\Delta_L h=\frac{1}{2}\left(\nabla^{g*}\nabla^g h+\frac{2}{3}s_g h-2\mathcal{R}_0(h)\right), \tag{4.5}$$

这里我们用了 $h\circ_g \mathrm{Ric}^g+\mathrm{Ric}^g\circ_g h=\frac{2}{3}s_g h$。由 (4.4) 和 (4.5)，我们因此得到

$$\nabla^{g*}\nabla^g h-2\mathcal{R}_0(h)=0\,. \tag{4.6}$$

根据 [1]（另见 [4, §12.30]），(4.6) 等价于 h是一个无穷小爱因斯坦变形。□

现在我们可以证明第一个主要结果了。

定理 4.6。 设 (g,ϕ) 是一个挠率消失且膨胀子为常数的非平坦三维紧致异质孤子。那么，(g,ϕ) 的本质变形向量空间 $\mathbb{E}_{(g,\phi)}$ 是零维的。

证明。 由 (2.4)，度量 g 是双曲的。设 $(h,\xi)\in\mathbb{E}_{(g,\phi)}$ 是双曲孤子 (g,ϕ) 的一个本质变形。由命题 4.3，我们有 $\xi=0$。此外，由引理 4.5，h 是双曲度量g的一个本质无穷小爱因斯坦变形。于是，根据 Koiso 的经典结果 [11]（另见 [4, §12.73]），可知 $h=0$，从而 $\mathbb{E}_{(g,\phi)}=0$。□

5. Heterotic solitons with harmonic curvature

本节证明：若一个挠率消失的三维紧致异质孤子的黎曼曲率张量散度为零，则其膨胀子必为常数。结合命题 2.4，这表明此类解中唯一的非平坦解是双曲解，也使构造具有非常数膨胀子的紧致异质弦孤子更为困难。

定义 5.1。 若黎曼流形 (M,g) 的黎曼曲率张量散度为零，即 $\mathrm{d}^*_{\nabla^g}\mathcal{R}^g=0$，则称其具有调和曲率 。

在三维情形下，黎曼曲率张量的调和性等价于 Ricci 张量满足 Codazzi 条件（2.5）；而这又等价于 (M,g) 局部共形平坦且标量曲率为常数。我们尚未解决具有非常数膨胀子、因而标量曲率也非常数的局部共形平坦无挠率异质弦孤子的存在性问题。

定理 5.2。 设 M 为一个闭三维流形，且 $(g、\ \phi)$ 为一个挠率消失的非平坦异质孤子。若 g 具有调和曲率，则 $(g、\ \phi)$ 是双曲的。

证明。 假设 (g,ϕ) 在紧致定向三维流形 M上满足系统 (1.1)、(1.2) 和 (1.3)。根据假设 $\mathrm{d}^*_{\nabla^g}\mathcal{R}^g=0$，因此标量曲率 s_g 为常数。于是，由推论 2.2 可得：

$$\mathrm{Ric}^g(\mathrm{d}\phi)=0\,. \tag{5.1}$$

令 $U:=\{p\in M\mid \mathrm{d}\phi_p\neq 0\}$ 为 M 中梯度 ϕ 不消失的开子集。假设 U 非空。在 U 上定义单位1-形式：

$$u:=\frac{1}{|\mathrm{d}\phi|_g}\mathrm{d}\phi\,.$$

由 (5.1) 可知，Ric^g 在 U 上沿 $\mathrm{d}\phi$ 方向的特征值为 0。

另一方面，由于 $\mathcal{R}^g$ 的调和性等价于 $\mathrm{d}^{\nabla^g}\mathrm{Ric}^g = 0$，杨–米尔斯方程 (1.2) 化为 $\mathcal{R}^g(\mathrm{d}\phi) = 0$；或者等价地，与任意切向量场 $v_1 \in \mathfrak{X}(M)$ 作内积并使用 (2.2)，

$$\mathrm{d}\phi \wedge \left(\frac{1}{2}s_g v_1 - \mathrm{Ric}^g(v_1)\right) = 0\,. \tag{5.2}$$

因此，Ric^g 在 U 上与 $\mathrm{d}\phi$ 正交的方向上具有特征值 $\frac{s_g}{2}$。

此外，(5.1) 和 (5.2) 共同表明，我们可以将 U 上的里奇张量写为

$$\mathrm{Ric}^g = \frac{1}{2}s_g\,(g - u \otimes u)\,. \tag{5.3}$$

由 (5.3) 可计算 $\mathrm{Ric}^g \circ_g \mathrm{Ric}^g = \frac{s_g^2}{4}(g - u \otimes u)$，并且

$$|\mathrm{Ric}^g|_g^2 = \frac{1}{2}s_g^2\,. \tag{5.4}$$

将 (2.4) 和 (5.4) 代入标量恒等式 (4.2)，我们在 U 的每一点得到：

$$|\mathrm{d}\phi|_g^2 - \frac{5}{2}e^{2\phi} + s_g + \frac{3\kappa}{4}s_g^2 = 0\,.$$

定义函数 $f := |\mathrm{d}\phi|_g^2 - \frac{5}{2}e^{2\phi}$ 在 M 上。上面的等式表明

$$f = -s_g - \frac{3\kappa}{4}s_g^2$$

在 U 的每一点处，并且由于 s_g 在 M 上为常数，f 在 U 上为常数。然而，按构造，f 在 M 中 U 的补集内部也局部为常数。但 U 与其补集内部的并集在 M 上稠密，因此可知上述函数在 M 上局部为常数，进而由于 M 连通，它是常数。因此，ϕ 在最大值处和最小值处取值相同，即 ϕ 为常数。于是，根据命题 2.4，该孤子是双曲的。□

将这一结果与推论 4.2 和定理 4.6 结合起来，我们得到定理 1.1，正如引言中所述。

References

[1] M. Berger 和 D. Ebin，黎曼流形对称张量空间的某种分解，《微分几何杂志》**3**，379–392（1969）。[2] E. Bergshoeff 和 M. de Roo，十维中的超对称陈–西蒙斯项，《物理快报 B》**218** (2)，210–215（1989）。[3] E. Bergshoeff 和 M. de Roo，杂化弦的四次有效作用量与超对称性，《核物理 B》**328**(2)，439–468（1989）。[4] Besse, A.，爱因斯坦流形，施普林格出版社。（1987）。[5] S. Bunk、V. Mu˜noz 和 C. S. Shahbazi，爱因斯坦–杨–米尔斯系统的局部模空间，《亚洲数学杂志》**29**，201–252（2025）。[6] T. Diez 和 G. Rudolph，无限维中的切片定理与轨道类型分层，《微分几何及其应用》**65**，176–211，（2019）。[7] T. Diez 和 G. Rudolph，无限维中等变映射的标准形，《全球分析与几何年刊》**61**，159–213（2022）。[8] D. G. Ebin，黎曼度量流形，《纯数学专题讨论会论文集》，第15卷，美国数学会，11–40（1970）。[9] R. S. Hamilton，*Nash* 和 *Moser* 的反函数定理，《美国数学会通报》7（1982）65–223。

[10] N. Koiso，爱因斯坦度量的不可变形性，《大阪数学杂志》15(2)，419–433（1978）。[11] N. Koiso，爱因斯坦度量的刚性与稳定性：紧致对称空间的情形，《大阪数学杂志》17(1)，51–73（1980）。[12] A. Moroianu， ´A. Murcia 和 C. S. Shahbazi，异质-里奇流及其三维孤子，《几何分析杂志》**34** (5)，122（2024）。[13] A. Moroianu、M. Pino Carmona 和 C. S. Shahbazi，具有平行挠率的三维紧致异质孤子，arXiv:2601.10270。

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France, and Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21 Calea Grivitei, 010702 Bucharest, Romania电子邮箱地址：andrei.moroianu@math.cnrs.fr

Departamento de Matemáticas, Universidad UNED - Madrid, Reino de España
电子邮箱地址：mpino185@alumno.uned.es电子邮箱地址：cshahbazi@mat.uned.es