arXiv:2603.03285v1 [math.GM] 15 Dec 2025

变形胞腔空间几何

SHLOMO BARAK[1] **和 GEORGE SALMAN**[2]

[1]*Taga Innovations，18 YosefKaro* 街，特拉维夫 *6701422*，以色列[2]耶路撒冷希伯来大学计算机科学与工程学院，*Edmond J. Safra* 校区，耶路撒冷 *9190401*，以色列[*]通讯作者：*George.salman@mail.huji.ac.il*

编制于*2026*年*3*月*5*日

我们提出一种自适应几何，其中标尺与空间本身共同形变——它建立在胞腔空间之上，并将长度定义为计数：距离即最短的跨单元计数。不假设任何胞元形状、角度或嵌入；该框架刻意做到微观无关。曲率/形变通过操作性方法推断：将测量半径与根据边界/面积/体积计数重建的半径进行比较；单元的线性尺度充当普适且唯一的长度单位，从而得到适用于二维/三维/四维的统一小球/小球面估计量。我们证明，局部有限复形上的计数度量是测地度量；展示均匀格上的平坦性；并确立距离和曲率估计量在小幅局部扰动下的稳定性。作为通往光滑情形的桥梁，线密度场诱导出一种共形度量$g = e^{2u}g_0$，可恢复相同的操作性量。我们概述一种基于方向切片的类 Ricci 构造，并给出一个与施瓦西空间行为度量相符的球对称示例。总而言之，我们的模型提供了一套内禀、微观无关的演算，将离散测量与连续统概念联系起来，并提供相应保证，包括在温和正则性假设下的格罗莫夫–豪斯多夫（GH）控制。

1. 引言

变形胞腔空间几何这一概念及其物理意义早前已有阐述 [1]；本研究首次对其进行了严谨的数学表述与分析。长期以来，几何一直是物理学的标准语言。欧几里得几何描述均匀、各向同性的连续介质，而黎曼几何则将这一框架扩展到弯曲流形。自爱因斯坦创立广义相对论以来，黎曼方法一直是定量描述曲率、测地线和引力现象的基础 [2, 3]。

尽管取得了这些成就，实质性的概念与实践矛盾仍然存在。黎曼几何的内禀理论框架预设了可微性，这并不适用于颗粒状或高度非均匀的介质 [4, 5]。例如，当长度必须通过在胞腔基底中的离散遍历来推断时，角度和嵌入数据既不可得，也无关紧要。与此同时，引力和宇宙学中的长期难题——从宇宙尺度上的近乎平坦性到微观结构的组织方式——促使我们采取一种操作性方案：从受控测量中提取几何，而非通过坐标将其强加于对象之上 [6, 7]。要推进这一方案，就必须建立严谨的估计量和稳定性界，并明确说明其与光滑理论之间的极限联系。在我们看来，这不仅必要，而且迫在眉睫。

本文为允许存在n维胞状晶格的空间建立了一种几何理论，而不预先规定单元形状。晶格被视为弹性的：单元可以收缩或膨胀晶格也可以振动。点周围的曲率通过小圆（小球）超额来诊断：测量半径与根据边界/面积/体积计数重建的半径之差，两者均采用同一把尺子——胞元线性尺度（一次穿越）。这种逐点诊断能够描述源附近的局部收缩或膨胀，同时全局空间仍可能是欧几里得的（全局曲率为零）。

内禀测量使用与空间共同变形的尺子和时钟进行；可以附加环境标签用于可视化，但它们在内禀构造中不起作用。基本假设如下。**(A1) 胞腔性**：空间是具有面邻接关系的局部有限胞腔复形。**(A2) 弹性与微观不可知性**：单元大小可以变化，形状无需指定；不假设角度或嵌入。**(A3)内禀标尺**：一次单元穿越定义一个长度单位；在任何实验中，距离均按照单一且一致的规程，以最短穿越计数进行评估。**(A4) 局部性**：所有陈述和保证都是局部的，只需要有限子区域；整体无界是背景假设，而非技术要求。**(A5)胞元尺度的局部近均匀性**：对于每个紧区域K，存在常数 $\Lambda_K \geq 1$，使得当两个单元 c、c' 位于 K 中且共享一个面时，

$$\Lambda_K^{-1} \leq \frac{\ell(c')}{\ell(c)} \leq \Lambda_K$$

等价地，内禀标尺 ℓ（一次穿越相当于 $= \ell$ 个物理长度单位）不会表现出任意大的不连续

相邻单元之间的跳跃。这意味着，在足够小的邻域内，可以指定一个定义良好的局部步长 $\ell_i(x)$ 在每个主方向上（而在各向同性区域中，则为单一的 $\ell(x) = e^{u(x)}$），这正是我们在第A 节以及共形松弛 $g = e^{2u}g_0$中所使用的。

该框架以离散语言与光滑语言并行发展。在离散情形中，空间被建模为由基本单元构成的弹性格点；距离通过最短单元–穿越计数获得，曲率则由小球/球面过剩推断。在光滑松弛中，引入线密度（标尺）场以诱导共形度量 $g = e^{2u}g_0$，从而再现相同的操作量；在该松弛内，里奇张量 与里奇标量 与其标准黎曼表达式一致，而解释仍以测量为先 [8, 9]。在球对称性下，所得基于测量的标量被观察到再现施瓦西空间切片的定性行为（作为数学插曲），且加权最短路径恢复预期的弯曲区间 [10, 11]。重点放在几何与操作方面；物理解释留待配套工作。

在此设定下，我们证明若干形式结果。首先，在任意局部有限复形上，单元–穿越（计数）度量容许长度极小曲线，因而内蕴空间是测地的（第 2 节）。其次，在二维中，过剩–半径诊断经由小圆定律恢复高斯曲率：$\delta r^{per}(r) = K(x)\,6\,r^3 + o(r^3)$ 以及 $\delta r_{area}(r) = K(x)\,24\,r^3 + o(r^3)$（定理 4.1，第 4 节）。第三，对于 $m \in \{2,3,4\}$，我们引入统一的小球/球面估计量 $K(m)\,h(r) = {}^{6}m\,r^{m} - (r_c^{(m)})^{m}\,r^{m+2}$（式 Eq. (26)，第 5 节）；它具有正确的收缩/膨胀符号，在均匀格上为零，并且——在欧几里得校准之后——在领头阶识别光滑标量曲率（定理 6.1，第 6 节）。第四，通过将计数限制在测地二维切片周围的细管内，我们得到收敛到 $K_g(e_i \wedge e_j)$ 并组装 Ric 与标量曲率的方向（截面）信号（第 7 节，定理 7.3）。最后，在温和的正则性与网格假设下，我们建立定量稳定性与收敛：曲率估计量满足 $\left|\widehat{R}_m(x;r) - R_g(x)\right| \le C_1 ar + C_2 r$（定理 5.1），且度量–测度空间 $(X_a, a\,d_{l_p}, \nu_a)$ 在测度 Gromov–Hausdorff 意义下收敛到 (Ω, d_g, vol_g)（定理 3.1）。一个球对称例子说明了与施瓦西空间行为的定性一致。

路线图。第 2 节建立内蕴计数度量并证明测地线存在性。第 3 节陈述度量测度假设和测度 Gromov–Hausdorff 框架。第 4 节形式化超额半径和小圆定律。第5 节介绍统一的小球／球面估计量，验证均匀格上的平坦性，并给出定量速率。第 6 节解释共形松弛 $g = e^{2u}g_0$ 以及 标量曲率 归一化识别。第 7 节构造方向性（截面）估计量，并汇总 Ric 和 标量曲率。第 8 节直接用密度场表示曲率。附录汇集了校准、Voronoi 示例，以及测度 Gromov–Hausdorff 极限的证明。

2. 基于计数和测地线的内禀度量

操作规程（单一标尺）。本文所有内禀测量均遵循同一规程：

(i) 固定一个基单元 c_0。

(ii) 将一次面穿越的成本定为单位成本。这为实验确定了一个标尺和一个规范 。

(iii) 对于整数 $r \ge 0$，定义内禀（计数）球和球面

$$B(r) := \{c : d_h(c_0, c) \le r\}, \qquad S(r) := \{c : d_h(c_0, c) = r\}$$

我们将r 称为计数半径：它字面上就是从c_0出发所需的最少面穿越次数。

(iv) 记录$B(r)$ 和$S(r)$上的原始计数：

$$C_h(r) := |S(r)|, \quad A_h(r) := |B(r)|$$

以及在更高维数中它们的三维/四维类似量$V_h(r)$、$W_h(r)$。

(v) 使用未变形基线增长常数 $(\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$针对所选邻接关系（第 A 节）来重构半径 r_c，依据这些计数，例如

$$r_c^{(1)} = \frac{C_h(r)}{\alpha_1}, \qquad r_c^{(2)} = \sqrt{\frac{A_h(r)}{\beta_2}}, \ \dots$$

并比较r 与r_c。

步骤 (i)–(v) 不引入角度、嵌入、形状或坐标；它们只涉及单元邻接，以及每次穿越代价固定的计数。

我们在具有面邻接关系的局部有限胞腔复形上进行研究。一条（分段）路径是相邻单元的一个序列

$$\gamma : c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_k$$

且其长度 是面穿越的次数，$L(\gamma) = k$。单元 u、v 之间的内在（计数）距离 为

$$d_h(u, v) := \min_{\gamma : u \rightsquigarrow v} L(\gamma) \tag{1}$$

即连接 u 与 v 所需的最少穿越次数。这定义了一个整数值度量。

定理 2.1（局部有限复形上的测地线）。 若邻接图是局部有限的，则对每一个 u， v，存在一条达到 $d_h(u,v)$ 的路径。特别地，(单元，d_h) 是一个测地度量空间。

证明。 设 $G = (C,E)$ 为单元的邻接图；局部有限性意味着每个 $c \in C$ 具有有限的度。固定 $u \in C$。考虑广度优先搜索（BFS）层 $L_0 = \{u\}$，并归纳地，

$$L_{k+1} := \{\, w \in C \setminus (L_0 \cup \cdots \cup L_k) : \exists z \in L_k \text{ with } (z,w) \in E \,\}$$

由局部有限性，每个 L_k 都是有限的。若 $v \in L_L$ 首次出现在层 L，则从 u 到 v 的任何路径长度至少为 L，而广度优先搜索树给出一条路径 $u \to \cdots \to v$，其长度恰好为 L。因此 $d_h(u, v) = L$，且极小化值存在。故 (C,d_h)是测地的。 □

记号与测量基元。全文中固定一个基元胞c_0 并记作，

$$B(r) := \{c : d_h(c_0, c) \le r\}, \qquad S(r) := \{c : d_h(c_0, c) = r\}$$

因此，S(r) 正是第 r 层 BFS，而 B(r) 是第 0 层至第 r 层的并集。在二维中，我们记录边界和面积计数 $C_h(r) := |S(r)|$ 以及 $A_h(r) := |B(r)|$；在三维和四维中，我们以类似方式使用体积计数和超体积计数 $V_h(r)$ 和 $W_h(r)$。

校准（一个标尺）。要将计数转换回使用同一仪器“计算”出的半径，我们将所选邻接关系的未变形增长情况作为参照，并一次性确定所有常数

$$C_0(r) \sim \alpha_1 r, \quad A_0(r) \sim \beta_2 r^2, \quad V_0(r) \sim \beta_3 r^3, \quad W_0(r) \sim \beta_4 r^4$$

这些并非假设，而是基准晶格的参考值（具体示例记录于附录A）；它们仅用于定义 r_c，取自 C_h、A_h、V_h、W_h，且采用与测量半径相同的规范。

规范。对标尺进行全局缩放（例如，将每次穿越计为k 个单位）会使所有长度都按k 缩放，但无量纲陈述（诊断量的符号、比值、归一化密度）保持不变。以下所有比较均在每个实验固定的规范下进行。

A. 操作性线元与涌现度量

度量并非先验设定的；它是根据穿越多少个单元构造出来的。固定一点x，并将注意范围限制在一个小邻域内，在该邻域中，相邻单元（在一阶近似下）大小相同，因此运动可以分解为局部正交的主方向$i = 1、2、3、\ldots\ldots$，且每个方向都有确定的局部线性尺寸。设dn_i 为沿方向i 穿越单元的（整数）次数，并设 $\ell_i(x)$ 为点x处该方向上单个单元的局部线性尺寸。等价地，该方向上的局部线密度为 $\iota_i(x) := 1/\ell_i(x)$。

因此，赋予这种无穷小移动的物理长度增量为

$$ds^2 = \sum_i \big(\ell_i(x)\, dn_i\big)^2 = \sum_i \left(\frac{dn_i}{\iota_i(x)}\right)^2 \tag{2}$$

换言之，在这个局部主坐标系中，度量张量是对角的，

$$g_{ij}(x) = \operatorname{diag}\big(\ell_1(x)^2, \ell_2(x)^2, \ell_3(x)^2, \ldots\big), ds^2 = g_{ij}(x)\, dn_i\, dn_j \tag{3}$$

在各向同性区域中，邻域不仅在局部尺度上均匀，在方向上也均匀，因此所有局部单元长度都相同：

$$\ell_1(x) = \ell_2(x) = \cdots = \ell(x) \tag{4}$$

那么，式（2）可简化为

$$ds = \ell(x)\sqrt{dn_1^2 + dn_2^2 + dn_3^2 + \cdots}, \qquad g_{ij}(x) = \ell(x)^2\, \delta_{ij} \tag{5}$$

写作 $\ell(x) = e^{u(x)}$ 表明这与共形假设相符

$$g = e^{2u(x)}\, g_0 \tag{6}$$

将在后续的光滑松弛中使用。这里$u(x)$（等价地$\iota(x) = e^{u(x)}$）不过是局部标尺：它是近乎均匀的邻域中一个单元的线性尺寸。因此，光滑度量g 并非额外假设；它只是对操作规则“沿方向i 计数dn_i 个单元，并乘以该单元的局部线性尺寸”的连续体表述。

3. 度量-测度接口与假设

设有开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 以及$u \in C^2(\Omega)$。令$g = e^{2u} g_0$，且g_0 为欧几里得度量。对每个网格尺度$a > 0$，令X_a 为具有面邻接关系和胞腔集合 $\mathcal{C}_a$的局部有限胞腔复形。一个实现Φ_a： $\mathcal{C}_a \to \Omega$ 为其指定诸如胞腔重心的对象。定义$d^{*a} := a d_h$，并对胞腔测度 μ_a （计数型或加权型）设

$$\nu_a := \begin{cases} a^m\, \mu_a, & \text{if } \mu_a \text{ counts cells,} \\ \mu_a, & \text{if } \mu_a \text{ is already volumetric.} \end{cases}$$

令 ω_m 为欧氏单位球体积，并固定校准$\beta_m := \omega_m$。

关于 $K \Subset \Omega$ 的假设（常数与 a 无关）。

(H1) 局部有限性 / 度数界： 每个单元有 $\le D$ 个面相邻单元。

(H2) 形状正则性 / 网格尺寸：
$\operatorname{diam}_{g_0}(c) \in [c_0 a, C_0 a]$ whenever $\Phi_a(c) \in K$.

(H3) 粗实现：
$\Phi_a(\mathcal{C}_a \cap K)$ is Ca-dense, and $c \sim c' \Rightarrow d_{g_0}(\Phi_a(c), \Phi_a(c')) \le Ca$.

(H4) 球包含关系：
对所有满足 Φ_a的x $(x) \in K$ 且容许的r,

$$B_g(\Phi_a(x),\, ar - c_1 a) \subseteq \Phi_a(B_{d_h}(x, r)) \subseteq B_g(\Phi_a(x),\, ar + c_2 a).$$

(H5) 权重可比性 p y
there is $\Lambda \ge 1$ with $\Lambda^{-1} a^m e^{mu(\Phi_a(c))} \le \mu_a(\{c\}) \le \Lambda a^m e^{mu(\Phi_a(c))}$ for $\Phi_a(c) \in K$.

定理3.1（测度 Gromov–Hausdorff 极限）。 在(H1)–(H5)下，作为 $\to 0$,

$$(X_a, d_a^*, \nu_a) \xrightarrow[\text{mGH}]{} (\Omega, d_g, \operatorname{vol}_g)$$

4. 超额半径 δr 与小圆定律

借助内禀度量d_h 以及球/球面$B(r)$，$S(r)$ 来自第2节，所有测量均使用同一标尺：一次面穿越的代价为单位代价，并使用同一仪器将计数换算回“计算得到的”半径。见图1，以说明超额半径的操作含义。

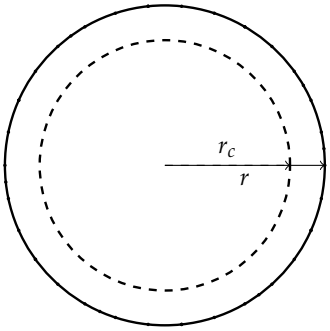
以基元胞 $r \in \mathbb{N}$为中心、内禀半径为 c_0，使用未变形标定$(\alpha_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$构造重建半径：

$$r_c^{(1)} = \frac{C_h(r)}{\alpha_1}, \qquad r_c^{(2)} = \sqrt{\frac{A_h(r)}{\beta_2}}, \qquad r_c^{(3)} = \sqrt[3]{\frac{V_h(r)}{\beta_3}}, \ldots$$

超额半径 比较了使用同一 仪器获得的两种“半径”测量结果：

$$\delta r(r) := r - r_c(r) \tag{7}$$

其中，r 是运动学半径（图距离），r_c 是组合半径（将计数反演为半径）。符号编码了几何意义：若在r固定时，周长包含的边界单元多于未变形基线，则$r_c < r$ 且 $\delta r > 0$（收缩）；若包含的边界单元少于未变形基线，则$r_c > r$ 且 $\delta r < 0$ （膨胀）。



收缩：在固定r时增加周长计数
$\Rightarrow r_c < r$ 和 $\delta r > 0$。

图 1. δ的操作含义r：测量半径r 与重构半径r_c，使用同一把标尺。

在二维中，经典的小圆定律 将基点处的高斯曲率确定为调和这两个半径时出现的阶为r^3 的障碍：

$$K(x) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{6\,\delta r(r)}{r^3} = \frac{K(x)}{6}\, r^0 \quad \Longleftrightarrow \quad \delta r(r) = \frac{K(x)}{6}\, r^3 + o(r^3) \tag{8}$$

这里没有用到角度、嵌入或胞元形状。在具有线密度 $\iota = e^u$ 和共形度量$g = e^{2u} g_0$,的光滑松弛中，恒等式$Kg = -e^{-2u}\Delta u$ 给出

$$\delta r(r) = -\frac{e^{-2u(x)}}{6}\, \Delta u(x)\, r^3 + o(r^3),$$

因此，局部标尺增大（凸的u）会产生 $\delta r > 0$，并使式（8）中出现正信号，这与离散解读一致。

定理4.1（二维小圆定律）。设 g 在 x 附近为 C^2。那么，当 $r \downarrow 0$ 时：
周长规范。

$$L_g(\partial B_g(x,r)) = 2\pi r\Big(1 - \tfrac{K(x)}{6}\, r^2 + o(r^2)\Big),$$
$$r_{c,\mathrm{per}} := \frac{L_g}{2\pi}, \qquad \delta r_{\mathrm{per}} = r - r_{c,\mathrm{per}} = \tfrac{K(x)}{6}\, r^3 + o(r^3). \tag{9}$$

面积规范。

$$\mathrm{Area}_g\big(B_g(x,r)\big) = \pi r^2\Big(1 - \tfrac{K(x)}{12}\, r^2 + o(r^2)\Big),$$
$$r_{c,\mathrm{area}} := \sqrt{\frac{\mathrm{Area}_g}{\pi}}, \qquad \delta r_{\mathrm{area}} = \tfrac{K(x)}{24}\, r^3 + o(r^3) \tag{10}$$

在共形图表中，$g = e^{2u} g_0$, 这些变为

$$\delta r_{\mathrm{per}} = -\tfrac{e^{-2u}}{6}\, \Delta u\, r^3 + o(r^3),$$
$$\delta r_{\mathrm{area}} = -\tfrac{e^{-2u}}{24}\, \Delta u\, r^3 + o(r^3). \tag{11}$$

证明。 令 $\exp_x$ 为指数映射，并使用测地极坐标 (r,θ)。度量具有如下形式

$$g = dr^2 + J(r,\theta)^2\, d\theta^2 \tag{12}$$

其中，J 是从x出发、沿单位速率测地线 γ_θ 的正交雅可比场的长度。它满足

$$\partial_{rr} J(r,\theta) + K(\gamma_\theta(r))\, J(r,\theta) = 0, \tag{13}$$
$$J(0,\theta) = 0, \qquad \partial_r J(0,\theta) = 1 \tag{14}$$

由于x附近的K 连续,

$$K(\gamma_\theta(r)) = K(x) + O(r) \qquad (r \downarrow 0) \text{ uniformly in } \theta. \tag{15}$$

对式（13）至式（14）在 $r = 0$处作泰勒展开可得

$$J(r,\theta) = r - \tfrac{K(x)}{6}\, r^3 + o(r^3) \qquad (r \downarrow 0) \tag{16}$$

在 θ 中仍然一致。

周长。由式（12）和式（16），

$$\begin{aligned} L_g\big(\partial B_g(x,r)\big) &= \int_0^{2\pi} J(r,\theta)\, d\theta \\ &= 2\pi r\Big(1 - \tfrac{K(x)}{6}\, r^2 + o(r^2)\Big) \end{aligned} \tag{17}$$

因此，

$$r_{c,\mathrm{per}} := \frac{L_g}{2\pi} = r\Big(1 - \tfrac{K(x)}{6}\, r^2 + o(r^2)\Big) \tag{18}$$

从而，

$$\delta r_{\mathrm{per}} = r - r_{c,\mathrm{per}} = \tfrac{K(x)}{6}\, r^3 + o(r^3) \tag{19}$$

面积。利用 $dA = J(r,\theta)\, dr\, d\theta$ 和式（16），

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}_g\big(B_g(x,r)\big) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} J(\rho,\theta)\, d\theta\, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^r \Big(\rho - \tfrac{K(x)}{6}\rho^3 + o(\rho^3)\Big)\, d\rho \\ &= \pi r^2\Big(1 - \tfrac{K(x)}{12}\, r^2 + o(r^2)\Big) \end{aligned} \tag{20}$$

因此，

$$r_{c,\mathrm{area}} := \sqrt{\frac{\mathrm{Area}_g}{\pi}} = r\Big(1 - \tfrac{K(x)}{24}\, r^2 + o(r^2)\Big) \tag{21}$$

and,

$$\delta r_{\mathrm{area}} = r - r_{c,\mathrm{area}} = \tfrac{K(x)}{24}\, r^3 + o(r^3) \tag{22}$$

共形图表。若 $g = e^{2u} g_0$ 在二维中，则

$$K(x) = -e^{-2u(x)}\, \Delta u(x). \tag{23}$$

将式（23）代入式（19）–式（22）可得

$$\delta r_{\mathrm{per}} = -\tfrac{e^{-2u(x)}}{6}\, \Delta u(x)\, r^3 + o(r^3) \tag{24}$$
$$\delta r_{\mathrm{area}} = -\tfrac{e^{-2u(x)}}{24}\, \Delta u(x)\, r^3 + o(r^3) \tag{25}$$

□

粒度、平均与规范。在粒度化的情形下，逐点场被理解为对内禀球上的局部平均值：$\langle f \rangle_r(x) = |Bx(r)|^{-1} \sum_{c\in B_x(r)} f(c)$。对标尺进行全局缩放（计数 $\mapsto k\cdot$计数，或 $\iota \mapsto c\,\iota$）会缩放长度，但无量纲量（δr 的符号、比值 r/r_c、归一化密度）保持不变。连续小球公式是渐近的；当r 相对于单元大小较大，且晶格在该尺度上近乎均匀时，公式才准确；若有精确计数，则应优先采用。

5. 基于计数的统一曲率估计量

下面给出统一曲率估计量的定义，它将超额半径计数与曲率联系起来。其几何解释见图 2。设$m \in \{1,2,3,4\}$表示环境维数，且$r_{(m)c}$为根据相应计数重构得到的半径，使用的标尺与第*same* 节中的相同。（例如 2 节中的$r_{(2)c} = \sqrt{A_h/\beta_2}$）。定义统一的小球/球面估计量

$$K_h^{(m)}(r) := \frac{6}{m}\,\frac{r^m - \left(r_c^{(m)}\right)^m}{r^{m+2}}, \qquad r \in \mathbb{N} \tag{26}$$

与超额半径的主要联系。写作 $w = r - r_{(m)c}$。二项式展开给出

$$K_h^{(m)}(r) = 6\,\frac{w}{r^3} + O\!\left(\frac{w^2}{r^4}\right) \tag{27}$$

特别地，在二维且邻域对称时，$K_{(2)\,h}(r) = 3\left(r^2 - (r_{(2)c})^2\right)/r^4 \approx 6\,\delta r/r^3$, 恢复第4节的小圆定律。

符号与几何（操作性描述）。在固定半径 r 下，如果边界包含的单元数多于未变形基线，那么 $r_c < r$，因此 $w = \delta r > 0$ 且 K(m) h (r) > 0（收缩）。如果包含的单元数较少，那么 $w < 0$且 K(m) h (r) < 0（膨胀）。图 2 展示了这两种情况。

未变形晶格上的平坦性。对于标准均匀格（二维中的正方形/六边形；更高m维中的立方体/超立方体），有$r_{(1)c} = r$，因此$K_{(1)\,h} \equiv 0$，而对于$m \geq 2$

$$K_h^{(m)}(r) = O(r^{-3}) \longrightarrow 0 \qquad (r \to \infty)$$

因此，估计量正确地反映了平坦性（精确公式列于附录 A）。

根据线密度/空间密度进行解释。在光滑松弛中，一个线密度（标尺）场 $\iota = e^u$ 诱导出共形度量$g = e^{2u} g_0$。在m维中，

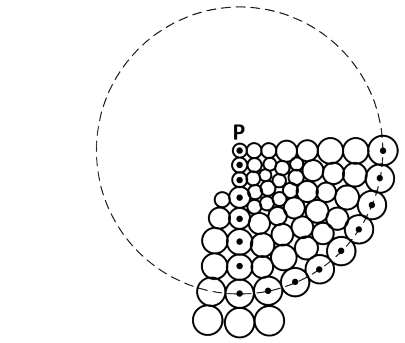
$$R_g = e^{-2u}\Big(-2(m-1)\Delta u - (m-1)(m-2)|\nabla u|^2\Big) \tag{28}$$

因此，一点处的标量曲率取决于密度的局部值（通过e^{-2u}）及其一阶/二阶导数。对于接近均匀的形状，空间密度 满足 $\rho \propto \iota^m$（在三维中：$\rho \propto \iota^3$），因此$u = \frac{1}{m}\log\rho$，而R_g 由 ρ 及其导数决定。匹配小球定律可得：对于相较曲率尺度足够小的半径r，

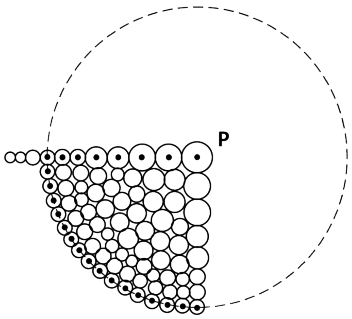
$$K_{h,R}^{(m)}(r) := 6(m+2)\,\frac{r^m - \left(r_c^{(m)}\right)^m}{r^{m+2}} = R_g(x) + O(r) \tag{29}$$

在次主阶上，统一计数估计量等于由密度场计算得到的平滑标量曲率信号。

方程（26）–方程（29）为这一操作图景奠定了精确的基础：点附近的曲率是用同一把标尺测量和重构半径时，小球之间的差异；在共形松弛中，它由局部密度及其导数通过方程（28）所支配。



(a) 正曲率（收缩）：$\delta r > 0$，$K > 0$。



(b) 负曲率（膨胀）：$\delta r < 0$，$K < 0$。

图 2。计数半径 r 处的超额半径 $\delta r = r - r_c$。每个面板显示内蕴球的一个楔形区域；圆点标出每个单元向外的边界点。虚线圆表示测量半径 r；重构的 r_c 则根据边界/面积计数，使用相同的 标尺推断得出。

表 1。小球系数及其归一化。

维数 m	体积$g(B_r) = \omega_m r^m\left[1 - \frac{R}{6(米+2)}r^2 + \cdots\right]$	$6(米+2)$
2	$\omega_2 r^2\left(1 - \text{标量曲率}_{24} r^2 + \cdots\right)$	24
3	$\omega_3 r^3\left(1 - \text{标量曲率}_{30} r^2 + \cdots\right)$	30
4	$\omega_4 r^4\left(1 - \text{标量曲率}_{36} r^2 + \cdots\right)$	36
二维圆盘	面积$(D_r) = \pi r^2\left(1 - K\frac{1}{2}r^2 + \cdots\right)$	12

可容许半径。取一个紧集$K \Subset \Omega$ 并令

$$r_{\max}(x,a) := \left\lfloor \frac{\operatorname{dist}_g(\Phi_a(x), \partial K) - Ca}{a} \right\rfloor_+$$

一个半径 $r \in \mathbb{N}$ 当且仅当 *admissible* 若 $1 \leq r \leq r_{\max}(x,\ a)$

定理 5.1 (带速率的小球识别)。假设(H1)– (H5) 在 $K \Subset \Omega$上成立。那么存在 $C_1, C_2 > 0$（仅取决于 u，∇u，$\nabla^2 u$ 在 K 上的界以及形状/次数常数），使得对于所有满足 $\Phi_a(x) \in K$ 的 x 以及所有可容许的 r，

$$\left|\widehat{R}_m(x;r) - R_g(\Phi_a(x))\right| \leq C_1\,\frac{a}{r} + C_2\,r$$

特别地，如果 $\to 0$、$r \to 0$，且 $a/r \to 0$，那么在 K 上一致地有 $\widehat{\text{标量曲率}}_m(x;r) \to$ 标量曲率$g(\Phi_a(x))$。

证明。 取满足 $\Phi_a(x) \in K$ 的x，并记 $y := \Phi_a(x)$。令

$$s := \lfloor r/a \rfloor, \qquad \rho := as, \qquad |r-\rho| \le a \tag{30}$$

设$E_s := \Phi_a(B^{d_h}(x,s))$。由 (H4)，存在$c_1, c_2 > 0$（在$K$上一致），使得

$$B_g(y, \rho - c_1 a) \subset E_s \subset B_g(y, \rho + c_2 a) \tag{31}$$

体积展开和求积误差。 在K上，小球展开一致：

$$\mathrm{Vol}_g\big(B_g(y,t)\big) = \alpha_m t^m - \alpha_m \frac{R_g(y)}{6(m+2)} t^{m+2} + O_K(t^{m+3}), \tag{32}$$

其中 $\alpha_m = \omega_m$，且$O_K(\cdot)$ 仅取决于u、∇u、$\nabla^2 u$ 在K上的界。令 ν_a 为测量测度（计数按a^m 缩放，或采用体积测度，参见 (H5)）。逐单元泰勒估计结合 (H2)–(H5) 可得求积界

$$\Big| \nu_a\big(B_{d_h}(x,s)\big) - \mathrm{Vol}_g(E_s) \Big| \le C_K\, a\, \rho^m \tag{33}$$

其中$C_K > 0$ 仅取决于形状/次数常数，C^2 为u 在K上的界。

重构半径的界。 定义$r_{(m)c}$ 为

$$\big(r_c^{(m)}\big)^m := \frac{\nu_a\big(B_{d_h}(x,s)\big)}{\alpha_m} \tag{34}$$

由式（31）–式（32）–式（33），以及对 $t \mapsto t^m$ 和 $t \mapsto t^{m+2}$ 在 $t = \rho$ 附近作一阶展开，可得

$$\begin{aligned} \big(r_c^{(m)}\big)^m &= \rho^m - \frac{R_g(y)}{6(m+2)}\rho^{m+2} + E_1(\rho,a) \\ |E_1(\rho,a)| &\le C_K\big(a\,\rho^{m-1} + \rho^{m+3}\big). \end{aligned} \tag{35}$$

此外，由式（30），

$$r^m = \rho^m + O\big(a\, r^{m-1}\big), \qquad r^{m+2} = \rho^{m+2} + O\big(a\, r^{m+1}\big), \tag{36}$$

其中常数在K上一致有界。

主要差值界。 合并式（35）–式（36），得到

$$\begin{aligned} \Delta &:= r^m - \big(r_c^{(m)}\big)^m - \frac{R_g(y)}{6(m+2)} r^{m+2} \\ &= \Big[\rho^m - \big(r_c^{(m)}\big)^m - \frac{R_g(y)}{6(m+2)}\rho^{m+2}\Big] \\ &\quad + O\big(a\, r^{m-1}\big) + O\big(a\, r^{m+1}\big) \\ &= -E_1(\rho,a) + O\big(a\, r^{m-1}\big) + O\big(a\, r^{m+1}\big) \end{aligned} \tag{37}$$

因此，利用式（35），

$$|\Delta| \le C_K\big(a\, r^{m-1} + r^{m+3}\big). \tag{38}$$

结论。 回顾归一化估计量

$$\widehat{R}_m(x;r) := 6(m+2)\,\frac{r^m - \big(r_c^{(m)}\big)^m}{r^{m+2}} \tag{39}$$

根据式（38），

$$\big|\widehat{R}_m(x;r) - R_g(y)\big| = 6(m+2)\,\frac{|\Delta|}{r^{m+2}} \le C_1\,\frac{a}{r} + C_2\, r \tag{40}$$

其中 C_1, C_2 仅取决于形状/次数常数以及 C^2在u 上的界（K）。对于满足 $\Phi_a(x) \in K$ 的x，此界是一致的。特别地，若$a \to 0$、$r \to 0$且$a/r \to 0$，则 $\widehat{R}_m(x;r) \to R_g(\Phi_a(x))$ 在K上一致成立。□

6. 局部与整体曲率；密度解释及其与光滑几何的衔接

在当前框架中，曲率是通过局部方式提取的：利用单一标尺在一个小的内蕴球上进行测量。诊断量仅取决于该球内的数据，不受远处结构的影响。与此同时，可以采用一种整体规范，使背景为欧几里得空间，同时允许源附近出现局部偏差（收缩/膨胀）。本节旨在形式化这种局部/整体划分，并说明如何通过光滑共形松弛来理解它。

一种看似诱人的替代方法是，在全局范围内“只计数单元”，再根据增长率推断曲率。但这种方法不具规范安全性：标尺的统一缩放（或单元密度的均匀变化）会使所有计数按相同比例改变，从而可能模拟或掩盖曲率。超额半径方案通过用同一仪器测量两个半径避免了这一陷阱：运动学半径r 和重构半径r_c，后者由在同一规范下进行的边界/面积/体积计数得到。只有两者之间的差异才具有几何意义。

共形松弛与密度场。 我们通过光滑的共形松弛来解释离散的、测量优先的层。开集$U \subset \mathbb{R}^m$ 上的正线密度（标尺）场 $\iota = e^u$ 诱导出

$$g := e^{2u} g_0, \qquad R_g = e^{-2u}\Big(-2(m-1)\,\Delta u - (m-1)(m-2)\,|\nabla u|^2\Big) \tag{41}$$

所有曲率张量均对应于通常的黎曼度量g；离散计数为获取其局部主导信号提供了可操作的途径。

标量曲率归一化估计量。对于 m $\in \{2,3,4\}$，令 r $\in \mathbb{N}$ 为 x 处的内在计数半径，并令 r(m)c (x;r) 为根据 m 维计数重建的半径（第 2 节）。固定基准常数 β_m，使得在未变形参考度量下，Vol$_{g_0}$(B^{g_0} (x, r)) $=\alpha_m r^m$，其中 $\beta_m = \alpha_m$（精确值见附录 A）。定义

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) := 6(m+2)\,\frac{r^m - \big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m}{r^{m+2}} \tag{42}$$

定理 6.1 (标量曲率的局部识别)。 假设 $g = e^{2u} g_0$ 且 $u \in C^2$ 在 x 附近。使用 式（42），其中 $\beta_m = \alpha_m$，

$$\lim_{r \downarrow 0} K_{h,R}^{(m)}(x;r) = R_g(x)$$

证明。 对于光滑黎曼度量，

$$\mathrm{Vol}_g\big(B_g(x,r)\big) = \alpha_m r^m - \alpha_m \frac{R_g(x)}{6(m+2)} r^{m+2} + O(r^{m+3})$$

根据定义，（r（m）c ）^{m} = 体积$_g$（B$_g$（x，r））/β_m。由 $\beta_m = \alpha_m$，

$$r^m - \big(r_c^{(m)}\big)^m = \frac{R_g(x)}{6(m+2)} r^{m+2} + O(r^{m+3})$$

Multiplying by $6(m+2)/r^{m+2}$ *gives* $K_{h,R}^{(m)}(x;r) = R_g(x) + O(r)$. □

命题 6.2 (离散到光滑的一致性)。 设胞腔复形局部有限，网格尺寸为 $a > 0$ 且纵横比有界。假设计数球 $B_h(x,r)$ 夹在度量球 $B_g(x, r - c_1 a) \subseteq B_h(x,r) \subseteq B_g(x, r + c_2 a)$ 之间，并且每个单元的

g-体积一致有界。则当 $a \to 0$ 趋于 0 且 $r \to 0$趋于无穷大，并且 $a/r \to 0$趋于 0 时，

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) = R_g(x) + o(1).$$

证明。包含关系给出 $Vol_g(B_g(x, r - c_1a)) \le |B_h(x, r)| \le Vol_g(B_g(x, r + c_2a))$。在 $r \pm ca$ 处应用小球展开，并用$\beta_m = \alpha_m$ 展开 $r^m - (r(m)c)^m$；按 $6(m+2)/r^{m+2}$缩放后，误差为 $O(a/r) + O(r)$，当 $a/r \to 0$ 且 $r \to 0$时该误差趋于零。 □

命题 6.3 (固定规范下的局部/整体分解)。若 u 在开区域 Ω 上为常数（因此此处 $g = e^{2u_0}g_0$），则对每个紧集 $K \Subset \Omega$,

$$\lim_{r\downarrow 0} \sup_{x\in K} |K_{h,R}^{(m)}(x;r)| = 0.$$

证明。若 u 为常数，则 $R_g \equiv 0$ 在 Ω。在 K 上一致地应用定理 6.1 。 □

流形状态与离散层。测量层是一个局部有限的胞腔复形，配备计数度量 d_h；定义长度、球/球面或估计量均无需流形假设。当单元准均匀且链环近似流形时，(B_R, d_h) 和 (B_R, dg) 是$(1+\delta)$ 准等距的，误差为 $\delta = O(\mathrm{osc}_{B_R} u)$；在细化且振荡受控的条件下，它们在 Gromov–Hausdorff 意义下收敛。因此，曲率可通过计数进行操作性提取，并通过$g = e^{2u}g_0$作几何解释。

里奇曲率与标量曲率（相容性）。由于该松弛即为标准度量$g = e^{2u} g_0$，里奇张量 $\mathrm{Ric}(g)$ 与标量曲率R_g 恰好就是黎曼几何中的相应量。第5节依据定理6.1给出与标量曲率R_g 一致的基于计数的局部标量；方向切片（第7节）组装出一个离散的类里奇对象，并在相同的正则性/细化假设下收敛到 $\mathrm{Ric}(g)$ 。

7. 由方向切片得到的曲率张量

在我们的框架中，曲率本质上是一种二维诊断：在任意小的内蕴圆盘上，都可以运行相同的“一把标尺、两个半径”协议，见第4节，并得到曲率信号。在更高维情形中，截面曲率、里奇曲率与标量曲率均由这些二维信号组装而成。本节将其精确化，并说明（i）如何通过仅对单元计数来获得方向/截面曲率估计，以及（ii）如何将这些逐方向信号组合为 Ric 与R ，并给出速率与收敛保证。相应的几何构型示意于图3。

设置。我们继续采用第 3 节中紧集 $K \Subset \Omega$ 上的度量测度假设（H1）–（H5）。网格尺寸为 $a > 0$ 的离散空间是一个局部有限的胞腔复形 X_a，配备内蕴计数度量 d_h；$\Phi_a : X_a \to \Omega$ 是映入光滑松弛空间 (Ω, g)的实现映射，其中 $g = e^{2u}g_0$。逐胞腔测度与 g-体积可比（H5）。以下所有测量仍使用同一把标尺：一次面穿越的成本为单位值。

在基元胞 $x \in X_a$（其中 $\Phi_a(x) \in K$）处，选取一个 g-正交归一标架 $\{e_1, \dots, e_m\}$，位于 $T_{\Phi_a(x)}\Omega$ 中。对于每个 $i < j$，令

$$\Sigma_{ij} := \exp_{\Phi_a(x)}(\mathrm{span}\{e_i, e_j\})$$

由e_i,ej张成的二维测地曲面。把Σ_{ij} 视作经过 $\Phi_a(x)$的无穷小ij平面，只不过它位于(Ω, g)内部。

步骤 1. 切片上的纯二维曲率信号。

在 Σ_{ij} 内部，我们可以重复第4节中的二维超额半径方案：取一个半径为 ρ的小g测地圆盘，计算其g面积，使用相同的二维校准 $\beta_2 = \pi$根据面积反推出半径，并进行比较。

定义

$$\widehat{K}_{ij}^{\mathrm{geom}}(\Phi_a(x);\rho) := 3\,\frac{\rho^2 - \big(r_{c,ij}^{(2)}(\rho)\big)^2}{\rho^4} \tag{43}$$

其中

$$\big(r_{c,ij}^{(2)}(\rho)\big)^2 := \frac{\mathrm{Area}_g\big(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x),\rho)\big)}{\beta_2}, \qquad \beta_2 = \pi$$

根据光滑二维曲面上的标准小圆盘展开，若 $K^{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x))$ 是 Σ_{ij} 在 (x) 处的高斯曲率，则

$$\mathrm{Area}_g\big(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x),\rho)\big) = \pi\rho^2 - \frac{\pi}{12}K_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x))\,\rho^4 + O(\rho^5), \quad \rho \downarrow 0$$

将其代入方程（43）得

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \widehat{K}_{ij}^{\mathrm{geom}}(\Phi_a(x);\rho) = K_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x)) = K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x)) \tag{44}$$

也就是说，g 在 $e_i \wedge ej$ 平面上的截面曲率。

方程（44）是一个光滑的陈述。现在我们将其与实际测量的离散复形X_a联系起来。

步骤 2. 将计数限制在一条细管内（离散测量）。

我们无法从X_a中真正地切割出理想曲面 Σ_{ij}，因为X_a 是组合的。相反，我们选取在 Φ_a 下的像落在Σ_{ij}周围厚度为$O(a)$ 的细 Fermi 管内的所有单元，并且只计数这些单元。

固定 $\tau \ge 1$。对于$r \in \mathbb{N}$，定义离散管状区域

$$\mathcal{T}_{ij}(x;r,a) := \Big\{c \in B_{d_h}(x,r) : \mathrm{dist}_g\big(\Phi_a(c), \Sigma_{ij}\big) \le \tau a\Big\} \tag{45}$$

这里，$B^{d_h}(x, r)$ 表示以x为中心、半径为r 的内蕴（计数）球。

直观来说：我们考察以x为中心、内蕴半径为r 的圆盘，但只保留位于光滑二维切片 Σ_{ij} 的物理g距离 τa范围内的单元。

接下来，我们用同一把标尺，将这种管状计数转换为“有效切片半径”。令 $\alpha_2 = \pi$。定义

$$R_{c,ij}(x;r,a) := \left(\frac{1}{2\tau a\,\alpha_2}\,\nu_a\big(\mathcal{T}_{ij}(x;r,a)\big)\right)^{1/2} \tag{46}$$

这里，$\nu_a(\cdot)$ 是式 (H5) 中的单胞权重，它与每个单元的 g-体积一致可比。除以 $2\tau a$ 后，管状“体积”便塌缩为切片圆盘的有效 g-面积；再除以 $\alpha_2 = \pi$，即可得到半径平方，这与第 4 节中的二维重构完全相同。

式（45）和式（46）中的所有内容都是计数的内蕴量（外加 Φ_a）。离散系统中不测量角度或嵌入。

步骤 3。带有速率的离散截面曲率估计量。

定义（仅基于计数的）方向曲率估计

$$\widehat{K}_{ij,a}(x;r) := 3\,\frac{r^2 - \big(R_{c,ij}(x;r,a)/a\big)^2}{r^4} \tag{47}$$

下一个引理将式（46）中的管状邻域计数与 Σ_{ij} 中测地圆盘的光滑面积联系起来，从而也与 $K_g(e_i \wedge ej)$ 联系起来，并给出明确的误差界。我们给出完整论证。

引理 7.1（切片耦合与归一化）。假设紧集 K 上满足 (H1)–(H5)，且 $x \in X_a$，其中 $\Phi_a(x) \in K$。固定 $i < j$，并令 $\Sigma_{ij} = \exp_{\Phi_a(x)}(\mathrm{span}\{e_i, e_j\})$。那么，对所有可容许半径 r（即 r 足够小，使得 $B^{d_h}(x, r)$ 在尺度 a 下位于 K 内），以及所有充分小的 $a > 0$，存在一个常数

$$C = C(K, \tau, \text{shape/degree bounds}, \|u\|_{C^2(K)})$$

使得

$$\left| r^2 - \left(R_{c,ij}(x; r, a)/a\right)^2 - \tfrac{1}{12} K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))\, r^4 \right| \le C\left(a\, r + r^5\right) \tag{48}$$

证明。我们分四步进行。

步骤1：费米坐标与管状区域雅可比。在光滑曲面 Σ_{ij} 附近 Φ_a(x)周围的费米坐标(p, t)中进行讨论。此处p位于 Σ_{ij} 中，t为到 Σ_{ij} 的带符号法向距离。对于|t| $\le \tau$a以及沿 Σ_{ij}到 Φ_a(x)的测地距离在 ρ 以内的p，标准费米展开（例如参见Petersen [9]）给出

$$d\mathrm{vol}_g = J(p,t)\, dA_{\Sigma_{ij}}(p)\, dt, \qquad J(p,t) = 1 + O(|t| + \rho) \tag{49}$$

$O(|t| + \rho)$ 项在紧集K上是一致的，其中常数依赖于g的曲率界。

特别地，将t 从 $-\tau a$ 积分到 τa，

$$\int_{-\tau a}^{\tau a} J(p,t)\, dt = 2\tau a + O(a^2 + a\,\rho) = 2\tau a + O(a^2 + a^2 r), \tag{50}$$

一旦我们之后设定 $\rho = ar$

步骤 2：离散管状区域与几何管状区域。定义半厚度为 τa 、切片内半径为 $\rho = ar$的几何g管状区域：

$$\mathrm{Tube}_\tau(\rho) := \left\{ y \in \Omega : \begin{array}{l} \mathrm{dist}_g(y, \Sigma_{ij}) \le \tau a, \\ \mathrm{dist}_g(\Phi_a(x), y) \le \rho + O(a) \end{array} \right\}$$

根据 (H2)–(H5)，对该区域内所有满足 $\Phi_a(c)$ 的单元$c \in X_a$ 求和，可在a的一阶精度上近似其g-体积：更确切地说，存在一个统一常数C_1，使得

$$\left| \nu_a(\mathcal{T}_{ij}(x; r, a)) - \mathrm{vol}_g(\mathrm{Tube}_\tau(\rho)) \right| \le C_1\, a\, \rho^{m-1} \tag{51}$$

其中m = 维数Ω，且 $\rho = ar$。这里用到了：(i) 局部有限性和形状正则性 (H1)、(H2)；(ii) Φ_a 的畸变为 $\lesssim a$ (H3)；(iii) (H5)表明 $\nu_a(\{c\})$ 近似该单元的体积 vol$g$，误差至多为一个统一的乘法常数；(iv) 度量边界处的内外误差最多相当于一层厚度为 $\sim a$的单元，覆盖尺度为 ρ^{m-1}的$(m-1)$维边界。

步骤 3：将管状体积分解为（厚度）×（切片面积）。根据Tube的构造τ（ρ）以及式（49）–式（50），

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_g(\mathrm{Tube}_\tau(\rho)) &= \int_{B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), \rho)} \int_{-\tau a}^{\tau a} J(p,t)\, dt\, dA_{\Sigma_{ij}}(p) \\ &= 2\tau a\, \mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), \rho)\right) + E_{\mathrm{tube}}(\rho, a), \end{aligned} \tag{52}$$

其中误差Etube(ρ,a) 满足

$$\begin{aligned} \left| E_{\mathrm{tube}}(\rho, a) \right| \le\ & C_2 \Big(a^2\, \mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), \rho)\right) \\ & + a\,\rho\, \mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), \rho)\right) \Big). \end{aligned} \tag{53}$$

由于面积$g(B^{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x),\, \rho)) \sim \rho^2$ 对于较小的 ρ，且 $\rho = ar$，这意味着

$$\begin{aligned} \left| E_{\mathrm{tube}}(\rho, a) \right| &\le C_3\left(a^2\,\rho^2 + a\,\rho\,\rho^2\right) \\ &= C_3\left(a^2\,\rho^2 + a\,\rho^3\right) \\ &\le C_4\, a^3 r^2 + C_4\, a^4 r^3 \end{aligned} \tag{54}$$

特别地，Etube$(\rho,a) = O(a^3r^2)$ 在K上一致成立。

结合式（51）和式（52），并利用 $\rho = ar$，我们得到

$$\begin{aligned} \nu_a(\mathcal{T}_{ij}(x; r, a)) &= 2\tau a\, \mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), ar)\right) \\ &\quad + E_{\mathrm{tube}}(ar, a) + O\left(a\,(ar)^{m-1}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

$$= 2\tau a\, \mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), ar)\right) + O(a^3 r^2) + O\left(a^m r^{m-1}\right) \tag{56}$$

对于固定的$m \ge 2$ 以及较小的r，$O(a^m r^{m-1})$ 项始终$\le Ca^3r^2$（因为$a \ll 1$ 且r 有界）。因此我们可以将其并入$O(a^3r^2)$。

步骤 4：提取标量曲率$c,\ ij$ 并比较半径。由式（46）和式（56），

$$\begin{aligned} \left(R_{c,ij}(x; r, a)\right)^2 &= \frac{1}{2\tau a\, \alpha_2}\, \nu_a(\mathcal{T}_{ij}(x; r, a)) \\ &= \frac{\mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), ar)\right)}{\alpha_2} + O(a^2 r^2) \end{aligned} \tag{57}$$

现在对 Σ_{ij}使用小圆盘面积展开：

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}_g\left(B_{\Sigma_{ij}}(\Phi_a(x), ar)\right) &= \alpha_2 (ar)^2 - \alpha_2 \frac{K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))}{12}\, (ar)^4 \\ &\quad + O\left((ar)^5\right). \end{aligned} \tag{58}$$

与 $\alpha_2 = \pi$ 将式（58）代入式（57）得到

$$\begin{aligned} \left(R_{c,ij}(x; r, a)\right)^2 &= (ar)^2 - \frac{K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))}{12}\, (ar)^4 + O(a^5 r^5) + O(a^2 r^2) \\ &= a^2 \left[r^2 - \frac{K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))}{12}\, r^4 \right] + O(a^3 r^2) + O(a^5 r^5) \end{aligned} \tag{59}$$

将式（59）的两边除以a^2：

$$\begin{aligned} \left(R_{c,ij}(x; r, a)/a\right)^2 &= r^2 - \frac{K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))}{12}\, r^4 \\ &\quad + O(ar) + O(a^3 r^3) \end{aligned} \tag{60}$$

由于r 很小，$a^3r^3 \le r^5$ 对所有充分小的a 以及容许的r成立，因此我们可以改写

$$\left(R_{c,ij}(x; r, a)/a\right)^2 = r^2 - \frac{K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))}{12}\, r^4 + O(ar) + O(r^5) \tag{61}$$

整理式（61）恰好得到式（48）：

$$\left| r^2 - \left(R_{c,ij}(x; r, a)/a\right)^2 - \tfrac{1}{12} K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))\, r^4 \right| \le C\left(ar + r^5\right)$$

至此，证明完成。 □

由引理 7.1，我们立即控制估计量式（47）：

推论 7.2（方向估计量速率）。 在引理 7.1 的假设下，存在

$$C = C(K, \tau, \text{shape/degree bounds}, \|u\|_{C^2(K)})$$

使得对所有可容许的 r，

$$\left|\widehat{K}_{ij,a}(x;r) - K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))\right| \;\le\; C\left(\frac{a}{r} + r\right) \tag{62}$$

特别地，选取 $r \simeq \sqrt{a}$ 可在 $\overline{K}$ 上给出一致误差 $O(\sqrt{a})$。

证明。 从引理7.1出发，其表明

$$\left(R_{c,ij}/a\right)^2 = r^2 - \frac{K_g(e_i \wedge e_j)}{12}\, r^4 + E, \quad |E| \le C(ar + r^5)$$

整理得：

$$r^2 - \left(R_{c,ij}/a\right)^2 = \frac{K_g(e_i \wedge e_j)}{12}\, r^4 - E.$$

现在代入方程（47）：

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{ij,a}(x;r) &= 3\,\frac{r^2 - (R_{c,ij}/a)^2}{r^4} \\ &= 3\,\frac{\frac{K_g(e_i\wedge e_j)}{12}\, r^4 - E}{r^4} \\ &= \frac{K_g(e_i \wedge e_j)}{4} - 3\,\frac{E}{r^4}.\end{aligned}$$

注意：我们需要谨慎处理常数。回想一下，在二维（第4节）中，我们有 $3(r^2 - r_c^2)/r^4 = K + O(r)$。完全相同的计算逐切片成立，即

$$3\,\frac{r^2 - \left(R_{c,ij}/a\right)^2}{r^4} = K_g(e_i \wedge e_j) + O(r) + O\big(a/r\big).$$

$O(r)$ 和$O(a/r)$ 来自于利用 $|E| \le C(ar + r^5)$ 对E/r^4 进行界定。事实上，

$$\frac{|E|}{r^4} \;\le\; C\left(\frac{ar}{r^4} + \frac{r^5}{r^4}\right) = C\left(\frac{a}{r^3} + r\right)$$

由于r 是离散球中的内禀半径（整数步数），我们只考虑这样的缩放区间：以物理单位计，$r \to 0$，但$r \gg a$，因此$a/r \to 0$。在该区间内$a\, r^3 \lesssim ar$ （因为$r \le 1$ 在物理上）。因此我们得到

$$\left|\widehat{K}_{ij,a}(x;r) - K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x))\right| \;\le\; C\left(\frac{a}{r} + r\right)$$

正如所述。 □

该推论意味着，当$a \to 0$、$r \to 0$且$a/r \to 0$时，离散截面信号收敛到光滑截面曲率：

定理 7.3（方向识别）。 在(H1)–(H5)条件下，对于任意满足 $a \to 0$、$r \to 0$ 且 $a/r \to 0$ 的$(a,\ r)$ 序列，

$$\lim_{\substack{a\to 0,\ r\to 0\\ a/r\to 0}} \widehat{K}_{ij,a}(x;r) \;=\; K_g(e_i \wedge e_j)(\Phi_a(x)) \tag{63}$$

证明。 由推论 7.2直接可得，因为式（62）右端在 $a \to 0$、$r \to 0$，$a/r \to 0$时趋于 0。 □

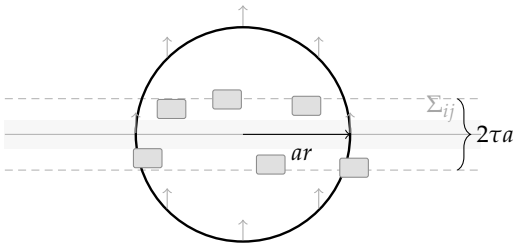


图 3. 围绕测地切片Σ_{ij}、厚度为 $2\tau a$ 的 Fermi 管。我们只对该管内的单元权重求和，然后除以管厚度 $2\tau a$，以恢复有效切片面积。由此得到 标量曲率$_{c,ij}(x;r,a)$，并通过式（47）得到截面曲率 $K_g(e_i \wedge e_j)$的仅计数估计量 $\widehat{K}_{ij,a}(x;r)$。

步骤 4. 重构完整的曲率算子、Ric 和 标量曲率。
一旦我们拥有了估计量 $\widehat{K}_{ij,a}(x;r)$，我们就能够重构完整的黎曼曲率算子及其所有收缩。

Let

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 T_{\Phi_a(x)}\Omega \longrightarrow \Lambda^2 T_{\Phi_a(x)}\Omega$$

为 g 的曲率算子。对任意简单二形式 $u \wedge v \neq 0$，有

$$K_g(u \wedge v) \;=\; \frac{\langle \mathcal{R}(u \wedge v),\, u \wedge v\rangle}{\|u \wedge v\|^2} \tag{64}$$

在 $m = 3$ 中，选取 $\Lambda^2 T_{\Phi_a(x)}\Omega$ 的标准正交基：

$$\sigma_1 := e_2 \wedge e_3, \qquad \sigma_2 := e_3 \wedge e_1, \qquad \sigma_3 := e_1 \wedge e_2.$$

在此基下，$\mathcal{R}$ 由一个对称的 3×3 矩阵 M 表示。对角元恰好是截面曲率：

$$M_{11} = K_g(e_2 \wedge e_3), \qquad M_{22} = K_g(e_3 \wedge e_1), \qquad M_{33} = K_g(e_1 \wedge e_2) \tag{65}$$

非对角项来自极化。例如，考虑

$$\xi \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2 - \sigma_3) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((e_3 \wedge e_1) - (e_1 \wedge e_2)\Big)$$

于是由式（64），

$$\begin{aligned} K_g(\xi) &= \frac{\langle \mathcal{R}\xi, \xi\rangle}{\|\xi\|^2} = \frac{1}{2}\big(M_{22} + M_{33} - 2M_{23}\big) \\ \Longrightarrow \quad M_{23} &= \frac{1}{2}\Big(M_{22} + M_{33} - K_g(\xi)\Big)\end{aligned} \tag{66}$$

类似的线性组合可恢复 M_{12} 与 M_{13}。因此，知道所有相关的截面曲率（包括此类混合方向 ξ）即可确定 M。

现在，将式（65）–式（66）中的每个光滑曲率替换为相应的离散估计 $\widehat{K}_{ij,a}(x;r)$（并将对适当的平面线性组合应用相同的管状构造所得到的$K_g(\xi)$ 替换为显然的离散类比）。将结果记为 $\widehat{M}_a(x;r)$。

定理 7.4（三维曲率算子的重建）。在 (H1)–(H5) 下，设 $\widehat{M}_a(x;r)$ 由 $\widehat{K}_{ij,\,a}(x;r)$ 如上得到。则对任意 $a \to 0$、$r \to 0$，且 $a/r \to 0$，我们有

$$\lim_{\substack{a\to 0,\ r\to 0\\ a/r\to 0}} \widehat{M}_a(x;r) \;=\; M(\Phi_a(x)) \quad \textit{entrywise}$$

证明。 逐项收敛由推论 7.2 应用于每个所需的截面曲率方向而得到。

例如，M_{11} 是$K_g(e_2 \wedge e_3)$ 由公式（65）得出，而离散代理量为 $\widehat{K}_{23,a}(x;\ r)$。推论7.2 给出

$$\left|\widehat{K}_{23,a}(x;r) - K_g(e_2\wedge e_3)(\Phi_a(x))\right| \ \le\ C\left(\frac{a}{r}+r\right) \xrightarrow[a\to 0,\ r\to 0,\ a/r\to 0]{} 0$$

因此 $\widehat{M}_a(x;\ r)_{11} \to M_{11}(\Phi_a(x))$。对于$M_{22}$ 和M_{33}，情况也类似。

对于M_{23}，我们使用公式（66）取 ξ 定义一个离散估计量，即以该二维曲面为中心构造一个管状区域，其在 $\Phi_a(x)$ 处的切二维平面由$(e_3 \wedge e_1) - (e_1 \wedge e_2)$（归一化）张成，然后采用相同的管状区域限制计数构造。推论7.2 再次意味着

$$\widehat{K}_{\xi,a}(x;r) \ \longrightarrow\ K_g(\xi)(\Phi_a(x))$$

将离散量代入

$$M_{23} = \frac{1}{2}\Big(M_{22} + M_{33} - K_g(\xi)\Big)$$

（以及M_{12}, M_{13}的类似公式）可得 $\widehat{M}_a(x;r)_{23} \to M_{23}(\Phi_a(x))$，其他非对角项也类似。因此，$\widehat{M}_a(x;r)$ 的每个元素都收敛到$M(\Phi_a(x))$的对应元素。 □

最后，通过标准缩并得到 Ric 和标量曲率 。例如，在三维中，

$$\mathrm{Ric}(e_1,e_1) = K_g(e_1\wedge e_2) + K_g(e_1\wedge e_3). \tag{67}$$

$$R = 2\Big(K_g(e_1\wedge e_2) + K_g(e_1\wedge e_3) + K_g(e_2\wedge e_3)\Big) \tag{68}$$

因此，我们定义仅基于计数的里奇曲率和标量曲率估计量

$$\widehat{\mathrm{Ric}}_a(e_1,e_1;x;r) := \widehat{K}_{12,a}(x;r) + \widehat{K}_{13,a}(x;r),$$

$$\widehat{R}_a(x;r) := 2\Big(\widehat{K}_{12,a}(x;r) + \widehat{K}_{13,a}(x;r) + \widehat{K}_{23,a}(x;r)\Big) \tag{69}$$

Ric(e_2,e_2) 和 Ric(e_3,e_3)也类似。

根据推论 7.2 和定理 7.4，

$$\widehat{\mathrm{Ric}}_a(e_i,e_i;x;r) \ \longrightarrow\ \mathrm{Ric}_g(e_i,e_i)(\Phi_a(x)) \quad \text{as } a\to 0,\ r\to 0,\ a/r\to 0$$

$$\widehat{R}_a(x;r) \ \longrightarrow\ R_g(\Phi_a(x)) \quad \text{as } a\to 0,\ r\to 0,\ a/r\to 0$$

关键点。所有原始输入——K_{ij}、$_a$、Ric$_a$和R_a——都来自对精心选定区域内单元的计数，并且始终使用同一把标尺（每穿越 $=$ 次为一个单位）。光滑度量 $g = e^{2u}g_0$ 仅用于解释这些计数收敛到什么值，以及证明收敛速率。

8. 仅凭计数求标量曲率

固定 $m \ge 2$。设 X_a 为局部有限的单元复形，其内禀（计数）度量为 d_h，每次面穿越 $=1$。对于基元胞 x 和内禀半径 $r \in \mathbb{N}$，记

$$B_{d_h}(x,r) := \{c:\ d_h(x,c) \le r\}, \qquad |B_{d_h}(x,r)| := \#\,B_{d_h}(x,r) \tag{70}$$

令 $\beta_m > 0$ 为所选基线邻接关系对应的固定m维校准常数（因此，在未变形参考度量的晶格中，内禀半径为r 的球包含 $\beta_m\, r^m$ 个单元；见附录A）。我们定义两个操作性量。

(i) 重构半径。尺度r下的重构m维体积半径为

$$\big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m := \frac{|B_{d_h}(x,r)|}{\beta_m} \tag{71}$$

如果空间未发生变形且完全符合基准状态，那么根据观测到的计数 $|B^{d_h}(x,\ r)|$，就能推断出这个半径。

(ii) 局部密度。在尺度r处的局部空间密度为

$$\rho_a(x;r) := \frac{|B_{d_h}(x,r)|}{\beta_m\, r^m} = \frac{\big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m}{r^m} d \tag{72}$$

因此，在未形变基线格上，$\rho_a(x;\ r) = 1$；局部压缩时（相同计数半径内的单元数多于基准值），$\rho_a(x;\ r) > 1$；局部膨胀时，$\rho_a(x;\ r) < 1$。

为了将这些纯粹的体积信息转化为曲率信号，我们比较r（测得的计数半径）与$r_{(m)c}\,(x;r)$（根据相同数据重构得到的半径），并对其重新缩放，以消除平凡的r依赖。定义归一化小球估计量

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) := 6(m+2)\,\frac{r^m - \big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m}{r^{m+2}} \tag{73}$$

利用式（72），

$$\big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m = \rho_a(x;r)\, r^m$$

so

$$r^m - \big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m = r^m\big(1-\rho_a(x;r)\big) \tag{74}$$

因此式（73）变为

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) = 6(m+2)\,\frac{r^m\big(1-\rho_a(x;r)\big)}{r^{m+2}} = 6(m+2)\,\frac{1-\rho_a(x;r)}{r^2} \tag{75}$$

式（75）仅涉及计数。对于每个 x 和尺度 r，我们：(i) 取内蕴球 B^{d_h}(x, r)，(ii) 计数其中的单元，(iii) 根据式（72）计算 ρ_a(x; r)，(iv) 将 ρ_a(x; r)代入式（75）。测量 K(m) h,R (x; r) 无需坐标、角度、导数，也无需任何形状假设。所需的一切只是计数。光滑度量 g $= e^{2u}g_0$ 仅在解释极限以及下文式（76）的误差界证明中才会出现。

现在陈述收敛结果。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集，且 $u \in C^2(\Omega)$，并设 $g = e^{2u}g_0$ 为 Ω上的共形度量。对于每个网格尺度 $a > 0$，设 X_a 为一个局部有限复形，其实现映射为 $\Phi_a : X_a \to \Omega$，且单胞权重为 ν_a，它们在给定的紧集 $K \Subset \Omega$ 上满足 (H1)–(H5)（第3节）。用 R_g 表示 (Ω,g)的标量曲率。

定理 8.1 (仅计数标量曲率)。 设 $K \Subset \Omega$，并假设 (H1)–(H5) 在 K 上成立，其中 $\beta_m = \omega_m$（欧氏单位球体积）见式 (71)–式 (72)。那么存在常数 $C_1, C_2 > 0$，其仅取决于(H1)–(H2)中的形状与次数界以及$\|u\|_{C^2(K)}$，使得对于每个满足 $\Phi_a(x) \in K$ 的 $x \in X_a$，以及每个可容许的内在半径 r，

$$\left|K_{h,R}^{(m)}(x;r) - R_g\big(\Phi_a(x)\big)\right| \ \le\ C_1\,\frac{a}{r} \ +\ C_2\, r \tag{76}$$

特别地，如果 $\to 0$、$r \to 0$，且 $a/r \to 0$，那么

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) \ \longrightarrow\ R_g\big(\Phi_a(x)\big) \quad \textit{uniformly for } \Phi_a(x) \in K. \tag{77}$$

证明。 我们简要说明论证；所有步骤都在K 上局部进行，且常数在K上一致。

(1) 计数球与 g-球。 由 (H4) 可知，存在 $c_1, c_2 > 0$ ，使得对于任意 $x \in X_a$ 满足 $\Phi_a(x) \in K$ 且任意可容许的 r，

$$B_g\big(\Phi_a(x),\, ar - c_1 a\big) \subseteq \Phi_a\big(B_{d_h}(x,r)\big) \subseteq B_g\big(\Phi_a(x),\, ar + c_2 a\big) \tag{78}$$

因此，半径为 r 的内蕴计数球夹在两个半径分别为 $\rho_\pm = ar \pm O(a)$ 的 g-度量球之间。

(2) 体积求积。由 (H5)， $\nu_a(\{c\})$ 与单元 c 的 g-体积一致可比，因此对 ν_a 在 $B^{d_h}(x, r)$ 上求和，可将 $\mathrm{Vol}_g(B_g(\Phi_a(x), \rho))$ 近似到 $O(a\rho^{m-1})$ 的误差，其中 $\rho \asymp ar$。由于$|B^{d_h}(x, r)|$ 与 $\nu_a(B^{d_h}(x, r))$ 仅相差 (H5) 中的统一单胞权重，因此这给出了 $|B^{d_h}(x, r)|$ 与 $\mathrm{Vol}_g(B_g(\Phi_a(x), ar))$ 之间的一阶控制。

（*3*）小球展开。对于光滑的g，g–体积满足以下关系：

$$\mathrm{Vol}_g\big(B_g(y,\rho)\big) = \omega_m \rho^m - \omega_m \frac{R_g(y)}{6(m+2)} \rho^{m+2} + O(\rho^{m+3}), \quad \rho \downarrow 0$$

对 y 属于 K 的情形均一致。取 $\rho = ar$ 并使用式（78）和步骤（2），得到

$$\big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m = r^m - \frac{R_g(\Phi_a(x))}{6(m+2)} r^{m+2} + E(x;a,r) \tag{79}$$

with

$$|E(x;a,r)| \le C\big(a\, r^{m-1} + r^{m+3}\big)$$

其中C 仅依赖于K、（H1）–（H2）以及 $\|\mu\|_{C^2}(K)$ 。

（*4*）代入估计量。用r^m 减去式（79），再乘以 6（m +2）/r^{m+2}:

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) = 6(m+2)\, \frac{r^m - \big(r_c^{(m)}(x;r)\big)^m}{r^{m+2}} = R_g(\Phi_a(x)) + \tilde{E}(x;a,r)$$

其中

$$|\tilde{E}(x;a,r)| \le C_1 \frac{a}{r} + C_2\, r$$

这恰好就是式（76），其中 C_1,C_2 仅依赖于相同的数据。

(5) 极限。若$a \to 0$， $r \to 0$，且$a/r \to 0$，则方程（76）右端为零，由此得到方程（77）。 □

方程（75）、方程（76）和方程（77）给出了完整的内禀方案：

- 通过在尺度 r 下进行一次计数实验（即仅根据 $|B^{d_h}(x,\ r)|$），我们计算出 $\rho_a(x;r)$，进而得到 $K^{(m)}{}_h$、标量曲率$(x;r)$。
- $K^{(m)}{}_h$、标量曲率$(x;r)$ 经过量纲归一化，且符号正确：局部堆积比基线标定更紧密时为正，比基线标定更疏松时为负。
- 在细化过程中（$a \to 0$， $r \to 0$， $a/r \to 0$），这个纯组合量收敛到连续统松弛标量曲率$_g$。$g = e^{2u} g0$。

总之，

$$K_{h,R}^{(m)}(x;r) = 6(m+2)\, \frac{1 - \rho_a(x;r)}{r^2} \quad \longrightarrow \quad R_g(\Phi_a(x))$$

以及左侧所有输入都只是单元计数。

9. 结论

我们提出了一种内禀的测量优先几何，其中长度以计数表示，而曲率则是用一个长度单位测得的小圆/小球不匹配中的操作系数；该长度单位等于一次单元穿越。距离完全由最短面穿越计数定义，并且在每个局部有限复形上，这种计数度量都是测地的。由此得到的超额半径诊断量被整合为统一的小球/小球面估计量，它们能够：（i）在未变形晶格上取零；（ii）以正确的符号检测局部收缩/膨胀；（iii）在连续统极限中识别光滑的标量曲率。

关键在于，标量曲率估计量 K(m) h,R (x; r)、方向截面曲率估计量 $\widehat{\ }$K$_{ij,a}$(x; r)，以及它们的里奇/迹组合$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Ric$_a$ 和 R$_a$，都仅由计数得到：固定一个基元胞，选取一个内禀半径，计数相应内蕴球（或管状区域限制切片）中的单元，再在同一规范下比较测得的半径与重构半径。进行测量无需坐标、角度、导数，也不需要任何形状假设。光滑度量 g = e^{2u}g$_0$ 仅用于解释极限对象并证明误差界：在温和的正则性和网格假设下，我们得到一致收敛速率 O(a/r +r)；而在联合极限 a $\to$ 0、r $\to$ 0、a/r $\to$ 0下，离散估计量收敛到黎曼标量曲率 R$_g$、截面曲率 K$_g$ (e$_i$ ∧e$_j$)，进而收敛到 Ric$_g$ 本身。

因此，该框架微观无关且无角度，同时又具备精确的连续统接口。它提供了一条直接的操作性桥梁，将形变细胞介质上的原始计数连接到光滑共形松弛的标准曲率数据$g = e^{2u} g_0$，，并通过小球速率量化稳定性，且在测度的 Gromov–Hausdorff 意义下收敛。

A. 基线计数与校准

本附录统一记号，并消除以下两者之间可能存在的歧义：(i) 用于离散诊断的 邻接关系特定的 晶格校准，以及 (ii) 用于 欧几里得 校准的 R–归一化估计量（参见第 6节）。

B. 邻接关系特定的基线（离散诊断）

对于 $\mathbb{Z}^m$ 上的 ℓ^1 邻接关系，内蕴球和球面计数为

$$|B_m(r)| = \sum_{k=0}^{m} 2^k \binom{m}{k}\binom{r}{k}, \qquad |S_m(r)| = |B_m(r)| - |B_m(r-1)| \tag{80}$$

按照约定 $\binom{r}{0} = 1$且 $\binom{r}{k} = 0$，其中$k > r$。特别地：

$$m = 2: \quad |S_2(r)| = 4r, \quad |B_2(r)| = 2r^2 + 2r + 1$$
$$m = 3: \quad |B_3(r)| = \tfrac{4}{3}r^3 + 2r^2 + \tfrac{8}{3}r + 1$$

以及 $|S_3(r)| = |B_3(r)| - |B_3(r-1)| = 4r^2 + 2$。因此，我们用于离散 半径重构的未变形晶格校准为

$$\alpha_1^{\square} = 4, \qquad \beta_2^{\square} = 2, \qquad \beta_3^{\square} = \tfrac{4}{3}, \qquad \beta_4^{\square} = \tfrac{2}{3}$$

(and analogously for hexagonal/cubic/hypercubic variants), so that $r_c^{(1)} = C_h/\alpha_1$, $r_c^{(2)} = \sqrt{A_h/\beta_2}$, $r_c^{(3)} = \sqrt[3]{V_h/\beta_3}$, etc.

引理 B.1（式（80）的推导）. 对于 $m \ge 1$ 和 $r \in \mathbb{N}$,

| $_m$ | = $\sum_{k=0}^{m} 2^k$ ^{m} $_k$ ^{r} $_k$. $B(r)(k)(k)$.

证明。整数向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$ 满足 $\|\mathbf{x}\|_1 \le r$ 当且仅当恰有 k 个坐标非零（$0 \le k \le \min\{m, r\}$），我们有 $\binom{m}{k}$ 种方式选择这 k 个坐标，有 2^k 种方式选择它们的符号，并将总和为 $\le r$ 的数分配给 k 个正整数：将整数 $\le r$ 分成 k 部分（允许为 0）的方法数等于 $\binom{r}{k}$。对 k 求和即可得到该公式。$|S_m(r)|$ 是 $|B_m(r)| - |B_m(r-1)|$ 的前向差分。 □

C. 欧几里得校准（针对标量曲率归一化估计量）

当我们将小球失配与光滑的标量曲率联系起来时，我们以欧几里得体积 $\alpha_m = \omega_m$ 为基准进行归一化：

$$\mathrm{Vol}_g\big(B_g(x,r)\big) = \alpha_m r^m - \alpha_m \frac{R_g(x)}{6(m+2)} r^{m+2} + O(r^{m+3})$$

因此，在标量曲率归一化估计量 $\mathrm{K}(m)\, h,R\,(x;r) = 6(m+2)\big(r^m - (r(m)c)^m\big)/r^{m+2}$ 的定义中令 $\beta_m = \alpha_m = \omega_m$，从而使得当 $r \downarrow 0$ 时，$\mathrm{K}(m)\, h,R\,(x;r) \to R_g(x)$（定理 6.1）。

总结。与未变形的邻接关系比较时使用 $(\alpha_1^{\square}, \beta_m^{\square})$，而针对标量曲率时使用 $\beta_m = \omega_m$。

D. 沃罗诺伊复形上的例子

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为开集，$u \in C^2(\Omega)$，且 $g = e^{2u} g_0$。对 $h > 0$，设 $\mathcal{P}_h \subset \Omega$ 为一个有限集，且其为关于 g 准均匀：存在常数 $0 < \delta \le \Delta < \infty$（与 h 无关），使得

$$\delta h \le \mathrm{dist}_g(p, \mathcal{P}_h \backslash \{p\}) \le \sup_{x \in \Omega} \mathrm{dist}_g(x, \mathcal{P}_h) \le \Delta h \quad \text{for all } p \in \mathcal{P}_h \tag{81}$$

设 $\{V_p\}_{p \in \mathcal{P}_h}$ 为沃罗诺伊镶嵌（取 g–度量），并设 X_h 为胞腔复形，其单元为 $\{V_p\}$，并具有面邻接。定义 $\Phi_h(V_p) := p$ 以及计数度量 d_h（定义在 X_h 上），如第2节所述。设 μ_h 为每个单元指定其 g–体积，即 $\mu_h(\{V_p\}) = \mathrm{Vol}_g(V_p)$，并令 $\nu_h := \mu_h$（从而 ν_h 为体积型）。

命题 D.1（沃罗诺伊复形满足 (H1)–(H5)）。假设 式 (81) 且 u 为 C^2 在紧集 K 上具有有界导数 $\in \Omega$。则当 h 足够小时，沃罗诺伊复形 X_h 连同实现 Φ_h 与测度 ν_h 满足 (H1)–(H5) 在 K 上，且 $a := h$。

证明。固定 $K \Subset \Omega$。式（81）中的界蕴含 g–半径为 $\asymp h$ 的球包含并被包含于每个与 K 相交的沃罗诺伊胞腔；由于 u 为 C^2 于 K，g 与 g_0 在 K 上双 Lipschitz 等价，且常数不依赖于 h。我们验证这些假设。

（*H1*）局部有限性 / 度数界。若各单元的内/外 g–半径以 $c_1 h$ 与 $c_2 h$ 在 K 上一致为界（此为式（81）的推论），则仅有 $O(1)$ 个单元能与给定的 V_p 相交；特别地，面度数一致有界，因此邻接图是局部有限的。

（*H2*）形状正则性 / 网格尺寸。对 p 满足 $V_p \cap K \neq \emptyset$ 者，拟一致性给出

$$B_g(p, c_1 h) \subset V_p \subset B_g(p, c_2 h)$$

因此 $\mathrm{diam}_{g_0}(V_p) \in [\tilde{c}_1 h, \tilde{c}_2 h]$ 在 K 上由 g 与 g_0 的双 Lipschitz 等价得到。

(H3) 粗实现。Φ_h 在站点上是恒等映射；根据外半径界，相邻单元中心之间的 g_0 距离为 $\le Ch$，因此在 K 上可得粗实现和 Ch 密度。

(H4) 球包含关系。设 $\mathbf{x} \in X_h$ 满足 $\Phi_h(\mathbf{x}) \in K$。从 $\Phi_h(\mathbf{x})$ 出发、长度为 L 的任意 g 路径至多与 $C\,L/h$ 个不同的 Voronoi 单元相交，因为每次穿越一个单元至少需要走过长度为 $\ge c_1 h$ 的 g 内半径。因此 $d_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le C\, d_g(\Phi_h(\mathbf{x}), \Phi_h(\mathbf{y}))/h$。反过来，若最短 d_h 路径包含 r 个单元，则其 g 长度为 $\ge c' r h$，因为每一步都要穿过一个面，且该面距 g 为 $\ge c' h$。因此

$$B_g\big(\Phi_h(x), c' r h\big) \subseteq \Phi_h\big(B_{d_h}(x, r)\big) \subseteq B_g\big(\Phi_h(x), C r h\big)$$

这就是所需的包含关系，其中有一个 $= h$。

（*H5*）权重可比性。在 K 上，u 有界于 C^2，，因此 $\mathrm{Vol}_g(V_p) \asymp h^m e^{m u(p)}$ 在所有与 K 相交的单元上是一致的。因此存在 $\Lambda \ge 1$，使得

$$\Lambda^{-1} h^m e^{m u(\Phi_h(V_p))} \le \nu_h(\{V_p\}) \le \Lambda h^m e^{m u(\Phi_h(V_p))}$$

所有常数仅依赖于 K、δ、Δ，以及 u 及其在 K 上的导数的界，而不依赖于 h。 □

推论D.2（Voronoi 上的方向收敛与标量收敛）。在命题 D.1 的假设下，设 $\widehat{K}_{ij,h}(x; r)$ 为根据测地切片 Σ_{ij} 周围 $O(h)$ 厚的 *Fermi* 管中的计数计算得到的方向估计量（如引理 7.1 所述），并设 $\widehat{R}_m$ 为 R 归一化小球估计量式（42）。那么，对于所有满足 $\Phi_h(x) \in K$ 的 x 以及所有可取的 r，

$$\big|\widehat{K}_{ij,h}(x;r) - K_g(e_i \wedge e_j)(x)\big| \le C\left(\frac{h}{r} + r\right)$$
$$\big|\widehat{R}_m(x;r) - R_g(\Phi_h(x))\big| \le C\left(\frac{h}{r} + r\right)$$

取 $r \simeq \sqrt{h}$ 可得误差 $O(\sqrt{h})$。这些常数仅依赖于 K、准均匀性参数以及 u 在 K 上的 C^2 界。

证明。命题 D.1 验证了 (H1)–(H5)，其中 $a = h$。于是，根据定理5.1（标量）和引理 7.1及其推论（方向），可得这些界；注意到在 K 上，同一 $O(h/r + r)$ 阶估计一致成立。$h/r + r$ 的极小化值为 $r = \sqrt{h}$，因此得到 $O(\sqrt{h})$。 □

E. 示例：通过密度构造的共形凸起

对于 $m \in \{2, 3\}$，设 $\rho(x) = \exp(\varepsilon \varphi(x))$ 光滑、紧支撑且 ε 很小。令 $u = \frac{1}{m} \log \rho = \frac{\varepsilon}{m} \varphi$。仅由密度产生的标量曲率信号（第 8 节）为

$$R(x) = \rho(x)^{-2/m} \left[-\frac{2(m-1)}{m} \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{(m-1)(m+2)}{m^2} \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho^2} \right]$$

对 ε 作一阶近似后，可化为 $R(x) = -\frac{2(m-1)}{m^2} \varepsilon \Delta \varphi(x) + O(\varepsilon^2)$。相对于 $\mathcal{P}_h$ 对 $g = e^{2u} g_0$ 进行准均匀采样并构造沃罗诺伊复形 X_h，推论D.2 结合 $r \simeq \sqrt{h}$ 可得

$$\widehat{R}_m(x;r) = R(x) + O(\sqrt{h}) + O(\varepsilon^2)$$

在 φ 的支撑内部的紧集上一致收敛。这为估计量的符号和定位提供了清晰的非格点合理性检验。

F. 测度GH极限的证明（定理 3.1）

我们先证明在紧集上的收敛，然后穷尽 Ω。下文中，C 表示一个仅依赖于所考虑紧集上 (H1)–(H5) 中数据的常数（该常数可能随行而变）。

命题F.1(紧集上的局部测度GH)。 固定 $K \Subset \Omega$。在 K 上满足(H1)–(H5) 的条件下，存在 $a_0 > 0$ 和 $C_K > 0$，使得对所有 $a \in (0, a_0]$，都存在一个对应关系 $\mathcal{R}_a \subset X_a \times \Omega$，满足

$$\operatorname{dis}(\mathcal{R}_a) \le C_K\, a \tag{82}$$

and

$$d_{\mathrm{P}}\Big((\Phi_a)_{\#}\nu_a^K,\ \mathrm{vol}_g^K\Big) \le C_K\, a \tag{83}$$

其中 d_{P} 是概率 测度上的 *Prokhorov*距离，并且

$$\nu_a^K := \frac{\nu_a\llcorner \Phi_a^{-1}(K)}{\nu_a\big(\Phi_a^{-1}(K)\big)}, \qquad \mathrm{vol}_g^K := \frac{\mathrm{vol}_g\llcorner K}{\mathrm{vol}_g(K)} \tag{84}$$

因此，$(X_a, d^*a,\, \nu_a) \to (\Omega, dg, \mathrm{vol}g)$ 在 K 上的测度*GH*意义下。

证明。**度量畸变界**。 取 $K' \Subset K$，使得 $\mathrm{dist}_g(K', \partial K) \ge c\, a$，其中 $c > 0$ 为某个固定常数。令

$$\mathcal{R}_a := \big\{(x, \Phi_a(x)) : \Phi_a(x) \in K'\big\} \subset X_a \times \Omega. \tag{85}$$

由 (H4)，对于任意 $x \in X_a$，若 $\Phi_a(x) \in K'$，且任意整数 $r \ge 0$，

$$B_g\big(\Phi_a(x),\, ar - c_1 a\big) \subseteq \Phi_a\big(B_{d_h}(x, r)\big) \subseteq B_g\big(\Phi_a(x),\, ar + c_2 a\big) \tag{86}$$

设 x, y $\in$ Xa，且 Φ_a(x), Φ_a(y) $\in$ K′。在式 (86) 中取最小的 r = d_h(x,y)，并比较使Φ_a(y) $\in$ Bg(Φ_a(x), 满足 + c_2a 的下确界 s，可得

$$\Big|\, d_g(\Phi_a(x), \Phi_a(y)) - a\, d_h(x, y) \,\Big| \le Ca \tag{87}$$

由于 $d^*a = a d_h$，式 (87) 推出

$$\sup_{(x,p),(y,q)\in\mathcal{R}_a} \big|\, d_g(p, q) - d_a^*(x, y) \,\big| \le Ca \tag{88}$$

即 $\operatorname{dis}(\mathcal{R}_a) \le Ca$，从而证明式 (82)（以 C_K 代替 C）。

推前测度界。设 $\psi \in C_c^{\infty}$ ′ $\|\psi\|_{C^1} \le$ $C(K)$ 满足 (K)。利用 (H1)–(H2) 以及5逐单元的泰勒估计，

$$\begin{aligned}\int \psi\, d\big((\Phi_a)_{\#}\nu_a\big) &= \sum_{\substack{c\in\mathcal{C}_a \\ \Phi_a(c)\in K'}} \psi\big(\Phi_a(c)\big)\, \nu_a(\{c\}) \\ &= \int_{K'} \psi\, d\mathrm{vol}_g + O_K(a)\end{aligned} \tag{89}$$

(此处$O_K(a)$ 仅依赖于形状与次数界以及$\|u\|_{C^2(K)}$。）将其按式（84)归一化为概率后，同一估计给出

$$\Big|\, \int \psi\, d\big((\Phi_a)_{\#}\nu_a^K\big) - \int \psi\, d\mathrm{vol}_g^K \,\Big| \le C_K\, a \tag{90}$$

由于 $C_c^{\infty}(K')$ 在 K' 上的有界—Lipschitz类中稠密，且两个测度在 K上都是紧的，式（90）推出

$$d_{\mathrm{BL}}\Big((\Phi_a)_{\#}\nu_a^K,\ \mathrm{vol}_g^K\Big) \le C_K\, a \tag{91}$$

Prokhorov距离在紧致度量空间上度量弱收敛，且受d_{BL}控制；因此

$$d_{\mathrm{P}}\Big((\Phi_a)_{\#}\nu_a^K,\ \mathrm{vol}_g^K\Big) \le C_K\, a \tag{92}$$

这就是式（83）。

关于 K 的结论。将式（82）和式（83）与测度Gromov-Hausdorff收敛的标准刻画相结合，即通过畸变很小且推前测度偏差很小的对应关系，可得关于 K 的结论。 □

定理 3.1 的证明。令 $\{K_n\}_{n\ge1}$ 穷尽 Ω，其中各紧集具有光滑边界。由命题 F.1，对每个固定的 n，

$$d_{\mathrm{mGH}}\Big((X_a, d_a^*, \nu_a)\big|_{K_n},\ (\Omega, d_g, \mathrm{vol}_g)\big|_{K_n}\Big) \le C_{K_n}\, a \tag{93}$$

对 n 作对角论证，可得测度GH收敛在紧集上局部一致，从而 $(X_a, d^*a,\, \nu_a) \xrightarrow{\mathrm{mGH}} (\Omega, d_g, \mathrm{vol}_g)$. □

经费支持。 无。

披露声明。 作者声明不存在利益冲突 。

数据可用性。 本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

1. S. Barak，“变形三维空间晶格的宇宙几何”，HAL档案库（2025年）。HAL编号：hal-04670068。2. A. Einstein，“论理论物理学的方法”，《科学哲学》**1**，163–169（1934年）。赫伯特·斯宾塞讲座，牛津，1933年。3. W. Rindler，《相对论：狭义、广义与宇宙学》（牛津大学出版社，2004年）。4. T. Regge，“没有坐标的广义相对论”，《新物理评论》**19**，558–571（1961年）。5. D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生教材第33卷（美国数学学会，2001年）。6. F. Morgan，《黎曼几何：初学者指南》（A K Peters，1998年），第2版。7. M. P. do Carmo，《黎曼几何》（Birkhäuser，1992年）。8. A.I. Bobenko 和Y. B.Suris，《离散微分几何：可积结构》（美国数学学会，2008年）。9. P. Petersen，《黎曼几何》，数学研究生教材第171卷（施普林格，2016年），第3版。10. R. M. Wald，《广义相对论》（芝加哥大学出版社，1984年）。11. C. W. Misner、K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler，《引力》（W. H. Freeman，1973年）。