# 约化超群、超域、超模及相关结构的公理：超复合结构的新公理基础

CHRISTOS G. MASSOUROS

摘要： 本文探讨超合成代数中各类结构的公理基础。研究证明，许多超合成结构定义中所采用的公理并不具有独立性。因此，本文提出了新的定义，通过减少必要的公理集合，最大限度地简化现有定义。

## 1. 引言

公理的独立性，以及某些公理是否可以由其他公理推导出来的问题，处于数学思想的核心地位。自古以来，平行公设相对于欧几里得几何其余公理的独立性一直是引发深刻思考的源头。这场延续数个世纪的探索最终孕育了全新的思想世界：罗巴切夫斯基的双曲几何（1829年）和黎曼的椭圆几何（1854年）。这些历史发展提醒我们，公理系统的精确表述并非仅仅是技术细节问题，而是整个数学理论的范围与形态赖以确立的基础。

本文考察了超群、超域、超模及相关结构中的公理独立性。研究表明，在这些结构的定义中通常包含的某些公理，实际上可以由其他公理推导出来，因此无需将其作为独立公设。这一发现不仅简化并澄清了超合成结构的基础，也维护了公设与定理之间严格的概念界限。

第2节首先研究超群——这种基础性的超合成结构由法国数学家 F. Marty 于 1934年 引入 [1]。尽管 Marty 的一生短暂得令人惋惜——他在第二次世界大战期间阵亡——但他发表了三篇关于这一主题的开创性论文 [1–3]。这些著作为超群及随后更复杂的超合成结构的发展奠定了基础。下文逐字转载了 Marty 的论文 [1] 中给出超群定义的内容：

设一个非空元素集合，具有四种组合运算，，，$A\ AAB\ BA\ B\ B$；

*2020*年《数学》主题分类. 20N20, 12K99, 16Y20关键词和短语。超合成；超群；多对称超群；超环；超域；乘法超环；超环；超模；向量超空间。

其中每个元素都可能有多个值；前两个运算是结合的。若 $C$ 是 $AB$ 的一个值，我们将写作 $AB\ C$ $\supset$ （$AB$ 包含 $C$）。如果两个除法与乘法满足以下关系，我们就称这个族构成一个超群：

$$\frac{A}{B}\Big| \supset C \ \rightleftarrows\ BC \supset A$$

$$et \qquad \frac{A}{|B} \supset C \ \rightleftarrows\ CB \supset A$$

一年后，即 1935年，F. Marty 在 [2], 中研究了一类具有中性元的特殊超群，并将其称为“正规超群”（正规超群）。1936年，他在 [3]中重复了上述超群定义。然而，无论今天查阅哪本书或哪篇文章，文献中出现的都不是这个超群定义。所有关于超群的教科书和文章中所采用的定义表述都归功于 M. Krasner。但这一事实从未被明确提及；相反，该定义被错误地归于 F. Marty。仔细考察文献可知，1937年，Krasner 在其著作 [4], 中给出了超群的如下定义：

定义 *1*：集合 $K$ 配备了一个合成律，该合成律将其每一对元素 $a$、$b$ 对应到 $ab$；如果

$1^0$ $ab$ 是 $K$ 的一个非空子集。$2^0$ $(ab)e = a(bc)$（结合律）。$3^0$ 对于每一对 $a,c \in H$，都存在 $x \in H$，使得 $c \in ax$；并且存在 $x' \in H$，使得 $c \in x'a$

两年后，即 1939年，Krasner 在 [5] 发表了如今沿用的形式的超群定义：

在一个集合 $H$ 上定义了其元素的合成运算，如果满足以下三个条件，则称该集合关于此运算构成超群：

*1.* 一个 $b \in H$ 与一个 $a \in H$ 的合成 $ab$ 是 $H$ 的非空子集。*2.* $(ab)c = a(bc)$（$a$、$b$、$c \in H$）（结合律）。*3.* 对于任意 $a \in H$，$aH = Ha = H$。

值得注意的是，上述超群定义包含三条公理。然而，第一条公理——即任意两个元素的乘积必须是非空子集这一要求——不再出现在超群的定义中，因为它已融入超合成这一概念本身。事实上，在非空集合 $H$ 上，超合成（或超运算）定义为从笛卡尔积 $H \times H$ 到 $H$ 的幂集（不包括空集）的映射（参见例如 [6-10]）。

第2节将证明，在超群中，公理1是冗余的，因为它可由公理2和公理3推出。因此，在超合成的定义中，无需对陪域施加通常的限制。同样的推理也适用于类似结构，例如左右几乎超群 [11] 和 Hv-群 [12], ，以及以它们为基础构建的更复杂的超合成结构，例如超环 [13], 超域 [13], 超环类 [14], 超模 [15], 超模样 [16], 及其他结构 [17–22]。

第 3 节聚焦于一种特定的超群，即多对称超群 [22], ，并证明可逆公理可以由其余

公理推导得出。

第 4 节证明，同样的结果也适用于超域：可逆公理并非独立公理，而是直接由其他定义公理推出的。这一结果同样适用于含幺超环。此外，这种依赖关系并不限于这些结构，也自然延伸至超模和向量超空间。

## 2. 超群及相关超合成结构的公理约化

在《数学基础》，《代数》 [23], 中，尼古拉·布尔巴基引入了岩浆一词（源自希腊语动词 μάσσω，意为揉捏），用来表示配备了一个二元运算的集合。作为这一概念的推广，为了涵盖集合元素之间更广泛形式的二元相互作用，[24]提出了以下定义。

**定义1**。 设 $E$ 是一个非空集合。从 $E\times E$ 到 $E$ 的幂集 $P(E)$ 的映射称为 $E$ 上的合成律。如果合成律的取值始终是单元素集，则称其为 $E$ 上的合成；否则，称其为 $E$ 上的超合成。配备了合成律的集合称为岩浆。

如果“$\cdot$”是集合 $E$ 上的合成，且 $A$、$B$ 是 $E$ 的子集，那么 $A\,B\cdot$ 表示集合$\bigcirc\{\}a\,b\,a\,b\,A\,B\cdot\ |\ \in\ \times$；而如果“$\cdot$”是超合成，那么，$A\,B\,a\,b\cdot\ =\ \bigcup\ \cdot$。$Ab$和$aB(\,,)ab\ A\ B\in\ \times$分别与$\{\}A\,b$和$\{\}a\,B$含义相同。一般而言，单元素集$\{\}a$ 可与其元素$a$等同看待。

**定理1**。 设 $A$、$B\subseteq E$。 如果 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$，那么 $AB=\varnothing$。

超合成的两种特殊情形定义如下：如果全定义，即对每个$a\,b\,E\cdot\ =$ ，都有$a\,b\,E\in$，则称超合成为全定义的；如果对每个$a\,b\cdot\ =\varnothing$ ，都有$a\,b\,E\in$，则称超合成为退化的。

**定义 2**。设 $E$ 是一个非空集合，并赋有超合成。由此得到的岩浆称为超群胚，当且仅当对任意一对元素 $a$、$b$，都有 $ab\neq\emptyset$。否则，称为偏超群胚。

**定义 3**。 非空集合 $E$ 上的合成律$(x,y)\to x\cdot y$称为结合的，如果

$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$$

对所有 $x$、$y$、$z\in E$ 均成立。赋有结合合成律的岩浆称为结合岩浆。

如果合成律是一个合成，则结合岩浆称为半群。然而，如果合成律是超合成，且该结构是结合超群胚，则称为半超群。

**定义 4**。 非空集合 $E$ 上的合成律$(x,y)\to x\cdot y$ 称为可繁殖的，当且仅当对所有 $x\in E$，均有

$$E\cdot x=x\cdot E=E$$

具有可繁殖合成律的岩浆称为可繁殖岩浆。

如果合成律是一种合成，则这种可繁殖岩浆称为拟群。然而，如果合成律是一种超合成，且该结构是可繁殖超群胚，则称为拟超群。

对于合成律为合成（即半群）的结合岩浆，再生公理等价于经典群公理，即单位元和逆元的存在性（另见 [21,24]）。特别地，有如下定理：

**定理2**。 在半群 $G$ 中，再生公理等价于以下公设：

*i.* 存在元素 $e \in G$，使得对于所有 $a \in G$，$ea = a = ae$。*ii.* 对于每个元素 $a \in G$，存在元素 $a' \in G$，使得 $a'a = e = aa'$。

**证明**。 首先，我们假设$G$满足再生公理。

*i.* 中性元（单位元）的存在性。

设$x\ G\in$ 。根据再生公理，$x\ xG\in$ 。因此，存在$e\ G\in$ ，使得$xe\ x=$ 。接下来，设$y$ 为$G$ 中的任意元素。由于合成具有可繁殖性；$y\ Gx\in$，因此存在$z\ G\in$ ，使得$y\ zx=$ 。利用结合律，我们有：

$$ye = (zx)e = z(xe)$$

由于我们已证明$xe\ x=$，因此得到$()z\ xe\ zx\ y=$ =。于是$ye\ y=$ 。

以类似的方式，存在一个元素 $\hat{}e$，使得对所有$y\ G\in$，都有 $\hat{}ey\ y=$ 。于是等式 $\hat{}\ \hat{}e\ ee\ e=$ = 成立。因此，存在$e\ G\in$ ，使得$ea\ a\ ae=$ =，对所有 $a\ G\in$ 。

*ii.* 对称元（逆元）的存在性。

根据假设，再生公理在$G$中成立，并且我们已在第（i）部分证明单位元$e$存在。设$a$ $G\in$ 。根据再生公理 $\in$ 。$e$ $aG$因此，存在$a\ G'\in$，使得$e\ aa'=$。此外，根据再生公理，$e\ Ga\in$ 。因此，存在$a\ G''\in$，使得$e\ a\ a''=$。我们证明$a'$ 与$a''$ 相同。利用结合律和单位元性质（$ea\ a'\ '=$ 以及$a\ e\ a''\ ''$ =），可得到以下等式链：

$$a' = ea' = (a''a)a' = a''(aa') = a''e = a''.$$

因此，$a'$与$a''$ 相同。因此$aa\ e\ a\ a'\ '=$ =。

反过来，假设两个公设（i）和（ii）成立。我们必须证明再生公理对G成立。也就是说，我们必须证明，对于每个 $\in$，a G aG G= 且Ga G=。证明aG G=。由于对于所有a G$\in$，a G G$\subseteq$，只需证明G aG$\subseteq$。设x G$\in$ 。那么，利用单位元e和逆元a’（分别来自公设i和ii），我们有：$()x$ ex aa x′= = 。应用G的结合律，。乘积a x′是G的一个元素。因此，x可以表示为a与G中某个元素的乘积，这意味着x aG$\in$ 。于是G aG$\subseteq$。因此aG G=。类似地，我们可以证明Ga G= $\underset{ax'=}{\circ}$ $()x\ a$

因此，由定理2可见，群仅凭结合律和可再生性即可定义。因此，可以表述如下定义：

**定义 5** ([24]). 若一个岩浆是结合且可再生的，则当其合成律为超合成时，称其为超群；当其合成律为合成时，则称其为群。

在 [24] 中，可以找到群的三种等价定义和超群的两种等价定义。

**定理 3.** 在超群 $H$ 中，任意两个元素的合成结果始终非空 .

**证明** 假设对某些$x,y\in H$，有$xy=\varnothing$。由可再生性：

$$H = xH = x(yH)$$

由结合律：

$$x(yH) = (xy)H = \varnothing H$$

由定理1， $\varnothing H=\varnothing$。因此$H=\varnothing$，矛盾。□

由前述定理可知，定义超群的公理集可以约简，因为第一条公理，即超合成结果的非空性，可由其余两条推出，即该结构的结合律与可再生性。

**推论 4.** 建立在超群之上的任何结构中，超合成的结果总是非空的。

上述推论所指的结构包括超环[13], 超环样[14]，超域 [13]，以及当然还有超模 [15]，超模样 [16]，向量超空间[17], 等，它们都是定义在超群上的结构。

在上述超合成结构中，加法部分是超群，而乘法部分是半群。然而，在1982年，R. Rota 引入了一种称为乘法超环的超合成结构；与上述情形相反，其中加法部分是阿贝尔群，而乘法部分是半超群[25]。

具体而言，该结构的定义如下：

**定义 6**。 三元组$(S,+,\cdot)$称为乘法超环，如果

*1.* $(S,+)$是阿贝尔群 *2.* $(S,\cdot)$是半超群 *3.* $(a\cdot b)\cdot c \subseteq a\cdot(b\cdot c)$, $a\cdot(b+c) \subseteq a\cdot b + a\cdot c$, $(a+b)\cdot c \subseteq a\cdot c + b\cdot c$，对所有$a,b,c\in S$ *4.* $(a\cdot b)\cdot(-a) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b$，对所有$a,b\in S$

R. Rota [26–28] 以及众多其他研究者，例如 [29–40]，都对这一结构进行了广泛研究。接下来我们将证明，与超环一样，乘法超环中的超合成也总能得到非空结果。

更确切地说，我们将证明上述定义中的第二条公理比实际所需的更强。具体而言，虽然半超群的定义要求任意两个元素的乘积是一个非空集合，但我们证明，对于乘法超环而言，这一条件并非独立条件，而是

其余公理的推论。因此，我们证明乘法超环的定义可以简化如下：

**定义7**。 三元组 $(S,+,\cdot)$ 称为乘法超环，当且仅当

*1.* $(S,+)$ 是一个阿贝尔群 *2.* $(S,\cdot)$ 是一个非退化的结合岩浆 *3.* $(a\cdot b)\cdot c \subseteq a\cdot(b\cdot c)$ 且 $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$，对所有 $a,b,c\in S$ *4.* $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ 且 $c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$，对所有 $a,b,c\in S$

为了证明由修订后的公理2所引出的非空性条件是多余的，我们考察满足定义7公理的结构 $S$ 的性质。我们首先确立以下辅助结果：

**引理5**。 如果 $S$ 中存在元素 $w$，使得对于某个 $z\in S$，有 $wz=\varnothing$，那么 $wS=\varnothing$。

**证明**。 由于 $(S,+)$ 是一个群，再生公理保证对于每个 $z\in S$，都有 $z+S=S$。因此，我们有：

$$wS = w(z+S) \subseteq wz + wS$$

由 $wz=\varnothing$，并应用定理1，包含关系的右侧变为 $\varnothing + wS = \varnothing$。因此，$wS=\varnothing$。□

**定理6**。在 $S$ 中，任意两个元素的乘积均非空。

**证明**。 假设 $wv=\varnothing$ 对某些 $w, v\in S$ 成立。 那么，由引理5可知 $wS=\varnothing$。 接下来，任取 $S$ 中的一个元素 $x$。由于 $S$ 的加法部分是一个群，再生公理保证 $S = w + S$。因此，对于某个 $z\in S$，有 $x = w + z$。令 $S$ 中的一个元素为 $y$ 。利用分配律，可写为：

$$xy \subseteq xS = (w+z)S \subseteq wS + zS$$

由于 $wS=\varnothing$，应用定理1，上述内容可简化为：

$$xy \subseteq \varnothing + zS = \varnothing$$

由于 $xy\subseteq\varnothing$， 因此 $xy=\varnothing$。这与超合成非退化相矛盾。□

因此，定理6证实，定义7中提出的简化公理框架是充分且内部一致的，因为它保证了整个集合 $S$ 上乘积的非空性，无需明确的非空公设。

接下来，我们将证明，在其他各种超合成结构中，超运算的结果同样始终非空。

**定义8**。 非空集合 $E$ 上的合成律 $(x,y)\to x\cdot y$ 若满足以下性质，则称为弱结合的：

$$(x\cdot y)\cdot z \cap x\cdot(y\cdot z) \neq \varnothing$$

对所有属于 $E$ 的 $x$、$y$、$z$ 均成立。其合成律满足弱结合性的岩浆称为弱结合岩浆。

**定理 7**。 在弱结合的岩浆中，超合成产生一个非空的集合 $t$.

**证明**。 假设对于某些属于 $E$ 的$x$ 和$y$，有$xy = \varnothing$。那么，

$$(xy)z = \varnothing z = \varnothing \text{ , for any } z \in E.$$

因此，

$$(xy)z \cap x(yz) = \varnothing,$$

这显然矛盾。因此，$xy$ 非空。□

因此，以下结论适用于 $H_v$-群 [12]:

**推论8**。 $H_v$-群以及建立在其上的结构中，任意两个元素的合成律所得结果始终非空。

**定义9**。 非空集 $E$ 上的合成律$(x,y) \to x \cdot y$ 称为左反结合的，如果等式

$$(x \cdot y) \cdot z = (z \cdot y) \cdot x$$

对 $E$ 中所有元素 $x$、$y$、$z$ 均成立。若

$$x \cdot (y \cdot z) = z \cdot (y \cdot x)$$

对 $E$ 中所有元素 $x$、$y$、$z$ 均成立。 配备左反结合合成律的岩浆称为左反结合岩浆，而配备右反结合合成律的岩浆称为右反结合岩浆。

**定义10**。 [11] 满足左反结合律公理的可繁殖岩浆，若其合成律为超合成，则称为左近超群（*LA-hypergroup*）；若其合成律为合成，则称为左近群（*LA-group*）。类似地，若该结构满足右反结合律公理，则分别称为右近超群（*RA-hypergroup*）或右近群（*RA-group*）。

**定理9.** 在每个左近超群（分别地，右近超群）$H$ 中，$H$ 中任意两个元素的超合成都非空。

**证明**。 假设 $H$ 是一个左近超群，且 $xy = \varnothing$，其中 $x$、$y$ 属于 $H$。根据再生公理，我们有 $H = Hy$ 和 $H = Hx$。然后，应用可再生性和左反结合律，可得：

$$H = Hx = (Hy)x = (xy)H$$

代入初始假设 $xy = \varnothing$ 并应用定理1，可得：

$$(xy)H = \varnothing H = \varnothing$$

因此 $H = \varnothing$，这与 $H$ 非空矛盾。

接下来，假设 $H$ 是一个右近超群，且 $xy = \varnothing$，其中 $x$、$y$ 属于 $H$。那么根据可再生性、左反结合律和定理1，可得：

$$H = yH = y(xH) = H(xy) = H\varnothing = \varnothing$$

这又是一个矛盾。□

**推论10**。 左（右）几乎超环、左（右）几乎超模等中任意两个元素的合成律结果总是非空的。

岩浆 $E$上的每个合成律都会导出两个新的合成律 [24]。如果合成律以乘法形式表示，那么这两个导出的律为：

$$x/y = \{ z \in E \mid x \in zy \} \quad \text{and} \quad y \backslash x = \{ z \in E \mid x \in yz \}$$

它们分别称为右除法和左除法。如果岩浆是交换的，那么右除法和左除法相同。

**例 1.** 在实数集合 $\mathbb{R}$ 上，乘法是一种交换合成律。逆律如下：

$$a / b = \begin{cases} \dfrac{a}{b} & if \;\; b \neq 0 \\ \varnothing & if \;\; b = 0, a \neq 0 \\ \mathbb{R} & if \;\; b = 0, a = 0 \end{cases}$$

这里，合成律是一个合成，而逆律是一个超合成。

**定理11**。 在可繁殖岩浆 $E$ 中，对于所有 $x,y \in E$，集合 $x/y$ 和 $y|x$ 均非空。反之，若岩浆中每一对元素 $x,y$ 对应的集合 $x/y$ 和 $y|x$ 均非空，则该岩浆是可繁殖的。

证明。若 E 是可繁殖的，则对所有 y∈E，都有 E y=E。因此，对于每个 x∈E，都存在 z∈E，使得 x∈zy。因此，z∈x / y，故 x/y ≠ ∅ 。类似地，可得 y\x 非空。反之，若对于所有 x,y∈E，都有 x/y ≠ ∅，则存在 z∈E，使得 x∈zy，因此，E ⊆E y。由于对于所有 y∈E，都有 E y ⊆E，因此 E y=E。同理，y\x ≠ ∅ 意味着对于所有 y∈E，都有 y E=E。因此，该岩浆是可繁殖的。□

**推论 12**。 在超群、左殆超群、右殆超群和 $H_V$-群中，任意两个元素所诱导的两种超合成都始终非空。

## 3. 多对称超群和多对称超环中的公理约化

多对称超群的概念于1970年由 J. Mittas 引入超合成代数，其灵感源于代数闭域理论。随后，这一思想得到拓展，并由此定义了许多其他多对称超群。于是，超群中形成了一个由此类结构构成的庞大家族，其中许多结构源自运用超合成代数对形式语言和自动机的研究。为纪念 J. Mittas，C. Yatras 将最初在其中定义的多对称超群命名为 M-多对称超群。Yatras 本人以及其他研究者（例如）都曾研究 M-多对称超群和 M-多对称超环。M-多对称超群是一种交换超群，并作为

更广泛的多对称超群类别的原型。下文将给出其形式定义。

**定义 11**。 *An* 个 *M*-多对称超群 $H$ 是一个带有超合成且满足以下公理的岩浆：

1. 结合律：
$$x(yz)=(xy)z,\ for\ all\ x,y,z\in H$$
2. 交换律：
$$xy=yx,\ for\ all\ x,y\in H$$
3. 中性元（或单位元）的存在性：
存在一个元素 $e\in H$，使得
$$x\in ex=xe,\ for\ all\ x\in H$$
4. 多对称性：
对于每个 $x\in H$，至少存在一个元素 $x'\in H$，使得
$$xx'=x'x=e.$$
这样的元素 $x'$ 称为 $x$ 的对称元，而集合
$$S(x)=\{x'\in H \mid xx'=x'x=e\}$$
称为 $x$ 的对称集（相对于 $e$）。
5. 可逆性：
$$If\ z\in xy\ and\ if\ x'\in S(x), y'\in S(y), z'\in S(z)\ then\ z'\in y'x'$$

从上述定义中去掉交换律公理，可得到一种更一般的结构，即准 *M*-多对称超群 [51]，，下文简称为*qMp*-超群。显然，所有适用于准 M-多对称超群的结果也适用于 M-多对称超群。

在上述定义中，结合律公理被明确列出，而可再生性公理并未出现。然而，正如下述定理所示，该公理可由定义中的其余公理推出。

**定理 13**。 准 *M*-多对称超群满足可再生性公理。

**证明**。 设 $x\in H$。为证明可再生性，我们必须证明 $xH=H$ 和 $Hx=H$。任取元素 $y\in H$。根据多对称性公理，存在元素 $x'\in S(x)$，使得 $xx'=e$。利用单位元的性质以及超运算的结合律，可得：

$$y\in ey=(xx')y=x(x'y).$$

因此，对于 $z\in xyH$，我们有 $y\in xz$。从而，每个 $y\in H$ 都包含在 $x$ 与 $H$ 的某个元素的乘积中，由此证明 $H\subseteq xH$。由于反向包含 $xH\subseteq H$ 由定义成立，我们得出 $xH=H$。类似的论证可确立 $Hx=H$。因此，可再生性公理在 $H$ 中成立。□

上述定理严格证明了由定义 11 所定义的结构确实是一个超群。

**命题 14**。 在 $qMp$-超群中，有 $(\ )\ \{\}S\quad =e\ e$ 。

**证明**。 设 $()e'\in S\ e$ 。那么，根据公理 (4)，$'\quad =e\ e\ e$ 。此外，根据公理 (3)，$'\ '\in e\ e\ e$ 。因此，$'=$ 。$e\ e$所以，$(\ )\ \{\}S\quad =e\ \ e$ 。□

**推论 15**。 在 $qMp$-超群中，有 $\quad =ee\ e$。

此时，让我们回顾一下超群 $H$ 中关于单位元的一些基本概念。如果元素 $\in e\ H$ 对所有 $\in x\ H$ 都满足 $\in x\ xe$，则称其为右单位元；如果对所有 $\in x\ H$ 都满足 $\in x\ ex$，则称其为左单位元。同时作为右单位元和左单位元的元素，简称为单位元。如果单位元对所有 $\in x\ H$ 都满足 $=\quad =x\ xe\ ex$，则称其为标量；如果 $=\quad \subseteq\{\ \}xe\ ex\ e\ x$ 对所有 $\in x\ H$ [24] 成立，则称其为强。如果元素 $\in x\ H$，$\neq x\ e$ 满足 $\in e\ ex$ 且 $\in e\ xe$ [61]，则称其为吸引元。通过超合成代数对形式语言和自动机的研究，人们发现了这类元素的存在 [18-20, 48-50]。“吸引元”这一术语之所以被采用，是因为这样的元素会将中性元$e$“吸引”到其与$e$进行超合成的结果中。

**命题16**。 $qMp$-超群没有吸引元。

**证明**。 设 $H$ 是一个$qMp$-超群，且 $\in x\ H$。我们将证明：若 $\in e\ ex$，则 $=.x\ e$ 取$(\ )x'\in Sx$ 。于是

$$e\in ex\Rightarrow ex'\subseteq(ex)x'=e(xx')=ee=\{e\}.$$

因此 $'=.\{\ \}ex\ \ e$ 所以

$$ex=(ex')x=e(x'x)=ee=\{e\},$$

所以 $\{\ \}ex=e$ 。利用公理 (3)，我们还得到 $\in x\ ex$，从而 $=x\ e$。□

**命题 17**。 在 $qMp$-超群中，若 $\in y\ xy$，则 $=x\ e$。

**证明**。 设 $H$ 是一个$qMp$-超群，其中性元为$e$，并设 $\in$、$x\ y\ H$ 满足 $\in y\ xy$。于是我们得到以下蕴含链：

$$y\in xy\Rightarrow yy'\subseteq(xy)y'=x(yy')\Rightarrow e\in xe.$$

因此，由命题16可得$=x\quad e$。 □

**命题18**。 在$qMp$-超群中，若$(\ )\ '\ ''\in,x\ x\ S\ x$，则$'\ ''=ex\ ex$ 。

**证明**。 设$'\in t\ ex$。则$()()''\ '\ ''\ '\ ''\in\qquad =\qquad =t\ x\ x\ x\ x\ x\ xx\ x\ e$。因此$'\ ''\subseteq ex\ ex$。同理，$''\ '\subseteq ex\ ex$，从而该命题得证。□

**命题19**。 在$qMp$-超群$H$中，给定$\in x\ H$以及$(\ )x'\in S\ x$，则有

$$S(x)=x'e.$$

**证明**。 设$'\in\ (\ )x\ \ Sx$ 。根据超运算的结合律以及单位元e的性质，可得：

$$x\left(x'e\right)=\left(xx'\right)e=ee=e$$

因此 $(\ )'\ \subseteq xe\ \ S\ \ x$ 。反过来，假设 $(\ )t\in S\ \ x$，则：

$$tx = e \Rightarrow (tx)x' = ex' \Rightarrow t(xx') = ex' \Rightarrow te = ex'$$

在单位元性质 $\in t\ te$ 的假设下，等式 $'=te\ ex$ 蕴含 $'\in t\ ex$ 。因此 $()'\subseteq S\ x\ ex$ 。结合两个包含关系，得到 $=\ '()$ 。$S\ x\ xe$ □

**命题20**。 在 *qMp*-超群中，如果 $\cap\ \neq\varnothing xe\ ye$ ，则

*i.* $\in\ '$ , $()x\ y\ S\ x$ ，其中 $'\in()$

$x\ S\ x$ 。 *ii.* $=xe\ ye$

**证明**。 *i.* 令 $'\in\ ()x\ Sx$ 。则：

$$xe \cap ye \neq \varnothing \Rightarrow (x'x)e \cap (x'y)e \neq \varnothing \Rightarrow ee \cap (x'y)e \neq \varnothing \Rightarrow e \in (x'y)e$$

然而，根据命题16，qMp-超群的元素不是吸引元。因此，$'\ =x\ ye$，所以 $\in'()y\ S\ x$，如所需。

*ii.* 若 $\cap\ \neq\varnothing xe\ ye$, ，则由 (i) $\in\ '$, $()x\ y\ S\ x$，因此根据命题18，$=xe\ \ ye$。□

因此，定理成立：

**定理21**。 在 *qMp*-超群 $H$ 中，族 $\{\}xe\ \ \in x\ H|$ 是 $H$ 的一个划分。

若 $\in x\ \ H$，则集合 $xe$，即元素 $x$ 的等价类，记作 $()C\ \ .x$

**命题 22**。 在 *qMp*-超群中，若 $\in z\ xy$，则对于所有 $\in w\ xy$，$()()C\ \ =z\ C\ w$。

**证明**。 设 $\in z\ \ xy$。则有以下蕴含关系：

$$z \in xy \Rightarrow zy' \subseteq (xy)y' \Rightarrow zy' \subseteq x(yy') \Rightarrow zy' \subseteq xe \Rightarrow zy' \subseteq ex \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (zy')x' \subseteq (ex)x' \Rightarrow z(y'x') \subseteq e(xx') \Rightarrow z(y'x') \subseteq ee$$

根据推论 15，$=ee\ e$，由此得到 $()'\ =z\ y\ x\ e$ 。随后，有以下蕴含关系：

$$(zy')x' = e \Rightarrow [(zy')x']x = ex \Rightarrow (zy')e = ex \Rightarrow e(zy') = ex \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e(zy')]y = (ex)y \Rightarrow ez = e(xy) \Rightarrow ez = \bigcup_{w \in xy} ew$$

因此，应用定理21后，我们得出该命题。□

**推论23**。 在 *qMp*-超群中，若 $\cap\ \neq\varnothing xy\ zw$，则 $=xy\ zw$。

以上所有定理和命题的证明均未使用可逆公理。因此，我们可以继续陈述并证明以下定理：

**定理24**。 在准 *M*-多对称超群中，可逆公理是其余公理的推论。

**证明**。 设 $\in z\ H$。为证明可逆性，我们证明：若 $\in z\ xy$，则对于任意 $()()'\ '\in$ $\in, x\ S\ x\ y$ $S\ y$ 和 $()z'\in S\ z$ ，关系 $'\ '\ '\in z\ y\ x$ 成立。已知 $\in z\ xy$，我们可推出以下蕴含关系：

$$z\in xy\Rightarrow zy'\subseteq x(yy')\Rightarrow zy'\subseteq xe\Rightarrow zy'\subseteq ex\Rightarrow z(y'x')\subseteq e(xx')$$

由于 $'=xx\ e$ 且 $=ee\ e$（由推论 15），由此可得 $()'\ '\subseteq z\ y\ x\ e$。因此 $()'\ '=$。$e\ z\ y\ x$ 于是 $()'\ '$ $\cap$ $\neq\varnothing S\ z\ y\ x$。因此，利用命题 22，我们得到 $()'\ '=S\ z\ y\ x$，从而可逆公理得到验证。□

借助上述定理，我们证明了定义 M-多对称超群所需的公理数目可以减少。这使得表述更为精简且严谨。因此，我们得到如下精炼定义：

**定义 12**。 *An M-*多对称超群 *H* 是一个配备超合成的岩浆，该超合成满足以下公理：

1. 结合律：
$$x(yz)=(xy)z,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$
2. 交换律：
$$xy=yx,\ for\ all\ \ x,y\in H$$
3. 存在中性元（或单位元）：
存在一个元素 $\in e\ H$，使得
$$x\in ex=xe,\ for\ all\ \ x\in H$$
4. 多对称性：
对于每个 $\in x\ H$，至少存在一个元素 $'\in x\ H$，使得
$$xx'=x'x=e.$$
这样的元素 $x'$ 称为 $x$ 的对称元，而集合
$$S(x)=\{x'\in H\ \mid\ xx'=x'x=e\}$$
称为 $x$ 的对称集（相对于 $e$）。

通过省略交换律公理，即可得到拟 *M*-多对称超群。

M-多对称超群是*M*-多对称超环定义的基础。后者由 J. Mittas [22] 提出，此后由他本人及其他作者加以研究（参见例如 [54,56,57]）。在对 M-多对称超群的公理进行约简之后，可给出如下关于 M-多对称超环的新的简明定义：

**定义 13.** *M*-多对称超环是一个代数结构 $(H,+,\cdot)$ 其中 *H* 是一个非空集, "·" 是 *H*, 上的内部复合，且 "+" 是 *H* 上满足下列公理的超合成:

***I.*** 乘法公理

$\{\ \}=\ \cup^*\ 0H\ H$，其中 $()H^*\cdot$ ,是一个乘法半群，且 *0* 是 *H* 的双侧吸收元，即 $0\cdot\ =\ \cdot 0=0x\ x$，对所有 $\in x\ H$ 均成立。

***II.*** 加法公理

*1.* 结合律：

$$x+(y+z)=(x+y)+z,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$

*2.* 交换律：

$$x+y=y+x,\ for\ all\ \ x,y\in H$$

*3.* 中性元

$$x\in 0+x=x+0,\ for\ all\ \ x\in H$$

*4.* 多对称性：

对于每个 $\in x\ H$，至少存在一个元素 $'\in x\ H$，使得

$$x+x'=x'+x=0.$$

这样的元素 $x'$ 称为 $x$ 的对称元，而集合

$$S(x)=\{x'\in H\ \mid\ x+x'=x'+x=0\}$$

称为 $x$ 的对称集。

***III.*** 分配公理

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z,\quad (y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$

## 4. 超域、超环、超模和向量超空间中公理的简化

超域的概念由 M. Krasner 于 1956年提出，他试图通过一系列此类域来逼近一个完备赋值域 [62]。1966年，在雅典国立技术大学讲学期间，他进一步定义了超环的概念，随后构造了商超域和商超环这一类结构 [13], ，从而推广了他最初在 [62] 中引入的超域。

非商超域和非商超环是否存在这一问题，对于确立超域理论和超环理论独立于经典域论和环论至关重要。因此，Krasner 在 [13] 中明确提出了这一问题。

非商超域和非商超环的存在性已在 [63,64] 中得到证明。后来，[65] 中又引入了另一类非商超环和超域，同时 [63] 中的结果也在 [66] 中得到了推广。如今，[67] 中可以找到大量有限非商超域。值得注意的是，对非商超域存在性的研究引出了域论本身中的许多问题 [66–70]。

超域和超环理论已得到广泛发展，催生了数十篇研究论文。有关这一研究领域的全面综述，请参见例如 [63–107]。在超域相关文献中，其结构是按照 Krasner 在 [13] 中提出的公理化方式定义的。下面我们介绍 [13] 中所载的 Krasner 的定义：

**定义 14**。 超域是一种代数结构 ($H$，+，·)，其中 $H$ 是一个非空集合，“·” 是 $H$ 上的一种内部复合，而 “+” 是 $H$ 上的一种超合成，并满足以下公理：

***I.*** 乘法公理

$\{\ \}=\ \cup^*\ 0H\ H$，其中 $(\ )H^*\cdot$ ,是乘法群，且 *0* 是 $H$ 的双侧吸收元

$H$，即，对于所有 $\in a\,H$，$0\cdot\ =\ \cdot 0=0x\,x$。

***II.*** 加法公理

*1.* 结合律：

$$x+\left(y+z\right)=\left(x+y\right)+z\,,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$

*2.* 交换律：

$$x+y=y+x\,,\ for\ all\ \ x,y\in H$$

*3.* 对于每个 $\in x\,H$，都存在唯一的 $'\in x\,H$，使得 $'0\in\ \ +.x\,x$
$x'$ 记作 $-x$，称为 $x$ 的相反元；此外，我们用 $\ \ -x\,y$ 代替 $\left(\right)+\ -x\,y$ .

*4.* 可逆性：

$$if\ z\in x+y\,,\ then\ \ x\in z-y$$

***III.*** 分配公理

$$z\cdot\left(x+y\right)=z\cdot x+z\cdot y,\ \ \left(x+y\right)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z\,,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$

若将乘法公理 ***I*** 替换为公理：

***I′***. $\{\ \}=\ \ \ \cup^{*}\ 0H\,H$ 其中 $\left(\right)H^{*}\cdot$ ,是一个乘法半群，且 *0* 是 $H$ 的双侧吸收元

于是，得到一种更一般的结构，称为超环 [13]。

**定理 25.**满足加法公理 $II$ 的非空集合 $H$ 是一个超群。

**证明**。根据假设，结合律成立。接下来，假设存在元素 $\in,x\ y\ H$，使得 $\ \ +\ \ =\varnothing x\ \ y$ 。这将导出以下一系列推论：

$$x+y=\varnothing\Rightarrow\left(x+y\right)-y=\varnothing-y\Rightarrow x+\left(y-y\right)=\varnothing\Rightarrow x+0=\varnothing\Rightarrow x=\varnothing$$

然而，这与$H$是非空集合这一事实矛盾。因此，$H$中任意两个元素的超合成结果始终非空。所以，对于$H$中的任意$y,\,w$，都存在$H$中的$x$，使得 $\in\ \ -x\,w\,y$；或者根据可逆性，有 $\in\ \ +w\,y\,x$ 。这意味着 $\subseteq\ \ +H\,y\,H$ 。由于包含关系 $+\ \ \subseteq y\,H\,H$由超合成的定义给出，因此得到 $+\ \ =y\ \ H\ \ H$。由此满足繁殖律，且$H$是一个超群。□

早在 1970 [108]，J. Mittas 就将超域的加法超群称为典范超群；随后，Mittas 将大量研究精力投入到对其进行系统考察中（参见，例如 [108–111]）。已有研究表明，典范超群与并超群密切相关；具体而言，典范超群本质上是一种具有标量中性元 [112] 的并超群。此外，非交换典范超群也称为准典范超群 [113, 114] ，或等价地称为多群 [115, 116]。

**定理 26.** [63] 在典范超群 $H$ 中，对所有 $x\in H$，恒有恒等式 $+0=x\,x$ .

证明。根据定义，$0\in\ \ -x\,x$；因此，根据可逆性，$\in\ \ +0x\,x$。接下来，设 $\in w\,H$ 是任意一个满足 $\in\ \ +0w\,x$ 的元素。由可逆性可得 $0\in\ \ -w\,x$。根据公理

3，相反元是唯一的；因此，$x=w$。因此，$\{\}+0=xx$，证明完毕。□

**定理 27.** 在典范超群 $H$ 中，可逆性公理 等价于以下等式成立：

$$-(z+w)=-z-w$$

对所有 $z,w\in H$ 均成立。

**证明**。假设可逆性公理成立，并考虑一个元素$(\ )=-\ +\ .x\ z\ w$ 根据结合律和可逆性，可以推导出以下一系列蕴含关系：

$$0\in x+(z+w)\Rightarrow 0\in(x+z)+w\Rightarrow -w\in x+z\Rightarrow x\in -z-w,$$

由此证明$()-\ +\ \subseteq -\ -z\,w\,z\,w$。反向包含关系$()-\ -\ \subseteq -\ +z\,w\,z\,w$ 可通过类似的一系列推导得到：

$$x\in -z-w\Rightarrow -z\in x+w\Rightarrow 0\in(x+w)+z\Rightarrow 0\in x+(w+z)\Rightarrow x\in -(z+w)$$

反过来，假设对所有属于$H$的$z,w$，恒等式$()-\ +\ =-\ -z\,w\,z\,w$ 均成立。我们将验证可逆性条件：$\in\ +\ \Rightarrow\ \in\ -$。$z\ x\ y\ x\ z\ y$ 前提$\in\ +z\ x\ y$等价于$()0\in\ -\ +zxy$；应用等式$()-\ +\ =-\ -xyxy$后，得到$()0\in\ +\ -\ -zxy$，或$()0\in\ -\ -xyz$。关系$()0\in\ -\ -xyz$ 直接推出$\in\ -zxy$，从而验证了可逆性。□

上述定理确立了典范超群的一条基本等价关系，而这一等价关系在超域的语境下意义尤为突出。由于恒等式$()-\ +\ =-\ -xyxy$ 是每个超域中分配律公理的直接推论，因此可以表述如下：

**定理 28.** 在超域 $H$ 中，可逆性 是其余公理的推论。

因此，定理28使公理得以简化；具体而言，传统上纳入超域加法结构定义中的可逆性条件变得冗余。因此，我们可以给出更简洁的超域定义：

**定义 15.** 超域是一个代数结构 $(H,+,\cdot)$，其中 $H$ 是一个非空集合，“$\cdot$”是 $H$ 上的内部复合，而“+”是 $H$ 上满足以下公理的超合成：

***I.*** 乘法公理

$\{\}=\ \cup^*\ 0H\,H$，其中$(\ )H^*\cdot\ $,是一个乘法群，且 $0$ 是 $H$ 的双侧吸收元，即对于所有 $\in a\,H$，$0\cdot\ =\ \cdot 0=0x\,x$。

***II.*** 加法公理

*1.* 结合律：

$$x+(y+z)=(x+y)+z,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$

*2.* 交换律：

$$x+y=y+x,\ for\ all\ \ x,y\in H$$

*3.* 对每一个 $\in x\ H$，存在唯一的 $'\in x\ H$，使得 $'0\in\ \ +.x\ x$
$'x$ 记作 $-x$，并称为 $x$ 的相反元；此外，代替 $()+\ -x\ y\ w$ $e$ 记作 $-x\ y$。

***III.*** 分配公理

$$z\cdot(x+y)=z\cdot x+z\cdot y,\quad (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z,\ for\ all\ \ x,y,z\in H$$

当存在乘法单位元时，超环的定义可以用类似的方式表述。

当超环缺少乘法单位元时，会出现一个基本问题：能否将任意超环嵌入到一个具有单位元的超环中？

对于普通环，实现这一目的的一种标准构造是 Dorroh 扩张。然而，当加法运算是超合成而非合成时，这种构造便无法应用。

让我们考察这种构造为何会失败。设 $R$ 是一个超环，并令 $U$ 为笛卡尔积集 $\mathbb{Z}\times R$。当且仅当 $=nm$ 和 $=.xy$ 时，两个有序对 $()nx$、$()my$ 被视为相等。定义加法如下：

$$(n,x)+(m,y)=\{(n+m,z)\,|\,z\in x+y\}$$

容易验证，$U$, 配备这种超合成后成为一个典范超群，其中性元为 $()0,0$ ，，且任意元素 $()nx$ 的相反元为$()-\ \ -,n\ x$ 。然而，继续采用 Dorroh 扩张来定义乘法会导致结构上的复杂问题。乘法定义如下：

$$(n,x)\cdot(m,y)=\{(nm,z)\,|\,z\in ny+mx+xy\}$$

由于项 $ny+mx+xy$ 表示的是 $R$ 的一个子集，而非单个元素，因此乘法属于超合成，而非定义良好的单值合成。因此，超环的 Dorroh 扩张不是超环。

J. Mittas 在研究系数取自超环的一元多项式时，引入了一种加法和乘法均为超合成的结构，并将该结构称为 超环 [117, 118]。具体而言，超环是一种推广超环概念的超合成结构，因为其乘法分量构成半超群而非半群。然而，超环的 Dorroh 扩张甚至不能成为超环，因为上文所定义的乘法不是结合的。事实上，考虑如下乘积：

$$\left[(n,x)\cdot(m,y)\right]\cdot(k,z)=\{(nm,w)\,|\,w\in ny+mx+xy\}\cdot(k,z)=$$

$$=\bigcup_{w\in ny+mx+xy}(nm,w)\cdot(k,z)=\bigcup_{w\in ny+mx+xy}\{((nm)k,v)\,|\,v\in(nm)z+kw+wz\}$$

But

$$\bigcup_{w\in ny+mx+xy}\left\{\left((nm)k,v\right)\middle|\, v\in(nm)z+kw+wz\right\}\subseteq$$

$$\subseteq\left\{\left((nm)k,v\right)\middle|\, v\in(nm)z+k(ny+mx+xy)+(ny+mx+xy)z\right\}$$

因为

$$\left\{\left((nm)k,v\right)\middle|\, v\in(nm)z+k(ny+mx+xy)+(ny+mx+xy)z\right\}=$$

$$=\bigcup_{w,u\in ny+mx+xy}\left\{\left((nm)k,v\right)\middle|\, v\in(nm)z+kw+uz\right\}$$

因此

$$\left[(n,x)\cdot(m,y)\right]\cdot(k,z)\subseteq$$

$$\subseteq\left\{\left(n(mk),v\right)\middle|\, v\in(nm)z+(kn)y+(km)x+k(xy)+n(yz)+m(xz)+(xy)z\right\}$$

同理，对于右侧结合：

$$(n,x)\cdot\left[(m,y)\cdot(k,z)\right]=(n,x)\cdot\left\{(mk,w)\middle|\, w\in mz+ky+yz\right\}=$$

$$=\bigcup_{w\in mz+ky+yz}(n,x)\cdot(mk,w)=\bigcup_{w\in mz+ky+yz}\left\{\left(n(mk),v\right)\middle|\, v\in nw+(mk)x+xw\right\}\subseteq$$

$$\subseteq\left\{\left(n(mk),v\right)\middle|\, v\in n(mz+ky+yz)+(mk)x+x(mz+ky+yz)\right\}=$$

$$=\left\{\left(n(mk),v\right)\middle|\, v\in(nm)z+(kn)y+(km)x+k(xy)+n(yz)+m(xz)+(xy)z\right\}$$

因此，无法保证这种特定的超合成满足结合律，甚至无法保证满足弱结合律。因此，环的相应定理——任何环都可以嵌入一个含单位元的环中——似乎并不适用于通过标准构造方法得到的超环。

定理27的结论并不局限于超域和含幺超环，还可推广到超模和向量超空间。这些结构已被众多研究者广泛研究，并取得了重要成果（例如 [119-135]）及各种应用（例如 [15,20,21]）。超模的经典定义如下 [15]:

**定义16**。 酉超环 $P$ 上的左超模是一个典范超群 $M$，并带有一个外合成 $()\to$，$a\ m\ am$，其定义域为 $\times P\ M$，值域为 $M$，并满足以下条件：

***i.*** $()+\ =\ +$，$a\ m\ n$

$am\ an$***ii.*** $()+\ =\ +$，

$a\ b\ m\ am\ bm$***iii.*** $()\ ()=$，

$ab\ m\ abm$***iv.*** $1\ =m$

$m$ 和 $0\ =0m$

对所有 $\in$，$a\ b\ P$ 以及对所有 $\in$，$m\ n\ M$。

右超模的定义与此类似。此外，定义在超域上的超模称为向量超空间。

它是 e 显然，由于公理 (i) 以及*P*是酉超环这一事实，该等式 y

$$-(m+n)=-m-n,$$

成立。因此，在超模定义中要求*M*为典范超群是多余的；只需*M*是一个具有中性元 0 的交换超群，且满足$+0=x$ $x$，对于每个$\in x$ $M$以及每个$\in x$ $M$，都存在唯一的元素$'\in x$ $M$ 使得$'0\in$ $+$。$x$ $x$ 这一观察同样适用于向量超空间。Marty 将这种不一定交换的超群称为正规超群，他[2, 3], 也将其称为完全正则（*complètement régulier*[1]）。进一步满足可逆公理的正规超群构成准典范超群（或多群）。这些考量引出了以下修订后的定义：

**定义17**。 酉超环*P* 上的左超模是一个交换正规超群$()M$ $+$ ，配备 一个外合成$()\rightarrow$，$a$ $m$ $a$ $m$，其定义在$\times P$ $M$ 上，取值于*M*，且满足定义*16*中的条件 *(i)*至*(iv)*。

每当调用定义17时，都应明确指出：所涉及的加法超群并非仅仅是正规的，而实际上是典范的。因此，该定义必须附带随后的定理。

**定理 29.** 酉超环上的超模的加法超群是典范超群。

正如[20], 的定理16所证明的，超模的直和并不是超模。这一事实使得有必要引入弱超模（[20], 定义10），它满足包含条件$()+$ $\subseteq$ $+$，$a$ $b$ $m$ $am$ $bm$ 以取代公理(ii)中的等式。在弱超模的框架内——弱超模自然地作为超模的直和出现——显然，*M* 在定义17中所涉及的加法结构完全足以使弱超模得到良好定义。

## 5. 讨论

对超合成概念的澄清，以及对超群、多对称超群、超域、含幺超环、乘法超环、超模、向量超空间以及各种其他超合成结构之定义中的公理约化，不仅有助于加强这些系统的逻辑基础，也有助于提升它们在算法语境中的适用性。简化公理框架能够促进概念上的清晰，并通过明确区分原始的、本质的假定与可推导的性质来确保数学上的严谨。

此外，这种公理化细化在计算数学领域至关重要。通过尽可能精简所需公理集，可以设计出更加简洁、计算开销更低的算法。因此，能够更有效地全面构造并分类有限超复合结构。这种方法在开发相关算法的过程中发挥了重要作用，使得所有阶为七的超域得以完整构造 [67]。

## 参考文献

1. Marty F. 关于群概念的一种推广。第八届斯堪的纳维亚数学家大会，45–49页，斯德哥尔摩，1934年。2. Marty, F. 超群概念在非阿贝尔群研究中的作用。《巴黎科学院院刊》1935，201，636–638。3. Marty, F. 关于与一个有理分式相关联的群和超群。《高等师范学校年刊》1936，3，83–123，doi: 10.24033/asens.854。4. Krasner, M. 关于B进域的本原性。《数学》1937，13，72–191。5. Krasner, M. 超群中的Jordan–Hölder定律与P进数域的生成序列，（I）。《杜克数学杂志》1940，6，120–140，doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00611-1；（II）《杜克数学杂志》1940，7，121–135，doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00707-4。6. Corsini, P.《超群理论导论》。Aviani Editore，乌迪内，意大利，1993。7. Corsini, P.; Leoreanu, V.《超结构理论的应用》。Kluwer Academic Publishers，荷兰多德雷赫特，2003。8. Davvaz, B.; Leoreanu-Fortea, V.《超环理论及其应用》。International Academic Press，美国棕榈港，2007。9. Davvaz, B.; Cristea, I.《模糊代数超结构》。Springer，2015。10. Davvaz, B.; Leoreanu-Fortea, V.《超群理论》。世界科学出版社，新加坡，2022。11. Massouros, C.G.; Yaqoob N. 关于左/右近群与超群理论及其相关枚举。《数学》2021，9，1828。12. Massouros, C.G.; Dramalidis A. 转置Hv群。《ARS组合》2012，106，143–160。13. Krasner M. 一类超环与超域。《国际数学与数学科学杂志》1983，6(2)，307–312。14. Massouros, G.G. 超环类。《多值逻辑》1998，3，217–234。15. Massouros, C.G. 自由超模与循环超模。《纯粹与应用数学年刊》1988，150，153–166。16. Massouros, G.G. 自动机与超模样，第三届AHA大会论文集，罗马尼亚雅西，1993年7月4–10日；强子出版社，美国佛罗里达州棕榈港，1994年；251–265页。17. Mittas, J. 超域上的向量空间：仿射与欧几里得超空间的引入。《巴尔干数学》1975，5，199–211。18. Massouros, G.G. 语言与自动机理论中的超合成结构。亚历山德鲁·伊万·库扎大学年刊，雅西，信息学辑，1994，3，65–73。19. Massouros, G.G. 来自计算机理论的超合成结构。《Ratio数学》1999，13，37–42。20. Massouros, G.G.; Massouros, C.G. 超合成代数、计算机科学与几何学。《数学》2020，8，1338。21. Massouros, C.G. 关于向量空间与超合成结构之间的联系。《意大利纯粹与应用数学杂志》2015，34，133–150。22. Mittas, J. 多对称超群与超环。《巴黎科学院院刊》1970，271，920–923。23. Bourbaki, N.《数学原理》。代数，Hermann，法国巴黎，1971。24. Massouros, C.G.; Massouros, G.G.《超群理论基础概述》。《数学》2021，9，1014。25. Rota, R. 关于乘法超环。《数学评论》，1982，第V辑II（4），2，711–724。26. Rota, R. 乘法超环上的同余关系。《数学评论》，1983，第V辑II（1），3，17–31。27. Rota, R. 乘法超环的范畴。《数学评论》，1984，第V辑II（1），4，75–84。28. Rota, R. 强分配乘法超环。《几何学杂志》1990，39，130–138。https://doi.org/10.1007/BF01222145。29. Procesi, R.; Rota, R. 互补乘法超环，《离散数学》2008，308，188–191。https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.11.032。30. Pianskool, S.; Hemakul, W.; Chaopraknoi, S. 关于某些乘法超环的同态，《东南亚数学通报》2008，32(5)，951–958。

31. Procesi, R.; Rota, R. 乘法超环上的多项式。《离散数学科学与密码学》，2013，6，217-225。https://doi.org/10.1080/09720529.2003.10697978 32. Ameri R.; Kordi A. 关于正则乘法超环，《欧洲纯粹与应用数学杂志》，2016，9(4)，402-418。33. Ameri R.; Kordi A.; Hoskova-Mayerova S. 分式乘法超环与互素超理想，《奥维迪乌斯康斯坦察大学年刊》，2017，25(1)，5-23。34. Ameri R.; Soltani, Z.; Talebi-Rostami Y. 交换乘法超环零因子图简介，《Sigma工程与自然科学杂志》，2018，9(1)，101-106。35. Anbarloei, M. 乘法超环的2-素超理想。《数学杂志》，2022，5721946，9页，https://doi.org/10.1155/2022/5721946 36. Farzalipour F.; Ghiasvand P. 分次乘法超环中的分次φ-2-吸收超理想，《亚洲—欧洲数学杂志》2022，15(6)，https://doi.org/10.1142/S1793557122501133 37. Ghiasvand, P.; Raeisi, M.; Mirvakili, S. 分次乘法超环上分次素超理想的一种推广 38. Mena A.; Akray I. 乘法超环中的n-吸收I-素超理想，《代数系统杂志》，2024，12(1)，105-121，https://doi.org/10.22044/JAS.2022.12069.1621 39. Anbarloei M.; Behtoei A. 乘法超环中的J-超理想及相关推广，《Mahani数学研究杂志》2024；13(2)，365–382，https://doi.org/10.22103/jmmr.2024.22687.1554 40. Ghiasvand, P.; Toghanipour, S.; Hamidi, M. 弱分次乘法超环上基于分次超理想的图，《代数及其应用杂志》，2025，https://doi.org/10.1142/S021949882750071X 41. Mittas, J. 典范多对称超群。关于超群、多值结构及其应用的会议论文集，意大利乌迪内，1985年10月15–18日；第1–25页。42. Mittas, J.; Massouros, C.G. 由线性空间定义的超群。《希腊数学学会通报》1989，30，63–78。43. Mittas, J. 关于超合成结构。第四届代数超结构及其应用国际大会论文集，希腊克桑西，1990年6月27–30日；世界科学出版社：新加坡，1991；第9–31页。44. Mittas, J. 广义M-多对称超群。第十届代数超结构及其应用国际大会论文集，捷克布尔诺，2008年9月3–9日；第303–309页。45. Massouros, G.G.; Zafiropoulos, F.A.; Massouros, C.G. 转置多对称超群。第八届代数超结构及其应用国际大会论文集，希腊萨莫色雷斯，2002年9月1–9日；Spanidis出版社，希腊克桑西，2003；第191–202页。46. Massouros, C.G.; Massouros, G.G. 多对称超群的元素与结果，第四届欧洲智能技术会议论文集，罗马尼亚雅西，2006年9月20–23日，《智能系统与技术进展》《不确定性数学进展》，第19–29页。47. Massouros, C.G.; Massouros, G.G. 具有强单位元的转置多对称超群，《基础科学杂志》2008，4，85–93。48. Massouros, G.G.; Mittas, J.D. 语言—自动机与超合成结构。第四届代数超结构及其应用国际大会论文集，希腊克桑西，1990年6月27–30日；世界科学出版社：新加坡，1991；第137–147页。49. Massouros, G.G. 自动机、语言与超合成结构。博士论文，雅典国立技术大学，希腊雅典，1993。50. Massouros, G.G. 关于自动机阶数的关联超群。《离散数学科学与密码学杂志》2003，6，207–215。51. Yatras, C. 多对称超群的类型。AIP会议论文集2018，1978，340004-1–340004-5。52. Yatras, C. M-多对称超群，《纯粹与应用数学评论》，1992，11，第81–92页。53. Yatras, C. M-多对称超群的子超群。第五届代数超结构及其应用国际大会论文集，罗马尼亚雅西，1993年7月4–10日；强子出版社：美国佛罗里达州棕榈港，1994；第123–132页。54. Yatras, C. M-多对称超群与M-多对称超环。博士论文，色雷斯德谟克利特大学，希腊克桑西，1995。

55. Yatras, C. M-多对称超群理论中的同态与单生成M-多对称超群，《整体分析、微分几何与李代数研讨会论文集》（塞萨洛尼基，1995），155–165，BSG Proc.，1，Geom. Balkan出版社，布加勒斯特，（1997）。56. Mittas, J.; Yatras, C. M-多对称超环。《Ratio数学》1997，12，45–65。57. Madani, M.A.; Mirvakili, S.; Davvaz B. M-多对称超环中的超理想。《代数系统杂志》，2019，7(1)，33-50。58. Mirvakili, S.; Manaviyat, R. 关于阶小于6的M-多对称超群枚举，第一届计算群论、计算数论及其应用会议，伊朗卡尚大学，2014年12月17–19日，139-142。59. Mirvakili, S. 基本群阶为5和6的M-多对称超群，第二届计算群论、计算数论及其应用会议，伊朗卡尚大学，2015年10月13–15日，第103–106页。60. Massouros, C.G.; Mittas, J. 关于广义M-多对称超群理论，第十届代数超结构及其应用国际大会论文集，捷克布尔诺，2008年9月3–9日；第217–228页。61. Massouros, G.G.; Massouros, C.G.; Mittas, J. 强化并超群。《布莱ㄙ·帕斯卡数学年刊》，1996，3，155–169，http://doi.org/10.5802/ambp.73 62. Krasner, M. 用特征0的完备赋值域逼近特征p6 =0 的完备赋值域。高级代数研讨会（布鲁塞尔，1956年12月）；比利时数学研究中心，Établissements Ceuterick，鲁汶，Librairie Gauthier-Villars：法国巴黎，1957；第129–206页。63. Massouros, C.G. 超域的构造方法。《国际数学与数学科学杂志》1985，8，725–728，https://doi.org/10.1155/S0161171285000813 64. Massouros, C.G. 关于超环与超域理论。《代数与逻辑》1985，24，728–742，https://doi.org/10.1007/BF01978850 65. Nakassis, A. 超环与超域理论的新进展。《国际数学与数学科学杂志》1988，11，209–220，https://doi.org/10.1155/S0161171288000250 66. Massouros, C.G. 一类超域及域论中的一个问题。《黑山数学》1993，1，第73–84页。67. Massouros, C.G.; Massouros, G.G. 关于域与超域的边界，第二部分——七阶超域的枚举与分类，《AIMS数学》，2025，10(9)，21287–21421，https://doi.org/10.3934/math.2025951。68. Massouros, C.G. 超域的构造。《巴尔干数学》1991，5，250–257。69. Massouros, C.G. 一个涉及超域理论问题的域论问题。AIP会议论文集2011，1389，1852-1855 https://doi.org/10.1063/1.3636971 70. Massouros, C.G.; Massouros, G.G. 关于域与超域的边界。《数学》，2023，11(6)，1289，https://doi.org/10.3390/math11061289 71. Mittas, J. 对超群、超环与赋值超域理论的贡献。《法国科学院科学报告》1971，272，3–6。72. Mittas, J. 从有序域与环定义的某些超域与超环。《罗马尼亚社会主义共和国数学科学学会数学通报》1971，15 (63) 371-378。73. Mittas, J. 关于超环与超域，《巴尔干数学》1973，3，368-382。74. Viro, O. 热带几何中的超域 I：超域与去量子化。arXiv 2010，arXiv:1006.3034 75. Connes, A.; Consani, C. 阿代尔类的超环。《数论杂志》，2011，131，159–194 76. Cristea, I.; Jancic-Rasovic, S. 复合超环，《奥维迪乌斯康斯坦察大学科学年刊·数学系列》，2013，21 (2)，81-94。77. Baker, M.; Bowler, N. 超域上的拟阵。载于2017年ICNAAM会议论文集，希腊塞萨洛尼基，2017年9月25–30日。AIP会议论文集1978，340010。78. Bordbar, H.; Cristea, I.; Novak, M. 诺特 Krasner 超环中超理想的高度。《UPB科学通报，A辑：应用数学与物理》2017，79，31-42。79. Al-Tahan, M.; Davvaz, B. 关于与算术函数相关联的超环的存在性。《数论杂志》，2017，147，136–149

80. Vahedi, V.; Jafarpour, M.; Aghabozorgi, H.; Cristea, I. Krasner 超域上椭圆曲线的扩张。《通信代数》2019, 47, 4806–4823. 81. Vahedi, V.; Jafarpour, M.; Cristea, I. Krasner 超域上的超单应。《Symmetry》2019, 11, 1442. 82. Ameri, R.; Eyvazi, M.; Hoskova-Mayerova, S. 超域枚举的深入结果。《AIMS 数学》2020, 5, 6552–6579. 83. Liu, Z. 阶为 n≤5 的有限超域。arXiv 2020, arXiv:2004.07241. 84. Iranmanesh, M.; Jafarpour, M.; Aghabozorgi, H.; Zhan, J.M. 4 阶 Krasner 超域的分类。《中国数学学报（英文版）》2020, 36, 889–902. 85. Baker, M.; Jin, T. 论作为域的商得到的超域的结构。《美国数学会会刊》2021, 149, 63–70. 86. Baker, M.; Lorscheid, O. 笛卡尔符号法则、牛顿多边形与超域上的多项式。《代数杂志》2021, 569, 416–441. 87. Jun, J. 超域几何。《代数杂志》, 2021, 569, 220–257. 88. Hobby, D.; Jun, J. 某些非商超域上齐次线性方程的非平凡解, 《美国数学会会刊》2024, 152, 2353-2367, https://doi.org/10.1090/proc/16727 89. Hobby, D. 有限超域中的块, arXiv 2025, arXiv:2507.18908v1 90. Lorscheid, O. 热带超域上的热带几何。《落基山数学杂志》2022, 52 (1), 189–222. 91. Rathnayaka, R.M.K.S; Ramaruban, N. Krasner 诱导的商超环的超理想结构。《瓦武尼亚科学杂志》, 2022, 1, 1-8. 92. Akian, M.; Gaubert, S.; Rowen, L. T-对上的线性代数。arXiv 2024, arXiv:2310.05257v3. 93. Rowen, L.H. 幺半群上双模与双模对的张量积。arXiv 2024, arXiv.2410.00992 94. Rowen, L.H. 剩余结构。arXiv 2024, arXiv.2403.09467 95. Rowen, L.H. 半环对的素同余的谱。《代数及其应用杂志》, 2025, 24(7), 2750060 https://doi.org/10.1142/S0219498827500605 96. Bordbar, H.; Jančic-Rašović, S.; Cristea, I. 正则局部超环与超整环。《AIMS 数学》2022, 7, 20767–20780. 97. Fayazi, A.; Nozari, T.; Ameri, R.; Norouzi, M. 关于多超环。《约旦数学与统计学杂志》2024, 17, 65-83. 98. Afshar, B.; Ameri, R.; Al-Tahan, M. (Krasner) 超环的 Zariski 拓扑。《欧洲纯粹与应用数学杂志》2025, 18(4), 1-19, https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v18i4.6690 99. Roberto, K.M.A.; Santos, K.R.P.; Mariano, H.L. 关于带对合的非交换多环。《数学》2024, 12, 2931. 100. Roberto, K.M.A.; Ribeiro, H.R. O.; Mariano, H.L. 一般 Arason-Pfister 主定理。arXiv 2024, arXiv:2210.03784v3 101. James Maxwell, J.; Smith, B. 有序超域上的凸几何, arXiv 2025, arXiv:2301.12760v2 102. Kuhlmann, K.; Linzi, A.; Stojałowska H. 超域中的序与赋值。《代数杂志》2022, 611, 399– 421, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.08.006 103. Kędzierski, D.E.; Linzi, A.; Stojałowska, H. 超域中的特征、C-特征与正锥。《数学》2023, 11, 779 https://doi.org/10.3390/math11030779 104. Kędzierski, D.E.; Kuhlmann, K.; Stojałowska H. 由最小公理对实超域的算法构造。arXiv 2025, arXiv:2508.19418v1 105. Linzi, A.; Touchard, P. 关于与赋值域相关联的超域。《纯粹与应用代数杂志》2025, 229(6), 107985, https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2025.107985 106. Linzi, A. 关于 Krasner 超域赋值理论的注记。《以色列数学杂志》2025, https://doi.org/10.1007/s11856- 025-2721-6 107. Al-Tahan, M.; Davvaz, B.; Panjarike, P.; Panackal, H. 超域中的超绝对值：与超赋值的联系。《非线性泛函分析及其应用》, 2025, 30(3), 721-740. 108. Mittas, J. 典范超群超值。C. R. Acad. Sci. 1970, 271, 4–7. 109. Mittas, J. 典范值超群与超值。Math. Balk 1971, 1, 181–185. 110. Mittas, J. 典范超群。Math. Balk. 1972, 2, 165–179.

111. Mittas, J. 典范值超群与超值。强典范超群与上典范超群。希腊数学学会通报 1982年, 23, 55–88. 112. Massouros, C.G. 典范超群与并超群。亚历山德鲁·伊万·库扎大学年刊 1996, 42, 175–186. 113. Bonansinga, P. 关于拟典范超群。佩洛罗自然、物理与数学科学学会会刊 1981, 27, 9–17. 114. Massouros, C.G. 拟典范超群。载于第四届国际大会论文集《代数超结构及其应用》，希腊克桑西，1990年6月27–30日；世界科学出版社：新加坡，1991；第129–136页。115. Ioulidis, S. 多群及其若干性质。希腊数学学会通报 1981, 22, 95–104. 116. Comer, S. 由余群导出的多群。《代数杂志》1984, 89, 397–405. 117. Mittas, J. 关于超合成结构的若干类。雅典科学院会刊, 1973, 48, 298–318. 118. Ameri R.; Eyvazi M.; Hoskova-Mayerova S. 超环上多项式的超环，《数学》, 2019, 7 (10), 902; https://doi.org/10.3390/math7100902. 119. Ameri, R. 关于超群与超模的范畴。《离散数学、科学与密码学杂志》2003, 6, 121–132. http://dx.doi.org/10.1080/09720529.2003.10697969 120. Madanshekaf, A. 超模的正合范畴。《国际数学与数学科学杂志》2006. doi.org/10.1155/IJMMS/2006/31368 121. Shojaei, H.; Ameri, R. 关于 Krasner 超模范畴的若干结果。《基础与应用科学杂志》2016, 8, 2298– 2306. 122. Shojaei, H.; Ameri, R.; Hoskova-Mayerova, S. 关于一般 Krasner 超模范畴中各类态射的性质。《意大利纯粹与应用数学杂志》2017, 39, 475–484. 123. Tsitouras, C.G.; Massouros, C.G. 由二元关系定义的 Rosenberg 型超合成结构的枚举。《欧洲组合学杂志》2012, 33, 1777–1786. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejc.2012.03.032 124. Bordbar, H.; Novak, M.; Cristea, I. 关于超模的支撑的一个注记。《代数及其应用杂志》2020, 19, 2050019. http://doi.org/10.1142/S021949882050019X 125. Bordbar H.; Cristea, I. 关于 Krasner 超模的正规投射性与内射性，《公理》, 2021, 10(2), 83, https://doi.org/10.3390/axioms10020083 126. Ameri R.; Shojaei H. 投射与内射 Krasner 超模，《代数及其应用杂志》, 2021, 20(10), https://doi.org/10.1142/S0219498821501863 127. Türkmen, B.N.; Bordbar, H.; Cristea I. 与正规 π-投射超模相关的补子。《数学》2022, 10(11), 1945. https://doi.org/10.3390/math10111945 128. Bordbar H.; Cristea, I. 可除超模，奥维迪乌斯康斯坦察大学年刊, 2022, 30(1), 57-74, doi:10.2478/auom-2022-0004. 129. Bordbar, H. 挠元与可挠超模。《数学》2023, 11, 4525, https://doi.org/10.3390/math11214525 130. Türkmen, E.; Türkmen, B.N.; Kulak, O. 乘法 Krasner 超模中 Zariski 拓扑的谱，《数学》2023, 11(7), 1754;https://doi.org/10.3390/math11071754 131. Türkmen, E.; Türkmen, B.N.; Bordbar H. 正规内射超模与正规投射超模的一个刻画。《公理》, 2024, 13, 410. https://doi.org/10.3390/axioms13060410 132. Abughazalah, N.; Kanwal S.S.; Mehdi M.; Yaqoob N. 关于左近似超模结构的一项新研究，《Heliyon》, 2024, 10 (19), https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e38237 133. Türkmen, E.; Türkmen, B.N., Kaynar, E. 关于超环与超模的一个注记。《意大利纯粹与应用数学杂志》2025, 53, 104-116. 134. Aydın Y.; Türkmen, B.N. 关于 Krasner 超模的 S-谱，《乌克兰数学杂志》, 2025, 77(10), 1375-1387, https://doi.org/10.1007/s11253-025-02527-8 135. Ostadhadi-Dehkordi, S.; Hila, K. 关于商典范 (m,n) 元超模。《代数讨论会》, 2025, 32(1), 129-142, https://doi.org/10.1142/s1005386725000112

CORE系，雅典国立卡波迪斯特里亚大学电子邮箱：chrmas@uoa.gr 或 ch.massouros@gmail.com