3-连通无爪图和3-超图的线图的哈密顿性质

Kenta Ozeki [*1] **Leilei Zhang** [†1,2]

[1]环境与信息科学学院，横滨国立大学，横滨 240-8501，日本[2]数学与统计学院、非线性分析与应用重点实验室（教育部），华中师范大学，武汉 430079，中国

arXiv:2603.03361v1 [math.CO] 1 Mar 2026

摘要

受 Thomassen 著名的线图猜想启发，许多研究者探讨了保证无爪图具有哈密顿性或哈密顿连通性的充分条件。1994 年，Ageev 证明了每个支配数至多为 2 的 2-连通无爪图都是哈密顿的。在本文中，我们将这一研究方向推广到3-连通图，给出了保证哈密顿性的支配数的最佳可能上界。具体而言，我们证明，除了一些定义明确的例外图之外，每个 G 支配数至多为 5 的 3-连通无爪图都是哈密顿的。此外，我们证明，除少数例外情形外，每个 G 支配数至多为 4 的 3-连通无爪图都是哈密顿连通的，从而推广了 Zheng、Broersma、Wang 和 Zhang 以及 Vrána、Zhan 和 Zhang 的早期结果。我们还研究了3-超图的线图的哈密顿性质，并证明每个支配数至多为 4 的3-超图的3-连通线图都是哈密顿的。

关键词： 无爪；支配数；哈密顿连通；3-超图

AMS主题分类： 05C45,05C69,05C38

1 引言

我们通常遵循最常用的图论记号和术语，对于此处未定义的记号和概念，请读者参阅Bondy和Murty [5]。具体而言，我们所说的图始终是指有限简单无向图；每当允许重边时，我们始终称之为多重图。图中的哈密顿圈 （相应地，*Hamilton*路径）是经过该图所有顶点的圈（相应地，路）。若一个图含有哈密顿圈，则称该图是哈密顿的。若任意两个不同顶点之间都存在一条Hamilton路径，则称该图为哈密顿连通 。具有 s 和 t 个顶点的完全二部图记为$K_{s,t}$。图$K_{1,3}$ 称为爪。若一个图不含同构于爪的导出子图，则称该图为无爪 。图 G 的顶点子集 X 称为支配集 ，如果 G的每个顶点要么包含于 X 中，要么与 X的某个顶点相邻。图 G的支配数 ，

[*]电子邮箱：ozeki-kenta-xr@ynu.ac.jp.

[†]电子邮箱：zhang-leilei-kn@ynu.ac.jp.（通讯作者）

记为 $\gamma(G)$，是 G的最小支配集的大小。图 G 中边的子集 $D \subseteq E(G)$称为边支配集，如果 G 中的每条边要么属于 D，要么与 D中的某条边相邻（即共享一个公共顶点）。 G的边控制数是 G中最小边支配集的大小。对于正整数 k，记号 $[k]$表示从1到 k的整数集。

图 H 的线图记为 $L(H)$，是一个图 G，其中 $V(G) = E(H)$；当且仅当 H 中对应的边至少有一个顶点相同时，两个顶点才相邻。1986年，Thomassen [25] 提出了一个与线图的哈密顿性相关的最引人入胜的猜想之一，即猜想1.1 (i)。注意，每个线图都是无爪图。Matthews 和 Sumner [20]证明了一个（看似）更强的版本（猜想1.1 (ii)）。Ryjáček [21]随后证明，这两个猜想实际上是等价的。Kužel 和 Xiong [14] 将猜想1.1 (i)加强为哈密顿连通性，而 Ryjáček 和 Vrána [22] 将猜想1.1 (ii)加强为哈密顿连通性。最后，Ryjáček 和 Vrána [22] 证明了猜想1.1中的四个陈述彼此等价。

C猜想 1.1。 (Thomassen [25]) 每个 4-连通线图都是哈密顿的。(Matthews 和 Sumner [20]) 每个 4-连通无爪图都是哈密顿的。(Kužel 和 Xiong [14]) 每个 4-连通线图都是哈密顿连通的。(Ryjáček 和 Vrána [22]) 每个 4-连通无爪图都是哈密顿连通的。

研究者从许多不同角度探讨了上述猜想，包括对图连通性 [13], 、直径 [19], 、禁用子图 [17, 18], 以及最小度条件 [9]的限制。特别是，1994 年，Ageev [1] 基于支配数，确立了无爪图具有哈密顿性的以下充分条件。

定理1.2。 (Agvee [1]) 每个支配数至多为 2-连通无爪图2 的图都是哈密顿的。

该定理中的条件（2-连通、无爪以及支配数界）都是最佳可能的，如 [28]所示。受该定理启发，Cai [7] 以及 Zheng、Broersma、Wang 和 Zhang [28] 通过在爪作为导出子图出现时对其施加特定的结构约束，放宽了无爪条件。作为通向猜想1.1的一种可能途径，若干研究者探讨了比哈密顿性更强的性质。例如，Zheng、Broersma、Wang 和 Zhang [28] 证明了每个支配数为 1 的 3-连通无爪图都是哈密顿连通的。在此基础上，他们猜想对于支配数为 2 的图同样成立。最近，该猜想由 Vrána、Zhan 和 Zhang [26]证实。事实上，他们证明了该猜想的一个更强版本，陈述于如下定理。

定理1.3. （Vrána、Zhan 和 Zhang [26]）每个3-连通无爪图，若其支配数至多为3，则是哈密顿连通的。

作为直接推论，我们有如下结果：

定理 1.4。 (Vrána、Zhan 和 Zhang [26]) 每个支配数至多为3的3-连通无爪图都是哈密顿的。

本文将定理 1.3 和 1.4 推广到若干方向；刻画定理 1.4 中的极值图（见定理 1.5），以及定理 1.3中的极值图（见定理1.6）；此外，还将定理 1.4 推广到 3-连通的3-超图的线图（见定理 1.8）。

为陈述我们的结果，我们还需要一些术语。我们用 $N_G(x)$表示图 G 中顶点$x \in V(G)$的邻域，即与 x相邻的所有顶点组成的集合。若 $X \subseteq V(G)$，则将 $N_G(X)$定义为 $V(G)$中那些至少有一个邻点属于 X的顶点所组成的集合。若 $G[N_G(x)]$ 是连通非完全图，我们称顶点 $x \in V(G)$为可选顶点。Ryjáček 引入了无爪图 G 的闭包 cl(G) [21]，，并将其定义为在可选顶点处递归进行局部完备化所得到的图。在同一篇论文中，Ryjáček 还证明了闭包 cl(G) 唯一确定，并且 G 是哈密顿的，当且仅当 cl(G) 是哈密顿的。这一结果确立了闭包作为研究无爪图哈密顿性的有力工具。

我们还回顾两种众所周知的图，它们将在我们的结果中作为例外出现，即彼得森图 P 和瓦格纳图 W（见图 1）。众所周知，瓦格纳图可以通过删除彼得森图中的任意一条边，再抑制由此产生的两个度为 2 的顶点而得到——也就是说，将度为 2 的顶点及其关联的边替换为一条连接其邻点的边。若一条边的某个端点的度为 1，则称该边为悬挂边 。

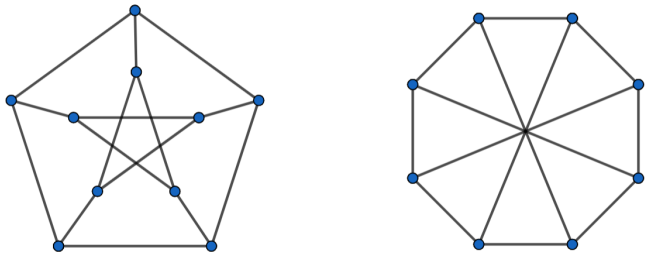


图 1：彼得森图 P 和瓦格纳图 W。

令 $\mathcal{P}'$ 表示边控制数至多为 5 的图类，这些图可由彼得森图通过以下两种方式之一修改每个顶点得到：（1）在该顶点上附加至少一条悬挂边；或（2）细分与该顶点关联的某些边。本文的首个主要成果是以下定理，它推广了定理 1.4，并给出了确保 3-连通无爪图具有哈密顿性的支配数最佳上界。

定理 1.5。设 G 是一个3-连通无爪图，其阶为 n。若 G的支配数至多为 5，则 G 是哈密顿的，除非其闭包 $\mathrm{cl}(G)$ 是属于图类 $\mathcal{P}'$的某个图的线图。

受定理 1.3 以及 Zheng、Broersma、Wang 和 Zhang 的工作启发 [28]，，我们进一步研究无爪图中支配数与哈密顿连通性之间的关系。本文证明，除某些已明确刻画的图外，每个支配数不超过 4 的 3 -连通无爪图都是哈密顿连通的。这一

结果推广了定理 1.3，并确定了保证 3-连通无爪图具有哈密顿连通性的支配数最佳可能上界。

为引出下一个定理，我们需要介绍一些记号。令 $\mathcal{W}'$ 表示边控制数至多为4 且由瓦格纳图经过以下操作得到的图类：在每个顶点 v处，执行以下一种或多种操作：连接至少一条悬挂边或一条二重边（即重数为 2 的边）；细分一些与 v关联的边；并可选择在 v 与任意细分顶点之间添加一条二重边。正如 [6], 中所指出的，闭包运算并不保持 G的（非）哈密顿连通性。为解决这一问题，Ryjáček 和 Vrána [22]引入了闭包运算的一个强化版本，称为M-闭包，记作$\mathrm{cl}^M(G)$。本文不要求显式构造$\mathrm{cl}^M(G)$；相反，我们只依赖它的一些性质，这些性质将在后文列出。

定理 1.6。设 G是一个3-连通无爪图，其阶为 n。若G 的支配数至多为4，则 G 是哈密顿连通的，除非其M-闭包是某个属于图类 $\mathcal{W}'$的图的线图。

一个超图 $\mathcal{H}$ 是一个有序对（V（$\mathcal{H}$） E（$\mathcal{H}$）），其中 V（$\mathcal{H}$）是 $\mathcal{H}$ 的顶点集，而 E（$\mathcal{H}$）是 V（$\mathcal{H}$）的一个不一定互异的非空子集族，称为 $\mathcal{H}$的超边。超图 $\mathcal{H}$ 的秩是其超边的最大基数。秩为 r的超图也称为 r-超图。注意，2-超图对应于多重图。基数为 2 的超边有时也称为 $\mathcal{H}$的一条边。因此，不含超边的超图是一个多重图，而不含平行边和环的多重图是一个图。

2020 年，Li、Ozeki、Ryjáček 和 Vrána [16]发现了 3-超图的线图与猜想 1.1之间的密切关系。

定理1.7。（Li、Ozeki、Ryjáček 和 Vrána [16]）猜想*1.1* 等价于如下表述：每个4-连通的、3-超图的线图都是哈密顿连通的。

受该定理启发，我们进一步研究 3-超图的线图的支配数，并得出以下结果

定理1.8。 支配数至多为 4的 3连通3-超图的线图是哈密顿的。

由于每个图都可以视为 3-超图，因此定理 1.8可被视为对定理 1.2. 的自然推广

本文结构如下。第 2 节介绍必要的预备知识，并给出定理 1.5 和 1.6 的证明。第 3 节给出定理 1.8 的证明，并讨论由定理 1.8 自然引出的若干相关问题。

定理 1.5 和1.6 的证明

2.1 预备知识

我们首先回顾一些必要的已知概念和结果。若一个顶点的邻点诱导出一个完全图，则称该顶点为单纯的。下述定理证明见 [22]。

定理 2.1。（Ryjáček 和 Vrána [22]）设 G 是一个多重图的连通线图。那么，存在一个在同构意义下唯一确定的多重图 H，使得 $G = L(H)$ 中的顶点 $e \in V(G)$ 是单纯的，当且仅当对应的边 $e \in E(H)$ 是 H中的悬挂边。

具有定理 2.1 所述性质的多重图 H 称为线图 G 的原像，记作 $H = L^{-1}(G)$。我们还将使用记号 $u = L(e)$ 和 $e = L^{-1}(u)$分别表示边 $e \in E(H)$及其对应的顶点 $u \in V(G)$。若多重图H的边割集 $R \subset E(H)$使 $H - R$至少有两个非平凡分支，则称其为本质边割集。设 H是一个至少有 $k+1$条边的图。若 H 中的每个本质边割集的大小都至少为 k，则称 H 是本质 k-边连通的。众所周知，线图 G 是 k-连通的，当且仅当 $L^{-1}(G)$是本质k-边连通的（见命题 1.1.3]）。以下闭包的性质将在我们的证明中用到。

定理 2.2。(Ryjáček [21]) 设 G 是一个无爪图，$\mathrm{cl}(G)$ 是其闭包。那么(i)存在一个无三角形图 H，使得$\mathrm{cl}(G)$ 是 H的线图；并且(ii) G 是哈密顿的，当且仅当其闭包$\mathrm{cl}(G)$ 是哈密顿的。

注意，在 [6], Brandt、Favaron 和 Ryjáček 指出，闭包运算并不保持图 G 的（非）哈密顿连通性。为解决这一问题，文献 [22] 为无爪图 G 引入了 *M*-闭包 $\mathrm{cl}^M(G)$ 的概念。由于其构造的技术细节与我们的证明无关，故不再赘述。以下结果概述了我们在论证中将用到的 $\mathrm{cl}^M(G)$ 的关键性质：

定理 2.3。(Ryjáček 和 Vrána [22]) 设 G 是一个无爪图。则 $\mathrm{cl}^M(G)$ 具有以下性质：

(i) $V(G) = V(cl^M(G))$ 且 $E(G) \subset E(cl^M(G))$；*(ii)* $cl^M(G)$ 唯一确定；
(iii) G 是哈密顿连通的，当且仅当 $cl^M(G)$ 是哈密顿连通的；*(iv)* 对某个多重图 H，$cl^M(G) = L(H)$。

对于 x、$y \in V(G)$，以 x、y为端点的路（相应地，迹）称为(x, y)-路（相应地，(x, y)-迹）；以 e、$f \in E(G)$为末端边的迹称为(e, f)-迹。顶点集$S \subset V(G)$支配边 e，如果 e 在 S中至少有一个顶点；子图 $F \subseteq G$ 支配e，如果 $V(F)$支配 e。闭迹 T是支配闭迹，如果 T支配 G的所有边；(e_1, e_2)-迹是内部支配(e_1, e_2)-迹（简记为(e_1, e_2)-IDT），如果其内部顶点集支配 G的所有边。

Harary与Nash-Williams [11] 建立了图 H 中的支配闭迹与其线图 $G = L(H)$中的哈密顿圈之间的基本对应。将这一结果推广到哈密顿连通性，Li、Lai与Zhan [15] 证明了 $G = L(H)$是哈密顿连通的，当且仅当对每一对边 $e_1, e_2 \in E(H)$，H 都包含一条(e_1, e_2)-IDT。

定理 2.4. 设 H 为满足 $|E(H)| \geq 3$ 的多重图，并设 $G = L(H)$。
(i)（Harary 和 Nash-Williams [11]）图 G 是哈密顿的，当且仅当 H 有一条支配闭迹。
(ii)（Li、Lai 和 Zhan [15]）对于每个 $e_i \in E(H)$ 和 $a_i = L(e_i)$，$i = 1,2$, G 有一条哈密顿(a_1, a_2)-路，当且仅当 H 有一个(e_1, e_2)-*IDT*。

图的核这一概念在研究线图的哈密顿性质时起着重要作用。核图 H，记作 $\mathrm{co}(H)$，是通过反复抑制所有度为 2 的顶点（即将每个这样的顶点及其关联的边替换为连接其邻点的一条边），并移除所有悬挂边而得到的多重图。Shao [23, 引理 1.4。1]给出了多重图的核具有的以下性质。

定理 2.5. (Shao [23]) 设 H 是一个本质上 3-边连通的多重图。那么(i)$\mathrm{co}(H)$是唯一确定的；(ii)$\mathrm{co}(H)$是 3-边连通的。

设 H 是一个多重图，$R \subset H$ 是 H 的生成子图，并设 $\mathcal{R}$ 是 R 的连通分支集。则 H/R 是具有 $V(H/R) = \mathcal{R}$ 的多重图，其中，对于 $E(H)$ 中连接 R 的两个连通分支的每条边，在 $E(H/R)$ 中都存在一条边连接 H/R 中相应的顶点。收缩操作将顶点集 $V(H)$ 映射到 $V(H/R)$，其中子图 $R \subseteq H$ 的每个连通分支都收缩为 H/R 中的一个顶点。多重图 H/R 称为 H 按 R 收缩所得的图。若 $H/R \cong F$，则该收缩定义了一个映射 $\alpha : H \to F$，称为将 H 收缩到 F 的收缩 。对于 R 的一个连通分支 R_1 以及满足 $\alpha(R_1) = u$ 的顶点 $u \in V(F)$，我们将 R_1 称为顶点 u 的原像 。

Holton、McKay、Plummer 和 Thomassen 提出的著名九点定理 [12] 断言：每个 3-连通三次图都包含一条经过任意九个顶点集合的圈。后来，Bau 和 Holton [2], 证明了一个更强的结果：每个 3-连通三次图都包含一条经过任意指定的十二个顶点的圈，除非该图可以收缩为彼得森图。之后，Chen、Lai、Li、Li 和 Mao [8] 将这一结果推广到了 3-连通图。他们的推广表述如下：

定理 2.6。（Chen、Lai、Li、Li 和 Mao [8]）设 H 为一个 3-边连通多重图，且$A \subset V$（H）满足 $|A| \leq 12$。则或者 H 包含一条闭迹 T 使得 $A \subset V$（T），或者 H 可以收缩为彼得森图，并且以这种方式收缩时，彼得森图的每个顶点的原像都至少包含一个位于 A中的顶点。

为证明定理 1.6，我们利用了 [17], 中的一个结果，该结果基于 Bau 和 Holton [3] 关于3-连通三次图中经过给定顶点集和一条指定边的圈的一个更强定理。

定理 *2.7*。（*Liu*、*Ryjáček*、*Vrána*、*Xiong* 和 *Yang* [17]）设 H 为一个*3*-边连通多重图，$A \subset V$（H），其中 $|A| = 8$，并且设 $e \in E$（H）。则或者 H 包含一个闭迹 T，使得$A \subset V$（T）且 $e \in E$（T）；或者存在一个收缩 α：$H \to P$，使得 α（e）$= xy \in E$（P），并且α（A）$= V$（P）$\setminus \{x, y\}$。

为了应用定理 2.6 和定理 2.7，我们首先将问题缩减到 H 的核。注意，如果 H 是本质3-边连通的，那么任意两个度小于 2 的顶点都不相邻。因此，H 的每条边至多包含一个度小于 2 的顶点。设 H 的两条边为 e_1 和 e_2，并用 e_1'、e_2' 表示它们在 co(*H*) 中对应的边。每个 e_i'(*i* = 1, 2) 的定义取决于构造 co(*H*) 时如何处理边 e_i（见图 2），具体如下：

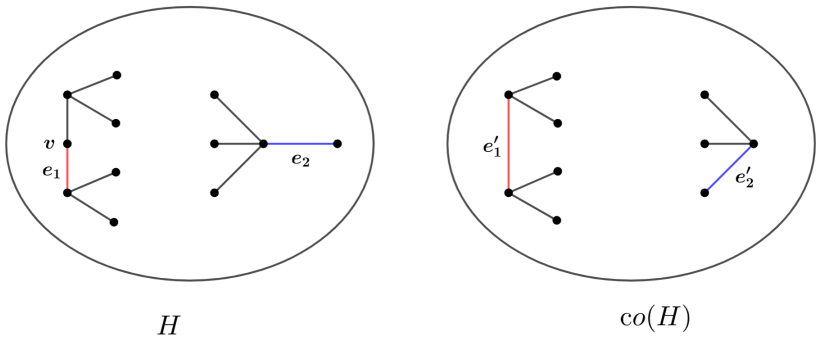


图 2：定义 2.8 中构造的示意例子。

定义 2.8。设 e_1 和 e_2 是构造 co(H) 时移除的两条边。对应的边 e'_1, $e'_2 \in E$(co(H)) 按照以下规则之一进行定义，具体取决于 e_1 和 e_2 在缩减过程中的作用：

(i) 如果 e_1 的一个端点（设为 v）的度为二，则将抑制 v 后在 co(H) 中得到的边定义为 e'_1。
(ii) 如果 e_2 是一条悬挂边，则将 co(H) 中与 e 的非叶端点关联的任意一条边定义为 e'_2。

2.2 定理 1.5 的证明

现在我们可以给出定理 1.5 的证明。需要指出的是，定理 1.5 的证明中的某些部分与 [26] 中定理 1 的证明相同。不过，由于某些技术细节需要进一步讨论，而且为了完整起见，我们在此给出完整证明（包括相同的部分）。

定理 1.5 的证明。设 G 是一个支配数至多为 5 的 3-连通无爪图。为导出矛盾，假设 G 不是哈密顿的。由于 V(cl(G)) $= V(G)$、γ(cl(G)) $\leq \gamma(G)$，且 cl(G) 是 3-连通的，图 cl(G) 满足与 G. 相同的假设。根据定理 2.2，图 G 是哈密顿的，当且仅当其闭包 cl(G) 是哈密顿的。因此，只需对闭无爪图证明定理 1.5。令 $H = L^{-1}(G)$。由于 G 是 3-连通的，H 是本质3-边连通的。根据定理 2.4, H 没有支配闭迹；根据定理 2.5，核 co(H) 是 3-边连通的。

若在构造 e 时删除边co(H)，则按照定义 e' 中的规定，在co(H)中定义相应的边。2.8。为方便起见，若边 e 仍保留在co(H)中（即其两个端点的度均至少为3），我们就直接令 $e' = e$。例子见图 2。容易验证，若一条边被 e支配，则它也必被 e'支配。

设 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 是 G 的一个支配集。根据线图的定义， H 中与之对应的五条边组成的集合记为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$，它支配 H 的所有边。对于每个 $e_i \in \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$，我们按照定义 2.8 中对 e' 所述的完全相同规则，在 co(H) 中选取一条边 e'_i。令每个 $i \in [5]$ 对应 $e'_i = z_{2i-1}z_{2i}$，也就是说， e'_i 的端点为 z_{2i-1} 和 z_{2i}。由于集合 $\{z_1, \ldots, z_{10}\}$ 支配 co(H) 的所有边，若 co(H) 中存在一条经过所有这些顶点的闭迹，则意味着 co(H) 中存在一条支配闭迹。它

很容易验证，对于 e'_i 的每一种可能构造，这样一条 co(H) 中的支配闭迹都对应于 H 中的一条支配闭迹，这与我们先前的假设矛盾。于是，根据定理 2.6，co(H) 可以收缩为彼得森图，使得彼得森图中每个顶点的原像都包含 $\{z_1, \ldots, z_{10}\}$ 中的一个顶点。令 p_i、$i \in [10]$ 为彼得森图的十个顶点，并令 H_i 为 p_i、$i \in [10]$ 的原像，使得 $z_i \in V(H_i)$。根据收缩的定义，co(H) 中 H_i 的邻域满足 $|N_{\mathrm{co}(H)}(H_i)| = 3$。

现在证明 H_i 只由一个顶点构成。由于 $z_1, \ldots, z_{10}$ 支配 co(H) 的所有边，且只有 z_i 位于 H_i中，因此 H_i 的每条边都必须由 z_i支配。设 $x_1, \ldots, x_j$ 为 H_i 中与 z_i相邻的顶点，其中 $j \geq 0$。若 $j \geq 2$，则由于 $|N_{\mathrm{co}(H)}(H_i)| = 3$，$x_1$ 或 x_2中至少有一个顶点的度不超过 2，这与 co(H) 的最小度至少为 3 的假设矛盾。若 $j = 1$，则 x_1 或 z_i 中必有一个顶点的度不超过 2，同样矛盾。因此，唯一的可能是 $j = 0$，从而 H_i 仅由顶点 z_i构成。

因此，我们有 $\mathrm{co}(H) = P$。根据 $\mathrm{co}(H)$ 的定义以及 H 本质上是 3-边连通的这一事实，可知 H 是通过向其顶点添加悬挂边，并细分其中的一些边，从$\mathrm{co}(H)$ 得到的。注意，若 P 中存在一个顶点，它没有连接悬挂边，且其关联边均未被细分，则可以在 H中找到一条支配闭迹，这与定理 2.4矛盾。

证明至此完成。 □

定理1.6的证明

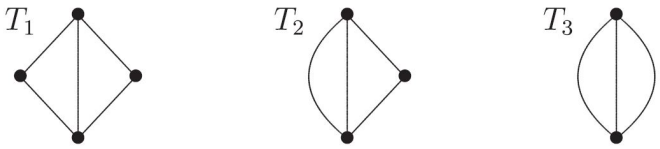


图 3：菱形图 T_1、多重三角形 T_2 和三重边 T_3。

定理 2.9. (Ryjáček 和 Vrána [22]) 设 G 是一个无爪图，并设 T_1、T_2、T_3 是图 3所示的多重图。那么，G 是 M-闭的，当且仅当 G 是某个多重图的线图，且$L^{-1}(G)$ 不包含与以下任一多重图同构的子图（不一定是诱导子图）T_1、T_2 或 T_3。

现在我们可以给出定理 1.6的证明了。由于证明的推理思路与定理 1.5的证明类似，我们省略部分细节。

定理 1.6 的证明。设 G是一个支配数至多为 4 且非哈密顿连通的 3-连通无爪图。令 $H = L^{-1}(\mathrm{cl}^M(G))$。由于 G 是 3-连通的，H 是本质3-边连通的。根据定理 2.4，存在两条边 e_1 和 e_2，使得图 H 不包含 (e_1, e_2)-IDT。为导出矛盾，我们先将问题简化到 H的核。令e'_1 和 e'_2 按定义 2.8 定义。

现在，在多重图 $\mathrm{co}(H)$ 中，如果 $e'_1 = e'_2$，我们令 $\widetilde{e} = e'_1 = e'_2$；否则，我们将边$e'_1$细分，$e'_2$ 并用一条边连接两个新顶点 $\widetilde{e}$。在两种情况下，我们都用 $\mathrm{co}(H)'$ 表示所得的多重图。第一种情况下，$\mathrm{co}(H)'$ =co(H) ，并且根据定理 2.5，它是 3-边连通的；而且它

很容易看出，第二种情况下，co(H)′ 也是 3-边连通的（请注意，在 co(H) 中，所有悬挂边都被移除，所有度为 2 的顶点都被压缩）。

设 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 是 G 的支配集。根据线图的定义，由 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 表示的四条对应边支配 H 的所有边。对于 $f_i \in E(H)$ $i = 1$，2、3、4，我们在 co(H) 中找到边 f_i'。对于每个 $i \in [4]$，令 $f_i' = w_{2i-1}w_{2i}$；也就是说，f_i' 的端点为 w_{2i-1} 和 w_{2i}。令 $A = \{w_1, \ldots, w_8\}$。根据定理 2.7，要么 co(H)′ 中存在一条闭迹，包含顶点 w_1、.....、w_8 以及边 $\widetilde{e}$；要么存在一个收缩 α'：co(H)′ $\to P$，使得 $\alpha'(\widetilde{e}) = xy \in E(P)$ 且 $\alpha'(A) = V(P) \setminus \{x, y\}$。在前一种情况下，我们可以在 H 中找到一个 (e_1, e_2)-IDT （回想一下，对应的顶点集 $\{w_1, \ldots, w_8\}$ 支配 H 的所有边），这就产生了矛盾。因此可以推断，存在一个收缩 α' : co(H)′ $\to P$，使得 $\alpha'(\widetilde{e}) = xy \in E(P)$ 且 $\alpha'(A) = V(P) \setminus \{x, y\}$。设 $W_i, i \in \{1, \ldots, 8\}$ 是 co(H)′ 中包含 w_i 的原像，设 W_9, W_{10} 是 $\widetilde{e}$ 两个端点的原像。由于 $\{w_1, \ldots, w_8\}$ 支配 co(H)′ 的所有边，因此 W_9 和 W_{10} 都只包含一个顶点，且 $e_1' \neq e_2'$。回想一下，瓦格纳图可以通过删除彼得森图中的任意一条边，并抑制由此产生的两个度为 2 的顶点得到。因此，收缩 α' 可以将 co(H) 收缩为瓦格纳图 W。

回顾一下，集合 $w_1, \ldots, w_8$ 是 co(H) 的一个支配集，且每个 w_i 都属于相应的分支 W_i，因此 W_i 的每条边都被 w_i 支配。于是，每个 W_i 都是一颗星（可能含有重边）。由定理 2.9 可知，每个 W_i 都不含三重边（图 3，T_3）。注意，$|N_{\mathrm{co}(H)}(W_i)| = 3$，且 w_i 是 f_i' 的一个端顶点。结合集合 $\{f_1', f_2', f_3', f_4'\}$ 支配 co(H) 的所有边这一事实，我们得出 w_i 与其他原像中的顶点相邻。因此，移除所有悬挂边和悬挂重边后，W_i 中的二重边数至多为两个。根据 co(H) 的结构性质以及其支配数为 4 这一事实，我们得出 H 属于类 $\mathcal{W}'$。

至此，证明完成。 □

定理3.1.8

3.1 预备知识

若 $\mathcal{H}$ 是一个 3-超图，则其关联图 $IG(\mathcal{H})$是由 $\mathcal{H}$ 得到的图：将每条边细分，并在细分处加入一个度为 2 的新顶点；再将每条 3-超边替换为一个与其三个顶点均相邻的新顶点。新加入的顶点称为 $\mathcal{H}$ 的白色顶点，而 IG的原有顶点则称为$\mathcal{H}$(IG)的黑色顶点。因此，在$\mathcal{H}$($\mathcal{H}$)中，白色顶点对应于 $\mathcal{H}$ 的边和超边，黑色顶点对应于 IG的顶点。注意，$\mathcal{H}$()中的每个白色顶点的度均为 2 或 3。

图 G 中的一个闭游走 Q 是一个序列

$$v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k,$$

使得对于每个 $0 \leq i \leq k-1$，边 e_i 连接顶点 v_i 和 v_{i+1}，且 $v_k = v_0$。每个顶点 v_i 都称为被 Q 访问，其 重数 等于它在序列中出现的次数。同样，边 e_i 也称为被 Q 访问（同样可能具有重数）。闭迹是指每条边至多访问一次的闭游走。

设 v_i 是上述游走访问一次的顶点。 v_i 的前驱边定义为e_{i-1} （减法模 k进行）。同样，当 $i < k$ 时， v_i 的后继边为 e_i ，否则为 e_0 。给定 G中由度为 2 或 3 的顶点组成的任意集合 W ， G 中的闭 W-拟迹是指一种闭游走：每条边至多 traverses 两次；如果某条边 e 被 traverses 两次，则它有一个端点 $w \in W$ ，使得 w 被访问一次，而 e 既是 w的前驱边，也是其后继边。 G 中的闭 W-拟迹若访问了G的每条边中的至少一个顶点，则称为支配的。

我们将使用以下3-超图线图为哈密顿图的刻画，该刻画由文献 [16]中的推论 7 得出。

定理3.1。 (Li, Ozeki, Ryjáček, Vrána [16]) 设 $\mathcal{H}$ 是一个3-超图， W 是其关联图 $IG(\mathcal{H})$中的白色顶点集。当且仅当 $IG(\mathcal{H})$包含一条控制闭W-拟迹时， $\mathcal{H}$ 的线图 $L(\mathcal{H})$ 才是哈密顿的。

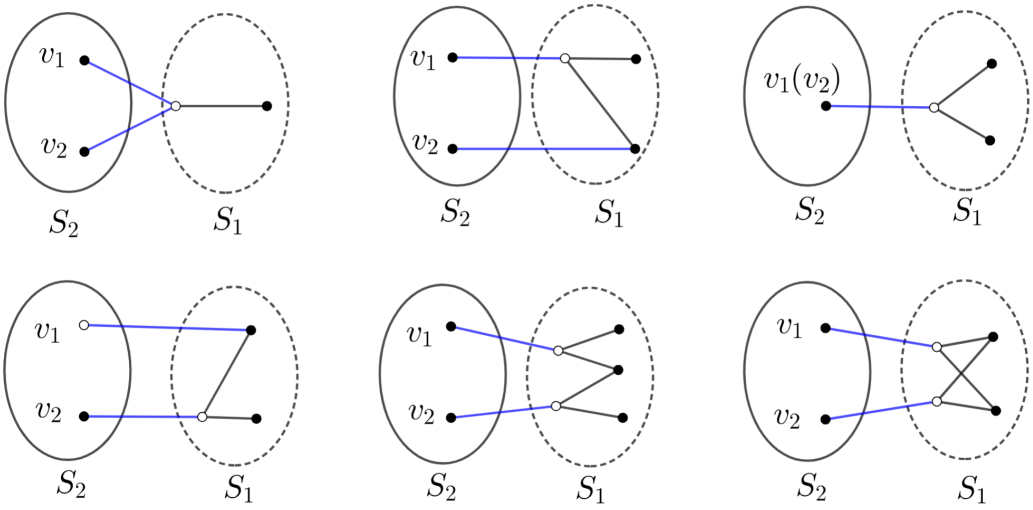


图 4： $IG'(H)$中的非本质边割。

3.2 定理1.8的证明

现在我们可以给出定理1.8的证明了。

定理 1.8 的证明。设 $\mathcal{H}$ 是一个 3-超图，其线图 $L(\mathcal{H})$是支配数至多为 4 的 3-连通图。我们要将问题从超图 $\mathcal{H}$ 转化到其关联图 $IG(\mathcal{H})$上。设 $IG'(\mathcal{H})$是由 $IG(\mathcal{H})$收缩每个度为 2 的白顶点后得到的图。假设 $IG'(\mathcal{H})$不是本质3-边连通的。那么存在一个极小边割 $X' \subseteq E(IG'(\mathcal{H}))$，其中 $|X'| < 3$ 满足： $IG'(\mathcal{H}) - X'$ 至少有两个非平凡连通分支，记为 S_1 和 S_2。

注意， $IG'(\mathcal{H})$ 的每条边都对应于 $\mathcal{H}$ 的一条超边或边。令 $X \subseteq E(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 中对应于 X' 的边的超边或边的集合。由于 $|X'| < 3$，我们有$|X| < 3$。现在考虑超图 $\mathcal{H} - X$。如果 $\mathcal{H} - X$ 有两个或更多非平凡连通分支，那么在线图 $L(\mathcal{H})$ 中，这些分支内对应于超边的顶点将被点割 X 分隔，这与 $L(\mathcal{H})$ 是 3-连通的假设矛盾。

因此， $\mathcal{H}-X$ 恰好有一个非平凡连通分支。也就是说， S_1 或 S_2 满足以下条件：该连通分支中的每条边都对应于 $\mathcal{H}$ 中属于X的一条超边。不失一般性，假设 S_1 满足此条件。例子见图4。

令 $\{v_1, v_2\} \subseteq V(X')$ 为位于 S_2 中的两个顶点（见图 4）。删除 S_1 中的所有顶点，并在 v_1 和 v_2 之间添加一条新边（假设 v_1 和 v_2 不相邻），得到一个新图，记为 $IG'(\mathcal{H})^1$。如果 $IG'(\mathcal{H})^1$ 仍非本质3-边连通，我们就重复这一过程。由于每一步中，大小小于 3 的边割数量都严格减少，因此该过程必定在有限步后终止。记最终得到的图为 $IG'(\mathcal{H})^s$ 。那么 $IG'(\mathcal{H})^s$ 是本质3-边连通的。

对于 e ，即在构造 $IG'(\mathcal{H})^s$的过程中被删除的每条边，令 e^0 为包含 v_1 和 v_2的边或超边。若 $v_1 = v_2$，则定义 e^0 为与 v_1关联的任意一条边。为了应用定理2.6，我们将问题转化为 $IG'(\mathcal{H})^s$的核。为方便起见，在下文中我们将$\widetilde{\text{co}}(IG'(\mathcal{H})^s)$ 记为 $\mathcal{H}$ 。

设 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 是 $G = L(\mathcal{H})$ 的支配集。根据超图线图的定义，在 $\mathcal{H}$ 中存在四条边或超边 e_1，e_2，e_3，e_4 ，分别对应于 u_1，u_2，u_3，u_4，使得集合 $\{e_1, \ldots, e_4\}$ 支配 $\mathcal{H}$ 的所有边和超边。设 $\{e'_1, \ldots, e'_4\}$是 $\mathcal{H}$ 中对应于 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 的超边（或边）。令 $\{z_1, \ldots, z_t\}$ 表示 $\mathcal{H}$ 中与代表 $\{e'_1, \ldots, e'_4\}$ 的白色顶点关联的顶点集。如果某个 e'_i 是边而非超边，那么 z_j 指其一个端点。因此，顶点集 $\sim\{z_1, \ldots, z_t\} \subseteq V(\mathcal{H})$ 支配 $\mathcal{H}$ 的所有边。由于每条超边包含三个顶点，且这样的超边至多有四条，因此可得 $t \leq 12$。

若存在一条闭迹 R，它位于 $\mathcal{H}$ 中并经过 $\{z_1, \ldots, z_t\}$ 的所有元素，那么显然，对于 e'_i、$i = 1$ 的每一种构造，即 2、3、4，我们都能在 $IG(\mathcal{H})$ 中找到一条闭迹 R'。我们的目标是应用定理3.1，推导出这条迹 R' 对应于 $L(\mathcal{H})$ 中的一个哈密顿圈。令 W 为 $IG(\mathcal{H})$ 中白色顶点的集合。现在，我们从 R' 构造一条闭的支配型 W-准迹。

考虑 $IG(\mathcal{H})$ 中一个未被迹 R' 遍历的白顶点 w。由于集合 $\{z_1, \ldots, z_t\}$ 支配 $\mathcal{H}$ 的所有超边和边，因此每个这样的白顶点 w 都与至少一个顶点 $z_i \in \{z_1, \ldots, z_t\}$ 相邻；并且根据构造，每个 z_i 都被 R' 遍历。为将 w 纳入游走，我们在 z_i 的某次出现处插入一段短绕行来修改 R' ：具体而言，将 R' 中的一次 z_i 替换为序列 z_i、z_iw、w、wz_i、z_i，从而将白顶点w 及其两条关联边 z_iw 和 wz_i 加入迹中，同时保持其闭合性。对每个未出现在 R' 上的白顶点 w 重复此绕行操作（任选一个相邻的$z_i \in \{z_1, \ldots, z_t\}$进行绕行），即可得到 $IG(\mathcal{H})$ 中一条遍历所有白色顶点的闭游走。由于 $IG(\mathcal{H})$ 中的白色顶点对应于 $\mathcal{H}$ 的所有超边和边，所得游走支配 $IG(\mathcal{H})$ 的所有边。因此，这条最终游走是 $IG(\mathcal{H})$ 中一条闭的支配型 W-准迹。根据定理3.1，这意味着线图 $L(\mathcal{H})$ 是哈密顿的。

现在，假设不存在经过 R中所有 $\mathcal{H}$的闭迹 $\{z_1, \ldots, z_t\}$，由定理 2.6可知，核 $\mathcal{H}$ 可以收缩为彼得森图，使得彼得森图中每个顶点的原像，进而 $10 \leq t \leq 12$。那么，边集 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 必须至少包含两条超边。特别地，我们可以假设 z_1、z_2、z_3 是超边 e_1 的端点，并分别映射到彼得森图中的三个顶点 p_1、p_2、p_3 。

令 w_1 为 $\mathcal{H}$ 中对应于超边 e_1 的白顶点。根据收缩的定义，

要么 w_1 是某个不同于 p_1、p_2、p_3 的顶点的原像，要么 w_1 包含在某个 $i \in \{1,2,3\}$ 的 p_i 的原像中。对于前一种情况，由 w_1 构成的原像不包含 $\{z_1,\ldots,z_t\}$ 中的任何顶点，这就产生了矛盾。因此，我们可以假设后一种情况成立。

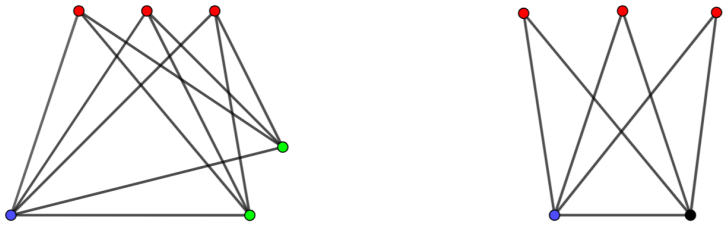
~根据对称性，不妨设 w_1 包含于 p_1的原像中，并设 $W_1 \subseteq V(\mathcal{H})$~为 p_1的原像。由于 z_2 和 z_3 在 $\mathcal{H}$中均与 w_1 相邻，因此 p_2 和 p_3 是彼得森图中 p_1的邻点。设 p_4 为除 p_2 和 p_3之外 p_1 的唯一邻点。因此，存在 $\mathcal{H}$ 中的一条边 f_4，对应于彼得森图中的边 p_1p_4。然而，$\{w_1, f_4\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中构成一个本质二边割，对应于 $G = L(\mathcal{H})$中的一个二割，矛盾。证明完毕。□

定理1.8的最佳可能性

在定理1.8中，我们证明了每个3-连通的、支配数至多为3-超图的线图4 都是哈密顿的。该结果是精确的：例如，将至少一条悬挂边连接到彼得森图的每个顶点所得到的图的线图，在支配数等于5时就是一个反例，见定理1.5。

图 G 的团覆盖 是由 G 的团组成的一个族 $\mathcal{K}$，其中 G 的每个顶点和每条边都属于 $\mathcal{K}$ 中的某个团。下面的结果刻画了哪些图是某个 r-超图的线图。

定理3.2。(Berge [4] 以及 Skums、Suzdal、Tyshkevich [24]) 对于每个整数 $r \geq 2$，图 G是某个 r-超图的线图，当且仅当 $E(G)$ 可以由一个团系统 $\mathcal{K}$ 覆盖，使得 G 的每个顶点至多属于 r 个 $\mathcal{K}$团。



$K_{1,2,3}$　　$K_{1,1,3}$

图5：图 $K_{1,\ 2,\ 3}$ 以及 $K_{1,\ 1,\ 3}$。

令 K_1,2,3 表示部集大小分别为 1、2 和 3 的完全三部图（见图5）。容易验证，K_1,2,3 是 3-连通的，但不是哈密顿连通的。根据定理3.2，K_1,2,3 是一个 3-超图的线图。这自然引出了一个问题：在 3-超图的 3-连通线图中，哈密顿连通性与支配数有何关联？K_1,2,3 这一例子表明，即使支配数为 1，3-超图的 3-连通线图也可能不是哈密顿连通的。此外，在 K_1,2,3（见图5）中用一个团替换红色顶点，并将该团的每个顶点与 K_1,2,3 中大小为 1 和 2 的部集中的所有顶点相连，可以构造出无穷多个更大的反例。类似地，图 K_1,1,3 表明，支配数为 1 的 3-超图的 2-连通线图可能不是哈密顿图。同样，用一个团替换 K_1,1,3 中的红色顶点，可得到一族无穷多个这样的非哈密顿图。

致谢

Kenta Ozeki 的研究得到 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为 22K19773 和 23K03195。Leilei Zhang 的研究得到 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为 25KF0036；湖北省自然科学基金资助，项目编号为 2025AFB309；中国博士后科学基金资助，项目编号为 2025M773113；以及中央高校基本科研业务费（华中师范大学）资助，项目编号为 CCNU24XJ026。

声明

利益冲突 作者声明，他们不存在已知的竞争性经济利益或个人关系，可能会影响本文所报告的研究工作。**数据可用性** 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] A.A. Ageev，$K_{1,3}$-自由图中的支配集与哈密顿性，《西伯利亚数学杂志》35 (3) (1994) 421-425.[2] S. Bau，D. Holton，3-连通三次图中包含12个顶点的圈，J. Graph Theory 15 (4) (1991) 421-429.[3] S. Bau，D. Holton，关于3-连通三次图中包含八个顶点和一条边的圈，《组合论》A 26 (1988) 21-34.[4] C. Berge，超图，载于：有限集组合学，北荷兰数学文库，第45卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1989，译自法文。[5] J. A. Bondy，U. S. R. Murty，图论。数学研究生教材，第244卷。施普林格，纽约，2008，第xii+651页。[6] S. Brandt，O. Favaron，Z. Ryjáček，无爪图中的闭包与稳定哈密顿性质，J. Graph Theory 32 (2000) 30-41.[7] J. Cai，爪重图中的支配集与哈密顿性，Ars Combin. 141 (2018) 21-27.[8] Z.-H. Chen，H.-J. Lai，X.W. Li，D.Y. Li，J.Z. Mao，3-边连通图中的欧拉子图与哈密顿线图，J. Graph Theory 42 (2003) 308-319.[9] Z.-H Chen，H.-J Lai，L. Xiong，3-连通无爪图哈密顿性的最小度条件，J. Combin. Theory Ser. B 122 (2017) 167-186.[10] M. N. Ellingham，D. A. Holton，C. H. C. Little，3-连通三次图的十顶点定理。《组合论》4 (4) (1984) 256-273.[11] F. Harary，C.St.J.A. Nash-Williams，关于欧拉图、哈密顿图与线图，《加拿大数学通报》8 (1965) 701-710.

[12] D.A. Holton，B.D. McKay，M.D. Plummer，C. Thomassen，3-连通图的九点定理，Combinatorica 2 (1982) 57-62.[13] T. Kaiser，P. Vrána，5-连通线图中的哈密顿圈，European J. Combin. 33 (5) (2012) 924-947.[14] R. Kužel，L. Xiong，每个4-连通线图是哈密顿的，当且仅当它是哈密顿连通的，载于：R. Kučzel（编），图的哈密顿性质（博士论文），比尔森西波希米亚大学，2004.[15] D. Li，H.-J. Lai，M. Zhan，欧拉子图与哈密顿连通线图，Discrete Appl. Math. 145 (2005) 422-428.[16] B. Li，K. Ozeki，Z. Ryjáček，P. Vrána，关于3-超图线图的Thomassen猜想，Discrete Math. 343 (6) (2020) 111838.[17] X. Liu，Z. Ryjáček，P. Vrána，L. Xiong，X. Yang，哈密顿连通的无{爪，网}图，I. J. Graph Theory 102 (1) (2023) 154-179.[18] X. Liu，Z. Ryjáček，P. Vrána，L. Xiong，X. Yang，哈密顿连通的无{爪，网}图，II. J. Graph Theory 103 (1) (2023) 119-138.[19] X. Ma，L. Lei，H.-J Lai，M. Zhan，关于直径为2的图的线图，Discrete Math. 344 (1) (2021) 文章编号112177.[20] M.M. Matthews，D.P. Sumner，$K_{1,3}$-自由图中的哈密顿结果，J. Graph Theory 8 (1984) 139-146.[21] Z. Ryjáček，关于无爪图中的闭包概念，J. Combin. Theory Ser. B 70 (1997) 217-224.[22] Z. Ryjáček，P. Vrána，多重图的线图与无爪图的哈密顿连通性，J. Graph Theory 66 (2011) 152-173.[23] Y. Shao，无爪图与线图，博士论文，西弗吉尼亚大学，2005.[24] P.V. Skums，S.V. Suzdal，R.I. Tyshkevich，线性3-一致超图的边交图，Discrete Math. 309 (2009) 3500-3517.[25] C. Thomassen，图论反思，J. Graph Theory 10 (3) (1986) 309-324.[26] P. Vrána，X. Zhan，L. Zhang，每个支配数至多为3的3-连通无爪图都是哈密顿连通的，Discrete Math. 345 (8) (2022) 112909.[27] S. Zhan，关于哈密顿线图与连通性，Discrete Math. 89 (1) (1991) 89-95.[28] W. Zheng，H. Broersma，L. Wang，S. Zhang，图的哈密顿性质的子图、度与支配条件，Discrete Math. 343 (2020) 111644.