arXiv:2603.03365v1 [math.CO] 2 Mar 2026

佩尔-帕多万四阶纳契数及其与经典数列的哈达玛积

Helmut Prodinger

Abstract. 一种快速计算与佩尔-帕多万四阶纳契数及二阶递推经典数列相关的生成函数的方法由此给出。八个特殊实例可以一次性计算出来。

下列数列佩尔-帕多万四阶纳契数

$$\mathscr{P}_{n+4} = \mathscr{P}_{n+2} + 2\mathscr{P}_{n+1} + \mathscr{P}_n, \quad \mathscr{P}_0 = 0,\ \mathscr{P}_1 = 1,\ \mathscr{P}_2 = 1,\ \mathscr{P}_3 = 1,$$

是 [2] 中主要关注的对象。其生成函数为

$$\sum_{n\ge 0} \mathscr{P}_n z^n = \frac{z(1+z)}{1 - z^2 - 2z^3 - z^4}.$$

两个生成函数的哈达玛积定义为

$$\sum_{n\ge 0} f_n z^n \odot \sum_{n\ge 0} g_n z^n = \sum_{n\ge 0} f_n g_n z^n.$$

论文 [2]计算了

$$\sum_{n\ge 0} \mathscr{P}_n z^n \odot \sum_{n\ge 0} X_n z^n$$

表1中的任意一种8个二阶数列，采用对称函数方法并分别讨论每种情形。我们一般考虑

$$\frac{a+bz}{1+cd+dz^2}$$

对于 $\sum_{n\ge 0} X_n z^n$，并一次性涵盖全部 8 种情况。我们得到

$$\sum_{n\ge 0} \mathscr{P}_n z^n \odot \frac{a+bz}{1+cd+dz^2} = \frac{\mathscr{N}}{\mathscr{D}}$$

with

$$\mathscr{N} = b - ac + (-ad - cb + ac^2)z + dbz^2 + d(ad - 2cb)z^3 \\ - d(-db + dac - c^2 b)z^4 + d^2(ad - cb)z^5$$

2010 数学主题分类。05A15。

and

$$\mathscr{D} = 1 + (-c^2 + 2d)z^2 + 2c(c^2 - 3d)z^3 \\ + (-c^4 + 4c^2d - d^2)z^4 - 2cd^2z^5 + d^2(c^2 + 2d)z^6 - 2cd^3z^7 + d^4z^8.$$

下表1展示了如何对参数 a、b、c、d进行特化，以得到这 8 种情形。

TABLE 1. 八种二阶递推

	递推（第 $=0$ 项）	X_0	X_1	a	b	c	d
k-斐波那契	$X_n - kX_{n-1} - X_{n-2}$	1	k	1	0	$-k$	-1
k-佩尔	$X_n - 2X_{n-1} - kX_{n-2}$	0	1	0	1	-2	$-k$
k-雅各布斯塔尔	$X_n - kX_{n-1} - 2X_{n-2}$	0	1	0	1	$-k$	-2
k-梅森	$X_n - 3kX_{n-1} + 2X_{n-2}$	0	1	0	1	$-3k$	2
第一类切比雪夫	$X_n - 2xX_{n-1} + X_{n-2}$	1	x	1	$-x$	$-2x$	1
第二类切比雪夫	$X_n - 2xX_{n-1} + X_{n-2}$	1	$2x$	1	0	$-2x$	1
第三类切比雪夫	$X_n - 2xX_{n-1} + X_{n-2}$	1	$2x-1$	1	-1	$-2x$	1
第四类切比雪夫	$X_n - 2xX_{n-1} + X_{n-2}$	1	$2x+1$	1	1	$-2x$	1

这 8 个数列均包含在 [1] 中。

我们选择使用 Maple 软件包 gfun。它包含多种实用程序，例如‘Hadamard乘积’、‘rec*rec’等。最简单的做法似乎是计算 $\sum_{n\geq 0} \mathscr{P}_n z^n \odot \frac{a+bz}{1+cd+dz^2}$ 的约 30 个系数，并使用‘guessgf’；该程序会猜出所刊载的生成函数 $\mathscr{N}/\mathscr{D}$。这一过程完全合理，因为我们先验地知道 $a\,priori$我们将得到一个 $4\times 2 = 8$阶递推。知道足够多的初始系数后，就能确定猜出的答案确实正确。我从 Doron Zeilberger 那里学到了这种论证方法。一旦得到有理生成函数，确实有多种论证方式。

当然 ，这种方法并不局限于本文讨论的数列。

REFERENCES

[1] Neil J. A. Sloane。《在线整数序列百科全书》。载于《*2019*年最佳数学作品》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿， [2019] ©2019。[2] Hassina Zerroug。关于佩尔-帕多万四阶纳契数及其含特殊数和切比雪夫多项式的普通生成函数的注记。《信息与优化科学杂志》。1–13（2025）。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF STELLENBOSCH 7602, STELLENBOSCH, SOUTH AFRICA AND NITHECS (NATIONAL INSTITUTE FOR THEORETICAL AND COMPUTATIONAL SCIENCES),SOUTH AFRICA.

电子邮件地址: warrenham33@gmail.com