arXiv:2603.03375v1 [stat.ML] 2 Mar 2026

UMAP背后的理论?

David Wegmann 埃朗根-纽伦
堡大学 david.wegmann@fau.de

2026年3月5日

摘要

2018 年，McInnes 等人提出了一种名为 UMAP 的降维算法 [5], ，该算法在数据科学家中广受欢迎。本文 [5] 介绍了一个函子的有限变体，即度量实现；这一函子出自 Spivak 未发表的草稿 [9] 。该草稿 [9] 包含许多错误，其中大多数被 McInnes 等人 [5] 及后续出版物照搬。本学位论文旨在纠正这些错误，并提供一份自包含文档，完整推导 Spivak 的函子及 McInnes 等人的有限变体。我们对度量实现及相关函子作了明确说明。在本学位论文末尾，我们将讨论 UMAP 算法，以及有关该算法性质和 McInnes 等人的有限变体与 UMAP 算法之间对应关系的断言。

1 引言

2018 年，McInnes 等人提出了一种名为 UMAP [5], 的降维算法，深受数据科学家欢迎。截至2025年8月28日，Google Scholar 显示该算法已有 19,058 次引用 [5]。在他们的文章中，McInnes 等人纳入了一个理论部分，旨在为这一算法提供理论依据。该部分尝试构造一种称为度量实现的函子的有限变体；这一概念最早出现在 Spivak 未发表的草稿 [9]中。该草稿又采用了 Barr [1]提出的模糊集层论视角。Spivak 的草稿 [9]中有一些小错误和疏漏，但只要尝试补全缺失的部分，大多数结果似乎都能成立。

Spivak 从未发表该草稿，并添加了免责声明，警告可能存在错误。他仅在 McInnes 等人的文章 [5]受到关注之后，才将该草稿放在自己的网站上（并附有另一份关于错误的免责声明）。这篇文章 [5] 还引用了 Barr[1], 复现了 Spivak 的许多错误，并错误地重新定义了 Barr [1]在 1986 年已正确定义的概念。 [5] 和[9] 中的一些错误与疏漏示例列于第 1.1 节。

本学位论文的目标是解决这些问题，并提供一份自洽的文档，其中包含 Spivak 的度量实现与 McInnes 等人的有限度量实现的显式构造，以及该构造所依赖的全部非标准结构。

我们首先在第 2 节中总结必要的范畴论背景，并将一些既有结果改写以适用于我们的应用。
随后，我们在第 3 节中总结 Barr 关于模糊集的全部相关定义与结果，并修复第 1.1 节第 1 项和第 2 项所述 [5] 与 [9] 中的相关问题。我们还为 Barr [1], 的主要结果给出一个更为显式的替代证明，如第 3 节开头所说明。

在第 4 节中，我们总结来自 [9] 的度量实现的目标范畴。随后，我们以类似于 Spivak [9] 的方式推导度量实现，同时修复第 1.1 节第 3 项和第 4 项所述的相关问题。我们的主要贡献是在第 4.3 节中对度量实现及相关函子给出显式描述，如第 4 节开头所详述。这些结果依赖于第 3 节中的另一项贡献。

在第 4.5 节中，我们给出 McInnes 等人的有限度量实现的一种构造，但这尤其需要对第 1.1 节第 5 项所述含糊定义作出精确诠释。

最后，我们将在第 5 节讨论 UMAP 算法背后的主要思想。我们将在第 5.4 节评述有关该算法性质的断言，以及这些断言与我们工作的关系。

1.1 McInnes 等人 [5]和 Spivak [9]中的问题

文献 [5] 中出现的度量实现函子 Real : sFuzz $\to$ EPMet，是几何实现函子 $Geom : Set^{\Delta^{op}} \to Top$ 的推广。该函子最初由 Spivak 在其未发表的草稿 [9, 第 3] 节中引入。

这里，单纯集的范畴 $Set^{\Delta^{op}}$ 被单纯模糊集的范畴 sFuzz 取代，其中每个元素都具有一个属于 (0,1] 的隶属度。拓扑空间的范畴 Top 被扩展伪度量空间的范畴 EPMet 取代。扩展伪度量空间与度量空间类似，但允许不同点之间的距离为 0 或 ∞。随后，函子 Real 将单纯模糊集 S 实现为一个扩展伪度量空间，其方式类似于几何实现。此外， S 中元素的赋值会影响相应单形的大小。

McInnes 等人通过在 [5] 中引入这种度量实现的有限变体，进一步发展了 Spivak 的结果。然而，McInnes 等人重现了 Spivak 原始草稿 [9]中的若干问题。下面我们列举出现在 [5], 中的这些问题实例，并指出它们何时源自 [9]。

Spivak 的草稿中范畴的记法 [9] 与 McInnes 等人的记法不同。

[5], 因此，我们在本学位论文的索引中提供了一份对照表。

1. 在 [5, 定义 3], 之前的段落中，先后引用了 Spivak 和 Barr [1]，随后尝试为 $I = (0, 1]$ 定义拓扑，但其中缺少空集。这与 Spivak 的草稿 [9,第 1] 节中的错误如出一辙。在 [5,定义 3],中，模糊集被定义为该假定拓扑空间 I上的预层，且所有限制映射都是单射。这是不正确的，因为这样无法得到所需的范畴等价。正确的定义见 Barr [1, 第 2] 节。在 [5, 定义 4], 中，模糊集范畴（称为 Fuzz）却突然被定义为层范畴，而非预层范畴。

2. 接着，文章 [5] 定义了该范畴上的单纯对象。它还给出了一种等价的替代定义，同样反映了 Spivak 的草稿[9, 第 1] 节中的一个错误。 [5] 中的定义 5 将单纯模糊集定义为从Δ^{op} 到 Fuzz 的函子，其中 Δ 是单纯形范畴，而 Fuzz 是问题 1 中讨论的模糊集范畴。这只是范畴 $\mathcal{C}$ 中单纯对象一般定义的一个特例，且定义正确。由于 Fuzz 被定义为从 I^{op} 到 集合的函子范畴的子范畴，因此， [5, 定义 5]中的单纯对象构成函子范畴 (集合^I)$^{\Delta^{op}}$的一个子范畴。

   接下来的段落试图将这个范畴与函子范畴 $Set^{(\Delta\times I)^{op}}$ 的一个等价子范畴对应起来。计算机科学家通常将此称为柯里化，参见第 2.1 节。不过，要在这里得到范畴等价，必须恰当地转换 Fuzz 中函子所满足的附加条件。层条件通过赋予 Δ 平凡的 Grothendieck 拓扑，再只考虑乘积 Grothendieck 拓扑 $\Delta \times I$ 上的层，便能得到正确转换。

   如果将 Fuzz 定义为 I 上所有层构成的范畴，那么它确实会是一个等价范畴。但正如问题 1 中所讨论的，Fuzz 还要求大多数限制映射都是单射。在整个 [5], 中都缺少这一条件，不过可以通过考虑以下层的子范畴来补上：$F\colon \Delta \times I \to Set$，其中所有限制映射 $F(id_{[n]}, _)$ 都是单射。

   不过，这样做仍然很繁琐，因为需要处理乘积 Grothendieck 拓扑。完全放弃 Grothendieck 拓扑会容易得多，只需将这个范畴定义为满足以下条件的函子 $F\colon \Delta \times I \to Set$，其中 $F([n], _)\colon I \to Set$ 是定义 3.3.2 中的模糊集。

3. 在推导度量实现之前的段落中， [5,定义 7], 定义了一个名为 Real 的函子。该定义包含三个互不相关的重大错误。

   (a) 它们涉及参数 a 和 b 的对数，其中 $0 \le a \le b \le 1$，但纳入0会破坏这一定义，因为log(0)无定义。排除0会引发进一步的问题：由于 I 应当是一个拓扑，空集必须映射到某个对象，但空集并不具有针对 $a > 0$的 $[0, a)$ 这种形式。这一问题在文献中不断传播。Barth等人 [2]

试图澄清UMAP背后的理论，并在 I [2, 注记3.1] 的定义中明确纳入0，但后来仍以同样的方式定义度量实现。假定log(0) $= -\infty$ 并不能解决这一问题，因为大小为1的度量单形此时被定义为空集，而作用映射会将输入单形坍缩为一个点，因为我们是按一个除以无穷大的因子进行缩放的。该文对层论模糊集也使用了不正确的定义 [2, 定义3.1]。如果该定义要求所有限制映射均为单射，则模糊集不能有多于一个元素，参见定义 2.7.4。

(b) 独立于问题 3(a)，缩放因子$\log(b)\ \log(a)$ 可能导致除以 0，因为 a 可以取值 1。我们通过定义底集相同的所有度量单形，并改为按照定义 4.2.1 中的因子缩放度量来修正这一问题。

(c) 独立于问题 3(a) 和 3(b)，Real 对态射的作用必须产生非扩张映射，但文章 [5] 未能证明这一点。

首先，文章 [5] 没有明确说明此处使用的是哪种度量。文章称：“Real($\Delta^n_{\leq a}$) 上的度量直接继承自 $\mathbb{R}^{n+1}$”，但没有指定 $\mathbb{R}^{n+1}$上的度量。然而，文章 [5] 引用了 Spivak 未发表的草稿，其中在第 3] 节使用了欧几里得度量 [9, 。文章 [5] 随后指出，其定义“显然是非扩张的”，并援引缩放因子$\log b\ \log a$ ；对于 $a \leq b$，该因子小于或等于 1。然而，如果考察非缩放退化映射上的作用，就会发现该作用显然并非非扩张的，正如我们在定义 4.2.2 中所示。

这个错误最早出现在 Spivak 未发表的草稿 [9, 第 3]节中，除了 [5], 之外，Barth等人也在 [2, 命题 5.1（28）]中重现了这一错误。Barth等人将这个函子记为 Re [2, 命题 5.1（28）] ，并引用了 Spivak，但没有说明在此处使用的是哪种度量。

为了解决这个问题，我们为这些单形赋予定义 4.2.1 中的 ℓ_1 度量。这是唯一能使该定义成为非扩张的 ℓ_p 度量，定义 4.2.2 对此作了证明。

4. 文章 [5] 将 Spivak 的度量实现及其有限度量实现都构造为沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓。该 Yoneda 嵌入应当从 $\Delta \times I$ 映射到 sFuzz；在有限情形下则映射到 Fin-sFuzz，但 Yoneda 嵌入像中的函子并非 [5, 定义 4]所要求的层。这同样是由定义 2.7.4 导致的： $y([n],\ 0)$ 必须是一个单元素集。由于 Δ 中涉及的同态集可能包含多个元素，这一点并无保证。也没有证明两个函子各自的脉像中的对象是层。对于有限度量实现，这一点很容易看出；但对于 Spivak 的度量实现，则要困难得多。我们在定义 3.3.7 中修正了 Spivak 度量实现的这一问题。

5. 为了定义 Spivak 度量实现的有限变体，McInnes 等人 [5]引入了 Spivak 度量实现中出现的范畴的有限变体。这些定义留下了多种解读的空间。

(a) 在 [5, 定义 6]，之后紧接着的段落中，文章写道："我们将有限扩展伪度量空间构成的子范畴记为 FinEPMet。"但文中没有进一步说明有限性。我们将其理解为：定义 4.5.1 中的底集包含有限个元素。

(b) 在 [5, 定义 7]，之前紧接着的段落中，文章写道："就我们的情况而言，我们只关注有限度量空间。与此相对应，我们考虑有界模糊单纯集构成的子范畴 Fin-sFuzz。"同样，文中没有进一步说明有界性。在这里，要提出一种可行的解释要困难得多，因为 sFuzz 中的一个对象是一个函子，它将自然数与区间 $(0, 1]$ 中的实数构成的有序对映射到一个集合。我们对该定义的解释见定义 4.5.3。

我们选择这两种解释，是因为它们似乎与 McInnes 等人的结果一致。

除了已经列出的与 [5], 有关的问题之外，Spivak 的草稿 [9]中还有一项值得批评的断言。这个断言并未出现在 [5] 中，也没有用于推导其他任何结果。如果它最终被证明是错误的，也不会影响其他内容。

1. 在 Spivak 的草稿 [9], 中，范畴 Fuz 表示问题 1 中讨论的范畴；它是范畴 $Shv(I)$ 的一个子范畴，仅包含某些限制映射为单射的层。在 [9, 引理 1.3] 中，Spivak 试图通过直接识别违反额外单射性条件的元素，构造一个从遗忘函子 $U\colon \mathrm{Fuz} \to Shv(I)$ 到函子 $m\colon Shv(I) \to \mathrm{Fuz}$ 的左伴随。要使 m 成为定义良好的函子，必须证明

(a) m 满足函子定律；(b) 对每个函子 mS，其大多数限制映射都是单射，即使 S 只是一个正则层；(c) 将正则层 S 经由 m映射后，mS 仍必须是一个层。

证明 (a) 和 (b) 很容易，但在试图证明 (c) 时，会遇到一个问题：这里我们必须利用 S中的原始层条件，构造一个满足进一步条件的唯一元素 $x \in mS(a)$。但 mS 的定义方式只允许我们将 S 的层条件应用于较低层级 $b \leq a$，从而得到这样一个元素 $x \in S(b)$。随后，似乎无法将此元素提升到所需的层级 $mS(a)$。当然，这并非反例。然而，这是论证中的一个缺口，而 Spivak 在 [9]中并未给出证明。

目录

1 引言 I1.1 McInnes 等人 [5] 与 Spivak [9] 中的问题.II

2 范畴背景 1

2.1 函子柯里化.1 2.2 余极限与全子范畴.2 2.3 沿（受限）Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓 . . . 3 2.4 单纯形范畴与（余）单纯对象.9 2.5 几何实现.11 2.6 locale.13 2.7 Locale 上的层.17

3 赋值集合 22

3.1 经典赋值集.23 3.2 作为层的赋值集合.25 3.3 单纯赋值集.35

4 扩展伪度量空间与（有限）度量实现 3 **9**

4.1 扩展伪度量空间.40 4.2 度量实现.46 4.3 经典度量实现.51 4.4 Spivak 的度量实现.58 4.5 有限度量实现.60

5 UMAP 背后的理论？ 6 **9**

5.1 降维算法.69 5.2 加权图与模糊并.69 5.3 UMAP 算法.71 5.4 讨论.73

参考文献 75

索引 **77**

2 范畴论背景

本节将总结文献中已有的结果和定义，或介绍经过轻微修改、适用于我们应用场景的结果。
我们预设读者已掌握范畴论中关于余极限和 Kan 延拓的内容。例如，Riehl 的教材《语境中的范畴论》 [7]中介绍了这些概念。

我们还希望读者熟悉单纯对象，但将在第 2.4 节中对其作简要介绍。我们推荐 Richter 的教材《从范畴到同伦论》 [6, 第 10] 章作为单纯对象的参考资料。

我们将在定义 2.3.5 的证明中短暂地使用余端作为中间步骤，但要理解本学位论文的其他内容，并不要求读者熟悉余端。关于余端的教材参考，可参见 Riehl 的另一部教材《范畴同伦论》 [8]中的定理 1.2.1（1.2.3）。

引言中提到的度量实现有一个众所周知的拓扑对应物，称为几何实现。它比度量实现更容易理解，因此我们将在第 2.5 节中将几何实现构造为左 Kan 延拓。第 4 节中介绍的度量实现的变体也将以类似方式构造。

有些教科书直接通过商来定义几何实现，例如 [6,第 10.6 页。1]我们建议熟悉几何实现、但不熟悉将其视为 Kan 延拓的读者，在阅读第 4 节前先阅读第 2.5 节。关于同时将几何实现定义为左 Kan 延拓，并进而导出其余等化子描述的教科书参考，请参见 [8, 例 1.5。3] ，出自 [8, 构造 1.5。1]。

我们还需要一些层论基础知识，以便将经典模糊集表示为层，但我们不要求读者熟悉这些概念。第 2.6 节和第 2.7 节提供了所有必要的定义和结果。

2.1 函子的柯里化

如引言中所述，我们需要一种等价，计算机科学家将其称为柯里化 。在计算机科学中，这通常指同构

$$C^{A\times B} \cong C^{B^A},$$

其中 A, B, C 是集合， Y^X 表示从 X 到 Y 的映射集合。
对于范畴 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$ ，这个同构也有一个范畴论对应形式，其中 $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ 表示从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的函子范畴。如果附加一个条件，我们还可以将 $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ 限制为一个子范畴。这个版本专门设计用于后面的定义 3.3.4。

引理 2.1.1： 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$ 为范畴，且设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$的全子范畴。

那么存在一个范畴同构

$$\mathcal{T} \cong \mathcal{S}^{\mathcal{A}},$$

其中$\mathcal{T}$是$\mathcal{C}^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$ 的全子范畴，其对象是所有满足以下条件的函子： $F\colon \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{C}$，对于$\mathcal{S}$中的任意对象 A，$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$都是一个对象： $F(A, -)$。

证明： 我们定义函子柯里化： $\mathcal{T} \to \mathcal{S}^{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} curry(F : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{C})(A) &= F(A, -) \\ curry(\alpha : F \Rightarrow G)_A &= \alpha_{A,-}, \end{aligned}$$

以及 反柯里化：$\mathcal{S}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} &uncurry(F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^{\mathcal{B}})(A, B) = F(A)(B) \\ &uncurry(F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^{\mathcal{B}})(a : A \to A', b : B \to B') = F(a)_{B'} \circ F(A)(b) \\ &uncurry(\alpha : F \Rightarrow G)_{A,B} = (\alpha_A)_B. \end{aligned}$$

我们验证反柯里化 $\circ$ 柯里化 $= Id_{\mathcal{T}}$:

$$\begin{aligned} uncurry(curry(F))(A, B) &= curry(F)(A)(B) = F(A, -)(B) = F(A, B) \\ uncurry(curry(\alpha))_{A,B} &= (curry(\alpha)_A)_B = \alpha_{A,B}. \end{aligned}$$

而且 柯里化 $\circ$ 反柯里化 $= Id_{\mathcal{S}^{\mathcal{A}}}$:

$$\begin{aligned} curry(uncurry(F))(A)(B) &= uncurry(F)(A, -)(B) = uncurry(F)(A, B) = F(A)(B) \\ curry(uncurry(F))(A)(b) &= uncurry(F)(A, -)(b) \\ &= uncurry(F)(id_A, b) = F(id_A)_{B'} \circ F(A)(b) = F(A)(b) \\ (curry(uncurry(\alpha))_A)_B &= uncurry(\alpha)_{A,B} = (\alpha_A)_B. \end{aligned}$$

□

2.2 余极限与满子范畴

为了证明定义 2.3.8，我们需要对余锥给出一个具体定义，因此在此介绍我们偏好的余极限定义。要理解学位论文其余部分，并不需要用到这种特殊的余极限变体。

我们还将给出一个引理，用于在较大的范畴中计算全子范畴内的余极限。稍后，我们将用这个引理确立 McInnes 等人在定义 4.5.9 中提出的有限度量实现的存在性。

定义 2.2.1： [7, 定义 3.1.1–3.1.3] 设$\mathcal{J}$ 是小的，且$\mathcal{C}$ 是局部小的。

1. 对于$\mathcal{C}$中的一个对象 C，**常值函子** $\Delta(C):\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 将
   - 所有对象 J 到 C,
   - 所有态射 $j: J \to J\prime$到 恒等态射$_C$。
2. 图表 $F:\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 下以 C 为锥底的一个**余锥**，是一个自然变换 $\lambda: F \Rightarrow \Delta(C)$。
3. 图表 $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 下的余锥定义了一个函子 余锥 $(F, -): \mathcal{C} \to Set$，它将
   - 将 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 C 映射到集合 余锥 (F, C)，即以 C 为锥底、位于 F 下的余锥集合,
   - 一个态射 $f: C \to C\prime$到映射 余锥 (F, f)：余锥 $(F, C) \to$余锥 $(F, C\prime)$, 它将余锥 $\lambda: F \Rightarrow \Delta(C)$ 映到余锥 $\Delta(f) \circ \lambda: F \Rightarrow \Delta(C\prime)$。

一个**余极限** 是该函子的表示对象:

$$cocone\left(F, -\right) \cong Hom_{\mathcal{C}}\left(colim\left(F\right), -\right).$$

引理 2.2.2: 设 $\mathcal{J}$ 为小的，并设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴。
设 $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$为一个图表，其中对每个位于 $\mathcal{J}$中的 J， $F(J)$ 都在 $\mathcal{S}$中。于是 F也可视为函子 $F: \mathcal{J} \to \mathcal{S}$。
如果余极限对象 余极限$(F: \mathcal{J} \to \mathcal{C})$（即 $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中形成的余极限）位于 $\mathcal{S}$ 中，则 余极限$(F: \mathcal{J} \to \mathcal{C})$ 也是 $F: \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ 在全子范畴 $\mathcal{S}$ 中形成的余极限。

证明: 令 余极限$(F: \mathcal{J} \to \mathcal{C})$ 为在 $\mathcal{C}$ 中构造的 $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 的余极限对象。
那么，余极限 (F) 是 余锥 $(F, -)$ 的表示对象，并且我们有自然同构

$$cocone\left(F, -\right) \cong Hom_{\mathcal{C}}\left(colim\left(F\right), -\right) : \mathcal{C} \to Set.$$

我们将这个以 C 为指标的自然同构限制到 $\mathcal{S}$，得到自然同构

$$cocone\left(F, -\right) \cong Hom_{\mathcal{S}}\left(colim\left(F\right), -\right) : \mathcal{S} \to Set.$$

因此，余极限 (F) 也是余锥函子 余锥 $(F, -):\mathcal{S} \to Set$ 的表示对象，因而是 $F:\mathcal{J} \to \mathcal{S}$ 的余极限。□

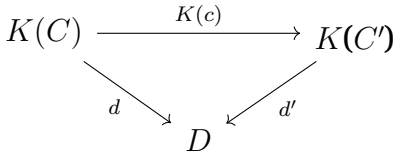
2.3 沿（受限）Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓

众所周知，可以通过余极限公式证明 Kan 延拓的存在性。在该公式中会出现逗号范畴的一个特定变体，因此我们在此介绍这一变体。

定义 2.3.1： 设 $K:\ \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$ 是一个函子，且 D 是 $\mathcal{D}$中的一个对象。

1. **逗号范畴** $K\downarrow D$ 具有

   - 以 (C,d) 为对象，其中 C 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且 $d:\ K(C)\ \to D$,
   - 态射 $c:\ C\to C\prime$，满足 $d\prime\circ\ K(c)\ =d$，作为从 (C,d) 到 $(C\prime d\prime)$ 的态射。



2. **投影函子** $P^D:\ K\downarrow D\to\mathcal{C}$ 由下式给出

$$P^D(C,d)=C$$
$$P^D(c)=c.$$

一个更一般的变体见 [7, 练习 1.3.vi]。定义 2.3.1 中的变体是在余极限公式 [7, 定理 6.2.1], 之前的段落中引入的，下面我们将对此作概述。

定理 2.3.2： [7, 定理 6.2.1] 设 $F:\ \mathcal{C}\ \to\mathcal{E}$ 和 $K:\ \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$ 是函子。若函子 $FP^D:$ $K\downarrow D\to\mathcal{E}$ 对 $\mathcal{D}$ 中的每个对象 D 都有余极限，则 F 有一个左 Kan 延拓，其定义为

$$Lan_KF(D)=colim\left(FP^D\right).$$

这个公式有多种用途。如果我们能证明至少余极限 余极限(FP^D) 存在，那么即使 $\mathcal{E}$ 不一定是余完备的，它也能帮助我们证明 Kan 延拓在某些情况下存在。当然，如果 $\mathcal{E}$ 是余完备的，Kan 延拓总是存在。

推论 2.3.3： 设 $K:\ \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$，且 $\mathcal{C}$ 是小的，$\mathcal{D}$ 是局部小的。当 $\mathcal{E}$ 余完备时，对于所有函子 $F:\ \mathcal{C}\ \to\mathcal{E}$，沿 K 的左 Kan 延拓都存在。

如果我们已经知道 Kan 延拓 Lan_KF 存在，也可以利用定义 2.3.2，通过计算余极限 $colim$(FP^D) 来求出作用 Lan_KF(*D*)。沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓就是其中重要的特例。

定义 2.3.4： [7, 推论 2.2.6] 协变**Yoneda 嵌入** $y:\mathcal{C}\ \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 是由下式定义的函子:

$$y(C)=Hom_{\mathcal{C}}\left(-,C\right)$$
$$y(f)=(-)\circ f.$$

对于沿着 $y:\mathcal{C}\to Set^{\mathcal{C}^{op}}$对 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 进行 Kan 延拓Lan_yF 的情形，我们可以推导出一个公式，用余等化子来计算定义 2.3.2 中的余极限。

引理 2.3.5： 设 $\mathcal{C}$ 是小范畴，$\mathcal{E}$ 是余完备的，并设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$。

那么，定义 2.3.2 中关于沿 Yoneda 嵌入 $y:\mathcal{C}\to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 对 F 的左 Kan 延拓 Lan_yF 的余极限，在对象 $D:\mathcal{C}^{op}\to Set$ 处由以下余等化子给出：

$$Lan_yF=colim\left(FP^D\right)=coeq\left(\coprod_{\substack{f:C\to C'\\ s\in D(C)}}F(C')\quad\underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}}\quad\coprod_{\substack{C\in\mathcal{C}\\ s\in D(C)}}F(C)\right).$$

其中，ϕ是满足 $\phi\circ\iota_{f,s}=\iota_{C',D(f)(s)}\circ F(f)$ 的唯一态射；ψ是满足 $\psi\circ\iota_{f,s}=\iota_{C,s}$ 的唯一态射。

此外，Lan_yF 对态射 $\alpha:D\Rightarrow D'$ 的作用由下式给出：

$$e:Lan_yF(D)\to Lan_yF(D')\quad\text{with}\quad e\circ\pi\circ\iota_{C,s}=\pi'\circ\iota_{C,\alpha_C(s)}.$$

这里，$\pi:\coprod_{C\in\mathcal{C}s\in D(C)}F(C)\to Lan_yF(D)$ 是指向余等化子的满态射，而 $\iota_{C,s}:F(C)\to\coprod_{C\in\mathcal{C}s\in D(C)}F(C)$ 是指向余积的包含态射。

Proof 唔： 根据 [8, 定理 1.2.6]，余极限 余极限 $\left(FP^D\right)$ 是函子的余端

$$H=Hom_{Set^{\mathcal{C}^{op}}}\left(y(-),D\right)\cdot F(-):\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}\to\mathcal{E}.$$

根据 [8, 定理 1.2.1，(1.2.4)], ，我们可以将这个余端表示为余等化子

$$colim\left(FP^D\right)=\int^{C\in\mathcal{C}}H(C,C)=coeq\left(\coprod_{f:C\to C'}H(C',C)\quad\underset{\psi_1}{\overset{\phi_1}{\rightrightarrows}}\quad\coprod_{C\in\mathcal{C}}H(C,C)\right),$$

其中 ϕ_1是满足 $\phi_1\circ\iota_f\circ\iota_s=\iota_{C'}\circ\iota_s\circ F(f)$ 的唯一态射，而 ψ_1是满足 $\psi_1\circ\iota_f\circ\iota_s=\iota_C\circ\iota_{F(f)(s)}$ 的唯一态射。

根据米田引理，我们有

$$Hom_{Set^{\mathcal{C}^{op}}}\left(y(C),D\right)=Hom_{Set^{\mathcal{C}^{op}}}\left(Hom_{\mathcal{C}}\left(-,C\right),D\right)\cong D(C)$$

对每个对象 $C\in\mathcal{C}$ 都成立，因此

$$H(C,C')=D(C)\cdot F(C')=\coprod_{D(C)}F(C').$$

因此，我们可以将余等化子改写为

$$coeq\left(\coprod_{\substack{f:C\to C'\\ s\in D(C)}}F(C')\quad\underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}}\quad\coprod_{\substack{C\in\mathcal{C}\\ s\in D(C)}}F(C)\right).$$

对于态射 $\alpha : D \Rightarrow D'$ 上的作用，我们可以利用余等化子的万有性质 $Lan_y F(D)$。为此，请考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{\substack{f:C\to C' \\ s\in D(C)}} F(C') & \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} & \coprod_{\substack{C\in\mathcal{C} \\ s\in D(C)}} F(C) & \xrightarrow{\pi} & Lan_y F(D) \\
\downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\
\coprod_{\substack{f:C\to C' \\ s\in D'(C)}} F(C') & \overset{\phi'}{\underset{\psi'}{\rightrightarrows}} & \coprod_{\substack{C\in\mathcal{C} \\ s\in D'(C)}} F(C) & \xrightarrow{\pi'} & Lan_y F(D')
\end{array}$$

其中， h 是满足 $h \circ \iota_{C,s} = \iota_{C,\alpha_C(s)}$ 的唯一态射，而 k 是满足 $k \circ \iota_{f,s} = \iota_{f,\alpha_C(s)}$ 的唯一态射。利用 α 的自然性以及左上方余积的万有性质，可以证明对于 ϕ, ϕ' 和 ψ, ψ'，左侧的方块交换。于是还有 $\pi' \circ h \circ \psi = \pi' \circ h \circ \phi$，因为

$$\pi' \circ h \circ \psi = \pi' \circ \psi' \circ k = \pi' \circ \phi' \circ k = \pi' \circ h \circ \phi.$$

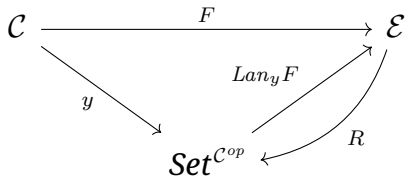
利用右上方余等化子的万有性质，我们得到满足所需性质的唯一态射e。□

备注 2.3.6： 在定义 2.3.5 中，我们可以将 y 的目标范畴 $Set^{\mathcal{C}^{op}}$: $\mathcal{C} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 替换为任意一个至少包含 Yoneda 嵌入像中所有函子的**全**子范畴 $\mathcal{F}$。该引理仍然成立，因为我们只在$\mathcal{E}$中取余极限，而$Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 或$\mathcal{F}$ 中的函子则充当$\mathcal{E}$中余极限的指标集。我们可以用与这些指标集同构的集合来替换它们。然而，$\mathcal{F}$ 必须是全子范畴，这一点至关重要。否则，在定义 2.3.5 的证明中，米田引理不一定适用。

稍后，我们将结合定义 2.3.6 使用定义 2.3.5，推导出定义 3.3.7。该定义保证 Spivak 的度量实现（定义 4.4.1）以及我们版本的度量实现（定义 4.2.6）及其右伴随存在。

考虑沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓的一个原因是，我们总能得到一个伴随。

注记 2.3.7： [7, 注记 6.5.9] 沿 y 的左 Kan 延拓 $Lan_y F$ （其中 F : $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$）由定义 2.3.2 给出



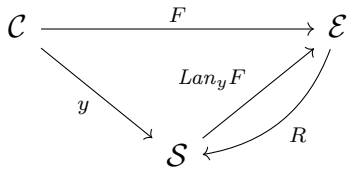
是函子 $R = Hom_{\mathcal{E}}(F(-)\ -) : \mathcal{E} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 的左伴随。

当我们将 $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 替换为全子范畴 $\mathcal{F}$ 时，不能依赖 [7, 注记 6.5.9] 中所给出的这一结果。因此，我们引入一个稍更一般的结果，使得在附加条件成立时可以替换 $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 。该版本是专门为稍后在定义 3.3.7 中使用而定制的。以下证明是对定义 2.3.7 的一个证明的直接推广。

命题 2.3.8： 设 $\mathcal{C}$ 是小范畴，设 $F:\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 是一个函子，并设 $\mathcal{S}$ 是 $Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 的一个全子范畴，使得

- Yoneda 嵌入的像包含于 $\mathcal{S}$,
- 函子 $R = Hom_{\mathcal{E}}(F(-)\ -) : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ 的像也包含于 $\mathcal{S}$。

那么，按照定义 2.3.2 给出的沿 y 的 F 左 Kan 延拓 $Lan_y F$



是函子 $R = Hom_{\mathcal{E}}(F(-)\ -) : \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ 的左伴随，它将

- 一个对象 $E \in$ 对象$\mathcal{E}$中的对象 $R(E) = Hom_{\mathcal{E}}(F(-)\ E) \in \mathcal{S}$,
- 一个态射 $e \in Hom_{\mathcal{E}}(E, E\prime)$ 自然变换 $R(e) :\ R(E) \Rightarrow R(E\prime)$，其分支为

$$R(e)_C = Hom_{\mathcal{E}}(F(C), e) : Hom_{\mathcal{E}}(F(C), E) \to Hom_{\mathcal{E}}(F(C), E'), f \mapsto e \circ f.$$

证明：
我们通过构造双射来证明 $Lan_y F : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ 是 $R : \mathcal{E} \to Set^{\mathcal{C}^{op}}$ 的左伴随，

$$Hom_{\mathcal{S}}(S, R(E)) \cong cocone\left(FP^S, E\right) \cong Hom_{\mathcal{E}}(Lan_y F(S), E) \tag{1}$$

这些双射对所有对象 $S \in \mathcal{S}$ 和 $\mathcal{E}$ 中的对象 E 都关于 S 和 E 自然。这里，P^S : $y \downarrow S \to \mathcal{C}$ 是逗号范畴 $y \downarrow S$ 的投影函子。

1. (1) 中的第二个双射由余极限公式得出。余极限的万有性质指出，存在一个双射

$$cocone\left(FP^S, E\right) \cong Hom_{\mathcal{E}}\left(colim\left(FP^S\right), E\right) \cong Hom_{\mathcal{E}}(Lan_y F(S), E)$$

它关于 E 是自然的。其关于 S 的自然性源于这样一个事实：$Lan_y F:\mathcal{S} \to \mathcal{E}$ 是一个函子，并且余极限具有函子性。

2. 为了构造 (1) 中的第一个双射，我们考虑逗号范畴 $y \downarrow S$。

- 其对象是形如 (C, ν) 的对，其中 C 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，而 $\nu : Homc(-, C) \Rightarrow S$是一个自然变换。根据米田引理，后者与 $S(C)$ 的元素构成双射。对于每个 $s \in S(C)$，唯一满足 $\nu^s_C(id_C) = s$ 的自然变换$\nu^s : Homc(-, C) \Rightarrow S$具有如下分量态射

$$\nu^s_{C'} : Hom_{\mathcal{C}}(C', C) \to S(C'),\ f \mapsto S(f)(s).$$

- 在 $y \downarrow S$ 中，态射 $c : (C, \nu) \to (C\nu\prime)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $c : C \to C\prime$，且满足 $\nu\prime \circ Homc(-, c) = \nu$，或者等价地，

$$\nu'_{C'}(c) = S(c)(\nu'_{C'}(id_{C'})) = \nu_C(id_C). \tag{2}$$

投影 $P^S : y \downarrow S \to \mathcal{C}$将每个对象 (C, ν) 映射到 C，并将每个态射映射到其自身。

3. 我们证明存在双射 $Hom_{\mathcal{S}}(S, R(E)) \cong$余锥 $\left(FP^S, E\right)$，它们关于 E 和 S 是自然的。为此，我们考虑映射

$$\begin{array}{lllll}
\phi_{S,E} : & Hom_{\mathcal{S}}(S, R(E)) & \to & cocone\left(FP^S, E\right) \\
& \alpha : S \Rightarrow R(E) & \mapsto & \lambda^\alpha : FP^S \Rightarrow \Delta(E) \\
& & & \lambda^\alpha_{(C,\nu)} = \alpha_C(\nu_C(id_C)) : F(C) \to E \\
\psi_{S,E} : & cocone\left(FP^S, E\right) & \to & Hom_{\mathcal{S}}(S, R(E)) \\
& \lambda : FP^S \Rightarrow \Delta(E) & \mapsto & \beta^\lambda : S \Rightarrow R(E) \\
& & & \beta^\lambda_C : S(C) \to Hom_{\mathcal{E}}(F(C), E), s \mapsto \lambda_{(C,\nu^s)}.
\end{array}$$

为了证明 λ^α 确实是每个自然变换 $\alpha : S \Rightarrow R(E)$ 的余锥，我们对 $y \downarrow S$ 中的态射 $c : (C, \nu) \to (C', \nu')$ 进行计算

$$\begin{array}{rcl}
\lambda^\alpha_{(C',\nu')} \circ F(c) & \overset{(\text{def } \lambda^\alpha)}{=} & \alpha_{C'}(\nu'_{C'}(id_{C'})) \circ F(c) \\
& \overset{(\text{def } R(E))}{=} & (R(E)(c) \circ \alpha_C)(\nu'_{C'}(id_{C'})) \\
& \overset{(\text{nat } \alpha)}{=} & (\alpha_C \circ S(c))(\nu'_{C'}(id_{C'})) \\
& \overset{(2)}{=} & \alpha_C(\nu_C(id_C)) = \lambda^\alpha_{(C,\nu)}.
\end{array}$$

要证明对于每个余锥 $\lambda : FP^S \Rightarrow \Delta(E)$，$\beta^\lambda : S \Rightarrow R(E)$ 都是一个自然变换，请注意，根据 (2)，$\mathcal{C}$ 中的每个态射 $c : C \to C'$ 都定义了一个态射 $c : (C, \nu^{S(c)(s')}) \to (C', \nu^{s'})$，它属于 $y \downarrow S$，对所有 $s' \in S(C')$ 都成立，因为

$$\nu^{s'}_{C'}(c) = S(c)(\nu^{s'}_{C'}(id_{C'})) = S(c)(s') = \nu^{S(c)(s')}_C(id_C).$$

这意味着对于所有 $s' \in S(C')$:

$$\begin{aligned}\beta^{\lambda}_{C} \circ S(c)(s') =& \beta^{\lambda}_{C}(S(c)(s')) \\ =& \lambda_{(C,\nu^{S(c)(s')})} \\ \overset{\lambda \text{ cocone}}{=}& \lambda_{(C',\nu^{s'})} \circ F(c) = \beta^{\lambda}_{C'}(s') \circ F(c) = (R(E)(c) \circ \beta^{\lambda}_{C'})(s').\end{aligned}$$

直接计算可得，$\psi_{S,\ E}$ 是$\phi_{S,\ E}$的逆映射。

$$\begin{aligned}(\psi_{S,E} \circ \phi_{S,E})(\alpha)_C(s) &= \psi_{S,E}(\lambda^{\alpha})_C(s) = \lambda^{\alpha}_{(C,\nu^s)} = \alpha_C(\nu^s_C(id_C)) = \alpha_C(s) \\ (\phi_{S,E} \circ \psi_{S,E})(\lambda)_{(C,\nu)} &= \phi_{S,E}(\beta^{\lambda})_{(C,\nu)} = \beta^{\lambda}_C(\nu_C(id_C)) = \lambda_{(C,\nu)}.\end{aligned}$$

由以下事实可知$\phi_{S,\ E}$ 具有自然性：对于每个自然变换β：$S' \Rightarrow S$、态射 e：$E \to E'$ 以及 $y \downarrow S$中的每个对象（C，ν），我们都有

$$\begin{aligned}\phi_{S',E'}(Hom_{\mathcal{S}}(\beta, R(e))(\alpha))_{(C,\nu)} &\overset{(\text{def } \phi)}{=} (Hom_{\mathcal{S}}(\beta, R(e))(\alpha)_C)(\nu_C(id_C)) \\ &\overset{(\text{hom func.})}{=} (e \circ \alpha_C \circ \beta_C)(\nu_C(id_C)) \\ &\overset{(\text{def } \Delta)}{=} \Delta(e) \circ \alpha_C((\beta \circ \nu)_C(id_C)) \\ &\overset{(\text{def } \phi)}{=} (\Delta(e) \circ \phi_{S,E}(\alpha))_{(C,\beta\circ\nu)}.\end{aligned}$$

□

2.4 单纯形范畴与（余）单纯对象

我们将采用与 Richter 的教科书《从范畴到同伦论》[6, 第 10] 章相同的定义，并基本沿用相同的单纯形范畴索引约定。不过，我们会明确在面态射 δ^n_i 和退化态射 σ^n_j 中添加索引 n，而 Richter 只写作 δ_i 和 σ_i。与 Richter 一样，我们采用拓扑学家的约定，将单纯形范畴的对象记作$[n] = \{0, 1, ..., n\}$，而非代数学家的约定 $[n] = \{0, 1, ..., n-1\}$。

定义 2.4.1：[6,引理 10.1。1]该**单纯形范畴** Δ具有

- 以有限非空**序数** $[n] = \{0, 1, ..., n\}$ 为对象，其中 $n \in \mathbb{N}$,
- 以态射 f：$[m] \to [n]$ 弱单调映射 f：$\{0, 1, ..., m\} \to \{0, 1, ..., n\}$。

该范畴的所有态射都可以分解为两类基本态射。

定义 2.4.2：[6, 引理 10.1.2] 第 i个**面态射** δ^n_i：$[n-1] \to [n]$对于 $0 \le i \le n$ 以及第 j个**退化态射** σ^n_j：$[n+1] \to [n]$ 对于 $j \in [n]$ 是

这些态射

$$\delta_i^n(k)=\begin{cases}k & 0\le k<i\\ k+1 & i\le k<n\end{cases}\qquad \sigma_j^n(k)=\begin{cases}k & 0\le k\le j\\ k-1 & j<k\le n+1.\end{cases}$$

引理 2.4.3： [6, 引理 10.1.4] 每个态射 $f:\ [n]\to[m]$ 在 Δ 中都可以唯一地表示为复合

$$f=\delta_{i_1}^m\circ\cdots\circ\delta_{i_r}^{n+s}\circ\sigma_{j_1}^{n+s}\circ\cdots\circ\sigma_{j_s}^{n+1}$$

其中 $0\le i_r<\cdots<i_1\le m$ 且 $0\le j_1<\cdots<j_s<n$，其中 $m=n-s+r$。

定义了单纯形范畴后，我们可以将任意范畴$\mathcal{C}$ 上的单纯对象定义为从单纯形范畴的反范畴到$\mathcal{C}$的函子。

定义 2.4.4： [6, 引理 10.2.1] 设$\mathcal{C}$ 为一个范畴。

1. 函子 $S:\Delta^{op}\to\mathcal{C}$ 称为$\mathbf{C}$中的**单纯对象** 。此类函子之间的自然变换称为**单纯态射**。函子范畴$\mathcal{C}^{\Delta^{op}}$ 称为$\mathcal{C}$中的**单纯对象范畴** 。

2. 称函子 $S:\Delta\to\mathcal{C}$ 为$\mathbf{C}$中的余单纯对象。这类函子之间的自然变换称为**余单纯态射**。函子范畴$\mathcal{C}^{\Delta}$ 称为$\mathcal{C}$中的**余单纯对象范畴**。

Set 中的（余）单纯对象也称为**（余）单纯集**，而Set 中的（余）单纯态射称为**（余）单纯映射**。$Set^{\Delta^{op}}$ 中单纯对象的范畴也称为**（余）单纯集合范畴**。

正如单纯形范畴中的态射可以分解为面映射和退化映射一样，我们也可以将单纯对象分解为满足某些规则的基本分量。

注 2.4.5： [6, (10.2.1)] 设$\mathcal{C}$ 是一个范畴。

1. 单纯对象 $C:\Delta^{op}\to\mathcal{C}$ 由以下数据给出

- 对象族 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ $C_n\in\mathrm{Ob}\mathcal{C}$,
- 态射族 $d_n^i:\ C_n\to C_{n-1}$ 对于 $n\in\mathbb{N}$, $0\le i\le n$，**面映射**,
- 态射族 $s_n^j:\ C_n\to C_{n+1}$ 对于 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $0\le j\le n$，**退化映射**

其中 $C_n = C([n])$、 $d_n^i = C(\delta_i^{n+1})$ 和 $s_n^j = C(\sigma_j^n)$ 满足**单纯关系**

$$\begin{aligned} d_{n-1}^i \circ d_n^j &= d_{n-1}^{j-1} \circ d_n^i \quad \text{for } i < j \\ s_{n+1}^i \circ s_n^j &= s_{n+1}^{j+1} \circ s_n^i \quad \text{for } i \le j, \text{ and} \\ d_n^i \circ s_{n-1}^j &= \begin{cases} s_n^{j-1} \circ d_{n-1}^i & i < j \\ \mathrm{id}_{C_n} & i \in \{j, j+1\} \\ s_n^j \circ d_{n-1}^{i-1} & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. 余单纯对象 $C:\ \Delta \to \mathcal{C}$ 由以下数据给出：

- 对象族 $(C^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，其中对象属于 $C^n \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$,
- 态射族 $d_i^n:\ C^{n-1} \to C^n$，对于 $n \in \mathbb{N}$、$0 \le i \le n$，即**余面映射**,
- 态射族 $s_j^n:\ C^{n+1} \to C^n$，对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $0 \le j \le n$，即**余退化映射**

满足 $C^n = C([n])$、 $d_i^n = C(\delta_i^{n+1})$ 和 $s_j^n = C(\sigma_j^n)$，并满足**余单纯关系**

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} \circ d_i^n &= d_i^{n+1} \circ d_{j-1}^n \quad \text{for } i < j \\ s_j^n \circ s_i^{n+1} &= s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1} \quad \text{for } i \le j, \text{ and} \\ s_j^{n-1} \circ d_i^n &= \begin{cases} d_i^{n-1} \circ s_{j-1}^n & i < j \\ \mathrm{id}_{C^n} & i \in \{j, j+1\} \\ d_{i-1}^{n-1} \circ s_j^n & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

2.5 几何实现

几何实现通过将单纯集 S 中的元素映射到称为拓扑 n-单形的基本构件，将其实现为拓扑空间。 S_0 中的元素映射到点， S_1 中的元素映射到线段， S_2 中的元素映射到三角形，依此类推。然后，我们按照 S 的面映射和退化映射将它们粘合起来。几何实现随后被定义为沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓。我们从定义拓扑 n-单形开始。

定义 2.5.1： [6,定义 10.6。1]
设 $\mathbb{R}^n_{\ge 0} = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \ge 0\ \forall i\}$。

- 对于 $n \in \mathbb{N}_0$，拓扑 n**-单形** 是子空间

$$\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_{\ge 0} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{\ge 0}$$

配备标准拓扑。

• 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{0, \dots, n\}$ 第 i 个**面映射** f_i^n: $\Delta^{n-1} \to \Delta^n$ 会在坐标向量的第 i 个位置插入 0，并将其余条目向右移动一位：

$$f_i^n(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

• 对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $i \in \{0, \dots, n\}$，第 i 个 **退化映射** s_i^n: $\Delta^{n+1} \to \Delta^n$ 将第 i 个和第 $(i+1)$ 个坐标相加：

$$s_i^n(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}).$$

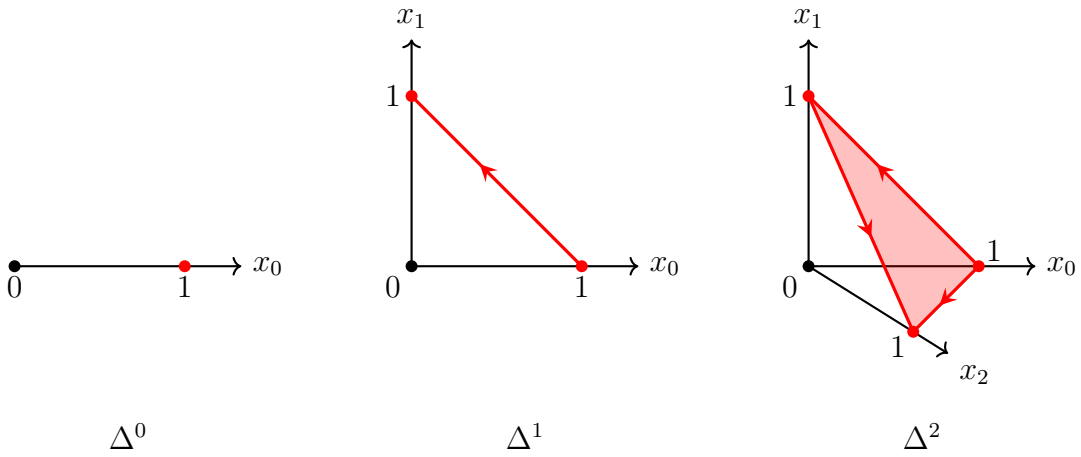


图 1: $n = 0,1,2$ 的拓扑 n-单形。

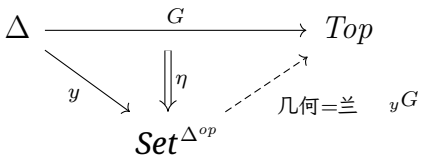
可以证明，面映射和退化映射满足定义 2.4.5 中的关系。这使我们能够将拓扑 n-单形以及面映射和退化映射组织成一个从 Δ 出发的函子。

De定义 2.5.2: 拓扑 n-单形定义了一个函子 $G : \Delta \to Top$ wit h

$$G([n]) = \Delta^n, \qquad G(\delta_i^{n+1}) = f_i^{n+1}, \qquad G(\sigma_j^n) = s_j^n.$$

借助这个函子，我们可以导出几何实现。

定义 2.5.3: [8, 例1.5.3] **几何实现** $Geom := Lan_y G$是 G 沿 Yoneda 嵌入 y 的左 Kan 延拓。



其左伴随称为**奇异神经** $Sing\ = Hom^{Top}(G(-)\ -)$。

定义 2.5.3 中 Kan 延拓的存在性由定义 2.3.3 保证。定义 2.3.8 保证了伴随的存在。

借助定义 2.3.5 中的公式，我们可以用拓扑单形更具体地描述几何实现。

引理 2.5.4： 几何实现 $Geom : Set^{\Delta^{op}} \to Top$ 将

- 单纯集 $S : \Delta_{op} \to Set$映射为拓扑空间

$$Geom(S) = \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ s\in S_n}} \Delta^n / \sim_G$$

  由以下关系生成的等价关系 $\sim_G$

$$\iota_{m,S(f)(s)}(x) \sim_G \iota_{n,s}(G(f)(x))$$

  对所有 $f :\ [m] \to [n],\quad s \in S_n,\quad x \in \Delta^m$。

- 单纯映射 $\alpha :\ S \Rightarrow S\prime$ 连续映射

$$Geom(\alpha) : Geom(S) \to Geom(S'),\quad [\iota_{n,s}(x)]) \mapsto [\iota_{n,\alpha_n(s)}(x)].$$

证明： 根据定义 2.3.5，左 Kan 延拓 $Lan_y G(S)$ 可表示为一个余等化子

$$coeq\left(\coprod_{\substack{f:[m]\to[n] \\ s\in S_n}} \Delta^m \overset{\iota_{n,s}\circ G(f)}{\underset{\iota_{m,S(f)(s)}}{\rightrightarrows}} \coprod_{\substack{m\in\mathbb{N}_0 \\ s\in S_m}} \Delta^m\right),$$

它可以表示为上述陈述中的商。
定义 2.3.5 也给出了所需的态射作用表达式，只需将余等化子满射 π 替换为等价类记号 $[-]$。 □

定义 2.5.4 中的公式也出现在 $[6,$ 定义 10.6.1$]$ 中，作为定义 2.5.3 的另一种定义。

2.6 locale

在本学位论文中，我们将需要 locale，一种无点拓扑形式。普通拓扑空间（$X, \mathcal{O}_X$）定义在载体集合 X 上，该集合配备了拓扑 $\mathcal{O}_X$。我们不再要求开集必须是某个其他集合 X 的子集，

而只需有一个集合$\mathcal{L}$，它带有足够的运算与规则，使得 $\mathcal{L}$ 的元素表现得像开集，但不一定由点构成。
开集可以彼此包含。为了体现这一点，我们要求$\mathcal{L}$带有一个偏序 $\leq$。在由此得到的偏序集范畴（$\mathcal{L}$ $\leq$）中，余积和积分别称为并（$\vee$）和交（$\wedge$）；如果它们存在，就很自然地可以用来体现开集的并集（$\cup$）和交集（$\cap$）。因此，我们要求（$\mathcal{L}$ $\leq$）中存在任意余积和有限积。集合的交集和并集也满足无限分配律，因此我们也要求它满足这一律。教科书参考可参阅麦克莱恩和 Moerdijk 的《几何与逻辑中的层：托扑理论初步》 [4,第 IX 章]。

注 2.6.1： 偏序集 $(P, \leq)$ 可以视为一个范畴，其中P 的元素是对象。对象 p, p' 之间有且仅有一个态射 $*:\ p \to p'$ 当且仅当 $p \leq p'$；否则集合 $Hom_{(P,\leq)}(p, p')$ 为空。

定义 2.6.2： [4, 第 IX 章, 1] 偏序集 $(\mathcal{L}\ \leq)$ 称为 **locale**，如果：

- 任意族 $(a_i)_{i\in I}$都存在上确界，
- 任意**有限** 族 $(b_i)_{i\in I}$都存在下确界，

且满足无限分配律：

$$b \wedge (\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I} (b \wedge a_i) \qquad \text{for all families } (a_i \in \mathcal{L})_{i\in I} \text{ and } b \in \mathcal{L}.$$

上确界和下确界也分别称为 **并** ($\bigvee$) 和 **交** ($\bigwedge$)。

所有通常的拓扑 $\mathcal{O}_X$ 都必须包含空集和全空间作为开集。这些集合可视为偏序集 $(\mathcal{O}_X, \subseteq)$ 的最小元和最大元。locale 同样体现了这一性质。

记号 2.6.3： 偏序集（$\mathcal{L}$ $\leq$）有最大元和最小元，分别由整个集合的上确界和空集的上确界给出。我们将它们记为

$$\top := \bigvee_{a\in\mathcal{L}} a \qquad \text{and} \qquad \bot := \bigvee_{a\in\emptyset} a.$$

元素 $\top$ 通常称为 **Top**，元素 $\bot$ 通常称为 **底元**。

locale 的一个显而易见的例子是拓扑空间的开子集构成的偏序集。本学位论文中需要用到的例子是实数 $\mathbb{R}$ 或广义实数 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的子集，且这些子集都存在上确界和下确界。

例 2.6.4：

- 对于任意拓扑空间 $(X, \mathcal{O}_X)$，开集构成 locale $(\mathcal{O}_X, \subseteq)$。
- 任意闭区间 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 都给出 locale $([a,b], \leq)$，其中并和交分别由 $[a,b]$中的上确界和下确界给出。
- 将前一个例子中的序反转后，我们得到 locale $([a,b], \geq)$，其中并和交分别由下确界和上确界给出。

- 若将无穷大也纳入，并采用约定 $x \leq \infty$ 对所有 $x \in [0,\infty]$，则包含无穷大的非负实数 $[0,\infty]$ 构成 locale $([0,\infty], \leq)$。
- 我们再次将前一个例子中的序反转，得到 locale $([0,\infty], \geq)$。在这种情况下，∞ 是底元素。

我们定义 locale 时，旨在使其与拓扑空间相似。同样，locale 态射也应与连续映射相似。
连续映射 $f\colon X \to Y$ 将点从 X 映射到 Y中的点，但连续性的条件是反向定义的。目标空间 $O \subseteq Y$中的每个开集都必须通过逆像 f^{-1} 映射到一个开集：$\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$。这里，$\mathcal{P}(A)$表示集合 A的幂集。

由于 locale 不含点，且元素 $a \in \mathcal{L}$ 对应于开集，我们将从 $(\mathcal{L}, \leq)$ 到 $(\mathcal{L}', \leq')$ 的态射定义为一个反向映射 $g : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$，以对应逆像。

逆像将子集 $O \subseteq O'$映射为子集 $f^{-1}(O) \subseteq f^{-1}(O')$，因此我们要求 locale 态射相对于底层偏序集是保序的。为了对应逆像关于集合的交集与并集所具有的其他常见性质，我们要求 locale 态射保有限交和任意并。

定义 2.6.5： [4, 第 IX 章, 1] 设 $(\mathcal{L}, \leq)$ 和 $(\mathcal{L}', \leq')$ 是 locale。一个从 $(\mathcal{L}, \leq)$ 到 $(\mathcal{L}', \leq')$ 的**locale 态射** 是一个单调映射 $f : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$，它保持有限交和任意并。

locale 及其态射构成**locale范畴** Loc。

注 2.6.6： 等价地，locale 的态射是一个保持有限余积和任意积的函子。在这种情况下，函子公理对应于单调性。

例 2.6.7：

- 常值映射
$$f : [c, d] \to [a, b], \qquad x \mapsto a$$
定义了 locale 态射 $f\colon ([a, b], \leq) \to ([c, d], \leq)$。
- 映射
$$i : [0, 1] \to [0, \infty], \qquad x \mapsto \begin{cases} -\log(x) & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$
定义了 locale 同构 $i\colon ([0, \infty], \leq) \to ([0, 1], \geq)$。

注 2.6.8： locale 同构 $\phi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 将非底元$a \neq \bot_{\mathcal{L}'}$ 映射为非底元 $\phi(a) \neq \bot_{\mathcal{L}}$。

证明： 设 $a \neq \bot_{\mathcal{L}'}$。由于 ϕ 是同构，底层映射 $\phi\colon \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ 有一个逆映射 $\phi^{-1}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$，它也表示一个 locale 态射。

假设 $\phi(a) = \bot_{\mathcal{L}}$。那么我们有

$$a = \phi^{-1}(\phi(a)) = \phi^{-1}(\bot_{\mathcal{L}}) = \bot_{\mathcal{L}'},$$

其中最后一个等号是因为 ϕ^{-1} 保空上确界。

这与 $a \neq \bot_{\mathcal{L}'}$ 矛盾，因此 $\phi(a) \neq \bot_{\mathcal{L}}$。 □

我们还需要 Barr [1] 的另一个定义，以便稍后推导出他关于值集的核心结果（定义 3.2.11），以及一个关于此范畴上的单纯对象的附加定义（定义 3.3.4）。这一性质并不直接对应于连通性之类的拓扑性质，因此我们无法在此作出拓扑类比。

定义 2.6.9： [1,第 3] 节 locale $\mathcal{L}$称为**全连通**，如果 $a \wedge b \neq \bot$对于所有元素 a, $b \neq \bot$ 均有$\mathcal{L}$。

本学位论文后续将使用的所有 locale 都是全连通的。

例 2.6.10： 定义 2.6.4 中的 locale $([a, b], \leq)$ 和 $([0, \infty], \leq)$ 是全连通的，因为我们有 $x \wedge y = \min(x, y)$。

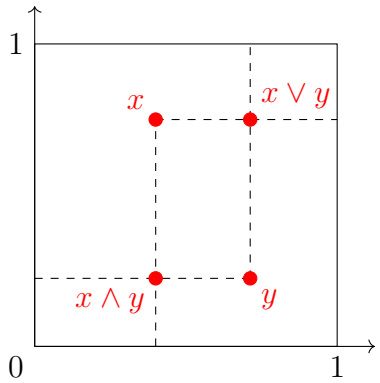
存在不具备此性质的 locale，正如下面的例子所示，但我们之后不会使用这类 locale。

例 2.6.11： locale $([0, 1] \times [0, 1], \leq)$，其中 $(a, b) \leq (c, d) :\Leftrightarrow a \leq c$ 和 $b \leq d$ 不是全连通的。

证明： 上确界和下确界由下式给出

$$\bigvee_{i\in I}(a_i,b_i)=(\sup_{i\in I}(a_i),\sup_{i\in I}(b_i)) \qquad \bigwedge_{i\in I}(a_i,b_i)=(\inf_{i\in I}(a_i),\inf_{i\in I}(b_i))$$

对于两个元素 $x\in[0,1]\times[0,1]$ 和 $y\in[0,1]\times[0,1]$，我们可以将其形象地表示出来：



我们可以看到，元素 (0，1)、(1，0) 的交 $\neq\perp$ 是 (0，1)∧(1，0) =(0，0) $=\perp$。□

2.7 Locale 上的层

本学位论文的目标之一是导出模糊单纯集的度量实现。在此过程中，我们会遇到 locale 上的层。在本小节中，我们介绍传统层条件（定义 2.7.3），以及一个针对本学位论文中特定应用而定制的等价替代定义（定义 2.7.7）。关于 locale 上的层的抽象处理，参见 [4, 第 IX 章]。不过，由于我们只需借助 locale 上的层来概述 Barr [1,一节 2], 中的结果，因此我们将采用他在 [1, 第 2]节中给出的较不抽象的定义。

我们先来定义预层。预层就是到范畴 Set 的逆变函子。

定义 2.7.1： 设$\mathcal{C}$ 是一个范畴。函子 $F:\mathcal{C}^{op}\to Set$ 称为**C 上的预层** 。**C 上的预层范畴** 就是函子范畴 $Set^{\mathcal{C}^{op}}$。

记号 2.7.2： 对于偏序集范畴上的预层 $F:(P,\leq)^{op}\to Set$，我们将限制映射 $F(f:a\to b):F(a)\to F(b)$ 写作 $F_{a\geq b}:F(a)\to F(b)$，因为只有一个态射 $f:a\to b$ 可以见证 $a\geq b$。注意，我们也会翻转索引中的偏序关系，以避免对逆变性的混淆： $F_{a\geq b}$ 从$F(a)$ 映射到 $F(b)$。

层是满足层条件的预层。我们只对 locale 要求这一条件，因为在 locale 上，层条件的形式要简单得多。

定义 2.7.3: [1, 截面 2] 令 $\mathcal{L}$ 为一个 locale，$F:\mathcal{L}^{op} \to Set$ 为一个预层。

- 对于 $a \in \mathcal{L}$，满足 $a = \bigvee_{i\in I} a_i$ 的族 $(a_i \in \mathcal{L})_{i\in I}$ 称为 a 的**覆盖**。
- 给定 a 的一个覆盖 $(a_i)_{i\in I}$，若族 $x_i \in F(a_i))_{i\in I}$ 满足以下条件，则称其为**相容**的:

$$F_{a_i \geq (a_i \wedge a_j)}(x_i) = F_{a_j \geq (a_i \wedge a_j)}(x_j) \qquad \text{for all } i, j \in I.$$

若满足**层条件**，则称其为$\mathcal{L}$ 上的层:

对于每个 a，若其覆盖为 $(a_i)_{i\in I}$，且对于每个相容族 $x_i \in F(a_i))_{i\in I}$，都存在唯一的 $x \in F(a)$，使得 $F_{a\geq a_i}(x) = x_i$ 对所有 $i \in I$ 都成立。
具有自然变换作为态射的$\mathcal{L}$ 上的层构成范畴$Shv(\mathcal{L})$。它是$Set^{\mathcal{L}^{op}}$的一个全子范畴。

注记 2.7.4: [1, 节 2] 令 $F:\ \mathcal{L}^{op} \to Set$ 是一个层。则 $F(\bot) \cong \{*\}$。

证明: 如 $\bot = \bigvee \emptyset$，空族 $\emptyset$ 是 $\bot$的一个覆盖。根据层条件，必定存在唯一的元素 $x \in F(\bot)$，使得对空指标集中的所有 i，限制条件$F_{\bot\geq a_i}(x) = x_i$ 均成立。由于空族中没有元素，因此没有需要检查的限制条件，所以任意元素 $x \in F(\bot)$都自动满足这些条件。层条件指出，在 $F(\bot)$ 中存在唯一这样的元素，因此 $F(\bot)$ 必须是一个单元素集。□

定义某些层时，通常需要通过分类讨论来定义: $\bot$ 映射到 $\{*\}$，其他所有元素则映射到更有意思的对象。为了避免写出这种分类讨论，我们可以用一个定义来提升函子 $F:\ \mathcal{L}_{\neq\bot} \to Set$，使其在 $\bot$ 处原本未定义，而提升后包含 $\bot$。如果结果应当是一个层，那么这种提升在唯一同构意义下唯一。注意，对于一个 locale $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}_{\neq\bot} = \mathcal{L}\backslash\{\bot\}$ 仅仅是一个偏序集。

定义 2.7.5: 设 $F:\mathcal{L}_{\neq\bot} \to Set$ 是一个函子。那么我们定义函子$F^{\bot}:\mathcal{L} \to Set$ 如下:

$$F^{\bot}(a) = \begin{cases} F(a) & a \neq \bot \\ \{*\} & a = \bot \end{cases}$$

$$F^{\bot}(* : a \leq b)(x) = \begin{cases} F(* : a \leq b)(x) & a \neq \bot \text{ and } b \neq \bot \\ * & a = \bot \text{ or } b = \bot. \end{cases}$$

引理 2.7.6: 设 $F:\mathcal{L}_{\neq\bot} \to Set$ 是一个函子。当且仅当 $F^{\bot}$ 是层时，F 满足**无底层条件**:

对于元素 $a \in \mathcal{L}_{\neq\bot}$ 的所有覆盖 $(a_i \in \mathcal{L}_{\neq\bot})_{i\in I}$ 以及相容族 $(x_i \in F(a_i))_{i\in I}$，存在唯一的 $x \in F(a)$，使得 $F(*:\ a_i \leq a)(x) = x_i$。

证明：

1. 设 $F^{\perp}$ 满足通常的层条件。我们证明 F 满足无底层条件：

   设 $(a_i \in \mathcal{L}_{\neq\perp})_{i\in I}$ 是 $a \in \mathcal{L}_{\neq\perp}$ 的一个覆盖。由于 $\mathcal{L}_{\neq\perp} \subseteq \mathcal{L}$，且 $F^{\perp}$ 和 F 在非底元素上的作用相同，因此我们可以使用 $F^{\perp}$ 的通常层条件，为每个相容族导出唯一的元素。

2. 设 F 满足无底层条件。我们证明 $F^{\perp}$ 满足通常的层条件：

   设 $(a_i \in \mathcal{L})_{i\in I}$ 是 $a \in \mathcal{L}$ 的一个覆盖。

   若 $a = \perp$，则对于任意相容族（定义 2.7.4），我们必须将 $*$ 指定为唯一的元素。

   如果 $a \in \mathcal{L}_{\neq\perp}$，我们可以从 I 中移除每个满足 $a_i = \perp$ 的 i，从而得到一个覆盖 $a \in \mathcal{L}_{\neq\perp}$ 的新族 $(a_i \in \mathcal{L}_{\neq\perp})_{i\in J}$。然后，我们可以利用 F 的无底层条件，为任意相容的元素族得到唯一元素。

□

我们也可以将添加底元素的过程表述为范畴等价。

定义 2.7.7： 范畴 $Shv^{*}(\mathcal{L})$ 是 $Set^{\mathcal{L}_{\neq\perp}}$ 的全子范畴，其中只包含满足定义 2.7.6 中条件的函子 $F : \mathcal{L}_{\neq\perp} \to Set$。

推论 2.7.8： $Shv(\mathcal{L})$ 与 $Shv^{*}(\mathcal{L})$ 之间存在范畴等价。

证明： 我们可以轻松地将定义 2.7.5 扩展为一个函子 $(-)^{\perp} : Shv^{*}(\mathcal{L}) \to Shv(\mathcal{L})$，方法是将分类讨论扩展到态射

$$(\alpha^{\perp})_a = \begin{cases} \alpha_a & a \neq \perp \\ * \mapsto * & a = \perp. \end{cases}$$

于是同样容易看出，$(-)^{\perp} : Shv^{*}(\mathcal{L}) \to Shv(\mathcal{L})$ 与限制函子 $(-)|_{\mathcal{L}_{\neq\perp}} : Shv(\mathcal{L}) \to Shv^{*}(\mathcal{L})$ 构成范畴等价。□

在这种情况下，我们无法得到方便的范畴同构，其技术原因在于，单元素集 $\{*\}$ 并非唯一，而只是唯一到唯一同构的意义上唯一。因此，一个层 $F : \mathcal{L} \to Set$，来自 $Shv(\mathcal{L})$，可能会映射 $\perp$ 到另一个单元素集

$\{*'\}$ 但 $(F|_{\mathcal{L}_{\neq\perp}})^{\perp}$ 会映射 $\perp$ 到定义 2.7.5 中选定的那个特定单元素集 $\{*\}$ 。

本节最后，我们将探讨不同 locale 上的层范畴之间的关系。以下结果的更一般版本可见于[4, 第 IX 章， 1]。我们将根据定义 2.7.3 中的 Barr 层条件 [1, 节 2]给出更具体的证明。

不同层范畴之间的关系可以自然地用范畴论的语言来探讨：locale 之间的一个态射 $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 会在范畴 $Shv(\mathcal{L})$ 和 $Shv(\mathcal{L}')$ 之间诱导出一个函子。

引理 2.7.9： locale 的一个态射 $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 会诱导出一个函子 $Shv(\phi)$：$Shv(\mathcal{L}) \to Shv(\mathcal{L}')$，定义如下：

$$Shv(\phi)(F) = F \circ \phi$$
$$Shv(\phi)(\alpha : F \Rightarrow F')_a = \alpha_{\phi(a)}.$$

证明： 注意，根据定义 2.6.6， ϕ 是一个函子 $\phi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ ，因此 $F \circ \phi$ 的限制映射为

$$(F \circ \phi)_{a \geq b} = (F \circ \phi)(* : a \geq b) = F(* : \phi(a) \geq \phi(b)) = F_{\phi(a) \geq \phi(b)}$$

对所有 $a, b \in \mathcal{L}'$ 均成立。我们验证，对于任意层 F: $\mathcal{L} \to Set$， $F \circ \phi$: $\mathcal{L}' \to Set$都是一个层。

令 $(a_i \in \mathcal{L}')_{i \in I}$ 是 $a \in \mathcal{L}'$ 的一个覆盖。由于 ϕ 保持并，$(\phi(a_i) \in \mathcal{L})_{i \in I}$ 是 $\phi(a) \in \mathcal{L}$ 的一个覆盖。在 $F \circ \phi$ 的语境下的任意相容族 $(x_i \in F \circ \phi(a_i))_{i \in I}$ ，在 F 的语境下也相容，因为 ϕ 保持二元交。

F 的层条件保证存在唯一的 $x \in F(\phi(a))$，使得 $F_{\phi(a) \geq \phi(a_i)}(x) = x_i$。这也是 $F \circ \phi$ 的层条件所需的唯一元素，因为$F_{\phi(a) \geq \phi(a_i)}(x) = (F \circ \phi)_{a \geq a_i}(x)$。□

这一构造给出了态射上的作用，从而使将范畴 $Shv(\mathcal{L})$ 指派给 locale $\mathcal{L}$ 的过程也成为函子。

引理 2.7.10： 存在一个函子 $Shv : Loc \to Cat$ ，它将

- 一个 locale $\mathcal{L}$ 范畴 $Shv(\mathcal{L})$,
- 一个 locale 态射 $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}\prime$ 定义 2.7.9 中的态射。

证明： 我们来验证函子定律。

$$(Shv(\psi) \circ Shv(\phi))(F) = Shv(\psi)(F \circ \phi) = F \circ \phi \circ \psi = Shv(\psi \circ \phi)(F)$$

$$\begin{aligned}(Shv\,(\psi)\circ Shv\,(\phi))(\alpha:F\Rightarrow F')_a &= Shv\,(\psi)\,(Shv\,(\phi)\,(\alpha:F\Rightarrow F'))_a\\ &= Shv\,(\phi)\,(\alpha:F\Rightarrow F')_{\phi(\psi(a))}\\ &= \alpha_{\psi\circ\phi(a)} = (Shv\,(\psi\circ\phi))(\alpha:F\Rightarrow F')_a\end{aligned}$$

□

函子保持同构，因此我们可以直接得到一个直观的结果：同构的 locale 具有同构的层范畴。

推论 2.7.11： locale 同构 $i:\ \mathcal{L}\ \to\mathcal{L}'$ 诱导范畴同构 $Shv\,(i)$：$Shv(\mathcal{L})\ \to Shv\,(\mathcal{L}')$。

3 值集

如引言所述，McInnes 等人 [5] 使用了来自 Spivak 的草稿 [9, 第 3] 节的度量实现函子。该函子的定义域是单纯模糊集的一种变体。Spivak [9, 第 1] 节定义了模糊集的不同变体，并为此引用了 Barr [1] 。然而，Barr [1] 引入了这些范畴的多种变体，而 Spivak [9] 使用的是 Barr 仅在 [1, 定理 6] 之后那段末尾提及的一般范畴的两个等价特例。Spivak 的草稿 [9] 中的许多小错误和不一致之处使其难以理解。

Spivak 试图将基于两种选定的模糊集范畴之一的单纯对象，与一个等价范畴对应起来。他只在 [9, 定义 1.4] 之后的一段文字中对此作了概述，论证中仍有疏漏，见第 1.1 节（2）。

McInnes 等人 [5] 引用了 Spivak [9] 和 Barr [1], ，但几乎重现了[9] 中的所有问题，也没有说明使用了 Barr [1] 中的哪些特殊情形。
我们将在第 3.1 节 [1, 定理 6]之后的一段文字中，说明这些范畴的首个一般变体的动机并作出总结。与 Barr 不同，我们将一般情形称为经典赋值集（定义 3.1.5），以区别于 Spivak 使用的特殊情形；对于后者，我们也将在定义 3.1.6（1）中称之为经典模糊集，如同 Spivak [9, 定义 1.1]。

我们还对第 3.2 节中 [1, 定理 6] 之后段落所述的这一范畴的第二种一般层论变体进行了阐释和总结。我们仍将这一范畴称为赋值集合（定义 3.2.3），而 Barr 称之为模糊集。我们将 Spivak 所用的特例称为模糊集，见定义 3.2.12 (1)。我们还为 Barr [1, 定理 3]中两个范畴等价关系提供了另一种证明。Barr 只给出了构成该等价关系的两个函子之一（定义 3.2.1），并证明它是全忠实且本质满的。我们在定义 3.2.10 中补充了另一个函子，并在定义 3.2.11 中借助两个函子及自然同构确立了这种等价关系。定义 3.2.10 中函子的对象映射示意图，已可见于 [9, 第 1] 节。我们将在后文利用这两个函子，计算第 4.3 节中度量实现及相关函子的作用。

我们还定义了赋值集合的单纯对象的不同变体，并明确构造出它们之间的范畴等价；Spivak 仅在[9, 定义 1.4]之后进行了概述。我们还补充了第 1.1 节问题 2 中所讨论的其余空缺。
Spivak 以模糊集的特殊情形来构造其度量实现 [9, 第 3] 节。我们将在定义 3.1.6 (2) 中介绍经典变体，并在定义 3.2.12 (2) 中介绍等价的层论变体，将其作为 Barr 范畴 [1], 的另一种特殊情形；我们将其称为（经典）赋范集合。这些经典赋范集合和层论赋范集合分别等价于 Spivak 所研究的经典模糊集和层论模糊集的特殊情形，如定义 3.1.8 和定义 3.2.14 所示。用赋范集合来构造度量实现，可以简化第 4.3 节中的计算。

由于针对所有这些范畴尚无既定的命名约定，在

参考文献 [9, 1, 5], 我们在本学位论文的索引中提供了一份翻译对照表。

3.1 经典赋值集合

普通集合 X 由隶属谓词 $\in$完全定义。隶属关系是二元的：要么有 $x \in X$，要么有 $x \notin X$。模糊集允许隶属强度处于这两个极端之间的不同值。数学对象 x 可以是隶属强度为 1 的完全成员、隶属强度为 0 的非成员，或介于两者之间的任意值。我们可以通过为集合 X 配备映射 $\mu_X \colon X \to (0,1]$，将每个元素的隶属强度赋予它，从而在常规集合论中编码这一点；所有隶属强度为 0 的元素都不会被纳入 X。

定义 3.1.1： 一个**经典模糊集** (X, μ_X)是一个配备映射$\mu_X \colon X \to (0,1]$, 的集合 X，该映射称为**成员映射**。对于元素 $x \in X$，值$\mu_X(x) \in (0,1]$称为 x在 (X, μ_X) 中的**隶属强度** 。

要将模糊集组织成一个范畴，我们必须定义模糊集之间的态射。对于普通集合之间的映射 $f \colon X \to Y$，每当存在一个元素 $x \in X$ 时，也存在一个元素 $f(x) \in Y$。将这一思想提升到模糊集（X，μ_X），（Y，μ_Y）的一种直观方式是：要求隶属强度为 $\mu_X(x)$ 的元素 $x \in X$ 被映射到隶属强度相等或更高的元素。

定义 3.1.2： 设（X，μ_X）和（Y，μ_Y）是经典模糊集。模糊集的一个态射 $f \colon$（X，μ_X）$\to$（Y，μ_Y）是一个映射 $f \colon X \to Y$，满足

$$\mu_Y(f(x)) \geq \mu_X(x) \quad \forall x \in X.$$

这是经典赋值集范畴的一种特定类型。赋值集合的其他例子包括赋范集合；当我们遗忘赋范向量空间的结构但保留范数时，就会得到赋范集合：

定义 3.1.3： 一个**经典赋范集**（X，$\|-\|_X$）是一个集合 X，配备映射 $\|-\|_X \colon X \to [0,\infty)$，称为**范数**。

赋范结构之间的态射通常定义为相对于范数非扩张的态射，因此我们也要求这一点。

定义 3.1.4： 一个**经典赋范集态射**从（X，$\|-\|_X$）到（Y，$\|-\|_Y$）是一个映射 $f \colon X \to Y$，满足 $\|f(x)\|_Y \leq \|x\|_X$对所有 $x \in X$。

我们将赋范集合之间的态射定义为非扩张映射，而将态射

模糊集之间的态射定义为扩张映射，唯一的原因是为了符合文献中的惯例。对于模糊集，惯例是元素必须映射到强度大于或等于自身的元素，如上所述。对于赋范集合，我们要求其与既有的“赋范”范畴相容。例如，赋范向量空间与非扩张映射构成的范畴，可以通过一个遗忘函子映射到赋范集范畴；该函子只抹去向量空间结构，但保留范数。

一般来说，我们将经典赋值集定义为配备了一个取值于某个 locale 的映射的集合，其态射定义为与该 locale 的序相容的映射。

定义 3.1.5： 设 $(\mathcal{L}, \leq)$ 是一个 locale。经典 $(\mathcal{L}, \leq)$-值集范畴 $CVal(\mathcal{L}, \leq)$ 由以下对象组成

- **经典 $(\mathcal{L}, \leq)$-赋值集** (X, μ_X)，其中 X 是一个集合，且 $\mu_X : X \to \mathcal{L}^{\neq \bot}$，
- **从 $(\mathcal{L}, \leq)$-赋值集** (X, μ_X) 到 (Y, μ_Y) 的态射：映射 $f\colon X \to Y$，满足对所有 $x \in X$，$\mu_X(x) \leq \mu_Y(f(x))$。

这个定义等价于定理 6]之后段落中的 $\mathrm{Fuz}_0(L)$。我们通过将 $\mathcal{L}^{\neq \bot}$ 指定为可能赋值的集合，直接排除了底元素 $\bot$；而 Barr 则要求底元素的逆像为空，他将这个底元素记作 0。

然后，我们便可以从这个定义中还原出上述具体的范畴示例。

定义 3.1.6：

1. 对于 locale $([0,1], \leq)$，我们得到**经典模糊集范畴**

$$CFuz := CVal([0,1], \leq).$$

2. 对于 locale $([0,\infty], \geq)$，我们得到**经典赋范集范畴**

$$CNSet := CVal([0,\infty], \geq).$$

定义 3.1.6 (1) 中的经典模糊集范畴与 Spivak [9,定义 1.1] 中的范畴一致。

本节最后，我们将探讨取值于不同 locale 的经典赋值集之间有何关系。我们预期，同构的 locale 会诱导出经典赋值集范畴之间的同构。事实确实如此。不过，并非每个 locale 态射都能在相应的经典赋值集之间诱导出函子，

因为任意 locale 态射都可能将每个元素映射到 $\perp$，而我们在赋值映射的定义中已排除了这种情况。其他只将$\perp$ 映射到 $\perp$ 的态射也可能在并非等价的范畴之间诱导出函子，但我们只需要关于同构的断言。

引理 3.1.7： locale 同构 $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 诱导出一个范畴同构的函子

$$CVal(\phi) : CVal(\mathcal{L}') \to CVal(\mathcal{L})$$

定义为

$$CVal(\phi)(X, \mu_X) = (X, \phi \circ \mu_X)$$
$$CVal(\phi)(f : (X, \mu_X) \to (Y, \mu_Y)) = f : (X, \phi \circ \mu_X) \to (Y, \phi \circ \mu_Y).$$

证明： 注意，复合映射 $\phi \circ \mu_X : X \to \mathcal{L}_{\neq\perp}$ 定义良好，因为 locale 态射 $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 是一个映射 $\phi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$，方向相反，且根据定义 2.6.8。

ϕ 是单调的这一事实确保对于每个 $\mathcal{L}'$-赋值集合态射 f，$CVal(\phi)(f)$ 都是 $\mathcal{L}$-赋值集合的态射。
很容易看出，所诱导的函子是一个同构。 □

我们并不想声称这一范畴同构具有新颖性。在第 3.2 节中我们将看到，如果$\mathcal{L}$ 是全连通的，则范畴$CVal(\mathcal{L})$ 等价于$Shv(\mathcal{L})$ 的一个子范畴。层论告诉我们，对于同构的 locale $\mathcal{L}$ 和$\mathcal{L}'$ [4, ，范畴$Shv(\mathcal{L})$ 与$Shv(\mathcal{L}')$ 同构——第 IX 章，第 5 节，命题 5]。

推论 3.1.8： 经典模糊集范畴与定义 3.1.6 中的经典赋范集范畴同构。

证明： 定义 2.6.7 中的同构 $i : ([0, \infty], \leq) \to ([0, 1], \geq)$ 诱导出范畴同构$CVal(i) : CVal(([0, 1], \geq)) \to CVal(([0, \infty], \leq))$. □

3.2 赋值集作为层

对于一个全连通局部 $\mathcal{L}$，经典的 $\mathcal{L}$-值集可以视为层。给定一个经典的 $\mathcal{L}$-值集 (X, μ_X)，我们可以将其描述为集合族 $(X^{\geq a})_{a \in \mathcal{L}_{\neq\perp}}$，其中

$$X^{\geq a} = \{\, x \in X \mid \mu_X(x) \geq a \,\}$$

只包含赋值至少为 a 的元素。我们只需将包含映射添加为限制映射，就得到一个层。

定理 3.2.1： [1, 定理 3] 设$\mathcal{L}$ 是一个全连通局部。存在一个函子M： $CVal(\mathcal{L}) \to Shv(\mathcal{L})$，定义如下：

$$M(X,\mu_X)(a) = \begin{cases} \{*\} & a = \bot \\ X^{\geq a} & a \neq \bot \end{cases}$$

$$M(X,\mu_X)_{a\geq b}(x) = \begin{cases} * & b = \bot \\ x & b \neq \bot \end{cases}$$

$$M(f:(X,\mu_X)\to(Y,\mu_Y))_a = \begin{cases} * \mapsto * & a = \bot \\ f|^{M(Y,\mu_Y)(a)}_{M(X,\mu_X)(a)} & a \neq \bot \end{cases}$$

证明：

- $M(X,\mu_X)_{a\geq b}$： $M(X,\mu_X)(a) \to M(X,\mu_X)(b)$ 定义良好：

  令 $a \geq b \neq \bot$和 $x \in M(X,\mu_X)(a)$。那么 $\mu_X(x) \geq a \geq b$，因此 $x \in M(X,\mu_X)(b)$。很容易看出，这些映射满足函子定律。

- $M(X,\mu_X)$ 满足层条件：

  令 $(a_i \in \mathcal{L})_{i\in I}$ 是 $a \in \mathcal{L}$ 的覆盖。

  – 对于 $a = \bot$，根据定义 2.7.4，层条件成立。– 对于 $a \neq \bot$，令 $(x_i)_{i\in I}$ 相容。相容条件

  $$M(X,\mu_X)_{a_i\geq a_i\wedge a_j}(x_i) = M(X,\mu_X)_{a_j\geq a_i\wedge a_j}(x_j) \quad \forall i,j \in I$$

  化简为 $x_i = x_j\ \forall i,j \in I$，其中 $a_i, a_j \neq \bot$，因为根据 $\mathcal{L}$ 的全连通性，我们有 $a_i \wedge a_j \neq \bot$。因此，所有满足 $a_i \neq \bot$ 的 x_i 都合并为同一个 x。这个 x 是唯一满足以下条件的元素：对于所有满足 $a_i \neq \bot$的 $i \in I$，都有 $M(X,\mu_X)_{a\geq a_i}(x) = x_i$。对于所有其他的 $x_i = * \in M(X,\mu_X)(\bot)$，也有 $M(X,\mu_X)_{a\geq\bot}(x) = * = x_i$。

- $M(f)$ 是一个自然变换：

  令 $f:(X,\mu_X) \to (Y,\mu_Y)$ 和 $a \geq \bot$。f 的值集态射条件确保 $f|^{M(Y,\mu_Y}_{X)(a)}\ M(,\mu_X)(a)$ 定义良好。自然性显然成立，因为对 $a \geq \bot$ 的限制映射只是包含映射。对 $a = \bot$ 来说，这也显然成立，因为从单元素集到其自身只有一个态射。

□

根据定义 2.7.6 或定义 2.7.8，我们本可以在不进行分类讨论的情况下定义 M。这里我们将其纳入，但之后通常会省略。

当我们将一个经典模糊集（X, μ_X）视为一个层时，通常只能通过计算 M（X, μ_X）（a）来查看它的一部分，这使我们能够看到所有赋值大于或等于 a 的元素。我们可能会想计算 M（X, μ_X）（$\bot$），并期望查看所有元素，但这只会得到单元素集 $\{*\}$（定义 2.7.4）。

例 3.2.2：

- 对于有限经典模糊集 $X = \{x, y, z, w\}$，其中

$$\begin{aligned} &\mu_X : X \to (0, 1] \\ &\mu_X(x) = \mu_X(y) = 1/3 \\ &\mu_X(z) = 1/2 \\ &\mu_X(w) = 1, \end{aligned}$$

  我们得到模糊集

$$M(X, \mu_X)(a) = \begin{cases} \{*\} & a = 0 \\ \{w, z, x, y\} & a \in (0, 1/3] \\ \{w, z\} & a \in (1/3, 1/2] \\ \{w\} & a \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

  这里，对于任意 $a \in (0, 1/3]$，我们都有 M（X, μ_X）（a）$= X$。

- 对于一个无限经典模糊集 $Y = \mathbb{N}$，其满足

$$\begin{aligned} &\mu_Y : Y \to (0, 1] \\ &\mu_Y(n) = 1/n, \end{aligned}$$

  我们得到模糊集

$$M(Y, \mu_Y)(a) = \begin{cases} \{*\} & a = 0 \\ \cdots & \\ \{1, 2, 3, 4\} & a \in (1/5, 1/4] \\ \{1, 2, 3\} & a \in (1/4, 1/3] \\ \{1, 2\} & a \in (1/3, 1/2] \\ \{1\} & a \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

  在这种情况下，对于每个 a，我们都有 $M(Y, \mu_Y)(a) \subsetneq Y$。

并非每个层都能视为经典值集，因为任意层都允许限制映射不是单射：若 $S \in Shv(\mathcal{L})$，则对于某个 $b \in \mathcal{L}$，可能存在 $S(a)$ 中的不同元素 $x \neq y$，它们经限制映射后得到相同的元素 $S_{a \geq b}(x) = S_{a \geq b}(y)$。因此，$x, y$ 在“隶属强度 a”下“不相等”，但在“强度 b”下“相等”。我们可以只考虑具有单射限制映射的层来避免这个问题。

定义 3.2.3： 设 $\mathcal{L}$ 是一个全连通局部。

- 层 $S : \mathcal{L}_{op} \to Set$ 称为**$\mathcal{L}$-赋值集合**，如果对于所有 $a \geq b \neq \bot$，限制映射 $S_{a \geq b} : S(a) \to S\, b$都是单射。
- **L**-赋值集合的范畴 $Val(\mathcal{L})$ 是$Shv(\mathcal{L})$ 的全子范畴，其中$\mathcal{L}$-赋值集合作为对象。

从现在起，对于一个$\mathcal{L}$-赋值集合 S，我们将 $S^{\geq a} := S(a)$ 记作 $a \neq \bot$。

推论 3.2.4： 函子 $M : CVal(\mathcal{L}) \to Shv(\mathcal{L})$ 定义了一个函子$M : CVal(\mathcal{L}) \to Val(\mathcal{L})$，其值为赋值集合。

证明： 限制映射 $M(X, \mu_X)_{a \geq b}$只是 $\bot \neq b \leq a$的包含映射，因此显然是单射。□

注记 3.2.5： 等价地，我们可以将 $Val(\mathcal{L})$ 视为 $Shv^*(\mathcal{L})$ 的一个子范畴，其中的层的**所有** 限制映射都是单射，见定义 2.7.8。

我们在定义 3.2.3 中定义的范畴 $Val(\mathcal{L})$ 与第 $2]$ 节中的 $\mathbf{Mon}(\mathcal{L})$ 相同。

Barr 证明了，当 $\mathcal{L}$ 全连通时，范畴 $CVal(\mathcal{L})$ 与 $Val(\mathcal{L})$ 等价。本学位论文所采用的这一等价的具体变体，在 $[1,$ 定理 $6]$ 之后紧接着的段落中有所提及。虽然范畴 $Val(\mathcal{L})$ 可能不是一个 topos，但 $Shv(\mathcal{L})$ 始终是一个 topos。它是 $Val(\mathcal{L})$ 的有效完备化。因此，若要使用 topos 中所有可用的运算，根据 Barr $[1,$ 第 $1]$ 节，应当使用 $Shv(\mathcal{L})$ 这一范畴。本学位论文中不会用到 topos 理论构造。
现在我们将构造范畴 $CVal(\mathcal{L})$ 与 $Val(\mathcal{L})$ 之间的等价。Barr 只构造了定义 3.2.4 中的函子 $M : CVal(\mathcal{L}) \to Val(\mathcal{L})$，并证明它是全忠实且本质满的 $[1,$ 定理 $3]$。我们还将明确构造反方向的函子，以及等价中涉及的所有自然同构，因为稍后我们需要借助它们在这两个范畴之间来回转换。

在构造从 $Val(\mathcal{L})$ 到 $CVal(\mathcal{L})$ 的函子之前，我们先介绍几个定义，以帮助刻画 $\mathcal{L}$-值集。对于一个 $\mathcal{L}$-值集 $S : \mathcal{L}^{op} \to Set$，回忆一下，$S^{\geq a} := S(a)$ 是所有赋值大于或等于 a 的元素构成的集合。如果 $b \geq a$，那么元素 $S^{\geq b}$ 可以通过限制映射嵌入 $S^{\geq a}$。如果有一个元素 $x \in S^{\geq a}$，以及另一个满足 $b > a$ 且限制映射为 x 的元素 $y \in S^{\geq b}$，那么 x 的赋值必定大于 a。但如果不存在这样的元素，那么 x 的赋值必定为 a。我们将这类元素构成的集合记作 $S^{=a}$。

定义 3.2.6： 设 $\mathcal{L}$ 是一个全连通局部，设 $S : \mathcal{L}^{op} \to Set$ 是一个值集，并设 $a \neq \bot$。我们定义

$$S^{=a} = \{x \in S^{\geq a} \mid \text{there are no } b > a, y \in S^{\geq b} \text{ with } S_{b \geq a}(y) = x\}.$$

例 3.2.7： 再次考虑定义 3.2.2 中的模糊集 X 和 Y。于是我们得到

$$M(X, \mu_X)^{=a} = \begin{cases} \{x, y\} & a = 1/3 \\ \{z\} & a = 1/2 \\ \{w\} & a = 1 \\ \emptyset & \text{else,} \end{cases}$$

and

$$M(Y, \mu_Y)^{=a} = \begin{cases} \{n\} & a = 1/n \\ \emptyset & \text{else.} \end{cases}$$

给定一个元素 $x \in S^{\geq a}$，它不一定属于 $S^{=a}$，我们可以找到 x的真实层级，即包含一个限制到 x的元素的最高层级。

定义 3.2.8： 设$\mathcal{L}$ 是一个全连通局部，并设 S :$\mathcal{L}^{op} \to$ 集合 是一个$\mathcal{L}$-赋值集合。映射 $\mu_S^a : S^{\geq a} \to \mathcal{L}_{\neq \bot}$ 定义如下:

$$\mu_S^a(x) = \bigvee \{\, b \in \mathcal{L}_{\neq \bot} \mid b \geq a \text{ and there is } y \in S^{\geq b} \text{ with } S_{b \geq a}(y) = x \,\}.$$

我们可以定义一个映射，将任意层级 a 上的元素 $x \in S^{\geq a}$ 映射到它们的真实层级$S^{=\mu_S^a(x)}$。由于事先不知道这个层级，我们必须映射到所有可能 $S^{=b}$的余积中，但 $\bot$除外，因为 $S^{=\bot} = \{*\}$。

定义 3.2.9： 设$\mathcal{L}$ 是一个全连通局部，并设 S :$\mathcal{L}^{op} \to$ 集合 是一个赋值集合。映射

$$\uparrow_S^a \colon S^{\geq a} \to \{\, \iota_b(y) \mid y \in S^{=b} \text{ and } b \geq a \,\} \subseteq \coprod_{b \in \mathcal{L}_{\neq \bot}} S^{=b}$$

定义为

$$\uparrow_S^a (x) = \iota_{\mu_S^a(x)}(y), \qquad \text{where } y \in S^{=\mu_S^a(x)} \text{ with } S_{\mu_S^a(x) \geq a}(y) = x.$$

现在，我们可以定义从 $Val(\mathcal{L})$ 到 $CVal(\mathcal{L})$ 的等价中的另一个函子。对于一个 $\mathcal{L}$-值集，我们将其所有层级的余积赋给它。赋值集合态射 $\alpha : S \Rightarrow T$ 被赋予一个映射，该映射在每个层级 a 应用 α_a。由于结果可能会落在不同的层级，我们通过 $\uparrow_T^a$ 将其发送到正确的层级。

下述函子 C 的对象映射的一般思路在 [9,第 1] 节中进行了概述。

引理 3.2.10： 设 $\mathcal{L}$ 是一个全连通局部。存在一个函子 $C : Val(\mathcal{L}) \to CVal(\mathcal{L})$，定义如下：

$$\begin{aligned}
&C(S) = (X, \mu_S) \text{ where}\\
&\quad X = \coprod_{a \in \mathcal{L}_{\neq \bot}} S^{=a}\\
&\quad \mu_S : X \to \mathcal{L}_{\neq \bot}\\
&\quad \mu_S(\iota_a(x)) = a\\
&C(\alpha : S \Rightarrow T) \circ \iota_a(x) = \uparrow^a_T \circ \alpha_a(x).
\end{aligned}$$

证明： 我们验证函子定律。对于恒等映射 id_S，我们有

$$\begin{aligned}
C(id_S) \circ \iota_a(x) &= \uparrow^a_S \circ id_{S^{\geq a}}(x)\\
&= \uparrow^a_S (x)\\
&= \iota_{\mu^a_S(x)}(y) && \text{where } \mu^a_S(x) = a\\
& && \text{with } S_{\mu^a_S(x) \geq a}(y) = S_{a \geq a}(y) = y = x\\
&= \iota_a(x).
\end{aligned}$$

这里，我们有 $\mu^a_S(x) = a$，因为 $x \in S^{=a}$ 已经处于其真实层级，没有其他元素限制到 x。对于赋值集合的两个态射 $\alpha : S \Rightarrow T$，$\beta : T \Rightarrow U$，我们必须进行一番繁琐的计算：

$$\begin{aligned}
&C(\beta) \circ C(\alpha) \circ \iota_a(x)\\
=&C(\beta) \circ \uparrow^a_T (\alpha_a(x))\\
=&C(\beta)(\iota_b(y)) && \text{其中 } b = \mu^a_T(\alpha_a(x)) \geq a \text{ 且 } y \in T^{=b}\\
& && \text{唯一的，且满足 } T_{b \geq a}(y) = \alpha_a(x)\\
=& \uparrow^b_U \circ \beta_b(y)\\
=&\iota_c(z) && \text{其中 } c = \mu^b_U(\beta_b(y)) \geq b \text{ 且 } z \in U^{=c}\\
& && \text{与 } U_{c \geq b}(z) = \beta_b(y) \text{ 唯一}\\
\overset{(*)}{=}&\iota_d(w) && \text{where } d = \mu^a_U(\beta_a \circ \alpha_a(x)) \geq a \text{ and } w \in U^{=d}\\
& && \text{与 } U_{d \geq a}(w) = \beta_a \circ \alpha_a(x) \text{ 唯一}\\
=& \uparrow^a_U (\beta_a \circ \alpha_a(x))\\
=&C(\beta \circ \alpha) \circ \iota_a(x),
\end{aligned}$$

其中我们在 $(*)$ 中使用了层条件。为此，我们计算

$$\begin{aligned}
U_{c \geq a}(z) &= U_{b \geq a} \circ U_{c \geq b}(z)\\
&= U_{b \geq a} \circ \beta_b(y)\\
&= \beta_a \circ T_{b \geq a}(y)\\
&= \beta_a \circ \alpha_a(x) = U_{d \geq a}(w).
\end{aligned}$$

然后，根据限制映射的单射性，我们得到

$$U_{c\geq c\wedge d}(z) = U_{d\geq c\wedge d}(w),$$

因此， $c \vee d$ 中存在唯一一个元素，其限制分别为 z 和 w，但成员关系$z \in U^{=c}$、$w \in U^{=d}$表明，不存在更高层级的元素限制为 z 和 w。因此， c 和 d 必定相同，而 z 和 w 必定是该层级上的相等元素。□

在定义 3.2.4 和定义 3.2.10 中定义了两个方向上的函子后，我们可以证明它们确实定义了一个等价。

定理 3.2.11： 设$\mathcal{L}$ 是一个全连通局部。函子 $M\colon\ CVal(\mathcal{L}) \to Val(\mathcal{L})$ 和 $C\colon\ Val(\mathcal{L}) \to CVal(\mathcal{L})$ 在$CVal(\mathcal{L})$ 与 $Val(\mathcal{L})$ 之间定义了范畴等价。

证明： 我们构造自然同构 $\eta\colon\ Id_{CVal(\mathcal{L})} \Rightarrow CM$ 和 $\epsilon\colon\ MC \Rightarrow Id^{Val(\mathcal{L})}$。对于这些分量

$$\eta_{(X,\mu_X)} : (X,\mu_X) \to \left(\coprod_{a\in\mathcal{L}_{\neq\bot}} \{x \in X \mid \mu_X(x) = a\},\ \mu_{M(X,\mu_X)} \right)$$
$$\text{where } \mu_{M(X,\mu_X)} \circ \iota_a(x) = a = \mu_X(x)$$

显然，我们必须设定

$$\eta_{(X,\mu_X)}(x) = \iota_{\mu_X(x)}(x)$$
$$\eta^{-1}_{(X,\mu_X)}(\iota_a(x)) = x.$$

为验证这确实是一个同构，我们计算：

$$\eta^{-1}_{(X,\mu_X)} \circ \eta_{(X,\mu_X)}(x) = \eta^{-1}_{(X,\mu_X)}(\iota_{\mu_X(x)}(x)) = x$$
$$\eta_{(X,\mu_X)} \circ \eta^{-1}_{(X,\mu_X)}(\iota_a(x)) = \eta_{(X,\mu_X)}(x) = \iota_{\mu_X(x)}(x) = \iota_a(x).$$

为了验证 η 和 η^{-1}的自然性，只需检查同构的一个方向，因此我们检查 η。自然性方块可简化为

$$\begin{array}{ccc} (X,\mu_X) & \xrightarrow{\eta_{(X,\mu_X)}} & \left(\coprod_{a\in\mathcal{L}_{\neq\bot}} \{x \in X \mid \mu_X(x) = a\},\ \mu_{M(X,\mu_X)}\right) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle CM(f)} \\ (Y,\mu_Y) & \xrightarrow{\eta_{(Y,\mu_Y)}} & \left(\coprod_{a\in\mathcal{L}_{\neq\bot}} \{y \in Y \mid \mu_Y(y) = a\},\ \mu_{M(Y,\mu_Y)}\right), \end{array}$$

因此我们计算

$$
\begin{aligned}
& CM(f) \circ \eta_{(X,\mu_X)}(x) \\
\overset{(\text{def } \eta)}{=}\ & CM(f) \circ \iota_{\mu_X(x)}(x) \\
\overset{(\text{def } C)}{=}\ & \uparrow^{\mu_X(x)}_{M(Y,\mu_Y)} M(f)_{\mu_X(x)}(x) \\
\overset{(\text{def } \uparrow)}{=}\ & \iota_{\mu^{\mu_X(x)}_{M(Y,\mu_Y)}(f(x))}(y) \qquad \text{where } M(Y,\mu_Y)_{(\mu^{\mu_X(x)}_{M(Y,\mu_Y)} \circ f(x)) \geq \mu_X(x)}(y) = f(x) \quad (3) \\
\overset{(\text{def } M)}{=}\ & \iota_{\mu_Y(f(x))}(y) \\
\overset{(*)}{=}\ & \iota_{\mu_Y(f(x))}(f(x)) \\
\overset{(\text{def } \eta)}{=}\ & \eta_{(Y,\mu_Y)}(f(x)),
\end{aligned}
$$

其中 $(*)$ 中的 $y = f(x)$ 归因于

$$
y \overset{(\text{def } M)}{=} M(Y,\mu_Y)_{(\mu^{\mu_X(x)}_{M(Y,\mu_Y)} \circ f(x)) \geq \mu_X(x)}(y) \overset{(3)}{=} y.
$$

ϵ 的分量：$MC \Rightarrow Id^{Val(\mathcal{L})}$ 是自然同构

$$
\epsilon_S : M(\coprod_{a \in \mathcal{L}_{\neq \bot}} S^{=a}, \mu_S) \Rightarrow S
$$

其分量为

$$
\begin{aligned}
& (\epsilon_S)_b : M(\coprod_{a \in \mathcal{L}_{\neq \bot}} S^{=a}, \mu_S)^{\geq b} \Rightarrow S^{\geq b} \\
\text{where } & (\epsilon_S)_b : \{\, \iota_a(x) \mid x \in S^{=a} \text{ and } a \geq b \,\} \to S^{\geq b} && b \neq \bot \\
& (\epsilon_S)_b : \{\, * \,\} \to \{\, * \,\}. && b = \bot
\end{aligned}
$$

我们定义

$$
\begin{aligned}
& (\epsilon_S)_b(\iota_a(x)) = S_{a \geq b}(x) \\
& (\epsilon_S^{-1})_b(x) = \uparrow^b_S (x)
\end{aligned}
$$

并再次验证这是一个同构

$$
\begin{aligned}
(\epsilon_S)_b \circ (\epsilon_S^{-1})_b(x) \quad & \overset{(\text{def } \epsilon^{-1})}{=} \quad (\epsilon_S)_b(\uparrow^b_S (x)) \\
& \overset{(\text{def } \uparrow)}{=} \quad (\epsilon_S)_b(\iota_{\mu^b_S(x)}(y)) \qquad \text{where } S_{\mu^b_S(x) \geq b}(y) = x \quad (4) \\
& \overset{(\text{def } \epsilon)}{=} \quad S_{\mu^b_S(x) \geq b}(y) \quad \overset{(4)}{=} \quad x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\epsilon_S^{-1})_b \circ (\epsilon_S)_b(\iota_a(x)) &\overset{(\text{def } \epsilon)}{=} (\epsilon_S^{-1})_b(S_{a\geq b}(x)) \\
&\overset{(\text{def } \epsilon^{-1})}{=} \uparrow_S^b \circ S_{a\geq b}(x) \\
&\overset{(\text{def } \uparrow)}{=} \iota_{\mu_S^b(S_{a\geq b}(x))}(y) \quad \text{where } S_{\mu_S^b(S_{a\geq b}(x))\geq b}(y) = S_{a\geq b}(x) \quad (5) \\
&\overset{(*)}{=} \iota_a(y) \quad \overset{(**)}{=} \quad \iota_a(x),
\end{aligned}
$$

其中，根据定义 3.2.8，$\mu_S^b(S_{a\geq b}(x)) = a$ 属于 (∗)，且 $x \in S^{=a}$；而 $x = y$ 属于 (∗∗) 则是由于 $S_{a\geq b}$ 的单射性，因为我们有

$$S_{a\geq b}(y) = S_{\mu_S^b(S_{a\geq b}(x))\geq b}(y) \overset{(5)}{=} S_{a\geq b}(x).$$

对于 ϵ_S的自然性，我们检查下图交换方块

$$
\begin{array}{ccc}
MC(S) & \xrightarrow{(\epsilon_S)_b} & S^{\geq b} \\
{\scriptstyle MC(S)_{b\geq c}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_{b\geq c}} \\
MC(S) & \xrightarrow{(\epsilon_S)_c} & S^{\geq c}
\end{array}
$$

通过以下计算

$$
\begin{aligned}
(\epsilon_S)_c \circ MC(S)_{b\geq c}(\iota_a(x)) &\overset{(\text{def } M,C)}{=} (\epsilon_S)_c(\iota_a(x)) \\
&\overset{(\text{def } \epsilon)}{=} S_{a\geq c}(x) \\
&\overset{(\text{func } S)}{=} S_{b\geq c} \circ S_{a\geq b}(x) \quad \overset{(\text{def } \epsilon)}{=} S_{b\geq c} \circ (\epsilon_S)_b(\iota_a(x)).
\end{aligned}
$$

最后，对于 ϵ 的自然性，我们必须检查下图交换方块

$$
\begin{array}{ccc}
MC(S) & \xrightarrow{\epsilon_S} & S \\
{\scriptstyle MC(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha}\,. \\
MC(T) & \xrightarrow{\epsilon_T} & T
\end{array}
$$

再次通过具体计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
& (\epsilon_T)_b \circ MC(\alpha)_b(\iota_a(x)) \\
\overset{(\text{def } M,C)}{=}\ & (\epsilon_T)_b \circ \uparrow_T^a \circ \alpha_a(x) \\
\overset{(\text{def } \uparrow)}{=}\ & (\epsilon_T)_b \circ \iota_{\mu_T^a(\alpha_a(x))}(y) \qquad \text{where } T_{\mu_T^a(\alpha_a(x))\geq a}(y) = \alpha_a(x) \qquad (6) \\
\overset{(\text{def } \epsilon)}{=}\ & T_{\mu_T^a(\alpha_a(x))\geq b}(y) \\
\overset{(\text{func } T)}{=}\ & T_{a\geq b} \circ T_{\mu_T^a(\alpha_a(x))\geq a}(y) \\
\overset{(6)}{=}\ & T_{a\geq b} \circ \alpha_a(x) \\
\overset{(\text{nat } \alpha)}{=}\ & \alpha_b \circ S_{a\geq b}(x) \\
\overset{(\text{def } \epsilon)}{=}\ & \alpha_b \circ (\epsilon_S)_b(\iota_a(x)).
\end{aligned}
$$

□

回顾定义 3.1.6 中值集的特殊情况。对于其中每一种，我们都可以将其等价的层论变体还原为定义 3.2.11 中等价关系的特殊情况。

定义 3.2.12：

- 对于 locale $([0,1],\leq)$，我们将**模糊集范畴**定义为

$$Fuz := Val([0,1],\leq).$$

  根据定义 3.2.11，此范畴与 $CFuz$ 等价。

- 对于 locale $([0,\infty],\geq)$，我们得到的**赋范集范畴**为

$$NSet := Val([0,\infty],\geq).$$

  根据定义 3.2.11，此范畴与 $CNSet$ 等价。

定义 3.2.12 中的范畴 Fuz 与 Spivak 在 [9] 中使用的模糊集层论变体完全相同。

根据定义 3.2.11，我们知道 $Val(\mathcal{L})$ 等价于 $CVal(\mathcal{L})$。在定义 3.1.7 中，我们证明了 $CVal(\mathcal{L})$ 与 $CVal(\mathcal{L}')$ 同构，前提是 locale $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}'$ 同构。因此，我们可以预期，locale 同构会在层论变体 $Val(\mathcal{L})$ 与 $Val(\mathcal{L}')$ 之间诱导出类似的等价。

引理 3.2.13： locale 同构 $\phi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 会诱导范畴同构 $Shv(\phi)\,|^{Val(\mathcal{L}')}_{Val(\mathcal{L})} : Val(\mathcal{L}) \to Val(\mathcal{L}')$。

证明： 我们必须验证，对于每个 $\mathcal{L}$-值集 F，层 $Val(\phi)(F) = Shv(\phi)(F) = F\circ\phi$ 都是一个 $\mathcal{L}'$-值集。
令 F 为一个 $\mathcal{L}$-值集。则每个限制映射 $F_{a\geq b}$ 对于 $a \geq b \neq \bot$ 都是单射。
令 $a' \geq b' \neq \bot$。则 $(F\circ\phi)_{a'\geq b'} = F_{\phi(a')\geq\phi(b')}$ 是单射，因为 F 是一个 $\mathcal{L}$-值集，并且根据定义 2.6.8，$\phi(b') \neq \bot$。□

推论 3.2.14： 模糊集范畴与定义 3.2.12 中的赋范集范畴同构。

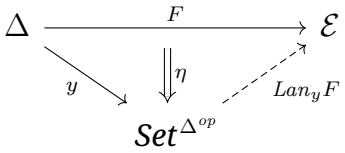
证明： 定义 2.6.7 中的 locale 同构 $i\colon([0,\infty],\leq) \to ([0,1],\geq)$ 诱导出范畴同构 $Shv(i) : Fuz \to NSet$。□

3.3 单纯赋值集合

回忆一下，$\mathcal{C}$ 中的单纯对象范畴是函子范畴 $\mathcal{C}^{\Delta^{op}}$，它由作为对象的函子 $S:\Delta^{op}\to\mathcal{C}$ 以及它们之间作为态射的自然变换构成。

定义 2.3.4 中的 Yoneda 嵌入 $y:\Delta\to Set^{\Delta^{op}}$ 是一个到单纯集范畴的函子。这使我们能够将单纯集映射到另一个范畴 $\mathcal{E}$ 的函子构造为函子 $F:\Delta\to\mathcal{E}$ 的左 Kan 延拓

注释 3.3.1： 根据定义 2.3.3，任何函子 $F:\Delta\to\mathcal{E}$ 到余完备范畴中，都保证存在一个左 Kan 延拓。



此外，根据定义 2.3.7，沿 Yoneda 嵌入得到的这些左 Kan 延拓是 $R=Hom_{\mathcal{E}}(F(-)\ -):\mathcal{E}\to Set^{\Delta^{op}}$ 的左伴随。
我们无法直接为经典 $\mathcal{L}$ 值集合范畴中的单纯对象照搬这一构造。其中一个原因是，Yoneda 嵌入 $y:\Delta\to Set^{\Delta^{op}}$ 不会映入 $CVal(\mathcal{L})$ 上的单纯对象范畴，因为 y 不会为集合 $y([n])_m$ 配备赋值映射。函子 R 也不会为同态集 $Hom_{\mathcal{E}}(F([n])\ -)$ 配备赋值映射。改用等价范畴 $Val(\mathcal{L})$ 中的单纯对象，也无法解决这些问题。

为了解决这个问题，我们必须调整 $Val(\mathcal{L})^{\Delta^{op}}$ 中的单纯对象范畴，使其符合 Yoneda 嵌入的形式。这相当于构造另一种范畴等价：$Val(\mathcal{L})^{\Delta^{op}}$ 中的一个对象 S 是满足定义 3.2.3 中附加条件的函子 $S:\Delta^{op}\to Set^{\mathcal{L}^{op}_{\neq\perp}}$。通过反柯里化（定义 2.1.1），我们也可以将其视为满足经过适当转换的附加条件的函子 $S:(\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp})^{op}\to Set$。这个范畴具有 Yoneda 嵌入 $y:(\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp})\to Set^{(\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp})^{op}}$，并且允许函子$F:(\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp})\to Set$沿该嵌入作左 Kan 延拓。

定义 3.3.2： 设$\mathcal{L}$ 是一个全连通局部。

1. 一个 **单纯经典$\mathcal{L}$-赋值集合**是 $CVal(\mathcal{L})$中的一个单纯对象。
   单纯经典**L-赋值集合的范畴** $CVal((\mathcal{L},\leq))^{\Delta^{op}}$ 是$Set^{(\Delta\times\mathcal{L})^{op}}$ 的全子范畴，其对象是未柯里化的单纯$\mathcal{L}$-赋值集合。

2. 一个**非柯里化单纯$\mathcal{L}$-值集**是函子 $S:(\Delta\times\mathcal{L})^{op}\to Set$，使得对 Δ 中的每一个对象 $[n]$，$S([n],-):\mathcal{L}^{op}\to Set$ 都是一个$\mathcal{L}$-值集。

非柯里化单纯$\mathcal{L}$-值集的范畴 $USVal(\mathcal{L})$ 是 $Set^{(\Delta\times\mathcal{L})^{op}}$ 的全子范畴，以非柯里化单纯 $\mathcal{L}$-值集为对象。

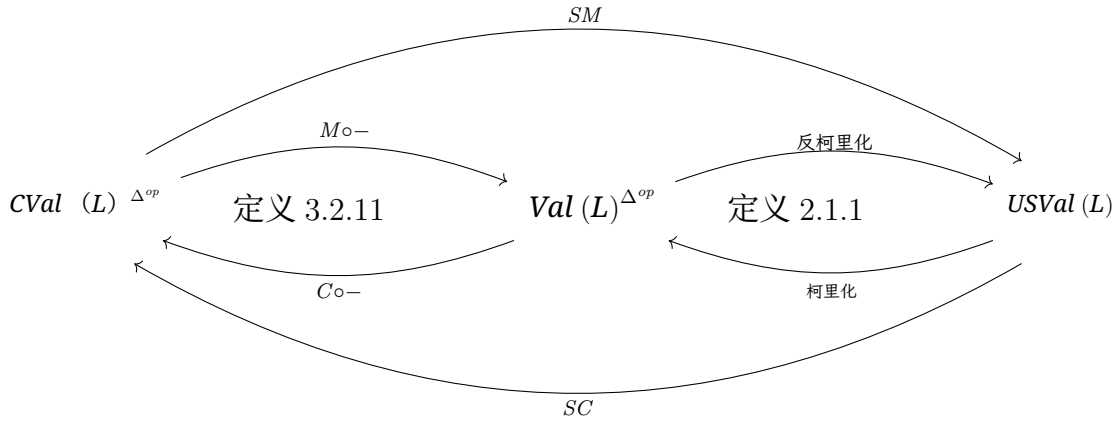
注记 3.3.3： 与定义 3.2.5 类似，我们可以将 $USVal(\mathcal{L})$ 视为函子的子范畴 $S\colon(\Delta\times\mathcal{L}^{\neq\perp})^{op}\to Set$，其中 $S([n],-)$ 是定义 3.2.5 意义下的 $\mathcal{L}$-值集。

这个未柯里化单纯形 $\mathcal{L}$-值集范畴的定义，受到 [9, 定义 1.4] 之后第二段的启发。正如第 3 节开篇和第 1.1 节第 2 项所述，Spivak 的范畴比我们的范畴更难处理，因为它要求在 $\Delta\times\mathcal{L}$ 上定义乘积 Grothendieck 拓扑。此外，它还缺少定义 3.2.3 中的单射性条件。相反，我们要求$S([n],-)\colon\mathcal{L}^{op}\to Set$ 是定义 3.2.3 中的层论模糊集，这既恢复了单射性条件，也完全免去了对 Grothendieck 拓扑的需求。

我们现在证明，我们的定义确实具有所需的范畴等价。这相当于将定义 3.2.11 中的等价与定义 2.1.1 中的范畴论柯里化同构复合。

引理 3.3.4： 设 $\mathcal{L}$ 是全连通的。那么范畴 $CVal(\mathcal{L})^{\Delta^{op}}$ 与 $USVal(\mathcal{L})$之间存在等价。

我们将函子 SM 和 SC 定义为由定义 3.2.11 和定义 2.1.1 中先前构造的等价复合而成：



其中

- $M\colon CVal\mathcal{L}\to Val(\mathcal{L})$ 是定义 3.2.1 中的函子，
- $C\colon Val(\mathcal{L})\to CVal(\mathcal{L})$ 是来自定义 3.2.10 的函子，
- 而 柯里化 和 反柯里化 是定义 2.1.1 中定义的函子。

将复合映射 SM:=反柯里化 ∘(M∘ –) 和 SC:=(C∘ –) ∘柯里化简化后，我们得到

$$\begin{array}{ll} SM(S)([n],a) = M(S_n)^{\geq a} & SC(S)_n = C(S([n],-)) \\ SM(S)(f,*:a\geq b) = M(S(f))_b \circ M(S)_{a\geq b} & SC(S)(g:[n]\to[m]) = C(S(g,-)) \\ SM(\alpha:S\to T)_{[n],a} = M(\alpha_n)_a & SC(\alpha:S\Rightarrow T)_n = C(\alpha_{n,-}) \end{array}$$

回顾定义 3.1.6 中的经典特殊情形，以及定义 3.2.12 中等价的层论情形。对于每一种情形，作为定义 3.3.4 的特殊情形，我们都得到两个等价的单纯对象范畴。

定义 3.3.5：

1. 对于等价范畴 $CFuz$ 和 Fuz，相应的单纯对象范畴分别为**单纯经典模糊集范畴** $CFuz^{\Delta^{op}}$和**非柯里化单纯模糊集范畴**

$$USFuz := USVal([0,1],\leq).$$

2. 对于等价范畴 $CNSet$ 和 $NSet$，相应的单纯对象范畴分别为**单纯经典赋范集范畴**$CNSet^{\Delta^{op}}$ 和**非柯里化单纯形赋范集**

$$USNSet := USVal([0,\infty],\geq).$$

最后，我们推导出一个与定义 3.3.1 类似的结果。为此，我们必须先验证 Yoneda 嵌入的像属于$USVal$(L</style)。

引理 3.3.6： Yoneda 嵌入 $y:\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp}\to Set^{(\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp})^{op}}$ 取值于 $USVal(\mathcal{L})$，并定义了一个函子 $y:\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp}\to USVal(\mathcal{L})$。

证明： 我们验证，对于所有$n,m\in\mathbb{N}_0$ 以及 $b\in\mathcal{L}_{\neq\perp}$， $S=y([m],b)([n],-):\mathcal{L}_{\neq\perp}\to Set$ 都是值集。我们首先计算$f:[n]\to[m]$ 和 $*:c\leq a$对应的限制映射的作用。

$$\begin{aligned} S_{c\geq d}(f,*:c\leq d) &= y([m],b)([n],-)(f,*) \\ &= Hom_{\Delta\times\mathcal{L}_{\neq\perp}}\Big((id_{[n]},*:b\leq c),([m],b)\Big)(f,*:c\leq d) \\ &= (f,*:b\leq d) \end{aligned}$$

显然，这些映射是单射。对于层条件，我们使用定义 2.7.6 中的判据。设 $(a_i)_{i\in I}$ 是 $a\in\mathcal{L}_{\neq\perp}$ 的一个覆盖。那么 $(a_i)_{i\in I}$不可能是空覆盖。现在设 $(f_i,\ *)_{i\in I}$ 是一个相容族。根据相容条件和限制映射，我们有 $\{f_i\}_{i\in I}=\{f\}$，其中 f 是我们唯一的元素。□

接下来，我们可以应用定义 2.3.8，它专门针对这种情形进行了调整。

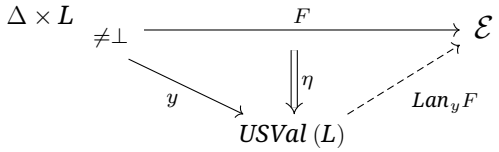
引理 3.3.7： 设 $\mathcal{L}$ 是一个全连通局部，且 $F\colon \Delta \times \mathcal{L}_{\neq\bot} \to \mathcal{E}$ 是一个指向余完备范畴 $\mathcal{E}$ 的函子，使得

1. 对所有 $\bot \neq a \leq b$，$F([n], *\colon a \leq b)$ 都是满态射，
2. 对每个 $a \in \mathcal{L}_{\neq\bot}$ 的覆盖 $(a_i \in \mathcal{L}_{\neq\bot})_{i\in I}$，以及每个满足以下条件的态射族 $(f_i\colon F([n], a_i) \to E)$

$$f_i \circ F([n], * : a_i \wedge a_j \leq a_i) = f_j \circ F([n], * : a_i \wedge a_j \leq a_j),$$

存在唯一的 $f\colon F([n], a) \to E$，使得 $f_i = f \circ F([n], *\colon a_i \leq a)$。

于是，沿 Yoneda 嵌入存在一个左 Kan 延拓



它是 $Hom_{\mathcal{E}}(F(-,-)\ -) : \mathcal{E} \to USVal(\mathcal{L})$ 的左伴随。

证明： 根据定义 2.3.3，可保证该 Kan 延拓存在。对于伴随，我们使用定义 2.3.8。为此，我们必须验证定义 2.3.8 中列出的关于 $USVal(\mathcal{L})$ 的必要条件。

1. 已在定义 3.3.6 中得到验证。
2. 为了证明 $Hom_{\mathcal{E}}(F(-,-)\ E)$ 是 $USVal(\mathcal{L})$ 中的一个对象，我们必须验证$Hom_{\mathcal{E}}(F([n],-)\ E) : \mathcal{L}^{op} \to Set$是一个 $\mathcal{L}$-值集：
   - $Hom\varepsilon(F([n], *\colon a \leq b)\ E) : Hom\varepsilon(F([n], b)\ E) \to Hom\varepsilon(F([n], a)\ E)$ 对任意 $\bot \neq a \leq b$ 都是单射：令 $f, g \in Hom\varepsilon(F([n], b)\ E)$。我们有：

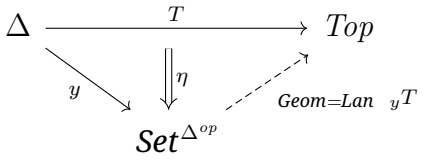
$$Hom_{\mathcal{E}}\left(F([n], * : a \leq b), E\right)(f) = Hom_{\mathcal{E}}\left(F([n], * : a \leq b), E\right)(g)$$
$$f \circ F([n], * : a \leq b) = g \circ F([n], * : a \leq b)$$

     由于我们要求 $F([n], *\colon a \leq b)$ 是满态射，因此可以在右侧消去并得到 $f = g$。
   - 对于层条件，我们可以直接应用定义 2.7.6，因为函子 $Hom\varepsilon(F([n],\ -)\ E)$ 根据 2 满足无底层条件。

□

4 扩展伪度量空间与（有限）度量实现

众所周知，单纯集可以通过几何实现 $Geom : Set^{\Delta^{op}} \to Top$ 来描述许多拓扑空间。为了构造几何实现，我们定义一个函子 $T : \Delta \to Top$，将对象[0]，[1]，[2]，[3]，...解释为点、线段、三角形、四面体等，这些称为拓扑 n- 单形。然后，我们沿 Yoneda 嵌入 y 作左 Kan 延拓。



这一 Kan 延拓的存在性之所以得到保证，是因为 Top 是余完备的，从而使我们可以使用 Kan 延拓的余极限公式。我们可以将其理解为：先定义 $Geom$ 在拓扑空间基本构件上的作用，再延拓到这些构件的组合上。更明确的推导见第 2.5 节。

我们希望为单纯赋范集定义一个类似的概念。我们可以使用相同的基本构件，但现在必须纳入隶属强度的概念，它可以解释为某种距离、表面积或体积。然而，拓扑空间只有抽象的邻域概念，而没有距离概念。直观上，我们可以用度量空间替换拓扑空间，然后使用不同尺度的点、线段、三角形、四面体.....作为基本构件。

然而，度量空间范畴并非余完备，因此相关 Kan 延拓的存在性无法得到保证。这促使我们引入扩展伪度量空间范畴：它包含所有通常的度量空间，但却是余完备的。相应的度量实现最早由 Spivak 在 [9, 第 3] 节中定义。

我们将从第 4.1 节中扩展伪度量空间范畴的定义入手。Spivak 证明了该范畴是余完备的 [9, 第 2] 节。我们给出该结果更为显式的证明。

随后，我们在第 4.2 节中构造度量实现及相应的伴随。我们的构造类似于 [9, 第 3]，节，不过为了简化第 4.3 节中的计算，我们使用赋范集而非模糊集。我们在第 4.4 节中利用第 4.3 节的结果，讨论 Spivak 的构造与我们的构造如何相关。

Spivak 的度量实现 [9, Section 3] 以及我们在第 4.2 节中的实现，都是基于模糊集和赋范集的层论变体构造的。层论变体使构造更为简单，但缺点是

构造出的函子更难理解。为了更好地理解它们，我们在第 4.3 节中计算了它们在经典赋范集范畴的等价范畴$CNSet^{\Delta^{op}}$ 中的作用。这是我们的主要贡献。

最后，我们将在第 4.5 节验证 McInnes 等人对 Spivak 的度量实现所作的有限变体构造。

4.1 扩展伪度量空间

我们先定义扩展伪度量空间，其定义几乎与度量空间的定义完全相同。扩展 指度量可以取扩展正实数轴 $[0,\infty]$ 上的值。伪 指度量可以将不同的点之间的距离赋为 0。

定义 4.1.1： [9, 定义 2.1] 一个**扩展伪度量空间** (M,d)由一个集合 M和一个映射 d：$M\times M\to[0,\infty]$ 构成，且对所有 $x,y,z\in M$：

(M1) $d(x,x)=0$(M2) $d(x,y)=d(y,x)$ (M3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$,

其中 $r<\infty$ 对所有 $r\in[0,\infty)$，$\infty\leq\infty$ 且 $\infty+\infty=\infty$。
扩展伪度量空间 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 之间的映射 $f\colon X\to Y$称为**非扩张**，如果

$$d_Y(f(x),f(y))\leq d_X(x,y)\qquad\forall x,y\in X.$$

扩展伪度量空间与非扩张映射构成范畴 $EPMet$。

注记 4.1.2： 度量空间范畴 Met 是 $EPMet$ 的全子范畴。普通度量空间要求更严格的条件：$d(x,y)=0$ 当且仅当$x=y$。此外，两点之间的距离始终有限。

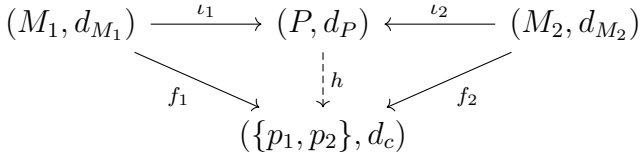
Spivak 在 [9, 定义 2.1] 中将这些空间称为超级度量空间。我们采用与 McInnes 等人 [5, 定义 6] 相同的名称。
如本节开头所述，我们关注 $EPMet$，因为它是余完备的 [9, 引理 2.2]。我们可以通过证明任意余积和余等化子都存在来说明这一点。范畴 $EPMet$ 中的余积相对容易定义；这里的关键在于将余积中不同分量之间的距离设为 ∞。这只有在 $EPMet$ 中才可行，也正因如此，Met 并非余完备。

例 4.1.3： 范畴 Met 几乎没有余积：设 (M_1, d_{M_1}) 和 (M_2, d_{M_2}) 是非空度量空间。它们的二元余积不存在。

证明： 设 (P, d_P) 是 (M_1, d_{M_1}) 和 (M_2, d_{M_2}) 的余积，其包含映射为ι_1, ι_2。对于任意 $c > 0$，考虑两点度量空间 $(\{p_1, p_2\}\ d_c)$，其中 p_1 与 p_2 之间的距离为 c:

$$d_c(p_i, p_j) = \begin{cases} c & \text{for } i \neq j \\ 0 & \text{for } i = j \end{cases}$$

我们可以利用余积的万有性质构造一个态射，将 P 的各个分量分开。考虑如下图表，其中对于所有 $x_1 \in X_1$ 和 $x_2 \in X_2$，均有 $f_1(x_1) = p_1$ 和 $f_2(x_2) = p_2$：



根据余积的万有性质，必定存在一个非扩张映射 $h : (P, d_P) \to (\{p_1, p_2\}\ d_c)$，满足 $h \circ \iota_1 = f_1$ 和 $h \circ \iota_2 = f_2$。于是，h 的非扩张性意味着 P 中不同分支的元素之间的距离必须至少为 c:

$$d_c(h \circ \iota_1(x_1), h \circ \iota_2(x_2)) = c \leq d_P(\iota_1(x_1), \iota_2(x_2)) \qquad \text{for any } x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$$

度量空间的定义迫使我们将不同分量中元素之间的距离设为某个具体的数 $d_P(\iota_1(x_1)\ \iota_2(x_2)) \neq \infty$。但我们总是可以为任意两点空间再次构造 h，并取一个更大的距离$c \geq d_P(\iota_1(x_1)\ \iota_2(x_2))$，因此这种非空分量的二元余积不可能存在。事实上，在范畴Met中，任何有多于一个分支非空的余积都不可能存在。□

引理 4.1.4： [9,引理 2.2]范畴$EPMet$ 具有任意余积。设$(M_i, d_i)_{i \in I}$ 为$EPMet$中的一族对象。

它们的余积为（$\amalg_{i \in I} M_i$，d），其中 $\amalg_{i \in I} M_i$ 是 Set中的余积，而d 是由集合中余积的万有性质所诱导的唯一映射:

$$d : \amalg_{i \in I} M_i \times \amalg_{i \in I} M_i \to [0, \infty]$$
$$d \circ (\iota_i \times \iota_j)(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{if } i = j \\ \infty & \text{if } i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j \in I$$

证明： 通过分类讨论，容易验证（M1）、（M2）和（M3）对 d 均成立，因此（$\amalg_{i\in I} M_i$, d）是一个扩展伪度量空间。接下来，我们验证底层余积中的所有态射都定义了 $EPMet$ 中的态射：

- 由 Set 中的余积得到的典范单射 $\iota_i\colon M_i \to \amalg_{i\in I} M_i$ 是非扩张的：

  对于 $x, y \in M_i$，我们有 $d(\iota_i(x)\ \iota_i(y)) = d_i(x, y)$

- 设 (N, d_N) 是另一个扩展伪度量空间。给定一族非扩张映射 $(f_i\colon M_i \to N)_{i\in I}$，令 $f\colon \amalg_{i\in I} M_i \to N$ 为满足 $f \circ \iota_i = f_i$ 的唯一映射。那么 f 是非扩张的：

  对于 $\iota_i(x)\ \iota_i(y) \in \amalg_{i\in I} M_i$，我们有：

  $$d_N(f(\iota_i(x)), f(\iota_i(y))) = d_N(f_i(x), f_i(y)) \le d_i(x, y) = d(\iota_i(x), \iota_i(y))$$

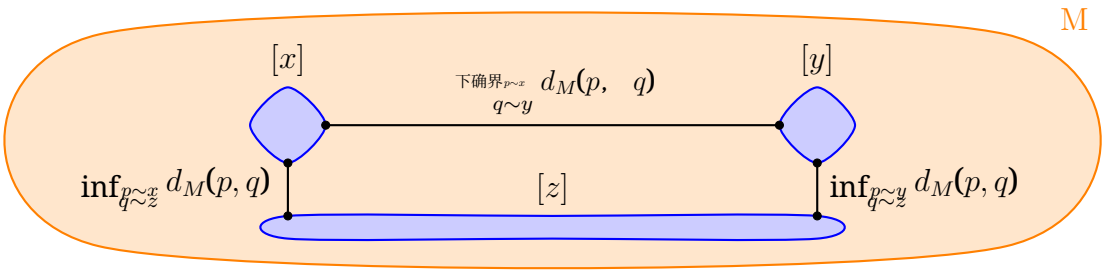
  对于 $\iota_i(x)\ \iota_j(y) \in \amalg_{i\in I} M_i$ 且满足 $i \neq j$ 的情形，右侧可化简为 ∞，因此该不等式总是成立。

□

$EPMet$ 中的余等化子更难定义。我们可以再次从Set中汲取灵感，其中余等化子对象是一个商集 $M/\!\sim$。但我们不能简单地通过令 $d_{M/\sim}([x], [y]) = d_M(x, y)$来在 $M/\!\sim$ 上定义度量，因为这无法保证在等价类上定义良好。如果我们直接定义

$$d_{M/\sim}([x], [y]) = \inf_{\substack{p\sim x \\ q\sim y}} d_M(p, q),$$

我们就得到了一个定义良好的映射，它满足 (M1) 和 (M2)，但三角不等式 (M3) 仍可能被违反——若存在“捷径等价类”便会如此。例如，考虑带有欧几里得度量 d_M 的 $M \subseteq \mathbb{R}^2$，以及如图所示的等价类 $[x], [y]$和 $[z]$。



这里，$[y]$ 充当捷径。如果我们从 $[x]$ 移动到 $[z]$，再移动到 $[y]$，合并后的距离可能比从 $[x]$ 到 $[y]$的直接距离更短。

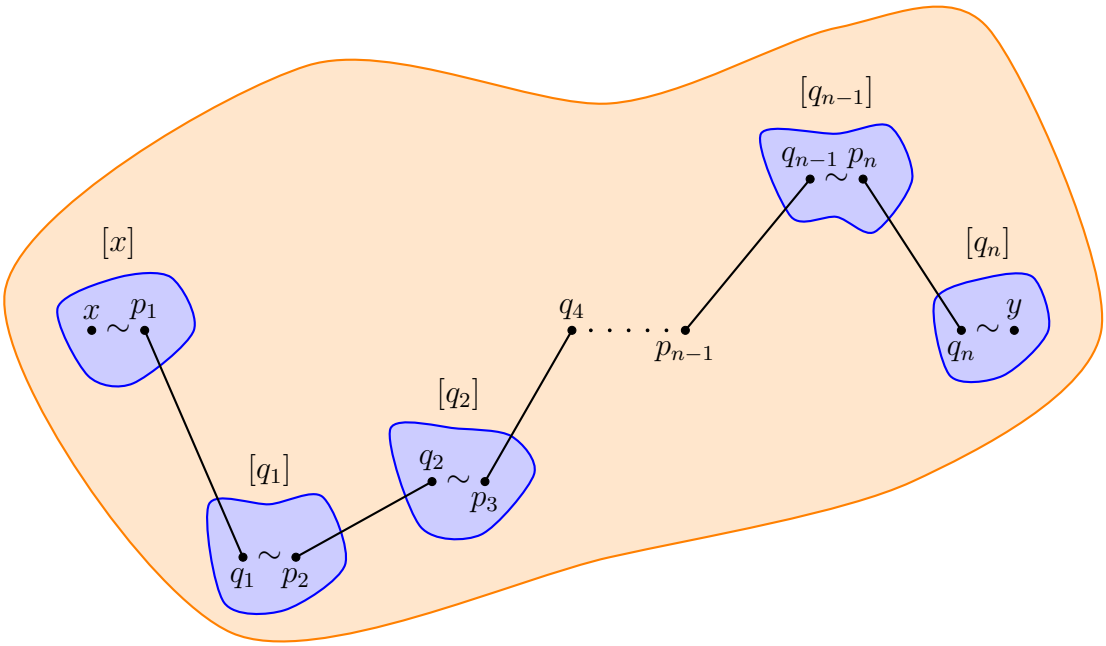
为了满足三角不等式，我们必须将 $d_{M/\sim}([x], [y])$ 定义为从 x 到 y 的“直接和间接路径”的下确界，其中每个中间步骤都可以切换到该等价类中的另一个元素：

定义 4.1.5： [9, 引理 2.2] 设 M 是一个扩展伪度量空间，$\sim$ 是 M 上的一个等价关系，且 $x, y \in M$。若一系列有序对 $(p_i \in M, q_i \in M)_{1\le i\le n}$ 满足以下条件，则称其为从 $x \in M$ 到 $y \in M$ 的一条 $\sim$-路径：

1. $q_i \sim p_{i+1}$ 对所有 $1 \le i < n$，
2. $x \sim p_1$ 与 $q_n \sim y$。

一条 $\sim$-路径$(p_i, q_i)_{1\le i\le n}$ 的长度 $|(p_i, q_i)_{1\le i\le n}|$ 定义为沿该路径的所有距离之和：

$$|(p_i, q_i)_{1\le i\le n}| = d_M(p_1, q_1) + \cdots + d_M(p_n, q_n)$$

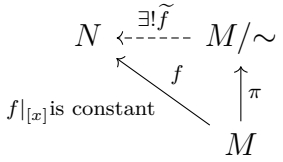


引理 4.1.6： [9, 引理 2.2] 范畴$EPMet$ 具有任意商。设(M, d_M)为扩展伪度量空间，且 $\sim \subseteq M \times M$为任意等价关系。商 $M/\sim$ 配备扩展伪度量

$$d_{M/\sim} : M/\sim \times M/\sim \to [0, \infty]$$
$$d_{M/\sim}([x], [y]) = \inf\{\, |(p_i, q_i)_{1\le i\le n}| \mid (p_i, q_i)_{1\le i\le n} \text{ is a } \sim\text{-path from } x \text{ to } y\}$$

构成一个具有如下万有性质的扩展伪度量空间 :

典范满射 $\pi : M \to M/\sim$，$x \mapsto [x]$ 是非扩张的。对于每个在等价类上为常值的非扩张映射 $f : M \to N$，都存在唯一的非扩张映射 $f : M/\sim \to N$。



证明：

- $(M/\sim,\ d_{M/\sim})$ 是扩展伪度量空间：令 $x,\ y,\ z \in M$。

  （M1） $d_{M/\sim}([x],\ [x]) = 0$ 成立，因为下确界的取值范围包括直接路径 $(p_i,\ q_i)_{1\le i\le 1}$，其 $p_1 = q_1 = x$ 长度显然为 0。

  （M2）对称性成立：

  设 $(p_i,\ q_i)_{1\le i\le n}$ 是参与 $d_{M/\sim}([x],\ [y])$ 的一条 $\sim$-路径。则反向的 $\sim$-路径 $(q_{n+1-i},\ p_{n+1-i})_{1\le i\le n}$ 参与 $d_{M/\sim}([y],\ [x])$。由于这些 $\sim$-路径显然具有相同的长度，$d_{M/\sim}([x],\ [y])$ 和 $d_{M/\sim}([y],\ [x])$ 中的下确界取值范围相同，因此二者相等。

  （M3）三角不等式成立：

  设 $(p_i,\ q_i)_{1\le i\le n}$ 和 $(p'_i,\ q'_i)_{1\le i\le n'}$ 是参与
  $d_{M/\sim}([x],\ [y])$ 和 $d_{M/\sim}([y],\ [z])$ 的 -路径。
  那么我们可以通过拼接构造一条新的 $\sim$-路径 $(p''_i,\ q''_i)_{1\le i\le n+n'}$

  $$p''_i := \begin{cases} p_i & i \le n \\ p'_{i-n} & i > n \end{cases} \qquad q''_i := \begin{cases} q_i & i \le n \\ q'_{i-n} & i > n \end{cases},$$

  它参与 $d_{M/\sim}([x],\ [z])$。显然，同样有

  $$|(p''_i, q''_i)_{1\le i\le n+n'}| = |(p_i, q_i)_{1\le i\le n}| + |(p'_i, q'_i)_{1\le i\le n'}|$$

  因此我们有 $d_{M/\sim}([x],\ [z]) \le d_{M/\sim}([x],\ [y]) + d_{M/\sim}([y],\ [z])$。

- π 是非扩张的：

  $$d_{M/\sim}([x],[y]) \le d_M(p_1,q_1) = d_M(x,y) \qquad \text{with } n=1 \text{ and } p_1 = x, q_1 = y$$

- 给定另一个扩展伪度量空间 (N, d_N) 以及一个非扩张映射 $f\colon M \to N$，使得对于所有 $x \in M$，$f_{[x]}$ 都是常值。根据 ~Set 中商的万有性质，我们得到唯一的映射 ~$f\colon M/\sim \to N$，满足 $f \circ \pi = f$。我们验证 f 是非扩张的：

  任意参与 $d_{M/\sim}([x],[y])$ 中下确界计算的 $\sim$-路径，都可以通过 f传递为 N中的一条 $=$-路径，其中我们将 $=$视为 N上的一个关系：

设 $(p_i, q_i)_{1\le i\le n}$ 是从 x 到 y的一条 $\sim$-路径。由于 f 在 $\sim$-等价类上为常数，我们有：

$$f(x) = f(p_1), \quad f(q_n) = f(y), \quad f(p_{i+1}) = f(q_i) \ \forall 1 \le i < n$$

因此，$(f(p_i)\ f(q_i))_{1\le i\le n}$ 是 N 中连接 $f(x)$ 与 $f(y)$ 的一条 $=$-路径。根据 N 中的三角不等式，$f(x)$ 与 $f(y)$ 之间的直接距离不会大于连接这两点的任意 $=$-路径的长度。此外，由于 f 是非扩张的，经由 f 传递时路径长度不会增加，因此对于从 x 到 y 的任意 $\sim$-路径，我们有：

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(y)) &\le |(f(p_i), f(q_i))_{1\le i\le n}| && \text{(M3)} \\ &\le |(p_i, q_i)_{1\le i\le n}| && (f \text{ 的非扩张性}) \end{aligned}$$

有了对所有相关路径的这个上界，我们得出

$$d_N(\widetilde{f}([x]), \widetilde{f}([y])) = d_N(f(x), f(y)) \le d_{M/\sim}([x], [y]).$$

□

直观来说，商度量只能通过引入捷径来缩短点与点之间的距离，却无法增加距离。这也意味着，取商后，点周围的开球可能会变大。我们可以将这一直觉形式化如下。

备注 4.1.7： 设 M 是一个扩展伪度量空间，且 $\sim$ 是 M 上的一个等价关系。那么我们有：

1. $d_{M/\sim}([x], [y]) \le d_M(x, y)$
2. $\pi(B^M_{<\epsilon}(x)) \subseteq B^{M/\sim}_{<\epsilon}([x])$

其中 $B^N_{<\epsilon}(x) = \{y \in N \mid d_N(x,\ y) < \epsilon\}$ 表示以 x为中心、半径为 ϵ的开球，其度量见 N。

证明： 第一个断言成立，是因为从 x 到 y 的直接 $\sim$-路径参与了 $d_{M/\sim}$定义中的下确界。第二个断言由第一个断言推出。 □

定义 4.1.7 中的第一个断言使我们能够直接构造到商空间中的非扩张映射。

推论 4.1.8： 设 $f\colon M \to N$ 是非扩张的，并且设 $\sim$ 是 N上的等价关系。那么映射 $g\colon M \to N/\sim,\ \ x \mapsto [f(x)]$ 也是非扩张的。

证明： 对于任意 x， $y \in M$，我们有：

$$d_{N/\sim}(g(x), g(y)) = d_{N/\sim}([f(x)], [f(y)]) \leq d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y)$$

其中，第一个不等式由定义 4.1.7 得出，第二个不等式则由 f 的非扩张性得出。□

与集合范畴 Set 或拓扑空间范畴 Top 类似，余等化子可以定义为 $EPMet$ 中的商。

引理 4.1.9： [9,引理 2.2] 范畴$EPMet$ 有余等化子。
$EPMet$ 中两个平行态射 $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ 的余等化子由 $coeq(f, g) = B/\sim$ 给出，其中 $\sim$ 是由 $f(a) \sim g(a)\ \forall a \in A$ 生成的等价关系，而典范满射为 $\pi : B \to B/\sim$。

证明： 设 (C, d_C) 是一个扩展伪度量空间，且 $\pi' \colon B \to C$ 是另一个满足 $\pi' \circ f = \pi' \circ g$ 的非扩张映射。则 π' 在由 $f(a) \sim g(a)\ \forall a \in A$ 生成的等价关系上为常值。由此，余等化子的万有性质可从商 $B/\sim$ 的万有性质推出。□

推论 4.1.10： [9, 引理 2.2] 范畴 $EPMet$ 是余完备的。
这是因为一个众所周知的事实：任意余极限都可以由任意余积和余等化子构造出来。构造方法见 [7,定理 3.4.12]。

4.2 度量实现

现在，我们可以仿照第 2.5 节中的几何实现，将度量实现定义为左 Kan 延拓。为此，我们定义一个类似于定义 2.5.2 中函子 $G : \Delta \to Top$ 的函子。该函子利用度量n-单形来定义。

定义 4.2.1：

- 对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $a \in [0, \infty)$，大小为 a 的**度量 n-单形**是扩展伪度量空间

$$\Delta^{n,a} = (\Delta^n, d_1^{n,a})$$

其中 Δ^n 与定义 2.5.1 中拓扑 n-单形的底集相同，而 $d^n{}_1{}^a$ 是 ℓ_1 **度量**

$$\begin{aligned} &d_1^{n,a} : \Delta^{n,a} \times \Delta^{n,a} \to [0, \infty) \\ &d_1^{n,a}(x, y) = a \cdot \|x - y\|_1^n \qquad \text{where } \|v\|_1^n = \sum_{0 \leq i \leq n} |v_i|, \end{aligned}$$

也称为**曼哈顿度量**，并乘以 a。

此定义的灵感来自 Spivak [9, 第 3] 节。不过，Spivak 将度量 n-单形的底集定义为

$$\{(x_0, \ldots, x_n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} \mid x_0 + \cdots + x_n = -\log(a)\}$$

虽然我们将它们定义为

$$\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}.$$

本质上，Spivak 的度量单形的底集会随参数 a 缩放，而我们使用相同的底集，转而缩放 ℓ_1-度量。
这意味着，我们大小为 0 的度量 n-单形包含无穷多个点，这些点彼此之间的距离均为 0；而 Spivak 的大小为 0 的度量 n-单形只包含一个点。我们的定义避免了在稍后于定义 4.2.4 中定义函子时重新缩放这些点的需要。这将使第 4.3 节中的计算更容易，并解决由 Spivak 的缩放因子 $\log(b)\ \log(a)$导致的除以 0 错误，其中 a 允许为 1 [9, 第 3] 节。

我们将在定义 4.4.1 之后讨论 Spivak 对 $-\log(a)$ 的使用。

Spivak 也错误地使用了 ℓ_2，即欧几里得度量。然而，为了使退化映射非扩张，我们不得不选择 ℓ_1 度量。下面的反例表明，对于所有其他满足$p \in (1, \infty)$的 ℓ_p 度量，这一性质都不成立。

注 4.2.2： 对于每个 ℓ_p 度量

$$\begin{aligned} &d_p^n : \Delta^n \times \Delta^n \to [0, \infty) \\ &d_p^n(x, y) = \|x - y\|_p^n \qquad \text{where } \|v\|_p^n = (\sum_{0 \leq i \leq n} (v_i)^p)^{1/p} \end{aligned}$$

满足 $p \in (1, \infty)$，退化映射 s_i^n对于 $n \geq 1$都不是非扩张的。

证明： 考虑 $x := (0, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, 0) \in \Delta^{n+1}$，其中$\frac{1}{2}$位于第 i 个和第 $(i+1)$ 个分量。则 x的范数为

$$\|x\|_p^{n+1} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 2^{(1/p)-1}.$$

$s^{n,a}_i(x)$的范数为

$$\|s_i^{n,a}(x)\|_p^n = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1.$$

我们有 $2^{(1/p)-1} > 1$ 当 $p \in (1, \infty)$ 时，因此 $s^{n,a}_i$ 不是非扩张的。 □

引理 4.2.3： 面映射 f_i^n 和定义 2.5.1 中的退化映射 s_i^n 定义了非扩张映射

$$f^{n,a} : \Delta^{n-1,a} \to \Delta^{n,a}, \quad x \mapsto f^n(x)$$
$$s^{n,a} : \Delta^{n+1,a} \to \Delta^{n,a}, \quad x \mapsto s^n(x)$$

对于 $n \in \mathbb{N}$, $a \in [0, \infty)$ $i \in \{0, \ldots, n\}$。

证明： 定义 4.2.1 中的度量 $d^n{}_{,1}{}^a$ 由范数 $a \cdot \|-\|_1^n$ 诱导，因此只需检查关于该范数的非扩张性。由于该范数是将 $\|-\|_1^n$ 乘以常数因子 a缩放得到的，因此只需检查关于 $\|-\|_1^n$ 的非扩张性。

1. 设 $n \in \mathbb{N}, i \in \{0, \ldots, n\}$。面映射是保距的：

$$\begin{aligned}\|f_i^n(x)\|_1^n &= \|(x_0, \ldots, 0, \ldots, x_{n-1})\|_1^n \\ &= |x_0| + \cdots + |0| + \cdots + |x_{n-1}| \\ &= |x_0| + \cdots + |x_{n-1}| = \|x\|_1^{n-1}\end{aligned}$$

2. 设 $n \in \mathbb{N}, i \in \{0, \ldots, n\}$。退化映射是保距的：

$$\begin{aligned}\|s_i^n(x)\|_1^{n+1} &= \|(x_0, \ldots, x_i + x_{i+1}, \ldots, x_n)\|_1^n \\ &= |x_0| + \cdots + |x_i + x_{i+1}| + \cdots + |x_{n-1}| \\ &\overset{(*)}{=} |x_0| + \cdots + |x_i| + |x_{i+1}| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1^n\end{aligned}$$

其中，$(*)$ 只是一个等式，因为根据定义 2.5.1，所有坐标都大于或等于零；否则我们只能得到 $|x_i + x_{i+1}| \leq |x_i| + |x_{i+1}|$。

□

借助前述引理，我们可以直接将大小为 a的度量 n单形组装成函子 $T\colon \Delta \times ([0, \infty) \geq) \to EPMet$，稍后将用它通过左 Kan 延拓构造度量实现。

引理 4.2.4： 伪度量 n单形以及面映射和退化映射定义了一个函子 $T\colon \Delta \times ([0, \infty) \geq) \to EPMet$，其满足

$$T([n], a) = (\Delta^{n,a}, d_1^{n,a})$$
$$T(f : [n] \to [m], * : a \geq b) = G(f),$$

其中，映射 $G(f) : \Delta^n \to \Delta^m$ 在定义 2.5.2 中定义。

证明： 为了使 T 定义良好，映射 $T(f,\ *\colon\ a \geq b)$ 必须产生非扩张映射。根据定义 2.4.5，情况确实如此，因为每个态射$f : [n] \to [m]$ 都可以表示为面态射和退化态射的复合。这些态射经由 $G\colon\ \Delta \to Top$ 映射为面映射和退化映射的复合映射 $G(f)\colon\ \Delta^n \to \Delta^m$ 。如定义 4.2.3 所示，这些映射保持范数，因此它们的复合映射也保持范数。于是， $G(f)\colon\ \Delta^n \to \Delta^m$ 可以视为 $EPMet$ 中的非扩张映射。□

现在，我们希望使用定义 3.3.7，将度量实现导出为沿 Yoneda 嵌入的 T 的左 Kan 延拓。首先需要验证函子 T 的若干性质。

引理 4.2.5： 设 $n \in \mathbb{N}$。

1. $T(id^{[n]},\ *\colon\ a \geq b)\colon\ T([n],\ a) \to T([n],\ b)$ 对所有 $\infty \neq a \geq b$ 都是满态射。
2. 对于任意带有覆盖 $(a_i \in [0,\infty)$ 的 a，存在 $_{i\in I}$，并且 $(f_i\colon\ T([n],\ a_i) \to E)$ 满足

$$f_i \circ T([n], * : a_i \wedge a_j \leq a_i) = f_j \circ T([n], * : a_i \wedge a_j \leq a_j), \tag{7}$$

存在唯一的 $f\colon\ T([n],\ a) \to E$，使得 $f_i = f \circ T(id^{[n]},\ *\colon\ a \geq a_i)$。

证明： 因为 $T($恒等映射$^{[n]},\ *\colon\ a \geq b) = G($恒等映射$^{[n]})$ =恒等映射$_{\Delta^n}$，我们可以看到，$T($恒等映射$^{[n]},\ *\colon a \geq b)\colon\ \Delta^{n,\ a} \to \Delta^{n,\ b}$ 是底层集合 Δ^n 的恒等映射，同时也是 $\Delta^{n,\ a}$ 和 $\Delta^{n,\ b}$ 的底层集合。

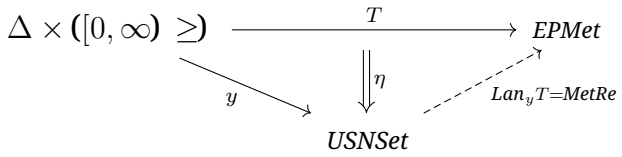
1. 这个映射显然是一个满态射。
2. 令 $(a_i \in [0,\infty))_{i\in I}$ 为 $a \in [0,\infty)$ 的一个覆盖。

   在偏序集 $([0,\infty)\ \geq)$ 中，这相当于 $a = \min_{i\in I} a_i$，其中 $\min_{j\in\emptyset} a_j = \infty$。那么 I 必须非空，并且至少存在一个 $i \in I$ 使得 $a = a_i$。

   现在令 $(f_i\colon\ T([n],\ a_i) \to E)_{i\in I}$ 满足条件 (7)。由于 $T($恒等映射$^{[n]},\ *\colon\ a \geq b)$ 是恒等映射，条件式 (7) 意味着态射 $(f_i)_{i\in I}$ 都具有相同的底层非扩张映射 $f\colon\ \Delta^n \to E$。由这个底层映射定义的非扩张态射 $f\colon\ T([n],\ a) \to E$ 就是所需的唯一元素。

□

定义 4.2.6： 度量实现 $MetRe = Lan_y T\colon\ USNSet \to EPMet$是沿 Yoneda 嵌入 y的 T的左 Kan 延拓：$\Delta \times ([0,\infty)\ \geq) \to USNSet$。



它的左伴随称为**奇异神经**。

$$Sing = Hom_{EPMet}\left(T(-,-),-\right) : EPMet \to USNSet.$$

度量实现的存在性以及定义 4.2.6 中的伴随由定义 3.3.7 保证，其假设已在定义 4.2.5 中得到证明。

该构造受 Spivak 在 [9,第 3] 节中的原始定义启发，但与之有所不同。我们将在第 4.4 节中解释这些差异。
与几何实现的定义 2.5.4 类似，我们可以用余等化子来计算该函子的作用。

命题 4.2.7： 度量实现 $MetRe：\ USNSet \to EPMet$ 赋予

- 一个单纯形赋范集合 S 扩展伪度量空间

$$MetRe(S) = \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\ a\in[0,\infty)\\ s\in S([n],a)}} \Delta^{n,a}/\sim$$

  其中

$$\iota_{m,b,S(f,*:b\geq a)(s)}(x) \sim \iota_{n,a,s}(T(f,*:b\geq a)(x))$$

  对于 $\Delta \times ([0,\infty) \geq$ 中的所有态射 $(f,\ *:\ \ b\ \geq\ a)$: $([m],\ b) \to ([n],\ a)$, $s \in S([n],\ a)$，以及 $x \in \Delta^{m,\ b}$,

- 到单纯形赋范集合的态射 $\alpha : S \Rightarrow S'$ 非扩张映射

$$MetRe(\alpha) : MetRe(S) \to MetRe(S'), \qquad [\iota_{n,a,s}(x)] \mapsto [\iota_{n,a,\alpha_{[n],a}(s)}(x)]$$

证明： 证明与定义 2.5.4 类似。根据定义 2.3.5，在此情形下结合定义 2.3.6，左 Kan 延拓 $Lan_y T(S)$ 可表示为一个余等化子

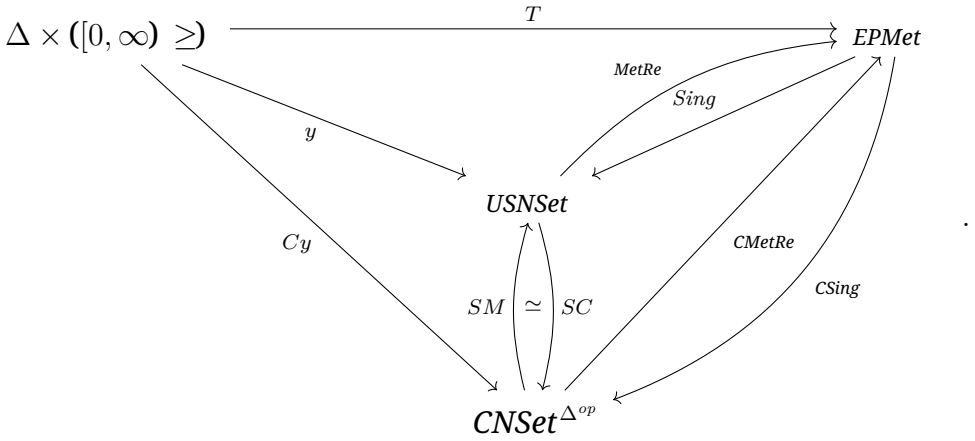
$$coeq\left(\coprod_{\substack{(f,*:b\geq a):([m],b)\to([n],a)\\ s\in S([n],a)}} \Delta^{m,b} \underset{\iota_{m,b,S(f,*:b\geq a)(s)}}{\overset{\iota_{n,a,s}\circ T(f,*:b\geq a)}{\rightrightarrows}} \coprod_{\substack{m\in\mathbb{N}_0,\ b\in[0,\infty)\\ s\in S([m],b)}} \Delta^{m,b}\right),$$

which 可以表示为上述陈述中的商（定义 4.1.9）。
定义 2.3.5 也提供了所需的态射作用表达式。我们只需将余等化子满射 π 替换为等价类记号$[-]$。 □

4.3 经典度量实现

遗憾的是，定义 4.2.6 中的度量实现并未让我们深入了解所构造的空间。即使将它表示为定义 4.2.7 中的余等化子，公式中也会涉及各种大小的单形。原因在于，它是根据赋值集合的层论变体构造的。

通过与定义 3.3.4 中在经典视角和层论视角之间进行转换的等价映射复合，我们可以得到经典视角：



这里，我们通过将定义 4.2.6 中的度量实现 $MetRe$ 与定义 3.3.4 中将单纯形经典赋值集转换为层论非柯里化单纯形赋值集的函子 SM 复合，得到经典度量实现 $CMetRe$ 。我们还通过将定义 4.2.6 中的函子 $Sing$ 和 Yoneda 嵌入 y 与定义 3.3.4 中将层论非柯里化单纯形赋值集转换为单纯形经典赋值集的函子 SM 复合，得到经典奇异神经 $CSing$ 和经典 Yoneda 嵌入 Cy 。

接着，我们可以用单纯形经典赋值集来计算函子$CMetRe$、$CSing$、Cy 的作用。与其层论对应对象$MetRe$、$Sing$、y的函子作用相比，这些作用更容易理解。

我们首先计算经典度量实现的作用。理解下面证明的关键在于，定义 2.5.4 中的等价关系 $\sim$ 承担着两种不同的作用：

1. 当我们允许 $b \geq a$ ，但固定态射 $f = id^{[m]}$ 时，等价关系$\sim$简化为

$$\iota_{m,b,S(id_{[m]},*)(s)}(x) \sim \iota_{m,a,s}(T(f,*:b\geq a)(x)) = \iota_{m,a,s}(G(id_{[m]})(x)) = \iota_{m,a,s}(x).$$

在这种情况下，分支中由 S(标识$^{[m]}, *$)(s) 索引的单形 $\Delta^{m,b}$ ，会与由 s 索引的更小单形 $\Delta^{m,a}$ 等同。

2. 当我们固定 $a = b$，但允许任意态射 $f : [m] \to [n]$ 时，等价关系 $\sim$ 简化为

$$\iota_{m,a,S(id_{[m]},*)(s)}(x) \sim \iota_{m,a,s}(T(f, * : b \geq a)(x)) = \iota_{m,a,s}(G(f)(x)),$$

这类似于定义 2.5.4 中几何实现所用的等价关系，负责沿着单形的面粘合单形并消除退化映射。

每当两个不同大小的单形按 1. 中所述方式粘合时，所得空间就等价于一个通过余积构造的空间，该空间具有相同的分量，但缺少较大的单形。因此，我们可以从定义 2.5.4 的余积中移除所有这样的单形 $\Delta^{n,\,b}$：存在一个较小的度量 n-单形 $\Delta^{n,\,a}$，其维数相同，并且如 1. 中所述与它粘合。

如果定义 4.2.7 中的非柯里化单纯形赋范集合 S 是由函子 M 从定义 3.2.1 中的单纯经典赋范集构造而来，那么 $S(id_{[m]},\ * : b \geq a)$ 就是恒等映射。于是，1. 总会将分别由 s 和 b 索引的分支，与同样由 s 索引但大小更小的分支等同起来。

对于给定的元素，仅保留可用的最小大小 a s。这个最小大小恰好是原经典赋范集中的元素 s 的范数，因为根据定义 3.2.1，s 仅当 b 大于或等于原经典赋范集中 s 的范数时，才属于所有集合 $S([m],\ b)$。

我们在下面的命题中对这一直觉进行形式化。在证明中，我们将构造一个同构 ϕ，将定义 4.2.7 中的商映射到一个更简单的商，其中仅包含以最小可用单形为分支的单形。映射 ϕ 将来自不同大小单形、代表同一点的每个代表元映射到最小的可用单形。逆映射 ψ 则将剩余的最小代表元嵌入回定义 4.2.7 中的公式。

为简化下面证明中的记号，我们引入一种记号来消除冗余信息。

记号 4.3.1： 设 S 是一个单纯经典赋范集。

- 对于元素 $s \in S_n$，我们将大小为 $\|s\|_{S_n}$ 的 n-单形记作

$$\Delta^s := \Delta^{n,\|s\|_{S_n}}.$$

回想一下，$\|s\|_{S_n}$ 是经典赋范集的赋值映射，在这种情况下称为范数。

- 我们将遍历 S 中所有元素的余积记作

$$\coprod_{s \in S} \Delta^s := \coprod_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ s \in S_n}} \Delta^{n,\|s\|_{S_n}}$$

- 并将相应的典范单射记作

$$\iota_s := \iota_{n,s} : \Delta^s \to \coprod_{s\in S} \Delta^s.$$

命题 4.3.2： 经典度量实现

$$CMetRe := MetRe \circ SM : CNSet^{\Delta^{op}} \to EPMet$$

将

- 赋予单纯经典赋范集 $S : \Delta_{op} \to CNSet$ 扩展伪度量空间

$$CMetRe(S) = \coprod_{s\in S} \Delta^s/\sim_C$$

其等价关系 $\sim_C$ 由以下内容生成

$$\iota_{S(f)(s)}(x) \sim_C \iota_s(G(f)(x))$$

对所有 $f : [m] \to [n], \quad s \in S_n, \quad x \in \Delta^s$,

- 到单纯映射 $\alpha : S \Rightarrow S\prime$ 该非扩张映射

$$\begin{array}{rcl} CMetRe(\alpha) : CMetRe(S) & \longrightarrow & CMetRe(S') \\ [\iota_s(x)] & \longmapsto & [\iota_{n,\alpha_n(s)}(x)]. \end{array}$$

证明： 我们首先应用定义 4.2.7，然后尽可能地进行化简，包括等价关系的生成元:

$$\begin{aligned} & MetRe \circ SM(S) \\ =& \Big(\coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\ a\in[0,\infty) \\ s\in M(S_n)^{\le a}}} \Delta^{n,a}\Big)/\sim \qquad \text{where } \iota_{m,b,SM(S)(f,*)(s)}(x) \sim \iota_{n,a,s}(T(f,*)(x)) \\ =& \Big(\coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\ a\in[0,\infty) \\ s\in M(S_n)^{\le a}}} \Delta^{n,a}\Big)/\sim \qquad \text{where } \iota_{m,b,S(f)(s)}(x) \sim \iota_{n,a,s}(G(f)(x)) \end{aligned}$$

其中，等价关系生成元 $\sim$ 的化简是由于

$$SM(S)(f,*)(s) = M(S(f))_b \circ M(S_m)_{a\le b}(s) = M(S(f))_b(s) = S(f)(s).$$

现在我们构造双射

$$\coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\ a\in[0,\infty) \\ s\in M(S_n)^{\le a}}} \Delta^{n,a}/\sim \underset{\widetilde{\psi}}{\overset{\widetilde{\phi}}{\rightleftarrows}} \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ s\in S_n}} \Delta^{n,\|s\|_{S_n}}/\sim_C$$

利用定义 4.1.6 中商空间的万有性质。为此，考虑非扩张映射

$$\begin{aligned}
\phi: \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\, a\in[0,\infty)\\ s\in M(S_n)^{\leq a}}} \Delta^{n,a} &\longrightarrow \coprod_{s\in S}\Delta^s/{\sim_C}\\
\iota_{n,a,s}(x) &\longmapsto [\iota_s(x)]\\
\psi: \coprod_{s\in S}\Delta^s &\longrightarrow \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\, a\in[0,\infty)\\ s\in M(S_n)^{\leq a}}} \Delta^{n,a}/{\sim}\\
\iota_s(x) &\longmapsto [\iota_{n,\|s\|,s}(x)].
\end{aligned}$$

注意，此处的映射 $\iota_{n,a,s}(x)\longmapsto\iota_s(x)$ 是非扩张的，因为

$$s\in M(S_n)^{\leq a}=\{s\in S_n|\,\|s\|\leq a\}.$$

根据定义 4.1.8，ϕ 和 ψ 是非扩张的。这些映射在等价类上为常值。对于 ψ，我们检查 $\sim_C$ 的生成元中成对元素在 ψ 下的像是否经 $\sim$ 识别：

$$\begin{aligned}
\psi(\iota_{S(f)(s)}(x)) &= [\iota_{m,\|S(f)(s)\|,S(f)(s)}(x)]\\
&\overset{(\sim)}{=} [\iota_{n,\|S(f)(s)\|,s}(T(f,id_{\|S(f)(s)\|})(x))]\\
&\overset{(\text{def } T)}{=} [\iota_{n,\|S(f)(s)\|,s}(G(f)(x))] \overset{(\text{def }\psi)}{=} \psi(\iota_s(G(f)(x))).
\end{aligned}$$

对于 ϕ，我们检查 $\sim$ 的生成元中成对元素在 ϕ 下的像是否经 $\sim_C$ 识别：

$$\begin{aligned}
\phi(\iota_{m,b,S(f)(s)}(x)) &= [\iota_{S(f)(s)}(x)]\\
&\overset{(\sim_C)}{=} [\iota_s(G(f)(x))]\\
&\overset{(\text{def } T)}{=} [\iota_s(T(f,*:b\geq a)(x))] \overset{(\text{def }\phi)}{=} \phi(\iota_{n,a,s}(T(f,*:b\geq a)(x))),
\end{aligned}$$

By 根据商空间的万有性质，我们分别从 ϕ,ψ 得到 ϕ,ψ ely.

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 为了验证 ϕ 和 ψ 互为逆映射，我们计算：

$$\widetilde{\phi}\circ\widetilde{\psi}([\iota_s(x)]) \overset{(\text{def }\widetilde{\psi})}{=} \widetilde{\phi}([\iota_{n,\|s\|,s}(x)]) \overset{(\text{def }\widetilde{\phi})}{=} [\iota_s(x)].$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi}([\iota_{n,a,s}(x)]) &\overset{(\text{def }\widetilde{\phi})}{=} \widetilde{\psi}([\iota_s(x)])\\
&\overset{(\text{def }\widetilde{\psi})}{=} [\iota_{n,\|s\|,s}(x)]\\
&\overset{(\sim)}{=} [\iota_{n,\|s\|,s}(T(id_{[n]},*:a\geq\|s\|)(x))]\\
&\overset{(\text{def } T)}{=} [\iota_{n,a,s}(G(f)(x))] \overset{(\text{def } G)}{=} [\iota_{n,a,s}(G(f)(x))],
\end{aligned}$$

其中 $a\geq\|s\|$ 是由于如下事实：$s\in M(S_n)^{\leq a}=\{\,s\in S_n\mid\|s\|\leq a\,\}$。

$\widetilde{\ }$对于态射上的作用，我们必须先与 ψ 前复合，从而把一个等价类转换回原来的表示，再经由原来对一个$\widetilde{\ }$态射 $\alpha : S \Rightarrow S'$ 的作用将其送出，然后与 ϕ 后复合，以转换回新的表示。由此得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi} \circ (MetRe \circ SM(\alpha)) \circ \widetilde{\psi}([\iota_s(x)]) =& \widetilde{\phi} \circ (MetRe \circ SM(\alpha))([\iota_{n,\|s\|,s}(x)]) \\ =& \widetilde{\phi}([\iota_{n,\|s\|,SM(\alpha)_{n,\|s\|}(s)}(x)]) \\ =& \widetilde{\phi}([\iota_{n,\|s\|,M(\alpha_n)_{\|s\|}(s)}(x)]) \\ =& \widetilde{\phi}([\iota_{n,\|s\|,\alpha_n(s)}(x)]) = [\iota_{\alpha_n(s)}(x)].\end{aligned}$$

□

现在我们来计算经典奇异神经 $CSing : EPMet \to CNSet^{\Delta^{op}}$，它是经典度量实现的左伴随。我们可以直接简化此函子对扩展伪度量空间 E 的作用。然后，$CSing$ 构造出一个单纯经典赋范集 S，其中各个集合 S_n 包含非扩张映射 f 的等价类：$\Delta^{n,\,a} \to E$ 这些映射将不同大小的度量 n-单形 a 映入 E。这种直接的简化仍然难以处理。不过，我们可以将商集 S_n 识别为包含所有 Lipschitz 连续映射 f 的集合：$\Delta^{n,\,1} \to E$ 无需使用等价类。这样一来，我们也可以优雅地将范数 $\|f\|_{S_n}$ 描述为 f 的最佳 Lipschitz 常数。

在证明这一点之前，我们先回顾一些关于 Lipschitz 连续性的术语。

定义 4.3.3： 设 M 和 N 为扩展伪度量空间，并设 $f : M \to N$ 为一个映射。

1. 常数 $c \in [0, \infty)$ 若满足以下条件，则称为 f 的**利普希茨常数**

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y) \qquad \text{for all } x, y \in M.$$

2. 映射 f 若具有一个 Lipschitz 常数，则称为**利普希茨连续**。

3. 利普希茨连续映射 f 的最小 Lipschitz 常数称为**最佳 Lipschitz 常数**。

4. 利普希茨连续映射**集**

$$Lip(M, N) := \{\, f : M \to N \mid f \text{ is Lipschitz continuous} \,\}$$

成为一个赋范集合，其范数赋值为最佳 Lipschitz 常数

$$\|f\| := \inf\{\, a \mid a \text{ is a Lipschitz constant for } f \,\}.$$

这里的直观理解是，Lipschitz 映射本质上就是非扩张映射，只不过我们可以先将 M 伸缩 $c \in$ 倍（0，∞]。请注意，尽管扩展的伪度量可能会赋予 ∞，但这里不允许将 ∞ 作为 Lipschitz 常数。否则所有映射都会是 Lipschitz 连续的。还要注意，每个 Lipschitz 连续映射都有一个最佳 Lipschitz 常数，它是所有 Lipschitz 常数的下确界；该下确界在 $[0, \infty$ 中总是存在，而且它本身也是一个 Lipschitz 常数。

命题 4.3.4： 函子$CMetRe$ 的右伴随是经典奇异神经

$$CSing := SC \circ Hom_{EPMet}(T(-,-),-) : EPMet \to CNSet^{\Delta^{op}}.$$

它将

- 扩展伪度量空间 M 对应为单纯经典赋范集：

$$CSing(M)_n = Lip(\Delta^{n,1}, M) \tag{8}$$
$$CSing(M)(f : [n] \to [m])(\sigma : \Delta^{m,1} \to M) = \sigma \circ G(f), \tag{9}$$

- 非扩张映射 $g :\ M \to N$ 对应为单纯经典赋范集的态射

$$CSing(g : M \to N)_n(\sigma) = g \circ \sigma. \tag{10}$$

证明： 我们从计算 (8) 开始：

$$\begin{aligned} CSing(M)_n &= (SC(Hom_{EPMet}(T(-,-),M)))_n \\ &= C(Hom_{EPMet}(T([n],-),M)) \\ &=: (X, \|-\|_X), \end{aligned}$$

其中 X 可以改写为

$$\begin{aligned} X &= \coprod_{a\in[0,\infty)} Hom_{EPMet}(\Delta^{n,a}, M)^{=a} \\ &= \coprod_{a\in[0,\infty)} \left\{ \sigma : \Delta^{n,a} \to M \text{ non-expansive} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{no non-expansive } \sigma' : \Delta^{n,b} \to M \\ \text{with } \sigma' = \sigma \text{ for } b < a \text{ exists}\end{array} \right\} \\ &= \coprod_{a\in[0,\infty)} \left\{ \sigma : \Delta^{n,a} \to M \text{ non-expansive} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{there are } x, y \in \Delta^{n,a} \\ \text{with } d_M(\sigma(x),\sigma(y)) = d_1^{n,a}(x,y)\end{array} \right\} \\ &= \coprod_{a\in[0,\infty)} \left\{ \sigma : \Delta^{n,a} \to M \text{ non-expansive} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{the best Lipschitz} \\ \text{constant of } \sigma \text{ is } 1\end{array} \right\} \\ &\simeq \coprod_{a\in[0,\infty)} \left\{ \sigma : \Delta^{n,1} \to M \text{ Lipschitz continuous} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{the best Lipschitz} \\ \text{constant of } \sigma \text{ is } a\end{array} \right\} \\ &\simeq Lip(\Delta^{n,1}, M). \end{aligned} \tag{11}$$

从这一计算中可以看出，X 可以改写为一个余积，其中每个单形 $\sigma : \Delta^{n,\,1} \to M$ 仅位于由其最佳 Lipschitz 常数（11）索引的分支中。范数 $\|-\|_X$ 为每个元素赋予其所属分支的索引（定义 3.2.10）。因此，该范数为每个映射赋予最佳 Lipschitz 常数，并且与定义 4.3.3 中的 $Lip(\Delta^{n,\,1},\ M)$ 范数一致。

现在我们来建立方程（9）：

$$\begin{aligned} CSing(M)(f)(\iota_a(\sigma)) &= (SC(Hom_{EPMet}\,(T(-,-),M)))(f)(\iota_a(\sigma)) \\ &= C(Hom_{EPMet}\,(T(f,-),M))(\iota_a(\sigma)) \\ &= \uparrow^a_{CSing(M)_m} Hom_{EPMet}\,(T(f,*:a\geq a),M)\,(\sigma) \\ &= \uparrow^a_{CSing(M)_m} (\sigma\circ T(f,*)) = \uparrow^a_{CSing(M)_m} (\sigma\circ G(f)). \end{aligned}$$

由于我们将集合 $CSing(M)_n$ 重写为同构集合 $Lip(\Delta^{n,1}, M)$，因此可以移除包含映射 ι_a 和分量选择映射 $\uparrow^a_{CSing(M)_m}$，从而得到 $CSing(M)(f)(\sigma) = \sigma\circ T(f,*)$。

最后，我们计算$CSing$ 在态射（10）上的作用：

$$\begin{aligned} CSing(g : M\to N)_n(\iota_a(\sigma)) &= (SC(Hom_{EPMet}\,(T(-,-),g)))_n(\iota_a(\sigma)) \\ &= C(Hom_{EPMet}\,(T([n],-),g))(\iota_a(\sigma)) \\ &= \uparrow^a_{CSing(N)_n} \circ Hom_{EPMet}\,(T([n],a),g)\,(\sigma) \\ &= \uparrow^a_{CSing(N)_n} (g\circ\sigma). \end{aligned}$$

与前面的论证一样，我们可以省略 ι_a 和 $\uparrow^a_{CSing(N)_n}$，得到

$$CSing(g)_n(\sigma) = g\circ\sigma.$$

□

最后，我们计算经典 Yoneda 嵌入 Cy： $\Delta\times([0,\infty)\ \geq) \to CNSet^{\Delta^{op}}$。在这里，我们可以将赋范集合 $y([n],a)$ 的底集与普通 Yoneda 嵌入 $y([n])$ 所赋予的集合对应起来。$y([n],a)$ 的范数只是为每个元素赋予赋值 a。证明中的部分内容与定义 4.3.2 的证明类似。

命题 4.3.5： 经典 **经典 Yoneda 嵌入**

$$Cy := SC\circ y : \Delta\times([0,\infty),\geq) \to CNSet^{\Delta^{op}}$$

赋予

- 到对象（$[m],a$）——单纯经典赋范集：

$$Cy([m],a)_n = (Hom_\Delta\,([n],[m])\,,\|-\|) \qquad \text{where } \|f\| = a \tag{12}$$
$$Cy([m],a)(f:[n]\to[k])(h) = h\circ f, \tag{13}$$

- 到态射 $(g,*)$：$([m],a) \to ([n],b)$ ——单纯经典赋范集的态射

$$\begin{aligned} &Cy(g,*) : Hom_{\Delta}(-,[m]) \to Hom_{\Delta}(-,[n]) \\ &Cy(g,*)_k(h:[k]\to[m]) = g \circ h. \end{aligned} \tag{14}$$

证明： 我们先证明 (12)：

$$\begin{aligned} Cy([m],a)_n &= (SC(y([m],a)))_n \\ &= C(y([m],a)([n],-)) \\ &=: (X, \|-\|_X), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} X &= \coprod_{b\in[0,\infty)} y([m],a)([n],b)^{=b} \\ &\simeq \coprod_{b\in[0,\infty)} Hom_{\Delta\times([0,\infty),\geq)}(([n],b),([m],a))^{=b} \\ &\overset{(*)}{\simeq} Hom_{\Delta\times([0,\infty),\geq)}(([n],a),([m],a)) \\ &\simeq Hom_{\Delta}([n],[m]). \end{aligned}$$

同构 $(*)$ 成立，这是因为根据定义 3.2.6，余积的分量 $Hom^{\Delta\times([0,\infty),\geq)}((([n],\ b),\ ([m],\ a))^{=b}$中，除 $b=a$ 外均为空。由 C 构造的经典赋范集，其范数将每个元素映射为其所在分支的索引，因此该范数是常值映射 $\|f\|_X = a$。

(13) 和 (14) 的计算与定义 4.3.2 中 (9) 和 (10) 的计算类似。□

4.4 Spivak 的度量实现

如第4节开头所述，Spivak最初是用模糊集来定义度量实现的。为了定义Spivak的度量实现，我们必须对该函子重新参数化

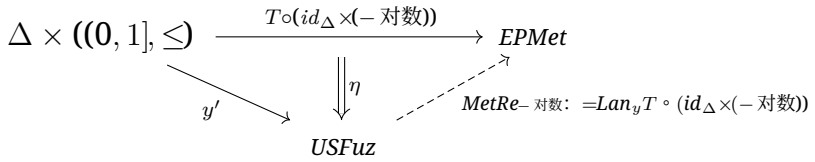
$$T : \Delta \times ([0,\infty),\geq) \to EPMet$$

as

$$T' : \Delta \times ((0,1],\leq) \to EPMet.$$

我们可以通过与同构 $i:\ ([0,\infty],\ \leq) \to ([0,1],\ \geq)$ 进行前复合来实现这一点，该同构来自定义 2.6.7；在我们的情形中，它就是 $-\log$，因为我们省略了底元，见定义 3.3.3。

定义 4.4.1：Spivak 的度量实现 $MetRe^{-\log}$： $USFuz \to EPMet$ 是沿 Yoneda 嵌入对 $T\circ(id_\Delta \times (-\log))$ 取左 Kan 延拓。



与定义 4.2.6 类似，其存在性由定义 3.3.7 保证。 $T\circ(id_\Delta \times (-\log))$ 的性质可以按照定义 4.2.5 类似地验证。

除了定义 4.2.1 后一段所说明的差异外，函子 $MetRe^{-\log}$ 与函子 Re : sFuz $\to$ UM （来自 [9, 第 3] 节）一致。

正如定义 4.2.7 中的度量实现一样，我们可以将这个函子与定义 3.3.4 中的函子 SM: $CVal([0,1],\leq)^{\Delta^{op}} \to USVal([0,1],\leq)$ 复合，从而用经典模糊集来表达它，以便更好地理解这个函子。

命题 4.4.2： Spivak 的度量实现的经典变体定义为 $CMetRe^{-\log} := MetRe^{-\log} \circ SM$: $CVal([0,1],\leq)^{\Delta^{op}} \to EPMet$。

它将一个单纯经典模糊集 $S : \Delta^{op} \to CFuz$ 赋予扩展伪度量空间

$$CMetRe_{-\log}(S) = \coprod_{s\in S} \Delta^{s,-\log \mu_{S_n}(s)}/\sim_C,$$

其等价关系 $\sim_C$ 由下式生成:

$$\iota_{S(f)(s)}(x) \sim_C \iota_s(G(x))$$

对所有 f: $[m] \to [n]$, $s \in S_n$, $x \in \Delta^{s,\ -\log \mu_{S_n}(s)}$。

这里， μ_{S_n} 是经典模糊集 $S_n = S([n]$ 的隶属度映射).

证明： 证明与定义 4.2.7 的证明类似。 □

我们可以通过将单纯经典集合与单纯经典赋范集联系起来，比较 Spivak 的度量实现的经典变体和定义 4.2.7 中我们的经典度量实现。这是通过同构 i 实现的，我们曾用它对定义 4.4.1 中的函子重新参数化。

引理 4.4.3： 设 $S : \Delta^{op} \to CFuz$ 是一个经典模糊集。那么我们有

$$CMetRe_{-\log}(S) = CMetRe(CVal\,(i)\,(S)),$$

其中 i 是定义 2.6.7 中的 locale 同构。

证明： 根据定义 3.1.7，我们有 $\|s\|_{CVal(i)(S)_n} = \mu_{S_n}(s)$，因此

$$\begin{aligned} CMetRe_{-\log}(S) &= \coprod_{s\in S_n} \Delta^{n,-\log \mu_{S_n}(s)}/\sim_C \\ &= \coprod_{s\in CVal(i)(S)_n} \Delta^{n,\|s\|_{CVal(i)(S)_n}}/\sim_C = CMetRe(CVal\,(i)\,(S)). \end{aligned}$$

请注意，根据定义 4.3.1 $\Delta^{n,\ \|s\|_{CVal(i)(S)_n}}$ 在定义 4.2.7 中记作 Δ^s 。 □

归根结底，Spivak 的度量实现与我们的度量实现之间的区别只在于我们如何解释结果，在数学上并无实质差异。
使用定义 4.2.6 中的度量实现来实现一个赋范集合时，每个元素的范数决定了度量实现中相应单形的大小。

使用定义 4.4.1 中 Spivak 的度量实现来实现一个模糊集时，隶属强度决定了“接近程度”。由一个 1-单形连接的两个点，在隶属强度较大时会更接近。当隶属强度为 1 时，这两个点会被视为同一点。降低隶属强度后，隶属强度越接近 0，这两个点就会相距越远。

负对数或区间 $(0,1]$ 的选择并非规范的。任何其他 locale 同构 $\phi : ([0,\infty], \geq) \to (\mathcal{L}, \preceq)$ 都会为我们提供度量实现的另一种参数化$MetRe_\phi(S)$，该度量实现来自定义 4.2.6，并带有

$$CMetRe_\phi(S) = CMetRe(CVal\,(\phi)\,(S)).$$

第 4.3 节中的所有计算也可以用其他任何参数化来完成。然而，这会导致公式更加复杂，因为通过 ϕ 进行的重新参数化会使 ϕ 出现在余等化子中。我们采用赋范集合的参数化是唯一能避免这种情况的选择，因此可以说它是最规范的选择，或者至少是最简单的选择。

4.5 有限度量实现

McInnes 等人 $[5, \text{定理 } 2]$ 从定义 4.4.1 构造了 Spivak 度量实现的一个有限变体。我们将尝试重现这一结果。本节中构造的有限度量实现，也可以等价地用赋范集合或其他通过另一同构 locale 获得的参数化来定义，正如定义 4.4.3 之后所解释的那样。我们计划在第 5.4 节讨论这个函子与 UMAP 算法之间所声称的关系，因此将采用与 McInnes 等人相同的参数化。

对于有限度量实现，McInnes 等人引入了相关范畴的有限变体。

第一个有限变体是有限扩展伪度量空间范畴，该范畴在紧接 [5, Definition 6] 之后的段落中引入。他们的定义并未明确指出，此处的有限性指的是底集的有限性，但这个定义似乎与 McInnes 等人[5],的其他结果相容，因此我们将采用这个定义。

定义 4.5.1：有限扩展伪度量空间**范畴**$Fin-EPMet$ 是 $EPMet$ **的全子范畴，**其中底集是有限的。

将范围限制在$Fin-EPMet$时，我们会失去无限余完备性，而证明 Spivak 的度量实现（定义 4.4.1）和我们的度量实现（定义 4.2.6）存在，正是需要这种性质。

注 4.5.2：$Fin-EPMet$ 是有限余完备的，但不是余完备的。
很容易看出，仍然可以在$Fin-EPMet$中构造余等化子，因为等价关系只能减少点的数量，而不能增加点的数量。然而，只有当分支的指标集有限时，才能在$Fin-EPMet$ 中构造余积。一个明显的反例是余积 $\coprod_{n\in\mathbb{N}}\{*\}$，其中$\{*\}$ 是一个有限扩展伪度量空间，包含单个点，且该点到自身的距离为 0。

某些无限图表上的余极限仍可能存在，前提是余等化子识别了足够多的点，使得余极限对象中只剩下有限多个等价类。然而，依据 [7, 定理 3.4.12] 由余等化子构造余极限的标准构造，仅当图表范畴有限时才保证成立。

McInnes 等人还在紧邻 [5, 定义 7]之前的段落中，引入了定义 3.3.5（1）中范畴 $USFuz$ 的一个有限变体。此处 McInnes 等人仅指出，该范畴被定义为$USFuz$ 中“有界”对象的子范畴，但并未定义$USFuz$ 中的对象何为“有界”。以下是我们对这一定义的解释，其目的同样是获得与 [5]类似的结果。

定义 4.5.3：

- 模糊集 X：$((\mathbf{0},1],\leq)_{op}\to Set$称为有限的，如果存在一个上界 B_X，使得对 $a\in(0,1]$，所有集合 $X^{\geq a}$ 的基数都小于 B_X。**有限模糊集范畴** $Fin-Fuz$ 是Fuz的全子范畴，其对象为有限模糊集。

- 若对每个 $n\in\mathbb{N}_0$，$\Delta\times((\mathbf{0},1],\leq))_{op}\to Set$都有限，则称非柯里化单纯模糊集 S 为有限的。**有限非柯里化单纯模糊集范畴**$Fin-USFuz$ 是

以有限非柯里化单纯模糊集为对象的$USFuz$ 全子范畴。

稍后，我们将需要有限非柯里化单纯模糊集的一个关键性质，以验证 McInnes 等人的有限度量实现（定义 4.5.9）存在：对于某些模糊集 X，如定义 3.2.2 所示，当 a 足够小时，我们无法通过观察集合 $X^{\geq a}$ 来看到 X 中的所有元素。然而，对于有限经典模糊集，情况总是如此。

我们将在定义 4.5.5 中对其进行形式化描述。为此，我们首先引入以下定义：集合 $X^{\geq a}$ 的基数的最小容许上界 L_X，以及使得满足 $a \leq l_X$ 的集合 $X^{\geq a}$ 不再增长的最大赋值 l_X。

定义 4.5.4： 设 $X\colon ((0,\ 1],\ \leq)^{op} \to$ 集合 是一个有限模糊集。我们记

- $L_X := \max\{\, |X^{\geq a}| \ \mid\ a \in (0,1] \,\} \in \mathbb{N}_0$,
- $l_X :=$ 最大$\{a \mid a \in (0,\ 1],\ |X^{\geq a}| = L_X\} \in (0,\ 1]$.

对于有限模糊集 X，集合 $X^{\leq l_X}$ 包含了关于 X的所有信息，因为对于 $a \leq l_X$ 的所有集合 $X^{\leq a}$ 都同构于 $X^{\leq l_X}$。

引理 4.5.5： 设 $X\colon ((0,\ 1],\ \leq)^{op} \to$ 集合 是一个有限模糊集。

那么，对于所有 $a \leq l_X$，$X(*\colon a \leq l_X)\colon X(l_X) \to X(a)$ 都是一个同构。

证明： 因此，根据定义 3.2.3，$X(*\colon a \leq l_X)$ 是单射。根据定义 4.5.4，集合 $X(a)$ 的基数至多为 L_X。由于 $X(l_X)$ 的基数恰好为L_X，单射 $X(*\colon a \leq l_X)\colon X(l_X) \to X(a)$ 是一个同构。□

现在，我们已经定义了相关范畴的所有相关有限版本。要重现 McInnes 等人的有限度量实现，下一步是定义 Yoneda 嵌入以及定义 4.2.4 中函子 T 的类似有限变体。

注 4.5.6： Yoneda 嵌入 $y\colon \Delta \times ((0,1], \leq) \to Set^{(\Delta \times ((0,1], \leq))^{op}}$ 的取值落在 $Fin-USFuz$中，因此定义了一个函子 $y\colon \Delta \times ((0,1], \leq) \to Fin-USFuz$。
同态集 $Hom_{\Delta \times ((0,1], \leq)}(([m], b), ([n], a))$ 由形如 $(f\colon [m] \to [n], *\colon b \leq a)$ 的配对组成，其中 $*$ 是单元素集中的一个元素。对于单纯形范畴中的任意 m 和 n，映射 $f\colon [m] \to [n]$ 只有有限多个，因为 $[m]$ 和 $[n]$ 都是有限集。

McInnes 等人直接定义了一个函子 $F\colon \Delta \times I \to Fin-USFuz$，并在 [5, 附录 B、定理 2] 中将有限度量实现构造为 F 的左 Kan 延拓。

我们将尝试把这个函子分解为有限度量单形，使其更接近定义 4.2.4 中的相应函子；我们正是利用该函子构造了度量实现。

定义 4.5.7： 对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $a \in [0, \infty)$，**有限度量 n-单形，大小为 a** 是有限扩展伪度量空间

$$Fin{-}\Delta^{n,a} = ([n], d_a),$$

其中度量 $d_a\colon\ [n] \times [n] \to [0, \infty)$ 是按 a缩放的离散度量，

$$d_a(i,j) := \begin{cases} a & i \neq j \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

引理 4.5.8： [5, 定理 2] 有限度量 n-单形定义了一个函子$F\colon\ \Delta \times ((0,\ 1],\ \leq) \to Fin{-}EPMet$由

$$F([n], a) = Fin{-}\Delta^{n,-\log(a)}$$
$$F(f, * : a \leq b) = f.$$

其中 $F(f,\ *\colon\ a \leq b)$ 是非扩张的，因为度量 $d_{-\log(a)}$产生的距离大于度量 $d_{-\log(b)}$，因为对于 $a \leq b$，我们有 $-\log(a) \geq -\log(b)$。

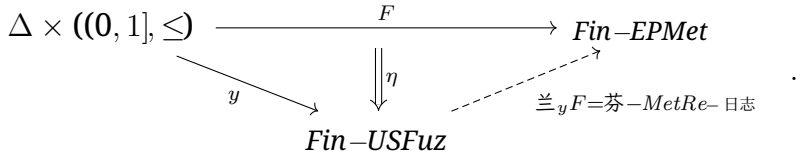
我们对 F 的定义与 McInnes 等人 [5,附录 B 的定理 2]略有不同。他们将 $F([n],\ a)$ 的底集定义为具有适当点数的某个集合，而我们则专门映射到单纯形范畴中的对象，这些对象是具有相同点数的集合。我们的变体使我们能够将 Δ 中的面映射和退化映射复用为有限度量 n-单形的面映射和退化映射，因此不必单独定义它们。

现在，我们可以将 McInnes 等人的有限度量实现定义为 F 的 Kan 延拓。Spivak 的（定义 4.2.6）和我们的（定义 4.2.6）度量实现的证明都要求目标范畴是余完备的。如定义 4.5.2 所述，在 $Fin{-}MetRe$ 的情形下，这一性质不再成立。不过，只要确保余极限公式（定义 2.3.2）所需的余极限存在，我们仍然可以证明这个 Kan 延拓的存在性。

命题 4.5.9： [5, 附录 B，定理 2] **McInnes 等人的有限度量实现**

$$Fin{-}MetRe_{-\log} = Lan_y F : Fin{-}USFuz \to Fin{-}EPMet$$

是沿着 y 的 F 的左 Kan 延拓：$\Delta \times ((0,\ 1],\ \leq) \to Fin{-}USFuz$



它是有限奇异神经的左伴随

$$Fin-Sing_{-\log} = Hom_{Fin-EPMet}\left(F(-,-),-\right) : Fin-EPMet \to Fin-USFuz.$$

证明：我们首先通过证明所需的余极限存在，来说明这个 Kan 延拓存在

$$colim\left(FP^S : y \downarrow S \longrightarrow \Delta \times ((0,1],\leq) \longrightarrow Fin-EPMet\right)$$

定义 2.3.2 中存在。我们将在$EPMet$ 中构造这些余极限，然后根据定义 2.2.2 证明所得的余极限对象也是$Fin-EPMet$ 中的余极限。
由于$EPMet$是余完备的，我们可以根据定义 2.3.5 重写余极限余极限(FP^S)，其中将 F视为函子 F: $\Delta \times((0,1],\leq) \to EPMet$。我们得到$EPMet$ 中的一个余等化子，可表示为商

$$\coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\, a\in[0,\infty)\\ s\in S([n],a)}} Fin-\Delta^{n,-\log(a)}/\sim, \tag{15}$$

其中，等价关系 $\sim$ 由以下关系生成

$$\iota_{m,b,S(f,*:b\leq a)(s)}(x) \sim \iota_{n,a,s}(F(f,*:b\leq a)(x)),$$

其典范包含态射为

$$\iota_{n,a,s} : Fin-\Delta^{n,a} \to \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\, a\in[0,\infty)\\ s\in S([n],a)}} Fin-\Delta^{n,-\log(a)}.$$

用于构造该余极限对象的表达式中，余积可能有无穷多个分量，因此它不一定属于$Fin-EPMet$。然而，根据定义 2.2.2，如果我们在$EPMet$ 中构造的这个余极限对象属于$Fin-EPMet$，那么该对象也是全子范畴$Fin-EPMet$中 FP^S的一个余极限。

为了证明 (15) 中的对象属于 $Fin-EPMet$，我们证明等价类的数量有限。

为此，考虑有限子集

$$U := \coprod_{s\in S([0],l)} Fin-\Delta^{0,-\log(l)} \subseteq \coprod_{\substack{n\in\mathbb{N}_0,\, a\in[0,\infty)\\ s\in S([n],a)}} Fin-\Delta^{n,-\log(a)} =: M,$$

其中， $l := l_{S([0],-)}$ 是一个赋值，低于该值的所有集合 $S([0],a)$ 都如定义 4.5.5 所示同构。

子集 $U \subseteq M$ 是有限的，因为任意大小的度量 0-单形都只包含一个点，而且根据定义 4.5.3，指标集 $S([0], l)$ 是有限的。
我们通过证明每个点 $p \in M$ 都与 U 中的某个点等同，来证明 $M/\sim$ 是有限的。

设 $p \in M$。那么 p 的形式为 $p = \iota_{n,\ a,\ s}(i)$。我们可以将 p 与一个由元素 $s' \in S([0],\ a)$ 索引的点 $\iota_{0,\ a,\ s'}(0)$ 等同，方法如下：

$$\iota_{n,a,s}(i) = \iota_{n,a,s}(f(0)) = \iota_{n,a,s}(F(f, * : a \leq a)(0)) \sim \iota_{0,a,S(f,*)(s)}(0),$$

其中 $f\colon [0] \to [n]$ 是将 0 映射到 i 的态射，而 $s' := S(f,\ *)(s)$。通过分类讨论，我们证明 $\iota_{0,\ a,\ s'}(0)$ 可以与 U 中的某个点等同：

- 如果 $l \leq a$，则有

$$\iota_{0,a,s'}(0) = \iota_{0,a,s'}(F(id_0, * : l \leq a)(0)) \sim \iota_{0,l,S(f,*)(s')}(0).$$

- 如果 $a \leq l$，根据定义 4.5.5，$S(id_0,\ *\colon\ a \leq l)$ 是一个同构，因此存在一个元素 $s\prime \in S([0],\ l)$，使得 $S(id_0,\ *\colon\ a \leq l)(s\prime) = s_\prime$。于是有

$$\iota_{0,a,s'}(0) = \iota_{0,a,S(id_0,*:a\leq l)(s'')}(0) \sim \iota_{0,l,s''}(F(id_0, * : a \leq l)(0)) = \iota_{0,l,s''}(0).$$

对于伴随，我们可以应用定义 2.3.8。按照定义 4.2.5 的方式，可以很容易地验证 F 所需的性质。□

我们可以仿照第 4.3 节中的度量实现，用经典模糊集来描述这个函子及其伴随。

这需要范畴 $CFuz$ 的有限变体，以及函子 $SC\colon USFuz \to CFuz^{\Delta^{op}}$ 和 $SM\colon CFuz^{\Delta^{op}} \to USFuz$ 的有限变体。对于有限经典模糊集范畴，我们要求底集是有限的。

定义 4.5.10：

- 有限经典模糊集 是一个经典模糊集 (X, μ_X)，其中 X 是有限的。有限经典模糊集范畴 $Fin{-}CFuz$ 是 $CFuz$ 的全子范畴，其对象为有限经典模糊集。

- 一个 **单纯有限经典模糊集** 是 $Fin{-}CFuz$ 中的单纯对象。 **单纯有限经典模糊集范畴** $Fin{-}CFuz^{\Delta_{op}}$ 是 $Fin{-}CFuz$ 中的单纯对象范畴。

下一步是构造与定义 4.5.11 中的等价以及定义 3.3.4 中的等价类似的有限变体。

我们不必从头构造这些等价，而是可以证明，定义 3.2.11 和定义 3.3.4 中已经建立的等价可以限制到相关范畴的有限变体。

定理 4.5.11： 范畴等价

$$CFuz \underset{C}{\overset{M}{\rightleftarrows}} Fuz$$

根据定义 3.2.11，可以限制到等价

$$Fin-CFuz \underset{Fin-C}{\overset{Fin-M}{\rightleftarrows}} Fin-Fuz \ .$$

其中$Fin-M$ 和 $Fin-C$ 分别是M和C的限制映射与余限制映射。

证明： 我们验证，定义 3.2.1 中的函子M 和定义 3.2.10 中的C ，可以限制并余限制到$Fin-CFuz$ 和$Fin-Fuz$。

- 设 (X, μ_X) 是一个有限经典模糊集。那么$M(X, \mu_X)$ 是一个有限模糊集，因为对于每个 $a \in (0, 1]$，集合$M(X, \mu_X)^{\geq a} = X$都是有限的。
- 设 $Y\colon \Delta \times ((0, 1], \leq)_{op} \to Set$是一个有限模糊集。根据定义 3.2.10， $C(Y)$ 的底集为

  $$\coprod_{a\in(0,1]} Y^{=a}$$

  根据定义 4.5.5，所有限制映射 $Y(*\colon a \leq l_Y)\colon Y(l_Y) \to Y(a)$ for$a \leq l_Y$ 都是同构。因此，根据定义 3.2.6，集合 $Y^{=a}$ 对于 $a \leq l_Y$ 都是空的。于是，底集 $C(Y)$ 可以改写为

  $$\coprod_{a\in(0,1]} Y^{=a} \cong \coprod_{a\in(l_Y,1]} Y^{=a} \cong Y^{\geq l_Y}.$$

  根据假设， $Y^{\geq l_Y}$是有限的，因此 $C(Y)$ 的底集是有限的，故$C(Y)$ 是一个有限经典模糊集。

□

引理 4.5.12： 范畴等价

$$CFuz^{\Delta^{op}} \underset{SC}{\overset{SM}{\rightleftarrows}} USFuz$$

定义 3.3.4 中对 $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq)$ 给出的范畴等价可限制为等价

$$Fin-CFuz^{\Delta^{op}} \underset{Fin-SC}{\overset{Fin-SM}{\rightleftarrows}} Fin-USFuz \ .$$

其中， $Fin-SM$ 和 $Fin-SC$ 分别是 SM 和 SC 的限制映射与余限制映射。

证明： 定义 3.3.4 中的等价是通过将定义 3.2.11 中的等价与定义 2.1.1 中范畴的同构复合而得到的。
我们证明了，定义 3.2.11 中的等价可以限制到定义 4.5.11 中所需的范畴。

很容易验证，定义 2.1.1 中的范畴同构也可以限制到所需的有限范畴。□

借助定义 4.5.12 中受限后的等价，我们可以针对 McInnes 等人定义 4.5.9 中的有限度量实现，表达并计算与定义 4.3.2 和定义 4.5.14 类似的结果。

命题 4.5.13： McInnes 等人的有限实现的经典变体是以下复合

$$Fin\text{–}\mathit{CMetRe}_{-\text{对数}} := \mathit{Fin}\text{–}\mathit{MetRe}_{-\text{对数}} \circ \mathit{Fin}\text{–}M : \mathit{Fin}\text{–}\mathit{CFuz}^{\Delta^{op}} \longrightarrow \mathit{Fin}\text{–}\mathit{EPMe} \qquad t.$$

它将单纯有限经典模糊集 $S : \Delta^{op} \to Set$ 对应到有限扩展伪度量空间

$$CMetRe_{-\log}(S) = \coprod_{s \in S} Fin\text{–}\Delta^{s,-\log(\mu_{S_n}(s))} / \sim_F,$$

其等价关系 $\sim_F$ 由以下关系生成

$$\iota_{S(f)(s)}(i) \sim_F \iota_s(F(f)(i))$$

对所有 $f : [m] \to [n],\ s \in S_n,\ i \in Fin\text{–}\Delta^{s}_{,-\log(\mu_{S_n}(s))}$。

证明： 证明与定义 4.3.2 的证明类似。 □

命题 4.5.14： McInnes 等人的有限奇异神经的经典变体是以下复合

$$Fin\text{–}CSing_{-\log} := Fin\text{–}C \circ Fin\text{–}Sing_{-\log} : Fin\text{–}EPMet \longrightarrow Fin\text{–}CFuz^{\Delta^{op}}.$$

它将扩展伪度量空间 M 对应到单纯经典模糊集：

$$Fin\text{–}CSing_{-\log}(M)_n = (Lip(Fin\text{–}\Delta^{n,1}, M), \mu) \qquad \text{where } \mu(\sigma) = \exp(-\|\sigma\|)$$
$$Fin\text{–}CSing_{-\log}(M)(f : [n] \to [m])(\sigma : Fin\text{–}\Delta^{m,1} \to M) = \sigma \circ F(f),$$

其中 $\|\sigma\|$ 表示映射 $\sigma : Fin\text{–}\Delta^{n,1}_{,} \to M$ 的最佳 Lipschitz 常数。

证明： 与定义 4.5.14 的证明类似。在此情形下，由于以下原因，我们得到隶属强度 $\exp(-\|\sigma\|)$

$$\begin{aligned} Fin-CSing_{-\log}(M)_n &= (Fin-SC(Hom_{Fin-EPMet}(F(-,-),M)))_n \\ &= Fin-C(Hom_{Fin-EPMet}(F([n],-),M)) \\ &=: (X,\mu_X), \end{aligned}$$

其中 X 可以改写为

$$\begin{aligned} &\coprod_{a\in[0,\infty)} Hom_{Fin-EPMet}\left(Fin-\Delta^{n,-\log(a)},M\right)^{=a} \\ \simeq &\coprod_{a\in[0,\infty)} \left\{\sigma : Fin-\Delta^{n,1}\to M \text{ Lipschitz cont.} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{the best Lipschitz}\\ \text{constant of } \sigma \text{ is } -\log(a)\end{array}\right\} \\ \simeq &Lip(\Delta^{n,1},M). \end{aligned}$$

在这种情况下，具有最佳 Lipschitz 常数 $-\log(a)$ 的映射 $\sigma : Fin-\Delta^{n,1}_{,} \to M$ 属于由 a 索引的分支。根据将 C 限制映射为 $Fin-C$ 的定义，隶属强度 μ_X 为每个元素指定其所在分支的索引。因此，具有最佳 Lipschitz 常数 $c = -\log(exp(-c))$ 的映射 $\sigma : Fin-\Delta^{n,1}_{,} \to M$ 将被赋予隶属强度 $\exp(-c)$。□

定义 4.5.14 表明，集合 $Fin-CSing_{-\log}(M)_1$ 收集了 M 中的所有有限距离。

注释 4.5.15: 设 M 是一个有限扩展伪度量空间。

$Fin-CSing_{-\log}(M)_1$ 的元素是映射 σ： $Fin-\Delta^{m,1}_{,} \to M$，其中 $\sigma(1) = x$ 且 $\sigma(0) = y$，且对每一对 $x, y \in M$， $\mu(\sigma) = \exp(-d_M(x,y))$，其中 $d_M(x,y) \neq \infty$。

5 UMAP 背后的理论?

在本节中，我们将评述 UMAP 与 [5]所断言的有限度量实现之间的关系。

我们首先在第 5.1 节中描述降维算法的一般思想。

由于 UMAP 算法在中间计算步骤中使用无向加权图作为数据结构，我们在第 5.2 节中介绍它们，并讨论它们与模糊集的关系。随后，我们在第 5.3 节中描述该算法，并在第 5.4 节中讨论其与有限度量实现之间所断言的关系。

5.1 降维算法

UMAP 算法是一种降维算法。拓扑降维算法的概述可见于 [10]。一般而言，降维算法接受一个输入数据集 $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^D$以及可能的附加参数。它输出一个数据集 $Y = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$，其中 $d < D$，同时试图保留所关注的性质。所谓保留所关注的性质，其含义并不总是被形式化地陈述，而是取决于具体应用。

例如，我们可以要求， X 中的点簇应当对应于 Y中的点簇。

我们还可以要求保留拓扑特征。例如，如果 $X \subseteq \mathbb{R}^{100}$ 中的输入点大致沿着一个嵌入于 $\mathbb{R}^{100}$中的圆 S^1 分布，我们可以要求算法生成一组输出点 $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ ，这些点也沿着一个圆 S^1分布，并嵌入于 $\mathbb{R}^2$中。

此外，我们还可以要求保留几何特征。例如，如果输入点沿着 $\mathbb{R}^{100}$中的一个椭圆分布，我们可以要求输出点也沿着一个椭圆分布，同时保留原椭圆的离心率。

大多数算法只有在我们已知输入数据集 X 满足特定算法所需的特定属性时，才能保留这些条件。

5.2 加权图与模糊并集

图由一组顶点构成，其中任意一对顶点之间可能有边连接，也可能没有。在我们的例子中，这些边没有方向。图的边可以附带额外信息，这通常称为边赋权。

定义 5.2.1： 一个**无向 W-加权图**（V， E， w_E）由以下部分组成 of

- 一个称为顶点的 Set V，
- 一个子集 $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$，
- 以及一个权重映射 w_E：$E \to W$ 其值属于集合 W。

加权图常用于许多算法中。例如，路径查找算法可以使用图来表示道路网络，其中顶点代表交叉路口，边代表道路，而权重对应道路的长度。加权图也可以用于表示非几何数据。在社交网络中，图可以用顶点表示用户，用边表示用户之间的互动，而权重则对应互动次数。

UMAP 算法在中间计算步骤中使用 $(0, 1]$-加权图。这些图与经典模糊集有关。

备注 5.2.2： 任何无向的 $(0, 1]$-加权图 (V, E, w_E) 都定义了一个经典模糊集 (E, w_E)。

UMAP 算法的一步需要将这类图合并。这个并运算的灵感来自经典模糊集的并集。要定义具有相同底集的经典模糊集 (A, μ_1) 和 (A, μ_2) 的并集，我们必须决定如何根据元素 x 在 $\mu_1(x)$ 和 $\mu_2(x)$ 中可能不同的隶属强度来计算它的隶属强度。我们还希望模糊集的并集满足类似于普通集合并集的性质，例如对称性或结合性。定义这类并集的一种方法是通过 T-余范数。

定义 5.2.3： [3, 第 3 节。4] 一种 T**-余范数**，也称为 S**-范数**，是一个映射c：$[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$，满足以下公理，其中 x，y，$z \in [0, 1]$:

- $c(x, y) = c(y, x)$（对称性）。
- $c(x, y) \leq c(z, y)$ 满足 $x \leq z$（单调性）。
- $c(x, c(y, z)) = c(c(x, y) z)$（结合性）。
- $c(x, 0) = x$（边界条件）。

例 5.2.4： [3,第 3 节。4]

- 最大映射 max：$[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ 是一个 T-余范数。
- 代数和 P：$[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ 定义为

$$P(x, y) = x + y - xy.$$

McInnes 等人 [5] 将这个余范数称为概率 T-余范数。

对于具有相同底集 A 的模糊集并集 A, μ_1 和 A, μ_2, 可以将每个元素 $x \in A$ 的隶属强度定义为 $c(\mu_1(x)\ \mu_2(x))$, 其中 $c: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ 是任意余范数。

定义 5.2.5: [3, 第 3 节。4] **经典模糊集的二元并**(A, μ_1)与(A, μ_2)具有相同的底集 A, 关于余范数$c: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ 定义为

$$(A, \mu_1) \cup_c (A, \mu_2) := (A, \mu_c),$$

其中隶属度映射 $\mu_c: A \to (0,1]$ 由下式给出

$$\mu_c(x) = c(\mu_1(x), \mu_2(x)).$$

T-余范数之所以如定义 5.2.3 那样定义, 是因为 T-余范数的性质会导出模糊集的并集的如下性质。

注 5.2.6: 设 A, B, C 为具有相同底集的模糊集, 并设 c为一个 T-余范数。则我们有

$$\begin{aligned} A \cup_c B &= B \cup_c A && \text{(对称性)} \\ A \cup_c (B \cup_c C) &= (A \cup_c B) \cup_c C && \text{(结合性)} \\ A \cup_c \emptyset &= A && \text{(单位元)} \end{aligned}$$

单调性条件确保该并集与经典模糊子集相容。不过, 本学位论文中不会用到经典模糊子集。

我们可以为无向 $(0,1]$-加权图定义类似的并运算 s.

定义 5.2.7: 两个顶点和边相同的**无向**$(0,1]$**-加权图** $G = (V, E, w_1)$ 和 $G' = (V, E, w_2)$ 关于余范数 c 的**二元并** $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ 定义为

$$(V, E, w_1) \cup_c (V, E, w_2) := (V, E, w_c),$$

其中权重映射 $w_c: E \to (0,1]$ 定义为

$$w_c(e) = c(w_1(e), w_2(e)).$$

这个无向 $(0,1]$ 加权图的并集, 与由定义 5.2.2 中的图所诱导的经典模糊集的并集一致。

5.3 UMAP 算法

UMAP 算法的动机和描述见 [5, 第 3] 节。 [5,第 4 节1]提供了伪代码实现。

UMAP 算法是一种降维算法，主要致力于保留拓扑结构。给定一个输入数据集 $X \subseteq \mathbb{R}^D$，它是从嵌入于 $\mathbb{R}^D$ 中的黎曼流形 $\mathcal{M}$ 上采样得到的，输出数据集 $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ 应尽可能保留 $\mathcal{M}$ 的拓扑结构。如何定义保留 $\mathcal{M}$ 的结构，并没有正式的定义。

本节概述该算法的计算步骤。随后，我们将在第 5.4 节讨论关于该算法各步骤中结构保持情况的断言。

要运行该算法，我们必须提供输入数据集 $X = \{x_1, \ldots\ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^D$和目标维度 $d < D$。此外，还必须选择参数 $k \in \mathbb{N}$ 和 $n-$ 轮数 $\in \mathbb{N}$ [5, 算法 1]。然后，UMAP 会执行多个步骤来计算输出集 $Y = \{y_1, \ldots\ldots, y_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$。

UMAP 算法的主要流程见 [5, 算法 1]。该流程包含以下步骤，其中一些步骤以子程序的形式在 [5,算法 2-5] 中实现。

1. [5, 算法 2] 对于每个输入点 $x_i \in X$，我们首先构建一个局部无向 $(0, 1]$-加权图 G_i，其中

   - G_i 的顶点是 X,
   - G_i 的边是从 x_i 到每一个其他 $x_j \in X$的所有边,
   - 与另一个顶点 $x_j \in X$ 之间一条边的权重为 se t to

   $$\exp(-d_{\mathcal{M}}(x_i, x_j) - \rho) \in (0, 1],$$

   其中， ρ 是 x_i 与最近点之间的距离，而 $d_{\mathcal{M}}$ 是对$\mathcal{M}$ 上的度量的近似，该度量在 [5, 第 2 节1] 中根据到 k 个最近邻的近似距离来描述。

2. [5, 算法 1] 随后，我们根据定义 5.2.4 中的概率余范数，对所有局部图取并集 $G := \bigcup_{1 \le i \le N, P} G_i \ P$。

   输入数据集是有限的，因此这个并集可以表示为 $G_1 \cup_P \cdots \cup_P G_N$，其中使用定义 5.2.7 中的二元并。

3. [5, 算法 4] 接着，我们使用谱嵌入，根据权重将 G 的顶点嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中。由此得到 G 的顶点坐标集合 Y_0。

   谱嵌入是一种广为人知的算法，可用于将加权图的顶点嵌入我们选择的任意 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n \in \mathbb{N}$，使边的权重大致对应于 $\mathbb{R}^n$中各点之间按某种度量计算的距离。运行谱嵌入算法并不要求顶点具有坐标，因为该算法纯粹将顶点视为标签，并生成坐标。

对于 UMAP，这意味着谱嵌入步骤会忽略顶点的原始坐标 X （位于 G 中），并生成全新的坐标，同时尝试将由权重接近 1 的边连接的顶点放得彼此相近，而将由权重更接近 0 的边连接或完全不相连的顶点放得更远。

4. [5, 算法 5] 随后通过随机梯度下降对 Y_0 中的坐标进行进一步优化，进行 $n-$轮迭代。

为此，我们构建一个新的图 G_{Y_0} 。该图的顶点集为 Y_0，边的权重取决于嵌入 Y_0中端点之间的欧几里得距离。然后，我们执行一步梯度下降，通过随机改变 Y_0中的坐标，尝试最小化 G 与 G_{Y_0}的权重之间的不相似性。由此得到新的坐标Y_1 和新的图 G_{Y_1}。接着，我们执行下一步，尝试最小化 G 与 G_{Y_1} 之间的交叉熵，以此类推。经过 $n-$轮 迭代后，我们停止这一过程。算法的最终输出是数据集$Y := Y_{n-epochs}$。

理论上，可以省略第 3 步中的谱嵌入，改为用随机坐标 Y_0初始化第 4 步。从本质上说，第 3 步旨在生成良好的初始赋值，以便加快收敛，并提高第 4 [5, 第 3 节.2]中迭代近似的数值稳定性。

5.4 讨论

如第 5.3 节所述，UMAP 旨在保留黎曼流形 $\mathcal{M}$ 的拓扑结构，我们假设输入数据是从该流形中采样得到的。正如文章 [5]在 [5, 第 7] 节中所述，文中并未给出正式定理来证明这一断言。不过，McInnes 等人通过对算法中间步骤提出以下断言，对该算法作了非正式的论证。我们将对这些断言进行评述，并联系我们的工作:

1. McInnes 等人断言，假设输入数据集 $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^D$ 是从嵌入于 $\mathbb{R}^D$中的黎曼流形 $\mathcal{M}$ 上采样得到的，那么可以对度量进行局部重缩放，使得即使数据并非从$\mathcal{M}$上均匀采样，相对于经局部重缩放的度量来看，数据仍呈现均匀采样的状态[5,第 2 节1]。

[5, 第 2 节1]中的引理 1 及相关的 [5, 附录 A] 并未从$\mathcal{M}$上的概率分布角度作出正式论证。要验证这一断言，还需要进一步研究。

2. [5] 中的定义 9 将数据集 X的模糊拓扑表示定义为 $\bigcup_{0\leq i\leq N}$ FinSing(X, d_i), 其中 d_i 对应于断言 1 中围绕 X_i的局部度量。

在 [5, 第 3 节。1], McInnes 等人断言，当将局部图 G_i 视为模糊集时，第 5.3 节步骤 1 中构造的局部图对应于 [5, 定义 9] 中的 FinSing(X, d_i) 的 1-骨架，而这些局部图 G 的并集对应于其 1-骨架

$$\bigcup_{0\leq i\leq N} \mathrm{FinSing}(X, d_i).$$

这里的扩展伪度量 d_i: $X \times X \to [0, \infty]$ 定义如下:

$$d_i(x_j, x_k) = \begin{cases} d_{\mathcal{M}}(x_j, x_k) - \rho & \text{if i = j or i = k} \\ \infty & \text{else} \end{cases},$$

其中， ρ 是 x_i 到最近点的距离，而 $d_{\mathcal{M}}$ 的近似方式如 [5, 第 2.1] 节所述。

我们已验证定义 4.5.9 中有限奇异神经的构造。通过在定义 4.5.14 中用经典模糊集来表达这个函子，我们证明经典模糊集 $Fin{-}CSing(X, d_i)_1$ 对于每一对距离有限的点 x, y 都包含一个元素，其隶属强度为 exp($-d_i(x, y)$)，见定义 4.5.15。因此，根据定义 5.2.2，局部图 G_i 对应于经典模糊集 $Fin{-}CSing(X, d_i)_1$, ，所以这个断言看起来是正确的。

还需要进一步研究，将经典模糊集的并集扩展为单纯经典模糊集，并验证 G 与 $\bigcup_{0\leq i\leq N} Fin{-}CSing(X, d_i)$。之间的对应关系。

3. 在 [5, 第 3 节。1], McInnes 等人断言：“直观地说，可以将一条边的权重视为该边存在的概率。第 2 节展示了为何这种构造能够忠实地刻画数据的拓扑。”

这一断言随后被用于从理论上论证在T第 2 [5, 4 节。1]的步骤中，为并集选择概率T-余范数的合理性。它也被用于论证在 4 [5, 第 3 节。2], 的步骤中选择交叉熵的合理性，因为交叉熵是衡量概率分布差异的一种度量。

文章 [5] 没有为这一断言提供概率论论证。文章 [5] 也没有定义一个与边存在相对应的概率论事件。因此，我们尚未确信图 G中边的权重应被视为概率。

还需要进一步研究，才能形式化地阐明并验证这一断言。如果能够找到一种有依据的概率解释，也应验证这种解释是否与断言 2 相容。

4. McInnes 等人断言，如果接受 G 有意义地捕捉了$\mathcal{M}$的拓扑结构这一断言，那么第 4 步中的迭代过程会生成低维输出坐标 Y，使其尽可能贴合 $\mathcal{M}$ 的拓扑。还需要进一步研究来验证这一断言。

在这篇学位论文中，我们验证了几种模糊集变体的度量实现，并展示了如何将它们实现为沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓。结合对这些 Kan 延拓的明确描述，这为根据 [5] 描述 UMAP 的数学框架提供了精确的说明。然而，这篇学位论文并未、也无法确立该框架是否解释了 UMAP 的效率，或是否能为这一算法带来任何额外的见解。

致谢

我谨感谢我的导师 Prof. Dr. Meusburger 对我的悉心指导。能够与 Prof. Dr. Meusburger 共事，我深感荣幸。
我还要感谢 Prof. Dr. Creutzig 担任第二评审人，并投入时间阅读我的学位论文。

参考文献

[1] Michael Barr.《模糊集理论与托扑理论》。载于：《加拿大数学公报》29.4（1986），第501–508页。[2] Lukas Silvester Barth等人。模糊单纯集及其在几何数据分析中的应用。2024年。arXiv：2406.11154 [math.AT].[3] George J. Klir和Bo Yuan。《模糊集与模糊逻辑：理论与应用》。Prentice Hall PTR，1995年。[4] Saunders Mac Lane和Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：托扑理论初探》。1992年。[5] Leland McInnes、John Healy和James Melville。*UMAP*：用于降维的统一流形逼近与投影。2020年。arXiv：1802.03426 [stat.ML].[6] Birgit Richter。《从范畴到同伦论》。剑桥高级数学研究。剑桥大学出版社，2020年。[7] E. Riehl。《语境中的范畴论》。Aurora：Dover现代数学原创系列。Dover Publications，2017年。[8] Emily Riehl。《范畴同伦论》。新数学专著。剑桥大学出版社，2014年。[9] David I. Spivak。《模糊单纯集的度量实现，未发表草稿》。网址：http://www.dspivak.net/metric_realization090922.pdf（访问日期：2025年9月16日）。[10] Laurens Van Der Maaten、Eric Postma和Jaap Van den Herik。“降维：比较综述”。载于：《机器学习研究杂志》10（2009），第66–71页。

索引

S-范数，70T-余范数，70Δ，9 ℓ_1 度量，46$\mathcal{L}$-赋值集合，28$CFuz$，24$CNSet$，24$CVal(\mathcal{L}\ \preceq)$，24$EPMet$，40,61$Fin-EPMet$，61$Fin-Fuz$，61$Fin-USFuz$，61 Fuz，34Met，40$NSet$，34$USFuz$，37$USNSet$，37$USVal(\mathcal{L})$，36 $Val(\mathcal{L})$，28 最佳 Lipschitz 常数，55 经典模糊集的二元并，71 两个无向（$0,1$]-加权图的二元并，71 底元，14 无底层条件，18 $\mathcal{L}$-赋值集合范畴，28 （余）单纯集合范畴，10 经典模糊集范畴，24 经典赋范集范畴，24 余单纯对象范畴，10 有限经典模糊集范畴，65 有限扩展伪度量空间范畴，61 有限模糊集范畴，61 有限非柯里化单纯模糊集范畴，61 模糊集范畴，34 locale范畴，15 赋范集范畴，34 $\mathcal{C}$上的预层范畴，17 单纯经典$\mathcal{L}$赋值集范畴，35 单纯经典模糊集范畴，37 单纯经典赋范集范畴，37 单纯有限经典模糊集范畴，65 单纯对象范畴，10 非柯里化单纯$\mathcal{L}$赋值集范畴，36 非柯里化单纯模糊集范畴，37 非卷积单纯赋范集范畴，37 经典 $(\mathcal{L}\ \preceq)$ 赋值集，24 经典模糊集，23 经典赋范集，23 经典 Yoneda 嵌入，57 余锥，3 余退化映射，11 余面映射，11 余极限，3 逗号范畴，4 相容，18 常值函子，3 余单纯态射，10 余单纯对象，10 余单纯关系，11 覆盖，18 退化映射，10 退化映射，12 退化态射，9 扩展伪度量空间，40 面映射，12 面映射，10 面态射，9 有限经典模糊集，65 大小为 a 的有限度量 n-单形，63 几何实现，12

并，14

利普希茨常数，55 利普希茨连续，55 locale，14

曼哈顿度量，47 McInnes 等人的有限度量实现，63 交，14 成员映射，23 隶属强度，23 大小为 a的度量 n-单形，46 度量实现，49 经典赋范集态射，23 locale 态射，15（$\mathcal{L}$ $\leq$）值集的态射，24

非扩张，40 范数，23

序数，9

偏序集，14
预层，17

投影函子，4

利普希茨连续映射集，55 层条件，18 单纯形范畴，9 单纯经典$\mathcal{L}$值集，35 单纯有限经典模糊集，65 单纯映射，10 单纯态射，10 单纯对象，10 单纯关系，11 单纯集，10 奇异神经，13，50 Spivak 的度量实现，59

top，14 拓扑 n-单形，11 全连通，16

非柯里化单纯$\mathcal{L}$-值集，35 无向 W-加权图（V， E， w_E），69

Yoneda 嵌入，4

类别翻译表

本文中的全称	本文中的符号	符号 位于 [1] 中	记号 在 [9] 中	在.....中的记号 [5]
sets	Set	-	Sets	Sets
拓扑空间	Top	-	-	Top
度量空间	Met	-	-	-
扩展伪度量空间	$EPMet$	-	UM	EPMet
经典$\mathcal{L}$-赋值集合	$CVal\,(L)$	$\mathrm{Fuz}_0(\mathcal{L})$	-	-
经典模糊集	$CFuz := CVal\,([0,1], \leq)$	-	-	-
经典赋范集合	$CNSet :=CVal\ ([0,\infty], \geq)$	-	-	-
L上的层	$Shv\ (L)$	$\mathrm{Sh}(\mathcal{L})$	$\mathrm{Shv}(\mathcal{L})$	-
$\mathcal{L}$-赋值集合	$Val\,(L)$	$\mathrm{Mon}(\mathcal{L})$	-	-
模糊集	$Fuz :=Val\ ([0,1], \leq)$	-	Fuz	Fuzz
赋范集	$NSet :=Val\ ([0,\infty], \geq)$	-	-	-
单纯形范畴	Δ	-	Δ	Δ
单纯经典$\mathcal{L}$值集	$CVal\,(L)^{\Delta^{op}}$	-	-	-
单纯经典模糊集	$CFuz^{\Delta^{op}}$	-	sFuz	sFuzz
单纯经典赋范集	$CNSet^{\Delta^{op}}$	-	-	-
非柯里化单纯$\mathcal{L}$-赋值集合	$USVal\,(L)$	-	-	-
非柯里化单纯形模糊集	$USFuz :=USVal\ ([0,1], \leq)$	-	sFuz	sFuzz
非柯里化单纯形赋范集	$USNSet :=USVal\ ([0,\infty], \geq)$	-	-	-
有限扩展伪度量空间	$Fin-EPMet$	-	-	FinEPMet
有限非柯里化单纯形赋范集	$Fin-USFuz$	-	-	Fin-sFuzz