arXiv:2603.03381v1 [math.QA] 3 Mar 2026

量子群的对偶规范基与双规范基

MING LU 和 XIAOLONG PAN

Abstract. Qin 通过层建立了整个量子群的几何实现，并由此为 ADE 型量子群导出了具有整数性和正结构常数的对偶典范基。本文通过借助 NKS 箭图簇的几何重新诠释其精巧的代数构造，证明了（Drinfeld 双）量子群的对偶典范基与 Berenstein–Greenstein 的双典范基一致。这一结果解决了其中若干猜想，包括关于正性以及在辫群作用下不变性的猜想。

Contents

1. 引言 1
2. 量子群 4
3. 通过箭图簇构造量子群 6
4. 双典范基 13
5. 对偶典范基 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$ 25
参考文献 34

1. Introduction

Ringel [Rin90] 首次引入了 Dynkin 箭图的 Hall 代数，以实现量子群的正部分 $\mathbf{U}^+$ $\mathbf{U}$。受 Ringel 开创性工作的启发，Lusztig [Lus90b,Lus91, Lus93] 利用箭图表示簇上的层 Q，实现了 $\mathbf{U}^+$，并进一步通过简单层构造了 $\mathbf{U}^+$ 的典范基；晶体基的构造另见 [Ka91] 。这些开创性工作被广泛认为是半量子群范畴化的最早范例。

Bridgeland [Br13] 后来从 $\mathbb{Z}_2$箭图的投射表示的分次复形构造了一个 Hall 代数，由此实现了量子群 $\mathbf{U}$ 的 Drinfeld 双 $\mathbf{U}$。Hall 代数实现为深入理解量子群开辟了道路，例如辫群作用和 PBW 基；参见 [Rin96]。Lusztig [Lus90b] 通过 PBW 基给出了典范基的一种初等构造；这一构造的 Hall 代数诠释见 [DDPW08]。

受 Bridgeland 构造的启发 [Br13], Qin [Q16]利用循环箭图簇的（对偶）量子格罗滕迪克环，建立了 ADE 型Drinfeld 双 $\mathbf{U}$ 的几何实现。这种几何方法的一项关键优势是构造出

2020 数学主题分类。主要分类号17B37，18G80。关键词和短语。对偶典范基、量子群、 $\imath$量子群、Hall 代数、箭图簇。

的整系数正基$\mathbf{U}$，其中包含半量子群 $\mathbf{U}^{\pm}$ [Lus90b] 的对偶典范基（经过适度重标定）作为子集。该基在对偶典范基中被称为 [LW21b、LP25、LP26]。Qin 的工作建立在 Hernandez-Leclerc 的构造 [HL15]（他们通过分次 Nakajima 箭图簇实现了半量子群 $\mathbf{U}^{+}$）以及 Nakajima [Na04]和 Varagnolo–Vasserot [VV03]引入的量子格罗滕迪克环概念之上。

（普遍）$\imath$量子群 $\mathbf{U}^{\imath}$ 定义为与 Satake 图相关联的 $\mathbf{U}$ 的一个子代数，而 $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^{\imath})$ 构成一个量子对称对（参见 [Let99, Ko14, LW22a]）。$\mathbf{U}^{\imath}$ 的中心约化得到 Letzter 的 $\imath$量子群 $\mathbf{U}^{\imath} = \mathbf{U}^{\imath}_{\varsigma}$，其参数见 ς [Let99, Ko14]。Letzter 的 $\imath$量子群可视为 Drinfeld-Jimbo 量子群的广泛推广，而量子群属于 $\imath$对角型量子群。在 [LW22a, LW21b], 中，第一作者和 Wang 引入了与带对合的箭图 (Q, ϱ) 相关联的 $\imath$Hall 代数和层的格罗滕迪克环，以实现 $\mathbf{U}^{\imath}$。在几何背景下，层还给出 $\mathbf{U}^{\imath}$的一个整系数正基，在 [LW21b, LP26]中也称为对偶典范基。

最近，我们深入研究了量子群 $\mathbf{U}$ 以及 $\imath$量子群 $\mathbf{U}^{\imath}$（ADE 型）的对偶典范基，并从 Hall 代数与箭图簇两个视角加以考察（见 [LP25，LP26]）。在这些工作中，我们在 $\imath$Hall 代数的框架下给出了对偶典范基的一种新构造，并为 $\imath$ Hall 代数以及层的格罗滕迪克环引入了傅里叶变换，同时证明对偶典范基在辫群作用与傅里叶变换下保持不变。我们还建立了从 Hall 基（以及 PBW 基）到对偶典范基的过渡矩阵中系数的正性。由于量子群是 $\imath$对角型量子群，上述所有结果对量子群的经典情形均成立（并且是新的）。

与 $\mathbf{U}^{+}$ 的 Lusztig 典范基不同，对偶典范基是针对整个 $\mathbf{U}$ 与 $\mathbf{U}^{\imath}$ 定义的。事实上，为了构造整个量子群的正典基，Lusztig引入了修正量子群 $\dot{\mathbf{U}}$（见 [Lus93]）。与 Lusztig 的方法不同，Berenstein 与 Greenstein [BG17] 通过组合 $\mathbf{U}^{\pm}$ 的 Lusztig 对偶典范基并实施一系列复杂运算，构造了 $\mathbf{U}$ 的双典范基（见 §4.1）。他们猜想双典范基具有良好的结构性质，并提出了诸多相关猜想（同上），例如自然乘积 $b_{-}b_{+}$（其中 $b_{\pm}$ 为 $\mathbf{U}^{\pm}$ 的对偶典范基元素）按双典范基展开时的正性，以及双典范基在 Lusztig 辫群作用下的不变性。

在本文中，我们讨论对偶典范基与双典范基对于 $\mathbf{U}$ 的重合。为此，我们利用与 NKS 正则奇异范畴 $\mathcal{R}$和 $\mathcal{S}$ 相关联的 NKS 箭图簇的几何，重新诠释 Berenstein–Greenstein 关于双典范基的构造（在 [Q16] 中称为循环箭图簇）。关键的观察是，[BG17]中对 Lusztig 引理的应用对应于拉回，即沿着用于定义 $\mathbf{R}$ 的限制函子的卷积图（见（4.9））。通过利用循环箭图簇上的 $\mathbb{C}^{*}$-作用（如 [Na04] 中所定义），我们证明这些拉回保持交叉上同调（IC）层，从而诱导量子 Grothendieck 环的嵌入。于是，双典范基定义中的上三角关系自然地由 IC 层的内在性质得出。

定理 A（定理4.16）。 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的双典范基与对偶典范基重合。特别地，它在 *Lusztig* 的辩群作用下不变，且其结构常数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

利用这一主要结果，我们回答了 [BG17] 中提出的若干猜想（见推论 4.18、4.19 和命题 4.21）。特别地，双（=对偶）典范基在反对合 $\cdot^*$ 和 Chevalley 对合 ω 下保持不变；见命题 4.21、推论 4.22。

我们还为 $\widetilde{\mathbf{U}}(\mathfrak{sl}_2)$ 的对偶典范基给出了显式公式，详见第 5 节，并可将其与 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$ 的双典范基公式进行比较，该公式见[BG17]。

在 [Lus90b], 中，Lusztig 通过 PBW 基对 $\mathbf{U}^+$ 的典范基给出了一种初等构造，并证明从 $\mathbf{U}^+$ 的典范基到 PBW 基 $\{E^{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}\}$ 的过渡矩阵的各项（见命题 2.5 ）属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。受 Lusztig 这一结果的启发，我们证明，从 PBW 基 $\{F^{\mathbf{a}}E^{\mathbf{c}}K_\mu K'_\nu \mid \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}$（见（2.9））到量子群 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的双（=对偶）典范基的过渡矩阵的系数也属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$（见推论 4.23）。这一结果将 Lusztig 关于 $\mathbf{U}^+$ 的结果推广到整个量子群 $\widetilde{\mathbf{U}}$（对偶版本亦然）。

众所周知，量子群是双代数（甚至是 Hopf 代数）。Lusztig 利用层将 $\mathbf{U}^+$ 实现为双代数，并进一步证明了 $\mathbf{U}^+$ 的典范基关于余乘法的结构常数是整数且为正（见 [Lus90b]）。

根据上述讨论，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 的双（=对偶）典范基可以看作 Lusztig 为$\mathbf{U}^+$构造的对偶典范基的自然扩展。我们提出以下猜想：

猜想 1.1。 双（对偶）典范基关于余乘法的结构常数也属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

通过直接计算，这一猜想已在 $\widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{sl}_2)$ 中得到验证，该工作 [CZ26], 建立在 [LP25、LP26] 以及本文的工作之上。通过直接计算给出一般性证明是不可行的；因此，我们遵循 Lusztig 在 [Lus90b], 中的方法，转而采用几何实现。然而，本文所使用的量子群几何实现（见 [Q16、VV03]）只能刻画代数结构，这促使我们进一步发展在 [Q16、VV03], 中引入的量子群几何框架，尤其是为$\widetilde{\mathbf{U}}$ **的余乘法提供一种**几何解释。

在相关研究中，量子群与簇代数之间存在着各种联系[GLS13，HL15、KKKO18，Q16]及其中的参考文献。事实上，Shen 运用簇代数方法 [Sh22] 构造了量子群$\mathbf{U}$ 的一个基，它具有整性、正性，并且在辩群作用下保持不变。将这个基与对偶（双）典范基进行比较很有意思，因为二者具有这些优良性质。对于量子 $\mathfrak{sl}_2$，可以看到它们彼此相同（[Sh22]），但对于高秩情形，这仍是个谜。

本文结构如下：第2 节回顾量子群的基础知识，并采用 [BG17]中的表述；第3 节概述 Qin 通过循环箭图簇上的层构造量子群的方法

该构造基于循环箭图簇上的层，并采用 Nakajima-Keller-Scherozke（NKS）箭图簇的通用语言 [KS16，Sch19]遵循 [LW21b，LP26]；第4 节致力于证明对偶典范基与双典范基的一致性；关于$\widetilde{\mathbf{U}}$的对偶（双）典范基$_v(\mathfrak{sl}_2)$的显式公式将在第5节给出。

致谢。感谢秦凡就箭图簇提供的宝贵讨论。我们感谢王伟强与我们合作开展相关项目，也感谢他富有见地的意见和启发性的讨论。ML 的研究部分得到中国国家自然科学基金（项目编号：12171333）的资助。

2. Quantum groups

令 $\mathbb{I} = \{1, \dots, n\}$ 为指标集。令 $C = (c_{ij})_{i,\ j\in\mathbb{I}}$ 为单边半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵。令 $\Delta^+ = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{I}\}$ 为$\mathfrak{g}$ 的简单根集合，并用 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}} := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n$ 表示根格。用 $\alpha_i^\vee (i \in \mathbb{I})$ 表示余根。令 Φ^+ 为正根集合。简单反射 $s_i : \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$ 定义为$s_i(\alpha_j)$ $= \alpha_j - c_{ij}\alpha_i$，其中 $i,\ j \in \mathbb{I}$。用 $W = \langle s_i \mid i \in \mathbb{I}\rangle$ 表示 Weyl 群。

令 v 为一个不定元。记 $[A, B] = AB - BA$ 和 $[A, B]_v = AB - vBA$。对于 $r,\ m \in \mathbb{N}$，记

$$[r] = \frac{v^r - v^{-r}}{v - v^{-1}}, \quad [r]! = \prod_{i=1}^{r} [i], \quad \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} = \frac{[m][m-1]\dots[m-r+1]}{[r]!}.$$

按照 [BG17], Drinfeld 双 $\widehat{\mathbf{U}} := \widehat{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{g})$ 定义为由以下元素生成的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数 $E_i,\ F_i,\ K_i,\ K_i',\ i \in \mathbb{I}$，并满足以下关系：对于 $i,\ j \in \mathbb{I}$，

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}(v^{-1} - v)(K_i - K_i'), \qquad [K_i, K_j] = [K_i, K_j'] = [K_i', K_j'] = 0, \tag{2.1}$$

$$K_i E_j = v^{c_{ij}} E_j K_i, \qquad K_i F_j = v^{-c_{ij}} F_j K_i, \tag{2.2}$$

$$K_i' E_j = v^{-c_{ij}} E_j K_i', \qquad K_i' F_j = v^{c_{ij}} F_j K_i', \tag{2.3}$$

对于 $i \neq j \in \mathbb{I}$，

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ r \end{bmatrix} E_i^r E_j E_i^{1-c_{ij}-r} = 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{r=0}^{1-c_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - c_{ij} \\ r \end{bmatrix} F_i^r F_j F_i^{1-c_{ij}-r} = 0. \tag{2.5}$$

我们定义 $\widetilde{\mathbf{U}} = \widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{g})$ 为由 $\widehat{\mathbf{U}}$ 构造的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数，方法是令 $K_i,\ K_i'(i \in \mathbb{I})$ 可逆。于是，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}$ 按照如下方式成为 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$-分次的：$\deg E_i = \alpha_i$，$\deg F_i = -\alpha_i$，$\deg K_i = 0 = \deg K_i'$。

注释 2.1。注意，**此处定义的 U** 与 [LW22a]中给出的不同，但二者同构。事实上，记

$$\mathcal{E}_i = \frac{E_i}{v^{-1} - v}, \qquad \mathcal{F}_i = \frac{F_i}{v - v^{-1}}, \qquad \forall i \in \mathbb{I}. \tag{2.6}$$

那么 t $\widetilde{\mathbf{U}}$ 在 U 的 [LW22a] 中给出的表示由 $\mathcal{E}_i,\ \mathcal{F}_i,\ K_i,\ K_i'$ $(i \in \mathbb{I})$.

量子群 $\mathbf{U}$定义为 $\mathbf{U}$(亦即 $\mathbf{U}$) 对由 $K_iK_i'-1$ （$i\in\mathbb{I}$）生成的理想取商所得的代数。事实上，$\mathbf{U}$ 是由 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数生成的，生成元为 E_i，F_i，K_i，K_i^{-1}，$i\in\mathbb{I}$，并满足由（2.1）–（2.5）修改而来的关系，其中 K_i' 替换为 K_i^{-1}。

令$\mathbf{U}^+$ 为由 E_i ($i\in\mathbb{I}$)生成的$\mathbf{U}$ （以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}$）的子代数，令$\mathbf{U}^0$ 为由 $K_i^{\pm1}$ ($i\in\mathbb{I}$)生成的 $\widehat{\mathbf{U}}$ 的子代数，并分别令$\mathbf{U}^-$ （以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}$）为由 F_i ($i\in\mathbb{I}$)生成的$\mathbf{U}$ 的子代数。$\widetilde{\mathbf{U}}$ （分别为 $\widehat{\mathbf{U}}$）的卡坦子代数 $\widetilde{\mathbf{U}}^0$ （分别为 $\widehat{\mathbf{U}}^0$）的定义类似。于是，代数$\mathbf{U}$、$\mathbf{U}$ 和$\mathbf{U}$ 具有如下三角分解：

$$\widehat{\mathbf{U}}=\mathbf{U}^+\otimes\widehat{\mathbf{U}}^0\otimes\mathbf{U}^-,\qquad \widetilde{\mathbf{U}}=\mathbf{U}^+\otimes\widetilde{\mathbf{U}}^0\otimes\mathbf{U}^-,\qquad \mathbf{U}=\mathbf{U}^+\otimes\mathbf{U}^0\otimes\mathbf{U}^-.$$

显然，$\widehat{\mathbf{U}}^0\cong\mathbb{Q}(v^{1/2})[K_i,K_i'\mid i\in\mathbb{I}]$、$\widetilde{\mathbf{U}}^0\cong\mathbb{Q}(v^{1/2})[K_i^{\pm1},(K_i')^{\pm1}\mid i\in\mathbb{I}]$ 以及$\mathbf{U}^0\cong\mathbb{Q}(v^{1/2})[K_i^{\pm1}\mid i\in\mathbb{I}]$。注意，$\mathbf{U}^0\cong\widehat{\mathbf{U}}^0/(K_iK_i'-1\mid i\in\mathbb{I})$。对于任意 $\mu=\sum_{i\in\mathbb{I}}m_i\alpha_i\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}}$、$\widetilde{\mathbf{U}}$、$\widehat{\mathbf{U}}$，我们用$K_\mu=\prod_{i\in\mathbb{I}}K_i^{m_i}$、$K_\mu'=\prod_{i\in\mathbb{I}}(K_i')^{m_i}$ 表示$\mathbf{U}$ （或 $\mathbf{U}$）中的；若$\mu\in\mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，我们可以将 K_μ,K_μ' 视为$\mathbf{U}$ 中的元素。

引理 2.2 （参见 [BG17]）。存在一个反对合 $u\mapsto\overline{u}$，作用于 $\mathbf{U}$ （同样作用于 $\mathbf{U}$、$\widetilde{\mathbf{U}}$），由 $\overline{v^{1/2}}=v^{-1/2}$、$\overline{E_i}=E_i$、$\overline{F_i}=F_i$ 以及$\overline{K_i}=K_i$、$\overline{K_i'}=K_i'$ 给出，对 $i\in\mathbb{I}$。

设 Br(W) 为与 Weyl 群 W 相关联的辫群，由 t_i ($i\in\mathbb{I}$) 生成。Lusztig 引入了辫群对称 $T_{i,e}'$、$T_{i,e}''$，分别用于 $i\in\mathbb{I}$ 与 $e=\pm1$，并作用在 Drinfeld-Jimbo 量子群 $\mathbf{U}$ [上，见 Lus93，§37.1.3]。这些辫群对称可提升到$\widetilde{\mathbf{U}}$ Drinfeld 双 $\mathbf{U}$；参见 [LW21a，命题 6.20–6.21],，并记为 $T_{i,e}'$、$T_{i,e}''$。我们将使用 T_i 的如下修正版本：$=T_{i,1}''$（对照 [BG17，定理 1.13]）。

命题 2.3. 存在一个自同构 T_i，对于 $i\in\mathbb{I}$，作用在 $\mathbf{U}$ 上，使得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{T}_i(K_\mu)=K_{s_i(\mu)},\qquad \widetilde{T}_i(K_\mu')=K_{s_i(\mu)}',\quad\forall\mu\in\mathbb{Z}^{\mathbb{I}},\\
&\widetilde{T}_i(E_i)=v(K_i')^{-1}F_i,\qquad \widetilde{T}_i(F_i)=v^{-1}E_iK_i^{-1},\\
&\widetilde{T}_i(E_j)=E_j,\qquad \widetilde{T}_i(F_j)=F_j,\qquad \text{if } c_{ij}=0,\\
&\widetilde{T}_i(E_j)=\frac{v^{\frac12}E_iE_j-v^{-\frac12}E_jE_i}{v-v^{-1}},\qquad \widetilde{T}_i(F_j)=\frac{v^{\frac12}F_iF_j-v^{-\frac12}F_jF_i}{v-v^{-1}},\ \text{if } c_{ij}=-1.
\end{aligned}$$

此外，$\widetilde{\mathbf{U}}$ 存在一个群同态 $\mathrm{Br}(W)\to\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathbf{U}})$，$t_i\mapsto T_i$ 对于 $i\in\mathbb{I}$。

因此，我们可以定义

$$\widetilde{T}_w:=\widetilde{T}_{i_1}\cdots\widetilde{T}_{i_r}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathbf{U}}),\tag{2.7}$$

其中 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ 是 $w\in W$ 的任意一个约化表达式。

引理 2.4. 辫群作用 T_i 与 $\overline{\ bar\ }$ 对合–相交换，即 $T_i(u)=T_i(\overline{u})$ 对于任意 $u\in\mathbf{U}$。

证明。只需验证 $T_i(\overline{u})=\overline{T_i(u)}$ 对于 $u=E_i$，F_i，K_i，K_i'，由命题2.3显然成立。□

命题 2.5 ([Lus90a，命题 1。10])。 设 w_0 是 W 的最长元素，并固定一个约化表达式 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ 作为最长元素 $\omega_0 \in W$。令

$$F_{\beta_k} = \widetilde{T}_{i_1}^{-1}\widetilde{T}_{i_2}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_{k-1}}^{-1}(F_{i_k}), \qquad E_{\beta_k} = \widetilde{T}_{i_1}^{-1}\widetilde{T}_{i_2}^{-1} \cdots \widetilde{T}_{i_{k-1}}^{-1}(E_{i_k}), \tag{2.8}$$

对于 $1 \le k \le l, a \in \mathbb{N}$。则这些单项式

$$F^{\mathbf{a}} = v^{\frac{1}{2}n_{\mathbf{a}}} F_{\beta_1}^{a_1} F_{\beta_2}^{a_2} \cdots F_{\beta_l}^{a_l}, \qquad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_l) \in \mathbb{N}^l$$

构成 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基，其中$\mathbf{U}^-$，其中

$$n_{\mathbf{a}} = \sum_{1 \le k < l \le N} (\beta_k, \beta_l) a_k a_l.$$

类似地，这些单项式

$$E^{\mathbf{a}} = v^{\frac{1}{2}n_{\mathbf{c}}} E_{\beta_1}^{a_1} E_{\beta_2}^{a_2} \cdots E_{\beta_l}^{a_l}, \qquad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_l) \in \mathbb{N}^l$$

构成$\mathbf{U}^+$的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。此外，这些单项式

$$F^{\mathbf{a}} E^{\mathbf{c}} K_\mu K'_\nu, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^l, \mu, \nu \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \tag{2.9}$$

构成 $\widetilde{\mathbf{U}}$的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。对 $\widehat{\mathbf{U}}$也有类似结果。

令 $\mathcal{Z} := \mathbb{Z}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。则整形式 $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathcal{Z}}$ $\widetilde{\mathbf{U}}$定义为 $\mathcal{Z}$-自由模，其一组基由（2.9）给出。已知$\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$ 是一个代数；参见 [LP25，命题 4。10]。

3. Quantum groups via quiver varieties

在本节中，我们回顾 [Q16], 中给出的量子群的几何实现，亦见 [LP26]。在本节中，我们假设 k 是特征零的代数闭域，并用 mod(k) 表示 k-向量空间的范畴。对于一个 k-线性范畴 $\mathcal{C}$，我们用 mod($\mathcal{C}$) 表示 $\mathcal{C}$–模的范畴，即 k-线性反变函子 $\mathcal{C} \to \mathrm{mod}(k)$。此外，对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathcal{C}_0$ 表示 $\mathcal{C}$的对象集。

对于一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$，我们用 kQ 表示其路径代数，并用 mod(kQ) 表示有限维左 kQ-模的范畴。有界导出范畴为 $\mathcal{D}_Q = \mathcal{D}^b$(mod($kQ$))，其平移函子为 Σ。单模为 S_i ($i \in Q_0$)。

3.1. NKS 范畴。

设 $Q = (Q_0 = \mathbb{I}, Q_1)$ 为一个 Dynkin 箭图，并令

$$\overline{Q}_1 = \{\bar{h} : j \to i \mid (h : i \to j) \in Q_1\}.$$

定义 Q 的重复箭图 $\mathbb{Z}Q$ 如下：

▷ 顶点集为 $\{(i, p) \in Q_0 \times \mathbb{Z}\}$;

▷ 给定一条箭头 $(\alpha, p) : (i, p) \to (j, p)$，以及一条箭头 $(\bar{\alpha}, p) : (j, p-1) \to (i, p)$；对于 Q 中的任意箭头 $\alpha : i \to j$ 和任意顶点 (i, p)，上述定义均成立。

定义 $\tau$of $\mathbb{Z}Q$ 的自同构为向左平移一个单位，即对所有 $(i, p) \in Q_0 \times \mathbb{Z}$，有 $\tau(i, p) = (i, p-1)$。稍微滥用一下记号，对于与 $\beta : y \to x$ in $\mathbb{Z}Q$ 相关联的对象，我们用 β 表示从 $\tau x \to y$ 出发的箭头。令 $k(\mathbb{Z}Q)$ 为 $\mathbb{Z}Q$ 的网格范畴。根据 Happel [Ha88], 的定理，存在一个等价

$$H : k(\mathbb{Z}Q) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ind}\, \mathcal{D}_Q, \tag{3.1}$$

其中 $\mathrm{Ind}\,\mathcal{D}_Q$ 表示有界导出范畴 $\mathcal{D}_Q = \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(kQ))$ 中不可分解对象构成的范畴。利用这个等价，我们一次性地将 $\mathbb{Z}Q$ 的顶点标记为 $\mathcal{D}_Q$ 中不可分解对象的同构类。注意，τ 在 $\mathbb{Z}Q$ 上的作用对应于 AR 平移在 $\mathcal{D}_Q$ 上的作用，这也解释了记号 τ。

Let

$$C = \{\text{the vertices labeled by } \Sigma^j \mathrm{S}_i, \text{ for all } i \in Q_0 \text{ and } j \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.2}$$

令 $\mathbb{Z}Q_C$ 为由 $\mathbb{Z}Q$ 构造的箭图：在每个顶点 $c \in C$ 处添加一个记作 σc 的新对象，并添加箭头 $\tau c \to \sigma c$ 和 $\sigma c \to c$；对于 $c \in C$，我们将 σc 称为冻结顶点。

分次 *NKS* 范畴 $\mathcal{R}_C^{\mathrm{gr}}$ 定义为一个 k-线性范畴，其

▷ 对象：$\mathbb{Z}Q_C$ 的顶点；▷ 态射：k 线性组合的 $\mathbb{Z}Q_C$ 中的路径，对网格关系生成的理想 $\sum_\alpha$ 取商: $_{y\to x}\,\alpha\bar{\alpha}$，其中求和遍历所有终止于 $x \in \mathbb{Z}Q$ 的 $\mathbb{Z}Q_C$ 箭头（若 $x \in C$，也包括新箭头 $\sigma x \to x$ ）。

令 $F = \Sigma^2$： $\mathcal{D}_Q \to \mathcal{D}_Q$。注意，$C$ 在 (3.2) 中的子集 F在作用下不变。态射F 的 $\mathbb{Z}Q$ 同构可唯一提升为 $\mathbb{Z}Q_C$ 的同构，定义为 $F(\sigma c) = \sigma(Fc)$，其中 $c \in C$任意；随后，网格范畴 $k(\mathbb{Z}Q$的函子 F 可唯一提升为 $\mathcal{R}_C^{\mathrm{gr}}$，也记作 F。

Let

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{C,F} := \mathcal{R}_C^{\mathrm{gr}}/F,$$

并令$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{C,\ F}$ 为 $\mathcal{R}$ 由所有 σc （$c \in C$）按照 [Sch19]构成的全子范畴。则 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{S}$ 分别称为这对（正则 *NKS* 范畴和奇异 *NKS* 范畴的F， C）。

令 $Q^{\mathrm{dbl}} = Q \sqcup Q'$，其中 Q' 是 Q 的一个完全相同的副本。双框箭图 $Q^\sharp$ 是由 Q^{dbl} 添加箭头 ε_i: $i \to i'$， ε_i': $i' \to i$ （对任意 $i \in \mathbb{I}$）构造而成的箭图。令 $I^\sharp$ 为由以下元素生成的 $\mathbf{k}Q^\sharp$ 的容许理想:

- （幂零关系） $\varepsilon_i\varepsilon_i'$, $\varepsilon_i'\varepsilon_i$ （对任意 $i \in Q_0$）；
- （交换关系） $\varepsilon_j'\alpha' - \alpha\varepsilon_i'$, $\varepsilon_j\alpha - \alpha'\varepsilon_i$ （对任意 $(\alpha: i \to j) \in Q_1$。

我们定义代数 $\Lambda = \mathbf{k}Q^\sharp/I^\sharp$。则 $\mathcal{S} \cong \mathrm{proj}(\Lambda)$，进而 $\mathbf{mod}(\mathcal{S}) \simeq \mathrm{mod}(\Lambda)$；参见[LW21b，注 3。7]。

在中岛的原始构造中 [Na01，Na04], 分次中岛范畴 $\mathcal{R}^{\mathrm{gr}}$ 以类似的方式定义，其中取 C 的所有顶点构成的集合 $\mathbb{Z}Q$。我们将 $\mathcal{S}^{\mathrm{gr}}$ 由 $\mathcal{R}^{\mathrm{gr}}$ 所有 σc构成的全子范畴记作 $c \in \mathbb{Z}Q$。和 $\mathcal{S}^{\mathrm{gr}}$ 范畴将在§4.2中使用。

3.2. NKS 箭图簇。 设 $\mathcal{S}$ 为奇异 NKS 范畴， $\mathcal{R}$ 为其对应的正则 NKS 范畴。若 $\mathcal{R}$-模 M 的 $\mathbf{soc}(M)$ 的支撑包含于$\mathcal{S}_0$，则称其为稳定。

设$\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 和$\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$ 为维数向量（支撑有限）。用 $\mathbf{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 表示维数向量为 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的 $\mathcal{R}$-模所构成的簇。令 $\mathbf{1}_x$ 表示 $x \in \mathcal{R}_0$的特征函数，它也被视为支撑于 x 的单位向量。令$G_{\mathbf{v}} := \prod_{x\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0} \mathbf{GL}(\mathbf{v}(x)\ k)$。

定义 3.1. NKS箭图簇，或简称NKS簇， $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是商$\mathcal{S}t(\mathbf{v},\mathbf{w})/G_{\mathbf{v}}$，其中 $\mathcal{S}t(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是 $\mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 中所有维数向量为$(\mathbf{v},\mathbf{w})$的稳定 $\mathcal{R}$-模所构成的子集。定义仿射簇

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) := \mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})/\!\!/G_{\mathbf{v}} \tag{3.3}$$

作为范畴商，其坐标代数为 $k[\mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})]^{G_{\mathbf{v}}}$.

则 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是一个纯维光滑拟射影簇；参见 [Sch19，定理 3。2]投影映射

$$\pi : \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \longrightarrow \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}), \tag{3.4}$$

它将稳定 $G_{\mathbf{v}}$-模的 $\mathcal{R}$-轨道 M 映射到 $G_{\mathbf{v}}$-轨道 $G_{\mathbf{v}}M$的闭包中唯一的闭 [Sch19-轨道；参见定理 3。5]令 $\mathbf{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 表示维数向量为 $\mathcal{S}$-模$\mathbf{w}$的簇。定义仿射簇

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}) = \mathcal{M}_0(\mathbf{w},\mathcal{R}) := \operatorname*{colim}_{\mathbf{v}} \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

为沿包含映射的 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的余极限。根据 [LW21b，引理 3，14], 我们知道$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}) \cong \mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 对任意维数向量 $\mathbf{w}$均成立，并在下文中将它们视为相同。

将 $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 记为由稳定模的闭 $G_{\mathbf{v}}$-轨道之并组成的开子集，然后

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \pi(\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}))$$

是 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v}，\ \mathbf{w})$ 的一个开子集。

给定 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$，我们定义量子Cartan矩阵（参见 [Sch19]）

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_q\mathbf{v} : \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, \\ &(\mathcal{C}_q\mathbf{v})(x) = \mathbf{v}(x) + \mathbf{v}(\tau x) - \sum_{y\to x} \mathbf{v}(y), \quad \text{for } x \in \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中求和遍历 $\mathcal{R}$ 中满足 $y \in \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0$的所有箭头 $y \to x$ 。给定 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，定义一个维数向量

$$\sigma^*\mathbf{w} : \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \mathbf{w}(\sigma x), & \text{if } x \in C, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给定 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$，定义维数向量

$$\tau^*\mathbf{v} : \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathbb{N}, \qquad x \mapsto \mathbf{v}(\tau x).$$

根据 [Sch19，命题 4.6]，，我们得到对 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w})$ 分层的以下更精确形式

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}:\sigma^*\mathbf{w}-\mathcal{C}_q\mathbf{v}\geq 0} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}). \tag{3.6}$$

一对维数向量 $(\mathbf{v}，\ \mathbf{w})$，其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 且 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，称为 *l*-支配的，如果 $\sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} \geq 0$。

对于范畴 $\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}$ 和 $\mathcal{S}^{\mathfrak{gr}}$，我们还可以定义 NKS 箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v}，\ \mathbf{w}\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$ 和$\mathcal{M}_0(\mathbf{v}，\ \mathbf{w}\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$。

3.3. **量子格罗滕迪克环。** 我们按照 [VV03] 对量子格罗滕迪克环及其卷积积进行回顾；另请参见 [Na01、Na04、Q16]。

对于任意两个维数向量 α、β，令 $\mathcal{S}$ 的分次维数为$\alpha+\beta$的向量空间。固定一个分次维数为 α 的向量子空间 $W_0 \subset V_{\alpha+\beta}$，并令

$$F_{\alpha,\beta} := \{y \in \mathrm{rep}(\alpha+\beta, \mathcal{S}) \mid y(W_0) \subset W_0\}$$

为 $\mathrm{rep}(\alpha+\beta, \mathcal{S})$ 的闭子集。那么 $y \in F_{\alpha,\beta}$ 诱导出一个自然的线性映射 $y' : V/W_0 \to V/W_0$，即 $y' \in \mathrm{rep}(\beta, \mathcal{S})$。因此我们得到以下卷积图

$$\mathrm{rep}(\alpha, \mathcal{S}) \times \mathrm{rep}(\beta, \mathcal{S}) \xleftarrow{p} F_{\alpha,\beta} \xrightarrow{q} \mathrm{rep}(\alpha+\beta, \mathcal{S}),$$

其中 $p(y) := (y|_{W_0}, y')$，而 q 是自然的闭嵌入。

令 $\mathcal{D}_c(\mathrm{rep}(\alpha, \mathcal{S}))$ 为 $\mathrm{rep}(\alpha, \mathcal{S})$ 上可构造层的导出范畴。我们有以下限制函子（称为余乘法），

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha,\beta}^{\alpha+\beta} : \mathcal{D}_c\big(\mathrm{rep}(\alpha+\beta, \mathcal{S})\big) \longrightarrow \mathcal{D}_c\big(\mathrm{rep}(\alpha, \mathcal{S})\big) \times \mathcal{D}_c\big(\mathrm{rep}(\beta, \mathcal{S})\big), \quad F \mapsto p_! q^*(F). \tag{3.7}$$

选取一个集合 $\{\alpha_{\mathbf{v}}\}$，使其参数化 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 的连通分支。对于任意 l-支配对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，由于 π 在正则分层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R}$上的限制由 [Sch19，定义 3.6], 所给出的是一个同胚，因此集合 $\{\alpha_{\mathbf{v}}\}$ 自然地参数化了这个正则分层的连通分支：

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) = \bigsqcup_{\alpha_{\mathbf{v}}} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg};\alpha_{\mathbf{v}}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}). \tag{3.8}$$

令 $\underline{k}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 为 $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 上的常值层。记 $\pi^{\mathcal{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{D}_c(\mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S}))$（无歧义时也记为 $\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$）为沿 $\pi\colon \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{w}) \cong \mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 的推前，并作如下分次平移：

$$\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \pi_!(\underline{k}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})})[\dim \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})]. \tag{3.9}$$

对于强 l-支配对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，令 $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$（无歧义时也记为 $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$）为与层 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 相关联、关于平凡局部系统的交叉上同调（简称 IC）复形，即

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{IC}(\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})) = \bigoplus_{\alpha_{\mathbf{v}}} \mathrm{IC}(\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg};\alpha_{\mathbf{v}}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})). \tag{3.10}$$

我们有如下分解

$$\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{v}' : \sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v}' \geq 0, \mathbf{v}' \leq \mathbf{v}} a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v)\mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w}), \tag{3.11}$$

其中，对任意层 $\mathcal{F}$，$m \in \mathbb{N}$，我们用不定元 v 记 $\mathcal{F}^{\oplus m}[d]$ 关于 $mv^{-d}\mathcal{F}$ 的量；（为了与 [LW21b], 比较，取 $v = t^{-1}$）。此外，我们有 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v) \in \mathbb{N}[v, v^{-1}]$，$a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v^{-1}) = a_{\mathbf{v},\mathbf{v}';\mathbf{w}}(v)$，以及 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v};\mathbf{w}}(v) = 1$。（任何满足 $f(v^{-1}) = f(v)$ 的 $f(v) \in \mathbb{N}[v, v^{-1}]$ 都称为巴不变。）

对每个 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，格罗滕迪克群 $K_{\mathbf{w}}$(模($\mathcal{S}$)) 定义为由式（$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 中出现的层生成的自由阿贝尔群，其中 3.11)，对各种 $\mathbf{v}$。根据式（$\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$）它有一个 3.11-基：

$$\{\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} \geq 0\}. \tag{3.12}$$

考虑自由 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-模

$$K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) := \bigoplus_{\mathbf{w}} K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})). \tag{3.13}$$

~ ~那么，$\{\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}\}$ 在 $K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$上诱导出余乘法 Δ。

在 $\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 上引入双线性形式 $d(\cdot,\cdot)$，定义如下：

$$d\big((\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2)\big) = (\sigma^*\mathbf{w}_1 - \mathcal{C}_q\mathbf{v}_1)\cdot\tau^*\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\cdot\sigma^*\mathbf{w}_2, \tag{3.14}$$

其中，$\cdot$ 表示标准内积，即$\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}'' = \sum_{x\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}\mathbf{v}'(x)\mathbf{v}''(x)$。

命题 3.2([SS16，命题 4。8]；另见 [VV03，引理 4。1],[Q16，等式 (11)])。余乘法~ Δ 是余结合的，且可表示为

$$\widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2}\big(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})\big) = \bigoplus_{\substack{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}\\ \mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=\mathbf{w}}} v^{d((\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2))-d((\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2),(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1))}\pi(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1)\boxtimes\pi(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2). \tag{3.15}$$

记

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}(K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})),\mathbb{Z}[v,v^{-1}]),\\ K^{\mathrm{gr}*}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) &= \bigoplus_{\mathbf{w}\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}}\mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})).\end{aligned} \tag{3.16}$$

那么，作为余代数的分次对偶，$K^{\mathrm{gr}*}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$成为一个 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-代数，其乘法记为 $*$。注意，$K^{\mathrm{gr}*}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$是一个$\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$-分次代数（称为量子格罗滕迪克环）。它具有一个特征基

$$\{L(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid \sigma^*\mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} \geq 0\}, \tag{3.17}$$

与（3.12）中的基对偶，称为对偶 IC 基。

根据横截切片定理 [Na01，LW21b],我们有

$$L(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1) * L(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2) = \sum_{\mathbf{v}\geq\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2} c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v)L(\mathbf{v},\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2), \tag{3.18}$$

其首项为 $c^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v)L(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)$；此外，我们有

$$c^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v) \in \mathbb{N}[v,v^{-1}], \tag{3.19}$$

$$c^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(v) = v^{d((\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1),(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2))-d((\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2),(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1))}. \tag{3.20}$$

回忆一下，$\mathbf{1}_x$ 表示 $x\in\mathcal{R}_0$的特征函数。定义

$$\mathbf{w}^i = \mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_i} + \mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathtt{S}_i},\qquad \mathbf{v}^i = \sum_{z\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}\dim\mathcal{P}(\mathtt{S}_i,z)\mathbf{1}_z,\qquad \mathbf{v}^{\Sigma i} = \Sigma^*\mathbf{v}^i. \tag{3.21}$$

记

$$W^+ = \bigoplus_{x\in\{\mathtt{S}_i,i\in Q_0\}}\mathbb{N}\mathbf{1}_{\sigma x},\qquad V^+ = \bigoplus_{x\in\mathrm{Ind}\ \mathrm{mod}(kQ)\ x\ \text{不是单射}}\mathbb{N}\mathbf{1}_x, \tag{3.22}$$

$$W^- = \Sigma^*W^+,\qquad V^- = \Sigma^*V^+, \tag{3.23}$$

$$W^0 = \bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{N}\mathbf{w}^i,\qquad V^0 = \bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{N}\mathbf{v}^i\oplus\mathbb{N}\mathbf{v}^{\Sigma i}. \tag{3.24}$$

引理 3.3（[Q16]）。设 $v \in V^0$、$w \in W^0$，满足 $\sigma^* w - \mathcal{C}_q v = 0$。则有 $(v,w) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{I}} \mathbb{N}(v^i, w^i) + \bigoplus_{i\in\mathbb{I}} \mathbb{N}(v^{\Sigma i}, w^i)$。

引理 3.4（l-主导对分解；见 [Q16]）。若 (v,w) 是关于 $\mathcal{R}$ 的 l-主导对，则存在唯一的分解，将 (v,w) 分解为 l-主导对 $(v^+, w^+) \in (V^+, W^+)$、$(v^-, w^-) \in (V^-, W^-)$、$(v^0, w^0) \in (V^0, W^0)$，使得

$$(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) + (\mathbf{v}^-, \mathbf{w}^-) + (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad \sigma^* \mathbf{w}^0 - \mathcal{C}_q \mathbf{v}^0 = 0.$$

设 $Q^{\mathrm{dbl}} = Q \sqcup Q'$，其中 Q' 是 Q 的一个相同副本。注意到 $\mathcal{S} \cong \mathsf{proj}(\Lambda)$，我们可以将 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$ 视为 Q^{dbl} 的维数向量；见 [LP26，§4]。借助 kQ^{dbl} 的欧拉形式 $\langle -, - \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}}}$，我们定义如下双线性形式 $\langle -, - \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}},\, a}$：对于任意维数向量 $\mathbf{w}$，$\mathbf{w}' \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，令

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}},a} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}}} - \langle \mathbf{w}', \mathbf{w} \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}}}. \tag{3.25}$$

固定 v 的一个平方根 $v^{1/2}$，并令 $\mathcal{Z} := \mathbb{Z}[v^{1/2}, v^{-1/2}]$。

余代数 $K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$（参见（3.13））及其分次对偶（参见（3.16），在此处的当前设定中，经基变换后可表述如下：

$$K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})) = \bigoplus_{\mathbf{w}\in W^+ + W^-} K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})), \tag{3.26}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_{\mathbf{w}\in W^+ + W^-} \widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z},\mathbf{w}}, \quad \text{where } \widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z},\mathbf{w}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}\left(K_{\mathbf{w}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S})), \mathcal{Z}\right). \tag{3.27}$$

$\widehat{\ }$那么，$(\mathbf{R}_{\mathcal{Z}}, \cdot)$ 是与余代数 $K^{\mathrm{gr}}(\mathrm{mod}(\mathcal{S}))$ 对应的 $\mathcal{Z}$-代数，其余乘法经过扭曲

$$\{\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2} := v^{\frac{1}{2}\langle \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2 \rangle_{Q^{\mathrm{dbl}},a}} \widetilde{\Delta}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^1,\mathbf{w}^2}\}; \tag{3.28}$$

实际上，乘积符号 $\cdot$ 通常省略。

下面我们将用到通过基变换得到的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数：

$$\widehat{\mathbf{R}} = \mathbb{Q}(v^{1/2}) \otimes_{\mathcal{Z}} \widehat{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}}. \tag{3.29}$$

$\widehat{\ }$我们还将 $\mathbf{R}^+$ 定义为 $\mathbf{R}$ 中由 $L(\mathbf{v}、\mathbf{w})、(\mathbf{v}、\mathbf{w}) \in (V^+, W^+)$ 生成的子模。它在 $\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2}$，下也构成一个代数，且包含映射 $\mathbf{R}^+ \hookrightarrow \mathbf{R}$ 是一个代数同态。$\widehat{\ }$类似地，我们可以定义 $\mathbf{R}^-$。

$\widetilde{\ }$我们将 $\mathbf{R}_{\mathcal{Z}}$ 定义为对由 $L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$ 和 $L(\mathbf{v}^{\Sigma i}, \mathbf{w}^i)$ 生成的乘法封闭子集进行局部化所得的 $\mathbf{R}_{\mathcal{Z}}$（$i \in Q_0$）。定义

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbb{Q}(v^{1/2}) \otimes_{\mathcal{Z}} \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{Z}}. \tag{3.30}$$

下述定理重新得到 [Q16] 的主要结果。

定理 3.5。设 Q 为一个 *Dynkin* 箭图。则存在一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数 $\tilde{\kappa}$：$\mathbf{U} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathbf{R}}$ 的同构 $\widetilde{\ }$，其将

$$E_i \mapsto L(0, \mathbf{1}_{\sigma \mathcal{S}_i}), \quad F_i \mapsto L(0, \mathbf{1}_{\sigma\Sigma \mathcal{S}_i}), \quad K_i \mapsto L(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i), \quad K_i' \mapsto L(\mathbf{v}^{\Sigma i}, \mathbf{w}^i).$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们知道 $\tilde{\kappa}$ 诱导了一个 $\mathcal{Z}$-代数 $\tilde{\kappa}$ 同构：$\mathbf{U}_{\mathcal{Z}} \xrightarrow{=} \mathbf{R}_{\mathcal{Z}}$；参见 [LP26，推论 5。4]。

定义 3.6（量子群的对偶典范基）。 对偶 *IC* 基 $\{\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid \sim\sigma^* \mathbf{w} - \mathcal{C}_q\mathbf{v} \geq 0\}$ 在 $\mathbf{R}_{\mathcal{Z}}$ 下经定理 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}$*3.5* 中的同构映射为*3.5*, ~称为对偶典范基，它是U的基。

~ ^韦迪耶对偶定义了一个反自同构 $\bar{\cdot}$ 作用于$\mathbf{R}$ （以及$\mathbf{R}$），其定义为$L(\mathbf{v},\mathbf{w}) = L(\mathbf{v},\mathbf{w})$, $v = v^{-1}$。通过同构 $\tilde{\kappa}$，这个反自同构与$\mathbf{U}$ （以及^还有$\mathbf{U}$）的 bar 对合相一致。我们可以定义由$L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)$、$(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \in (V^0,W^0)$生成的子代数在$\mathbf{R}$上的 $\diamond$-作用，其特征为

$$L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \diamond L(\mathbf{v},\mathbf{w}) = L(\mathbf{v}^0+\mathbf{v},\mathbf{w}^0+\mathbf{w}) = \overline{L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) \diamond L(\mathbf{v},\mathbf{w})} \tag{3.31}$$

对任意 l-占优对（$\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$）；参见 [LP26, (6.3)]。

3.4. 对偶典范基的代数构造。本小节将^回顾 [LP25]中给出的 $\mathbf{U}$ 的对偶典范基的代数构造。回顾一下 (2.6) 中的生成元 $\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i$。Lusztig 通过生成元 $\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i (i \in \mathbb{I})$构造了 $\mathbf{U}^{\pm}$ 的典范基。令 $\mathbf{B}^-$ 为 $\mathbf{U}^-$ 的 Lusztig 典范基（通过生成元 $\mathcal{F}_i$ $(i \in \mathbb{I})$）。按照[Ka91], , 我们在 $\mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+$ 上定义一个 Hopf配对：

$$(F_i, E_j)_K = \delta_{ij}(v - v^{-1}). \tag{3.32}$$

对于 $b \in \mathbf{B}^-$，我们将 $\delta_b \in \mathbf{U}^+$ 在配对 $(\cdot, \cdot)_K$ 下的对偶基记为 b。我们定义范数函数 $N: \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}$ 为

$$N(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha,\alpha)_Q - \eta(\alpha).$$

其中 $\eta: \mathbb{Z}^{\mathbb{I}} \to \mathbb{Z}$ 是由 $\eta(\sum_i a_i\alpha_i) = \sum_i a_i$ 定义的增广映射（参见 [GLS13, HL15]）。于是，$\mathbf{U}^+$ 的重标度对偶典范基定义为

$$\widetilde{\mathbf{B}}^+ := \{v^{\frac{1}{2}N(-\deg(b))}\delta_b \mid b \in \mathbf{B}^-\}.$$

~$\mathbf{U}^-$ 的重标度对偶典范基定义为 $\varphi(\mathbf{B}^+)$，其中 φ 是由 $E_i \mapsto F_i$ 定义的同构$\mathbf{U}^+ \to \mathbf{U}^-$。

例 3。 ~ ~ ~ ~**7.** 对于 $\mathbf{U} = \mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$，有 $\mathbf{B}^+ = \{E_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathbf{B}^- = \{F_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

~定理 *3.8*（[*HL15, Q*16]）。在同构 $\kappa^+ : U^+ \to R^+$, $E_i \mapsto L(0,1_{\sigma s_i})$ 下，基 $\{L(v, w) \mid (v, w) \in (V^+, W^+)\}$ 与 U^+ 的重标度对偶典范基相对应。

^记 $\mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+$ 为张量代数。利用 $\imath$Hall 代数实现 $\mathbf{U}$ 在[LW22a],中，我们得到一个线性空间嵌入

$$\iota : \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+ \hookrightarrow \widehat{\mathbf{U}}.$$

我们强调，ι 既不是代数同态，也不是由 ^$\mathbf{U}$的三角分解所诱导的。为了描述 ι，我们将回顾斜导子 ∂_i^L: $\mathbf{U}^{\pm} \to \mathbf{U}^{\pm}$，其中 $i \in \mathbb{I}$ （参见 [Lus93]）。它们是满足以下条件的线性映射 $\partial_i^L(1) = 0$, $\partial_i^L(E_j) = \delta_{ij} = \partial_i^L(F_j)$，并且

$$\partial_i^L(fg) = v^{(\alpha_i,\nu)}\partial_i^L(f)g + f\partial_i^L(g),$$

对于任意 $j \in \mathbb{I}, f \in \mathbf{U}^{\pm}_{\pm\mu}, g \in \mathbf{U}^{\pm}_{\pm\nu}$。（注意，算子 $\partial_i^L \colon \mathbf{U}^- \to \mathbf{U}^-$ 在此对应于 $\partial_i^R \colon \mathbf{U}^- \to \mathbf{U}^-$，见 [Lus93]。）通过平移 Hall积（见 [LR24，命题 3.3]），我们可以描述 $\iota(y \otimes x)$ 的像，其中 $x \in \mathbf{U}^+_\nu, y \in \mathbf{U}^-_{-\mu}$。它是由以下关系唯一确定的元素，对所有 $i \in \mathbb{I}$,

$$\iota(y \otimes 1) = y, \qquad \iota(1 \otimes x) = x, \tag{3.33}$$

$$E_i \iota(y \otimes x) = \iota(y \otimes E_i x) + (v - v^{-1}) v^{-(\alpha_i, \mu - \alpha_i)} K_i' \cdot \iota\big(\partial_i^L(y) \otimes x\big), \tag{3.34}$$

$$F_i \iota(y \otimes x) = \iota(F_i y \otimes E_i) + (v - v^{-1}) v^{-(\alpha_i, \nu - \alpha_i)} K_i \cdot \iota\big(y \otimes \partial_i^L(x)\big). \tag{3.35}$$

接下来，我们将研究 $F^{\mathbf{a}} \otimes E^{\mathbf{c}}$ 在此嵌入下的像，其中 $F^{\mathbf{a}}$ 和 $E^{\mathbf{c}}$ 是命题 2.5的 PBW 基元素。

回顾引理 2.2，可知 $E_i = \widehat{E_i}$、$F_i = F_i$ 以及 $K_i = K_i$、$K_i' = K_i'$ 对 $i \in \mathbb{I}$ 所确定的 bar 对合。

令 $\Gamma = \mathbb{N}^{\mathbb{I}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$ 并定义

$$\alpha_{+i} = (\alpha_i, 0), \quad \alpha_{-i} = (0, \alpha_i).$$

我们在 $\mathbf{U}$ 上引入一个新的次数函数，定义如下：

$$\deg_\Gamma(E_i) = \alpha_{+i}, \quad \deg_\Gamma(F_i) = \alpha_{-i}, \quad \deg_\Gamma(K_i) = \deg_\Gamma(K_i') = \alpha_{+i} + \alpha_{-i}.$$

容易验证，关于此次数函数，$\mathbf{U}$ 成为一个 Γ-分次代数。利用此分次结构，我们定义 $\mathbf{U}^0$ 在 $\mathbf{U}$ 上的作用 $\diamond$，其中 $\widehat{\ }$ 为

$$K_i \diamond x = v^{-\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\deg_\Gamma(x))} K_i x, \quad K_i' \diamond x = v^{\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\deg_\Gamma(x))} K_i' x$$

对于齐次的 $x \in \mathbf{U}$，其中 $\check{\alpha}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{Z})$ 由 $\check{\alpha}_i(\alpha_{\pm i}) = \pm c_{ij}$ 定义。该作用由相容性条件刻画：

$$\overline{K \diamond x} = K \diamond \overline{x}, \quad K \in \widehat{\mathbf{U}}^0, x \in \widehat{\mathbf{U}}. \tag{3.36}$$

下面的定理给出了 $\mathbf{U}$ 的对偶典范基的代数刻画。

定理 3.9 ([LP25，命题 4。13])。 **</style}对于任意 $\mathbf{a}$、$\mathbf{c}$ $\in \mathbb{N}^l$ 以及 α、$\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}$，存在唯一的元素 $\widehat{C}_{\alpha,\ \beta;\mathbf{a},\ \mathbf{c}} \in \mathbf{U}$，使得 $C_{\alpha,\ \beta;\mathbf{a},\ \mathbf{c}} = \overline{C_{\alpha,\ \beta;\mathbf{a},\ \mathbf{c}}}$ 并且**

$$C_{\alpha,\beta;\mathbf{a},\mathbf{c}} - K_\alpha K_\beta' \diamond \iota(F^{\mathbf{a}} \otimes E^{\mathbf{c}}) \in \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] K_{\alpha'} K_{\beta'}' \diamond \iota(F^{\mathbf{a}'} \otimes E^{\mathbf{c}'})$$

此外，$C_{\alpha,\ \beta;\mathbf{a},\ \mathbf{c}} = K_\alpha K_\beta' \diamond C_{0,\ 0;\mathbf{a},\ \mathbf{c}}$ 以及 $\{C_{\alpha,\beta;\mathbf{a},\mathbf{c}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{I}}, \mathbf{a}、\mathbf{c} \in \mathbb{N}^l\}$ 构成 $\mathbf{U}$ 的一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-基，并且它与 $\mathbf{U}$ 的对偶典范基重合。

通过使 K_i，K_i' 可逆，我们还知道 $\{C_{\alpha,\beta;\mathbf{a},\mathbf{c}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}, \mathbf{a},\ \mathbf{c} \in \mathbb{N}^l\}$ 构成 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$ 基 $\widetilde{\mathbf{U}}$，它与 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的对偶典范基相一致。正如 [Q16], 所述，$\widehat{\mathbf{U}}$（以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$）的对偶典范基包含 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\pm}$ 的重标度对偶典范基 $\mathbf{U}^{\pm}$。

4. Double canonical basis

在 [BG17]中，Berenstein 和 Greenstein 根据 $\mathbf{U}$ 的对偶典范基，定义了 $\mathbf{U}^+$ 和 $\mathbf{U}^-$的一个基，称为双典范基。本节回顾他们的构造并证明该基与 $\mathbf{U}$的对偶典范基重合。

4.1. **Berenstein-Greenstein 的构造**。 首先，按照 [BG17]，我们定义量子海森堡代数 （quantum Heisenberg algebras）如下

$$\mathcal{H}^+ = \widehat{\mathbf{U}}/\langle K_i' \mid i \in \mathbb{I}\rangle, \quad \mathcal{H}^- = \widehat{\mathbf{U}}/\langle K_i \mid i \in \mathbb{I}\rangle.$$

设$\widehat{\mathbf{K}}^+$（分别地，$\mathbf{K}^-$）是由$\mathbf{U}$ 中的 K_i（分别地， K_i'）生成的子幺半群， $i \in \mathbb{I}$。那么我们有三角分解

$$\mathcal{H}^+ = \mathbf{K}^+ \otimes \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+, \quad \mathcal{H}^- = \mathbf{K}^- \otimes \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+.$$

它们诱导出向量空间的自然嵌入

$$\iota_+ : \mathcal{H}^+ = \mathbf{K}^+ \otimes \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+ \hookrightarrow \widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{K}^- \otimes (\mathbf{K}^+ \otimes \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+),$$
$$\iota_- : \mathcal{H}^- = \mathbf{K}^- \otimes \mathbf{U}^+ \otimes \mathbf{U}^- \hookrightarrow \widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{K}^+ \otimes (\mathbf{K}^- \otimes \mathbf{U}^+ \otimes \mathbf{U}^-)$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$将典范投影$\mathbf{U} \to \mathcal{H}^+$ 和$\mathbf{U} \to \mathcal{H}^-$分裂。

Le$\mathbf{B}^{\widetilde{\pm}}$ 是 $\widehat{\mathbf{U}}^{\pm}$ 的重标度对偶典范基，其定义见§3.4 ，并回顾其中定义的 bar-$\widetilde{\quad}$反演和 $\diamond$-作用。注意， $\mathbf{U}$ 的 $\diamond$-作用以及 bar-反演都通过典范投影$\mathbf{K}^{\pm}$在 $\mathcal{H}^{\pm}$ 上诱导出一个 $\widehat{\mathbf{U}} \to \mathcal{H}^{\pm}$-作用和一个反对合，且（3.36）仍然成立。

以下定理要么在 [BG17], 中得到证明，要么可以由其中的方法推导出来。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$**定理 4.1** ([BG17，主定理 1。3])。 对于任意 $(b_-, b_+) \in \mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+$，存在唯一的元素 $b_- \circ b_+ \in \mathcal{H}^+$ 被 $\bar{\cdot}$ 固定且满足

$$b_- \circ b_+ - b_- b_+ \in \sum v\mathbb{Z}[v] K \diamond (b_-' b_+')$$

$\widetilde{\quad}$其中，求和遍历满足以下条件的 $K \in \mathbf{K}^+ \setminus \{1\}$ 和 $b_\pm' \in \mathbf{B}^\pm$： $\operatorname{degr}(b_- b_+) = \operatorname{degr}(K) + \widetilde{\operatorname{degr}}(b_-' b_+')$。基 $\{K \diamond (b_- \circ b_+) \mid K \in \mathbf{K}^+, b_\pm \in \mathbf{B}^\pm\}$ 称为 $\mathcal{H}^+$ 的双典范基。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$**定理 4.2** （参见 [BG17，主定理 1。3]）。 对于任意 $(b_-, b_+) \in \mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+$，存在唯一的元素 $b_+ \circ b_- \in \mathcal{H}^-$ 在 $\bar{\cdot}$ 作用下保持不变，且满足

$$b_+ \circ b_- - b_+ b_- \in \sum v\mathbb{Z}[v] K \diamond (b_+' b_-')$$

$\widetilde{\quad}$其中，求和遍历满足以下条件的 $K \in \mathbf{K}^- \setminus \{1\}$ 和 $b_\pm' \in \mathbf{B}^\pm$： $\operatorname{degr}(b_+ b_-) = \operatorname{degr}(K) + \widetilde{\operatorname{degr}}(b_+' b_-')$。基 $\{K \diamond (b_+ \circ b_-) \mid K \in \mathbf{K}^-, b_\pm \in \mathbf{B}^\pm\}$ 称为 $\mathcal{H}^-$ 的双典范基。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$**定理 4.3** ([BG17，主定理 1。5])。 对于任意 $(b_-, b_+) \in \mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+$，存在唯一的 $\widehat{\quad}$元素 $b_- \bullet b_+ \in \mathbf{U}$ 在 $\bar{\cdot}$ 作用下不变且满足

$$b_- \bullet b_+ - \iota_+(b_- \circ b_+) \in \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] K \diamond \iota_+(b_-' \circ b_+')$$

其中，求和遍及满足 $\operatorname{degr}(b_- b_+) = \operatorname{degr}(K) + \operatorname{degr}(b_-' b_+')$ 的 $K \in \widehat{\mathbf{U}}^0 \setminus \mathbf{K}^+$ 和 $b_\pm' \in \widetilde{\mathbf{B}}^\pm$。基 $\{K \diamond (b_- \bullet b_+) \mid K \in \widehat{\mathbf{U}}^0, b_\pm \in \widetilde{\mathbf{B}}^\pm\}$ 称为 $\mathbf{U}$ 的正双典范基。

定理 4.4 (参见 [BG17，主要定理 1。5])。对于任意 $(b_-, b_+) \in \mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+$，存在一个唯一的元素 $b_+ \bullet b_- \in \mathbf{U}$ 在作用下保持不变 $\div$ 并满足

$$b_+ \bullet b_- - \iota_-(b_+ \circ b_-) \in \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]K \diamond \iota_-(b'_+ \circ b'_-)$$

其中求和遍历满足 $K \in \widehat{\mathbf{U}}^0 \setminus \mathbf{K}^-$ 和 $b'_\pm \in \widetilde{\mathbf{B}}^\pm$ 且 $\mathrm{degr}(b_+b_-) = \mathrm{degr}(K) + \mathrm{degr}(b'_+b'_-)$的所有对象。基 $\{K \diamond (b_+ \bullet b_-) \mid K \in \widehat{\mathbf{U}}^0, b_\pm \in \widetilde{\mathbf{B}}^\pm\}$ 称为$\mathbf{U}$的负双典范基。

4.2. NKS 箭图簇上的 $\mathbb{C}^*$-作用。根据 [Q16], $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 和 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 是 Nakajima 在 [Na04] 中研究的循环箭图簇。在上述文献中，Nakajima 在 $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 上定义了一个 $\mathbb{C}^*$-作用，以将其与分次箭图簇联系起来。本小节将回顾他的构造。我们使用 $\mathbb{Z}Q$ 来标记 $k(\mathbb{Z}Q)$ 中的对象；重复箭图 $\mathbb{Z}Q$ 的定义见第 3.1 节。

对于 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0^{\mathrm{gr}} - \mathcal{S}_0^{\mathrm{gr}}}$、$\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^{\mathrm{gr}}}$，我们定义向量空间

$$V(i,p) = \mathbb{C}^{\mathbf{v}(i,p)}, \quad W(\sigma(i,p)) = \mathbb{C}^{\mathbf{w}(\sigma(i,p))}.$$

于是，$\mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R}^{\mathrm{gr}})$ 中的元素可表示为

$$\begin{aligned}(B,\alpha,\beta) &= \Big(\bigoplus_{h\in Q_1} B_h, \bigoplus_{\bar{h}\in\overline{Q}_1} B_{\bar{h}}, \bigoplus_{i\in Q_0}\alpha_i, \bigoplus_{i\in Q_0}\beta_i\Big)\\ &= \Big(\bigoplus_{h\in Q_1}\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} B_{h,p}, \bigoplus_{\bar{h}\in\overline{Q}_1}\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} B_{\bar{h},p}, \bigoplus_{i\in Q_0}\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\alpha_{i,p}, \bigoplus_{i\in Q_0}\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\beta_{i,p}\Big)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &B_{h,p} : V(\mathtt{t}(h),p) \to V(\mathtt{s}(h),p), \quad B_{\bar{h},p} : V(\mathtt{s}(h),p) \to V(\mathtt{t}(h),p-1),\\ &\alpha_{i,p} : W(\sigma(i,p)) \to V(i,p-1), \quad \beta_{i,p} : V(i,p) \to W(\sigma(i,p)).\end{aligned} \tag{4.1}$$

按照 [Q16], ，我们选取一个高度函数 $\xi\colon Q_0 \to \mathbb{Z}$，使得只要存在一条从 i 到 j 的箭，$\xi(i) = \xi(j)+1$。利用这个函数，我们可以将 $\mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0$ 嵌入 $\mathcal{R}_0^{\mathrm{gr}} - \mathcal{S}_0^{\mathrm{gr}}$，使其成为由满足 $p - \xi(i) \in \{0,1,\dots,\mathtt{c}-1\}$ 的元素 (i,p) 构成的子集，其中 $\mathtt{c}$ 是该箭图的 Coxeter 数 Q。类似地，我们可以将 $\mathcal{S}_0$ 视为 $\mathcal{S}_0^{\mathrm{gr}}$ 的子集。通过这种标记，$\mathrm{rep}(\mathbf{v}, \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 中的元素也可表示为

$$(B,\alpha,\beta) = \Big(\bigoplus_{h\in Q_1} B_h, \bigoplus_{\bar{h}\in\overline{Q}_1} B_{\bar{h}}, \bigoplus_{i\in Q_0}\alpha_i, \bigoplus_{i\in Q_0}\beta_i\Big).$$

这里，(B,α,β) 的每个分量都具有 4.1 中给出的相同形式，但现在指标按周期排列，示例 4.6 对此作了说明。

对于$\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0}$和$\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，我们考虑 $\mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 上由下式定义的 $\mathbb{C}^*$-作用：

$$t * \Big(\bigoplus_{h\in Q_1} B_h, \bigoplus_{\bar{h}\in\overline{Q}_1} B_{\bar{h}}, \bigoplus_{i\in Q_0}\alpha_i, \bigoplus_{i\in Q_0}\beta_i\Big) = \Big(\bigoplus_{h\in Q_1} B_h, \bigoplus_{\bar{h}\in\overline{Q}_1} tB_{\bar{h}}, \bigoplus_{i\in Q_0} t\alpha_i s(t)^{-1}, \bigoplus_{i\in Q_0} s(t)\beta_i\Big)$$

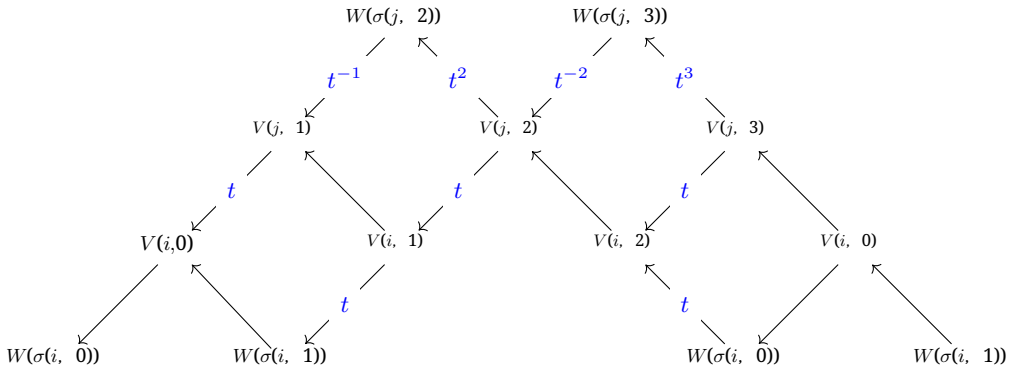
其中 $s(t) \in G_{\mathbf{w}}$ 由下式给出

$$s(t) = \bigoplus_{\sigma(i,p)\in\mathcal{S}_0} t^p \,\mathrm{Id}_{W(\sigma(i,p))}\,.$$

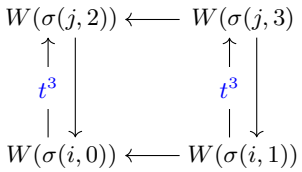
该作用与网格关系相容，并且与 $G_{\mathbf{v}}$的作用可交换。因此，它在 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R}$上诱导出一个作用。它还保持稳定性条件，因此在 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R}$上诱导出一个作用。这些诱导作用也记作 $*$。映射 $\pi\colon\ \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})\ \to\ \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 是等变的。以下引理证明见[Na04]。

引理4.5 ([Na04, 引理7.1]). 设 $[B,\alpha,\beta]\ \in\ \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 并考虑流 $t*[B,\alpha,\beta]$ 对于 $t\in\mathbb{C}^*$。它在 $t\to 0$ 时有极限。

例4.6. 设 $Q_0=\{i,j\}$、$Q_1=\{j\to i\}$，并取 $\xi(i)\ =0$、$\xi(j)\ =1$。空间$\mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 则具有如下形式



其中，$*$对 $t\in\mathbb{C}^*$ 的作用由每条箭头上的标记表示。诱导的 $\mathbb{C}^*$对 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 的作用可以很容易地读出：



我们希望将 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$的不动点子簇与某些分次箭图簇联系起来。为此，考虑向量 $\mathbf{v}_{\mathfrak{g}}\in\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0^{\mathfrak{gr}}-\mathcal{S}_0^{\mathfrak{gr}}}$ 和$\mathbf{w}_{\mathfrak{g}}\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^{\mathfrak{gr}}}$，使得$\mathbf{w}_{\mathfrak{g}}$ 支撑在 $\mathcal{S}_0$ 上（对$\mathbf{v}_{\mathfrak{g}}$没有限制）。于是，我们可以将 $\mathbf{w}_{\mathfrak{g}}$ 视为 $\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$中的一个元素。现在定义一个向量$\mathbf{v}\ \in\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$，使得

$$\mathbf{v}(i,p)=\sum_{n\equiv p\bmod \mathbf{c}}\mathbf{v}_{\mathfrak{g}}(i,n),\quad \forall(i,p)\in\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0.$$

存在一个按显然方式定义的映射 $\mathrm{rep}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})\ \to\mathrm{rep}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$。它在$G_{\mathbf{v}_{\mathfrak{g}}}$作用下是等变的，其中$G_{\mathbf{v}_{\mathfrak{g}}}\ \to\ G_{\mathbf{v}}$ 是一个显然的同态，并且保持稳定性条件。因此，我们得到一个态射

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})\longrightarrow\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}).\tag{4.2}$$

注意，$\mathbf{w}_{\mathfrak{g}}$ 由$\mathbf{w}$唯一确定，但 $\mathbf{v}_{\mathfrak{g}}$ 不能由$\mathbf{v}$确定 .

引理 4.7 ([Na04，引理 7.3])。点 $[B,\alpha,\beta]\in\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 在 $*$-作用下为不动点，当且仅当它属于 *(4.2)* 的像。此外，映射 *(4.2)* 是一个闭嵌入。

证明。取 $[B,\alpha,\beta]$ 的一个代表元 $(B,\ \alpha,\ \beta)$。那么 $[B,\alpha,\beta]$ 为不动点，当且仅当对每个 $t\in\mathbb{C}^*$，都存在一个元素 $\lambda(t)\in G_{\mathbf{v}}$ 使得

$$t*(B,\alpha,\beta)=\lambda(t)^{-1}\cdot(B,\alpha,\beta).$$

这样的 $\lambda(t)$ 是唯一的，因为 $G_{\mathbf{v}}$ 的作用是自由的。特别地，$\lambda:\ \mathbb{C}^*\to G_{\mathbf{v}}$ 是一个群同态。

令 $V(i,\ p)[n]$ 为 $V(i,\ p)$ 的特征值为 t^n 的权空间。上面的等式意味着

$$B_{h,p}(V(\mathtt{t}(h),p)[n])\subseteq V(\mathtt{s}(h),p)[n],\quad B_{\bar{h},p}(V(\mathtt{s}(h),p)[n])\subseteq V(\mathrm{t}(h),p-1)[n-1],$$
$$\alpha_{i,p}(W(\sigma(i,p)))\subseteq V(i,p-1)[p-1],\quad \beta_{i,p}(V(i,p)[n])=0\quad \text{if } n\neq p.$$

我们定义 V 的一个子空间 S 如下

$$S(i,p)=\bigoplus_{n\neq p \bmod \mathtt{c}} V(i,p)[n].$$

那么 $S(i,\ p)$ 给出一个支撑在 $\mathcal{R}$ 上的子模 $(B,\ \alpha,\ \beta)$，因此根据稳定性条件，$\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0$。这意味着 $S=0$。若设 $[B,\alpha,\beta]$，则它属于 (4.2) 的像

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}}(i,n)=\dim V(i,n)[n]. \tag{4.3}$$

反过来，像中的点是一个不动点。由于 λ 是唯一的，映射 (4.2) 是单射。最后，通过计算 $(B,\ \alpha,\ \beta)$ 处的微分，可以看出 (4.2) 是一个闭嵌入；详见 [Na04，引理 7。3] □

设 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w}\ \mathcal{R})^{*,\ \mathbb{C}^*}$ 是该 $*$-作用的不动带点子簇。从引理4.7 的证明可知，不同的 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\ \mathbf{w}_{\mathbf{g}},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$在（4.2）下的像彼此不交，即

$$\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})^{*,\mathbb{C}^*}=\bigsqcup_{\mathbf{v}_{\mathbf{g}}}\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}).$$

分次箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$ 由 [Na01，命题 7.3.4], 连接，因此它们构成 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w}\ \mathcal{R})^{*,\ \mathbb{C}^*}$ 的连通分支。现在考虑 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 的 Bialynicki-Birula 分解：

$$\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})=\bigsqcup_{\mathbf{v}_{\mathbf{g}}}S(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}}) \tag{4.4}$$

其中定义

$$S(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}}):=\{x\in\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})\mid \lim_{t\to 0}t*x\in\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})\}$$

根据一般理论，每个 $S(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}})$ 都是 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 的局部闭子簇，而自然映射 $S(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}})\to\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$ 是一个秩为（记作 $r(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}})$）的仿射纤维丛。

引理 4.8. 设 $i^+:\ \mathcal{M}_0(\mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})\to\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 是自然嵌入。则

$$(i^+)^*(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\bigoplus_{\mathbf{v}_{\mathbf{g}}}\pi(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}})[-a(\mathbf{v},\mathbf{w};\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}})],$$
$$(i^+)^!(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\bigoplus_{\mathbf{v}_{\mathbf{g}}}\pi(\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}})[a(\mathbf{v},\mathbf{w};\mathbf{v}_{\mathbf{g}},\mathbf{w}_{\mathbf{g}})],$$

wh处 $a(\mathbf{v},\ \mathbf{w};\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}})=$维数 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w}\ \mathcal{R})-$维数 $\mathcal{M}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})-2r(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\ \mathbf{w}_{\mathfrak{g}})$。

证明。令 p： $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R}) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{w}_\mathfrak{g},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$ 为通过取极限定义的映射 $t \to 0$。于是，根据 [Ach21，定理 2.10。3]（注意，$\mathbb{C}^*$-作用于 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 是吸引的，且每个$\pi(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 在 $*$-作用下是等变的），我们有

$$(i^+)^!(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})) \cong p_!(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})), \quad (i^+)^*(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})) \cong p_*(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})).$$

现在考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup \mathcal{M}(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) & \hookrightarrow & \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}} \\ \mathcal{M}_0(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) \end{array}$$

令 $p_{\mathbf{v}_\mathfrak{g}}$： $S(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\ \mathbf{w}_\mathfrak{g}) \to \mathcal{M}(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\ \mathbf{w}_\mathfrak{g},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$ 表示投影映射，它是一个仿射纤维丛。于是应用 [Lus93，§8.1。6] 于（4.4），可得

$$\begin{aligned} p_!(\pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}})_!(\underline{k}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})}) &= \bigoplus_{\mathbf{v}_\mathfrak{g}} (\pi_{\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g}} \circ p_{\mathbf{v}_\mathfrak{g}})_!(\underline{k}_{\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})}) = \bigoplus_{\mathbf{v}_\mathfrak{g}} (\pi_{\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g}})_! \circ (p_{\mathbf{v}_\mathfrak{g}})_!(\underline{k}_{S(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g})}) \\ &= \bigoplus_{\mathbf{v}_\mathfrak{g}} (\pi_{\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g}})_!(\underline{k}_{\mathcal{M}(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})})[-2r(\mathbf{v}_\mathfrak{g},\mathbf{w}_\mathfrak{g})]. \end{aligned}$$

这就证明了关于（i^+）!（π（$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$））的断言。关于（i^+）*（π（$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$））的情形可通过取Verdier对偶得到。□

对于任意如上所述的维数向量$\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，我们将 $\mathcal{K}_\mathbf{w}$ 定义为由 $\mathcal{L}$（$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$）的平移直和组成的范畴，其中（$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$）是强 l-主导的；这些对象是 $\mathcal{M}_0$（$\mathbf{w}$ $\mathcal{R}$）上的复形。我们将 $\mathcal{K}^+_\mathbf{w}$ 定义为类似的、位于 $\mathcal{M}_0$（$\mathbf{w}_\mathfrak{g}$，$\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}$）上的范畴（回顾一下，$\mathbf{w}_\mathfrak{g}$ 由 $\mathbf{w}$ 唯一确定，因此采用这一记号）。

引理 4.9。在同构 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R}) \cong \mathrm{rep}(\mathbf{w}\ \mathcal{S})$ 下，$*$-作用表示为

$$t * (x_h, \varepsilon_i, \varepsilon_{i^\diamond}) = (x_h, t^\mathfrak{c}\varepsilon_i, \varepsilon_{i^\diamond}). \tag{4.5}$$

因此 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})^{*,\mathbb{C}^*} = \mathcal{M}_0(\mathbf{w}_\mathfrak{g},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) \cong \mathrm{rep}(\mathbf{w}_\mathfrak{g},\Lambda^+)$，其中 Λ^+ 是由 $(\varepsilon_i \mid i \in Q_0)$ 生成的理想对Λ 取商所得的代数。此外，根据引理 3.4 中的分解 $(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0) + (\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+) + (\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)$，我们有

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}_\mathfrak{g},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) = \bigsqcup_{(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in\bigoplus_i \mathbb{N}(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}). \tag{4.6}$$

证明。由 [Sch19], 的坐标环 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 由从一个冻结顶点到另一个冻结顶点的路径的坐标映射生成。现在考虑这样一条路径，它从 $W(\sigma(j,k+N+1))$ 到 $W(\sigma(i,k))$，如下所示：

$$W(\sigma(j,k+N+1)) \longrightarrow V(j,k+N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow V(i,k) \longrightarrow W(\sigma(i,k))$$

为方便起见，我们可以假设 $(i,k) \in \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0$。那么在 $*$ 作用下，该路径的任意坐标函数都会乘以

$$t^{-r+1}t^N t^k = t^{k+N+1-r}$$

其中，r 是满足条件（j，r）$\in \mathcal{R}_0 - \mathcal{S}_0$的唯一整数。根据 r 的定义以及我们关于（i，k）的假设，我们看到 $k+N+1-r \geq 0$，且它是 $\mathfrak{c}$的倍数。然而，对于这样的

从 $\mathcal{R}$ 出发的一条路径要非零，唯一的可能性是 $k+N+1-r=0$ 或 c，因此我们得到（4.5）。引理的其余部分现在显而易见。□

特别地，我们看到，对于每个强 l-占优对 $(\mathbf{v}_\mathfrak{g}, \mathbf{w}_\mathfrak{g})$，$(i^+)_*(\mathcal{L}(\mathbf{v}_\mathfrak{g}, \mathbf{w}_\mathfrak{g})) \in \mathcal{K}_\mathbf{w}$。另一方面，由引理 4.8 可知，对于任意强 l-占优对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，$(i^+)^*(\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \in \mathcal{K}^+_\mathbf{w}$。由于 $(i^+)_*$ 是完全忠实的，我们可以（并且将会）把 $\mathcal{K}^+_\mathbf{w}$ 与其在 $(i^+)_*$ 下的像等同起来。下面的结果是显然的。

命题 *4.10*。对于 $\mathcal{R}$ 的任意强 l-占优对 $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$，复形 $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 属于 $\mathcal{K}^+_\mathbf{w}$ 当且仅当，对于分解 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0)+(\mathbf{v}^+, \mathbf{w}^+) + (\mathbf{v}^-, \mathbf{w}^-)$，$(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in \bigoplus_i \mathbb{N}(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)$。

我们还需要一种 $\mathbb{C}^*$-作用 $*$。为此，回顾一下移位函子 Σ在箭图簇上诱导了一个同构：

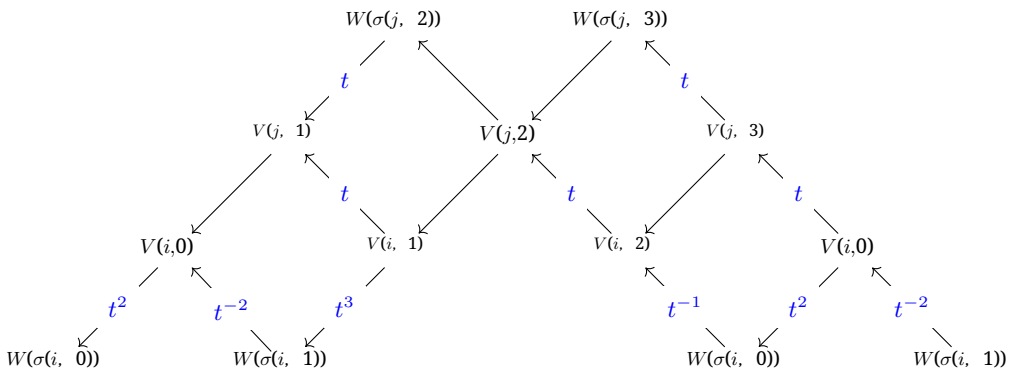
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Sigma^*} & \mathcal{M}(\Sigma^*(\mathbf{v}),\Sigma^*(\mathbf{w}),\mathcal{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Sigma^*} & \mathcal{M}_0(\Sigma^*(\mathbf{v}),\Sigma^*(\mathbf{w}),\mathcal{R}) \end{array} \tag{4.7}$$

利用这一点，我们可以在 $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})$ 上定义一个新的 $\mathbb{C}^*$-作用，使得

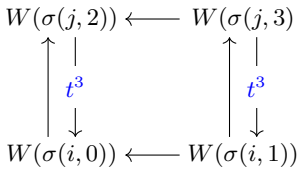
$$\Sigma^*(t \star [B, \alpha, \beta]) = t * \Sigma^*([B, \alpha, \beta]).$$

可以将 $\star$视为 Σ^*下 $*$ 的共轭。

例 4.11。保留例 *4.6*中的记号。则 $\star$-作用在 $\mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})$由下式给出



并且在 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}, \mathcal{R})$ 上的诱导作用具有如下形式



对于任意向量$\mathbf{v}_\mathfrak{g} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0^\mathfrak{gr}-\mathcal{S}_0^\mathfrak{gr}}$ 和$\mathbf{w}_\mathfrak{g} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0^\mathfrak{gr}}$，满足$\mathbf{w}_\mathfrak{g}$ 的支撑包含于 $\mathcal{S}_0$，由（4.2）可知存在一个嵌入

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^\mathfrak{gr}) \longrightarrow \mathcal{M}(\Sigma^*(\mathbf{v}), \Sigma^*(\mathbf{w}), \mathcal{R})$$

其中 $\Sigma^*(\mathbf{w})$ 对应于$\mathbf{w}_\mathfrak{g}$，且 $\Sigma^*(\mathbf{v})$ 定义为（4.3）。将其与同构 $(\Sigma^{-1})^*$ 复合，得到一个新的嵌入

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}), \tag{4.8}$$

根据引理4.7和引理4.9，显然有

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})^{\star, \mathbb{C}^*} = \bigsqcup_{\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}} \mathcal{M}(\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}),$$

且 $\star$ 在 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 上的作用由下式给出

$$t \star (x_h, \varepsilon_i, \varepsilon_{i^\diamond}) = (x_h, \varepsilon_i, t^{\mathbf{c}}\varepsilon_{i^\diamond}).$$

特别地，我们有 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})^{\star,\ \mathbb{C}^*} = \mathcal{M}_0(\mathbf{w}_\mathfrak{g},\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) \cong \mathbf{rep}(\mathbf{w}_\mathfrak{g}, -\Lambda^-)$，其中 Λ^- 是 Λ 关于 $(\varepsilon_{i^\diamond} \mid i \in Q_0)$ 的商代数，并且

$$\mathcal{M}_0(\overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) = \bigsqcup_{(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in \bigoplus_i \mathbb{N}(\mathbf{v}^{\Sigma i}, \mathbf{w}^i)} \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})$$

引理 4.12. 设 $i^-\colon \mathcal{M}_0(\mathbf{w}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 为自然嵌入。则

$$(i^-)^*(\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \bigoplus_{\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}} \pi(\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g})[-a(\Sigma^*(\mathbf{v}), \Sigma^*(\mathbf{w}); \overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g})],$$
$$(i^-)^!(\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \bigoplus_{\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}} \pi(\overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g})[a(\Sigma^*(\mathbf{v}), \Sigma^*(\mathbf{w}); \overline{\mathbf{v}}_\mathfrak{g}, \overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g})].$$

证明。由于 i^- 不过是 i^+ 和 Σ^*的复合，因此这些结论可由引理4.8推出。□

我们仍用 $\mathcal{K}^-_{\mathbf{w}}$ 表示由 $\mathcal{L}(\mathbf{v}_\mathfrak{g}, \mathbf{w}_\mathfrak{g})$ 的平移直和组成的范畴，其中的对 $(\overline{\mathbf{v}_\mathfrak{g}}, \mathbf{w}_\mathfrak{g})$ 对于 $\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}$ 是强l-占优对，这些对是定义在 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$ 上的复形。与 (4.6) 类似，我们可以写成

$$\mathcal{M}_0(\overline{\mathbf{w}}_\mathfrak{g}, \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}}) = \bigsqcup_{(\mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0) \in \bigoplus_i \mathbb{N}(\mathbf{v}^{\Sigma i}, \mathbf{w}^i)} \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}),$$

因此存在函子

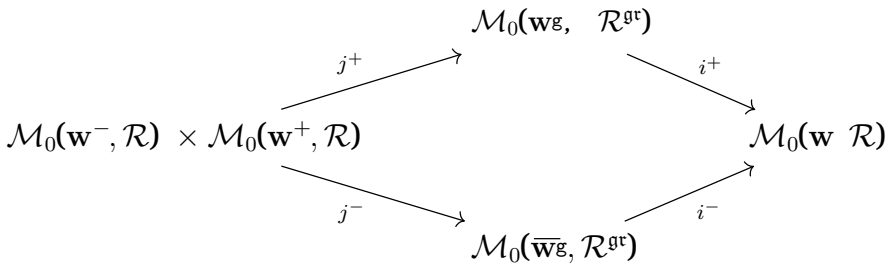
$$(i^-)_*\colon \mathcal{K}^-_{\mathbf{w}} \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbf{w}}, \quad (i^-)^*\colon \mathcal{K}_{\mathbf{w}} \longrightarrow \mathcal{K}^-_{\mathbf{w}}.$$

以下对 $(i^-)_*$ 像的刻画是显然的。

命题 *4.13.* 对任意强 l-支配对 (v, w)，复形 $\mathcal{L}(v, w)$ 属于 $\mathcal{K}^-_{\mathbf{w}}$ 当且仅当 $(v^0, w^0) \in \bigoplus_i \mathbb{N}$ $(v^{\Sigma i}, w^i)$，其中分解 $(v,w) = (v^0, w^0) + (v^+, w^+) + (v^-, w^-)$。

4.3. **与对偶典范基的重合。** 在本小节中，我们将证明$\widehat{\ }$对偶典范基与 $\mathbf{U}$ 的双典范基重合。根据定义 3.6，我们$\widehat{\ }$只需建立双典范基与对偶典范基之间的联系 $L(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 和 $\mathbf{R}$。

我们回顾 §4.2 中的设定。考虑以下包含关系



设 $\widehat{\mathbf{H}}^{\pm} = \bigoplus_{\mathbf{w}} \widehat{\mathbf{H}}^{\pm}_{\mathbf{w}}$，其中 $\widehat{\mathbf{H}}^{\pm}_{\mathbf{w}}$ 是由 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$（分别为 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$）上的层 $\mathcal{L}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\mathbf{w}_{\mathfrak{g}})$（分别为 $\mathcal{L}(\mathbf{v}_{\mathfrak{g}},\mathbf{w}_{\mathfrak{g}})$）生成的格罗滕迪克群的对偶（回忆一下，$\mathbf{w}_{\mathfrak{g}}$和 $\mathbf{w}_{\mathfrak{g}}$ 由 $\mathbf{w}$ 唯一确定）。$\widehat{\mathbf{H}}^{\pm}$ 的代数结构与 $\widehat{\mathbf{R}}$ 类似地定义。根据引理 4.8，我们可以使用 $(j^{\pm})^!$ 和 $(i^{\pm})^*$ 来得到对偶格罗滕迪克环的线性嵌入：

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathbf{R}}^- \otimes \widehat{\mathbf{R}}^+ & \xrightarrow{m_+} & \widehat{\mathbf{H}}^+ & & \\ & & & \searrow^{\iota_+} & \\ & & & & \widehat{\mathbf{R}} \\ & & & \nearrow_{\iota_-} & \\ \widehat{\mathbf{R}}^+ \otimes \widehat{\mathbf{R}}^- & \xrightarrow[m_-]{} & \widehat{\mathbf{H}}^- & & \end{array} \tag{4.9}$$

回忆一下 通过 [Ach21，定理 2.10。3]，的限制函子 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 满足 y

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+} \cong (j^+)^!(i^+)^*, \quad \Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^+,\mathbf{w}^-} \cong (j^-)^!(i^-)^*, \tag{4.10}$$

因此，映射 m_+（分别是 m_-）将 $b_- \otimes b_+$ 映射到在 $\mathbf{H}^+$（分别是在 $\mathbf{H}^-$）中计算的乘积 b_-b_+（分别是将 $b_+ \otimes b_-$ 映射到 b_+b_-），$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$而 $\iota_{\pm}$ 是由三角分解诱导的映射。

引理 4.14。代数 $\widehat{\mathbf{H}}^{\pm}$ 同构于 $\mathcal{H}^{\pm}$，并且有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+ & \xrightarrow{m_+} & \mathcal{H}^+ & \xrightarrow{\iota_+} & \widehat{\mathbf{U}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathbf{R}}^- \otimes \widehat{\mathbf{R}}^+ & \xrightarrow{m_+} & \widehat{\mathbf{H}}^+ & \xrightarrow{\iota_+} & \widehat{\mathbf{R}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{U}^+ \otimes \mathbf{U}^- & \xrightarrow{m_-} & \mathcal{H}^- & \xrightarrow{\iota_-} & \widehat{\mathbf{U}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathbf{R}}^+ \otimes \widehat{\mathbf{R}}^- & \xrightarrow{m_-} & \widehat{\mathbf{H}}^- & \xrightarrow{\iota_-} & \widehat{\mathbf{R}} \end{array}$$

其中映射 $m_+ : \mathbf{U}^- \otimes \mathbf{U}^+ \to \mathcal{H}^+$（分别是 $m_- : \mathbf{U}^+ \otimes \mathbf{U}^- \to \mathcal{H}^-$）定义为将 $b_- \otimes b_+$ 映射到 b_-b_+（分别是将 $b_+ \otimes b_-$ 映射到 b_+b_-）。

证明。我们只证明关于 $\mathcal{H}^+$的断言，关于 $\mathcal{H}^-$ 的情形类似。利用函子 $(i^+)_*$，我们可以定义一个商映射

$$\pi^+ : \widehat{\mathbf{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{H}}^+$$

它通过将 $L(\mathbf{v}^{\Sigma i},\mathbf{w}^i)$ $(i \in Q_0)$ 映为零，这一点由命题 4.10 可知。由于 $(i^+)_*$与限制函子交换，因此这是一个代数同态。此外，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$嵌入 $\iota : \mathbf{H}^+ \to \mathbf{R}$ 有一个截面 π^+。由于 $\mathbf{R}$ 同构于 $\mathbf{U}$，这意味着 $\mathbf{H}^+ \cong \mathcal{H}^+$。现在，图表的交换性显而易见。□

为区分不同的量子格罗滕迪克环，对于 $(\mathbf{v}^{\pm},\mathbf{w}^{\pm})\in(V^{\pm},W^{\pm})$，我们将与 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}^{\pm},\mathbf{w}^{\pm})$ 上的常局部系相对应的IC复形记为 $\mathcal{P}(\mathbf{v}^{\pm},\mathbf{w}^{\pm})$；并将其对应的对偶基记为 $B(\mathbf{v}^{\pm},\mathbf{w}^{\pm})$，它属于 $\widehat{\mathbf{R}}^{\pm}$。类似地，对于满足 $(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in\bigoplus_i\mathbb{N}(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)$（分别地，$(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in\bigoplus_i\mathbb{N}(\mathbf{v}^{\Sigma i},\mathbf{w}^i)$）的 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$，我们将 $\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 在 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$（分别地，$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}_{\mathfrak{g}},\mathcal{R}^{\mathfrak{gr}})$）上的限制记为$\mathcal{L}^+(\mathbf{v},\mathbf{w})$（分别地，$\mathcal{L}^-(\mathbf{v},\mathbf{w})$）；并将其在 $\widehat{\mathbf{H}}^+$（分别地，$\widehat{\mathbf{H}}^-$）中的对偶基记为 $L^+(\mathbf{v},\mathbf{w})$（分别地，$L^-(\mathbf{v},\mathbf{w})$）。

引理 4.15. 对于 $(\mathbf{v}^{\pm},\mathbf{w}^{\pm})\in(V^{\pm},W^{\pm})$，有

$$\begin{aligned}&B(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)\\&=L^+(\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^++\mathbf{w}^-)+\sum_{\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-<\mathbf{v}'}a^+_{\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-,\mathbf{v}'}L^+(\mathbf{v}',\mathbf{w}^++\mathbf{w}^-)\in\widehat{\mathbf{H}}^+,\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}&B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)\cdot B(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\\&=L^-(\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-,\ \mathbf{w}^++\mathbf{w}^-)+\sum_{\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-<\mathbf{v}'}a^-{}_{\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-,\mathbf{v}'}L^-(\mathbf{v}',\mathbf{w}^++\mathbf{w}^-)\in\widehat{\mathbf{H}}^-\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中 $a^{\pm}{}_{\mathbf{v}^++\mathbf{v}^-,\mathbf{v}'}\in v\mathbb{N}[v]$. 另一方面，对于 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 满足 $(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in\bigoplus_i\mathbb{N}(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)$（分别地，$(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in\bigoplus_i\mathbb{N}(\mathbf{v}^{\Sigma i},\mathbf{w}^i)$）的情形，有

$$\iota_+(L^+(\mathbf{v},\mathbf{w}))=L(\mathbf{v},\mathbf{w})+\sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'}b^+_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}L(\mathbf{v}',\mathbf{w}),\tag{4.13}$$

$$\iota_-(L^-(\mathbf{v},\mathbf{w}))=L(\mathbf{v},\mathbf{w})+\sum_{\mathbf{v}<\mathbf{v}'}b^-_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}L(\mathbf{v}',\mathbf{w}),\tag{4.14}$$

其中 $b^{\pm}{}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\in v^{-1}\mathbb{N}[v^{-1}]$.

证明。我们来处理 $B(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)$，其他等式可用类似方法证明。由上面的论证可知，$B(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)=m_+(B(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\otimes B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+))$，因此只需考虑 $(j^+)^!\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$，其中 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 满足 $(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in\bigoplus_i\mathbb{N}(\mathbf{v}^i,\mathbf{w}^i)$。记

$$(j^+)^!\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\sum_{\mathbf{v}'^++\mathbf{v}'^-<\mathbf{v}}a^+_{\mathbf{v}'^++\mathbf{v}'^-,\mathbf{v}}\mathcal{P}(\mathbf{v}'^-,\mathbf{w}^-)\boxtimes\mathcal{P}(\mathbf{v}'^+,\mathbf{w}^+).$$

根据定义，显然 $a^+{}_{\mathbf{v}^+\mathbf{v}^-,\mathbf{v}^+_-}=1$，若 $\mathbf{v}^0=\mathbf{w}^0=0$。否则，在 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\times\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)$ 中取一个一般点，并利用 [BBD82, 2.1.9]，，容易看出 $a^+{}_{\mathbf{v}^+\mathbf{v}^-,\mathbf{v}}\in v\mathbb{N}[v]$。这就证明了该断言。□

定理 4.16。 $\mathcal{H}^{\pm}$ 的对偶典范基与双典范基重合，而$\mathbf{U}^{\pm}$ 的正（分别为负）双典范基与对偶典范基重合。

证明。我们只考虑 $\mathcal{H}^+$ 的情形，因为 $\mathcal{H}^-$ 的情形类似。根据（4.11）和（3.31），对于（4.13）$(\mathbf{v},\mathbf{w})=(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)+(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)+(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)$，我们可以写成

$$\begin{aligned}L^+(\mathbf{v},\mathbf{w})\in{}&L^+(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\diamond(B(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot B(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+))\\&+\sum_{\substack{\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}^0+\tilde{\mathbf{w}}^++\tilde{\mathbf{w}}^-\\(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\prec(\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0)}}v\mathbb{Z}[v]L^+(\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0)\diamond(B(\tilde{\mathbf{v}}^-,\tilde{\mathbf{w}}^-)\cdot B(\tilde{\mathbf{v}}^+,\tilde{\mathbf{w}}^+)),\end{aligned}$$

$$L(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\diamond\iota(L^+(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-, \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-)) + \sum_{\substack{\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}^0+\tilde{\mathbf{w}}^++\tilde{\mathbf{w}}^- \\ (\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\prec(\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0)}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]L(\tilde{\mathbf{v}}^0,\tilde{\mathbf{w}}^0)\diamond\iota(L^+(\tilde{\mathbf{v}}^+ + \tilde{\mathbf{v}}^-, \tilde{\mathbf{w}}^+ + \tilde{\mathbf{w}}^-))$$

鉴于根据定理 3.8，$\{B(\mathbf{v}^\pm,\mathbf{w}^\pm) \mid (\mathbf{v}^\pm,\mathbf{w}^\pm) \in (V^\pm,W^\pm)\}$ 给出了 $\mathbf{U}^\pm$ 的重标度对偶典范基，将它们与定理 4.1 和定理 4.3 中 $\mathcal{H}^+$ 和 $\mathbf{U}$ 的双典范基定义关系$\widehat{\ }$进行比较，即得所需结果。□

备注 4.17。 从定理 4.16 的证明中可以看出

$$b_+ \bullet b_- = b_- \bullet b_+, \qquad \forall (b_-,b_+) \in \widetilde{\mathbf{B}}^- \times \widetilde{\mathbf{B}}^+. \tag{4.15}$$

利用定理 4.16，我们可以回答 [BG17]提出的许多猜想。例如，$\widetilde{\ }$以下结果已对$\mathbf{U}$ 的对偶典范基（视为对角型 i 量子群）得到证明，因此它们对双典范基也成立。

推论 4.18 ([BG17，猜想 1。15]；见 [LP25，定理 5。16])。 $=$ 对偶$\widetilde{\ }$双**典范基** 在辫群作用下保持不变。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$**推论 4.19** ([BG17，猜想 1。21])。 对于任意 $(b_-,\ b_+) \in \mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+$，其变换$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$系数 b_-b_+ *(或* b_+b_-*)* 关于 $\mathbf{U}$ 的双典范基（以及 $\mathbf{U}$）均属于 $\mathbb{N}[v,v^{-1}]$。

证明。 只需考虑 b_-b_+。由（4.11）和（4.13）可知

$$\iota_+(L(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot L(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)) = L(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-, \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-) + \sum_{\mathbf{v}'} \mathbb{N}[v,v^{-1}]L(\mathbf{v}',\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-).$$

由定义可知，$\iota_+(L(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot L(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+))$ 等于 $L(\mathbf{v}^-,\mathbf{w}^-)\cdot L(\mathbf{v}^+,\mathbf{w}^+)\widehat{\ }$（在 $\mathbf{U}$ 中计算），因此结论成立。 □

推论 4.20。 双（$=$对偶）典范基的结构常数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}},v^{-\frac{1}{2}}]$。 - -

在 [BG17] 中，作者定义了 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-线性反对合 $\cdot^*\colon \widehat{\mathbf{U}} \to \widehat{\mathbf{U}}$和 $\cdot^t\colon \widehat{\mathbf{U}} \to \widehat{\mathbf{U}}$如下

$$E_i^* = E_i, \quad F_i^* = F_i, \quad K_i^* = K_i', \quad (K_i')^* = K_i,$$
$$E_i^t = F_i, \quad F_i^t = E_i, \quad K_i^t = K_i, \quad (K_i')^t = K_i'.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$于是 $(\mathbf{B}^\pm)^t = \mathbf{B}^\mp$，并且 [BG17 引理 3.5] 证明了 $\cdot^*$ 将 $\mathbf{B}^\pm$ 映为自身。容易看出，$\cdot^t$保持基 $\{K\diamond(b_-\circ b_+)\}$不变，因此它也保持 $\mathbf{U}$ 的双典范$\widetilde{\ }$基（作为一个集合）；参见 [BG17 命题 2.10]。 [BG17] 中猜想 $\cdot^*$ 也保持双典范基。利用定理 4.16，我们现在可以验证这一猜想。

$\widehat{\ }$**命题 4.21** （[BG17，猜想 1.11]）. 双重（$=$ 对偶）典范基之于 $\mathbf{U}\widetilde{\ }$（以及 $\mathbf{U}$）在 $\cdot^*$ 下不变。更精确地说，我们有

$$(K\diamond(b_-\bullet b_+))^* = K^*\diamond(b_+^*\bullet b_-^*) = K^*\diamond(b_-^*\bullet b_+^*).$$

Proof. 注意到，对于 $(b_-,\ b_+) \in \mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+$，我们有 $\deg_\Gamma(b_-b_+) = \deg_\Gamma(b_+b_-)$，因此

$$(K_i \diamond b_-b_+)^* = v^{-\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\deg_\Gamma(b_-b_+))}(K_i b_-b_+)^* = v^{-\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\deg_\Gamma(b_-b_+))} b_+^* b_-^* K_i'$$
$$= v^{\frac{1}{2}\check{\alpha}_i(\deg_\Gamma(b_-b_+))} K_i' b_+^* b_-^* = K_i' \diamond (b_+^* b_-^*),$$

一般而言，我们可以写成

$$(K \diamond (b_-b_+))^* = K^* \diamond (b_+^* b_-^*), \quad \forall K \in \widehat{\mathbf{U}}^0.$$

显然，$\cdot^*$ 在 $\mathcal{H}^\pm$ 之间诱导出一个反自同构，并且与包含映射 $\iota_\pm$相容，也就是说

$$\iota_\mp(x^*) = (\iota_\pm(x))^*, \quad \forall x \in \mathcal{H}^\pm.$$

现在将 $\cdot^*$ 作用于 $b_- \circ b_+$的定义方程，我们得到

$$(b_- \circ b_+)^* - b_+^* b_-^* \in \sum v\mathbb{Z}[v] K^* \diamond ({}'b_+^* {}'b_-^*) \tag{4.16}$$

其中求和遍历满足 $\deg_\Gamma(b_-b_+) = \deg_\Gamma(K) + \deg_\Gamma({}'b_-{}'b_+)$ 的 $K \in \mathbf{K}^+ \setminus \{1\}$ 和 ${}'b_\pm \in \mathbf{B}^\pm$。此外，由于 $\cdot^*$ 与 $\cdot$可交换，元素$(b_- \circ b_+)^*$ 是巴不变的，因此必定等于 $b_+^* \circ b_-^*$。同样的论证也适用于 $b_+ \circ b_-$，此时我们得到$(b_+ \circ b_-)^* = b_-^* \circ b_+^*$。

最后，将 $\cdot^*$ 作用于 $b_- \bullet b_+$ 的定义方程，并利用（4.16），我们得到

$$(b_- \bullet b_+)^* - \iota_-(b_+^* \circ b_-^*) \in \sum v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] K^* \diamond \iota_-({}'b_+^* \circ {}'b_-^*)$$

其中求和取遍 $K^* \in \widehat{\mathbf{U}}^0 \setminus \mathbf{K}^+$ 以及 ${}'b_\pm \in \widetilde{\mathbf{B}}^\pm$ 使得 $\deg_\Gamma(b_-b_+) = \deg_\Gamma(K) + \deg_\Gamma({}'b_-{}'b_+)$。再次，由于（$b_- \bullet b_+$）*是巴不变的，它必须等于 $b_+^* \bullet b_-^*$，从而我们的断言由（4.15）得出。□

回顾 Chevalley 对合 ω是 $\widehat{\mathbf{U}}$（以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$）的一个 $\mathbb{Q}(v^{\frac{1}{2}})$-代数对合，它将 $E_i \mapsto F_i$、$F_i \mapsto E_i$、$K_i \mapsto K_i'$、$K_i' \mapsto K_i$ 映出。它是反对合的复合 $\cdot^*$ 与 $\cdot^t$，因此我们有如下推论。

推论 4.22。 $\widehat{\mathbf{U}}$（以及$\widetilde{\mathbf{U}}$）的双重（= 对偶）典范基在 *Chevalley* 对合 ω 下保持不变。

回忆一下 $\widehat{\mathbf{U}}$（以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$）在（2.9）中给出的 PBW 基。以下是 [LP26命题 6 的推论。8]。

推论 4.23。 相对于 $\{F^{\mathbf{a}} E^{\mathbf{c}} K_\mu K_\nu' \mid \mathbf{a}、\mathbf{c} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}^{\mathbb{I}}\}$，*PBW* 基关于 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的双重（= 对偶）典范基的过渡矩阵系数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

注记 4.24。Bridgland [Br13] 给出了 $\widehat{\mathbf{U}}$（以及 $\widetilde{\mathbf{U}}$）的 Hall 代数实现；参见 [LW22a，定理 8。5]（或 [LP25，引理 3。10]），其通过与代数 Λ相关的泛半导出 Hall 代数 $\mathcal{SDH}(\Lambda)$ 进行了重新表述。Hall 代数 $\mathcal{SDH}(\Lambda)$ 有一个自然的基（称为 Hall 基），它不同于 PBW 基。根据 [LP26，定理 6，6]，我们知道，Hall 基关于 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 的双重（= 对偶）典范基的过渡矩阵系数属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。

在 [Lus90b], 中，Lusztig 证明了 $\mathbf{U}^+$（相应地，$\mathbf{U}^-$）的典范基相对于 PBW 基 $\{E^{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}\}$（相应地，$\{F^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^{|\Phi^+|}\}$）的转移矩阵系数

属于 $\mathbb{N}[v^{\frac{1}{2}}, v^{-\frac{1}{2}}]$。那么推论 4.23 将 Lusztig 关于 $\widetilde{\mathbf{U}}^{\pm}$ 的结果推广到整个量子群 $\mathbf{U}$。

5. Dual canonical basis of $\widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{sl}_2)$

在本小节中，我们确定 $\widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{sl}_2)$ 的对偶典范基。为此，我们需要考虑只有一个顶点 1 且没有边的箭图的双箭图。正则 NKS 范畴 $\mathcal{R}$ 的箭图为

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{S}_1 & \xleftarrow{\beta_1} & \sigma(\mathtt{S}_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_2} \\ \sigma(\Sigma\mathtt{S}_1) & \xrightarrow{\beta_2} & \Sigma\mathtt{S}_1 \end{array}$$

满足 $\beta_2\alpha_1 = 0$, $\beta_1\alpha_2 = 0$。我们有

$$\mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0} = \mathbb{N}\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1} + \mathbb{N}\mathbf{1}_{\Sigma\mathtt{S}_1}, \quad \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0} = \mathbb{N}\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1} + \mathbb{N}\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathtt{S}_1}.$$

对于向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{\mathcal{R}_0-\mathcal{S}_0}$ 和 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，记

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\mathtt{S}_1), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(\Sigma\mathtt{S}_1), \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}(\sigma\mathtt{S}_1), \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}(\sigma\Sigma\mathtt{S}_1).$$

对于任意 $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，固定一个分次向量空间 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$，其维数向量为 $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$。那么箭图簇由下式给出：

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) = \{(x, y, \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}) \mid \underline{\dim}\, \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), x|_{\mathbf{V}_1} = y|_{\mathbf{V}_2} = 0, x(\mathbf{W}_1) \subseteq \mathbf{V}_2, y(\mathbf{W}_2) \subseteq \mathbf{V}_1\},$$

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{w}, \mathcal{R}) = \{(x, y) \mid xy = yx = 0\},$$

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{w}, \mathcal{R}) = \{(x, y) \in \mathcal{M}_0(\mathbf{w}) \mid \text{秩}(y) = \mathbf{v}_1, \text{秩}(x) = \mathbf{v}_2\},$$

其中 $x: \mathbf{W}_1 \to \mathbf{W}_2$, $y: \mathbf{W}_2 \to \mathbf{W}_1$ 是线性映射。注意，对于 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) \neq \emptyset$，必须有 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \leq \min\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$。此外，簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R})$ 是光滑的，并且

$$\dim \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

映射 $\pi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}: \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) \to \mathcal{M}_0(\mathbf{w})$ 的像由满足以下条件的 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R})$ 组成

$$\mathbf{v}'_1 \leq \min\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}'_2\}, \quad \mathbf{v}'_2 \leq \min\{\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}'_1\}. \tag{5.1}$$

and 我们用 $I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ 表示满足上述条件的向量集合 $\mathbf{v}'$.

令 $F_{\mathbf{v}, \mathbf{v}'}$ 表示 $\pi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ 在 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R})$ 的一般点上的纤维。直接计算可得

$$2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} + \dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R}) - \dim \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathcal{R}) = \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) \tag{5.2}$$

其中 $\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} := (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)$。特别地，如果 $|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| \leq 1$，那么 $\pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ 是半小的，因此由 [dCM02] (参见 [LP26，定理 7。1]) 我们得到一个显式分解

$$\pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{\substack{\mathbf{v}' \in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \\ \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}=0}} \mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R}) & \text{if } |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| = 0, \\ \bigoplus\limits_{\substack{\mathbf{v}' \in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \\ \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} = 0 \text{ or } \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2}} \mathcal{L}(\mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathcal{R}) & \text{if } |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| = 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

给定向量 $\mathbf{w}'$,$\mathbf{w}''$ 属于 $\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，我们考虑限制函子 $\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}',\mathbf{w}''}$，其中 $\mathbf{w}=\mathbf{w}'+\mathbf{w}''$。在我们的情形中，(3.15) 写作

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}',\mathbf{w}''}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\bigoplus_{\mathbf{v}'+\mathbf{v}''=\mathbf{v}}\pi(\mathbf{v}',\mathbf{w}')\boxtimes\pi(\mathbf{v}'',\mathbf{w}'')[d((\mathbf{v}',\mathbf{w}'),(\mathbf{v}'',\mathbf{w}''))], \tag{5.4}$$

其中

$$d((\mathbf{v}',\mathbf{w}'),(\mathbf{v}'',\mathbf{w}''))=(\mathbf{w}'_1-\mathbf{w}'_2)(\mathbf{v}''_1-\mathbf{v}''_2)-(\mathbf{w}''_1-\mathbf{w}''_2)(\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2).$$

例5.1。 对于 $\mathbf{w}\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}_0}$，我们定义向量 $\mathbf{w}^{(1)}=\mathbf{w}_1\mathbf{1}_{\sigma\mathcal{S}_1}$ 和 $\mathbf{w}^{(2)}=\mathbf{w}_2\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathcal{S}_1}$。则(5.4) 蕴含

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}^{(1)},\mathbf{w}^{(2)}}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\pi(\mathbf{v}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)})\boxtimes\pi(\mathbf{v}^{(2)},\mathbf{w}^{(2)})[\mathbf{v}_1\mathbf{w}_2-\mathbf{v}_2\mathbf{w}_1]$$

其中 $\mathbf{v}^{(1)}=\mathbf{v}_1\mathbf{1}_{\mathcal{S}_1}$ 和 $\mathbf{v}^{(2)}=\mathbf{v}_2\mathbf{1}_{\Sigma\mathcal{S}_1}$。根据定义，我们很容易推出 t

$$\pi(\mathbf{v}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)})=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\mathcal{L}(0,\mathbf{w}^{(1)}),\quad \pi(\mathbf{v}^{(2)},\mathbf{w}^{(2)})=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_2\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\mathcal{L}(0,\mathbf{w}^{(2)})$$

so

$$\Delta^{(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)}_{(\mathbf{w}_1,0),(0,\mathbf{w}_2)}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{w}_2\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\mathcal{L}(0,\mathbf{w}^{(1)})\boxtimes\mathcal{L}(0,\mathbf{w}^{(2)}[\mathbf{v}_1\mathbf{w}_2-\mathbf{v}_2\mathbf{w}_1].$$

现在假设 $\mathbf{w}_1\geq\mathbf{w}_2$，并令 $k=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$。于是我们可以写成

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1}}(\mathcal{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\bigoplus_{\mathbf{v}'}b_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\cdot\mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})[k(\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2)] \tag{5.5}$$

对于某个 $b_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\in\mathbb{N}[v,v^{-1}]$。注意 $b_{\mathbf{v},\mathbf{v}}=1$ 由（3.20），且 $b_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}=0$ 若条件 $\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}$不满足（这可由（3.15）看出）。

利用分解（5.3），我们得到

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1}}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\bigoplus_{r=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\ r\end{bmatrix}\pi(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})\boxtimes\pi(\mathbf{v}-r\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})[k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-r)] \tag{5.6}$$

$$=\bigoplus_{r=0}^{k}\bigoplus_{\substack{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}-r\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1}}(\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})\\ \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}=r}}\begin{bmatrix}k\\ r\end{bmatrix}\mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})[k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-r)].$$

容易验证

$$\{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}-r\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1}}(\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})\mid\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}=r\}=\{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\mid\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}=r\},\quad\forall 0\leq r\leq k.$$

因此（5.6）可以改写为

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1}}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))=\bigoplus_{\substack{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\\ 0\leq\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\leq k}}\begin{bmatrix}k\\ \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\end{bmatrix}\mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1})[k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-r)]. \tag{5.7}$$

对于任意给定的 $\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$，如果 $\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ 出现在 $\pi(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ 的分解中，那么$\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1}}(\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}))$ 是 $\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathtt{S}_1}}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))$ 的一个直和项。在这种情况下，我们

将有

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}}(\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}))=\bigoplus_{\substack{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'\\0\le\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\le k}} b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\cdot\mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2-r)]$$

另一方面，若我们写作 $\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})=\bigoplus_{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$，则

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}}(\pi(\mathbf{v},\mathbf{w}))&=\bigoplus_{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\cdot\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}}\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})\\&=\bigoplus_{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})}\bigoplus_{\substack{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'\\0\le\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\le k}}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\cdot b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2-r)].\end{aligned}$$

这意味着，对于任意固定的 $\mathbf{v}''\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$，当 $0\le\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\le k$ 时，

$$\begin{bmatrix}k\\\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\end{bmatrix}v^{-k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''})}=\sum_{\substack{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'\\0\le\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\le k}}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\cdot v^{-k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'})}\tag{5.8}$$

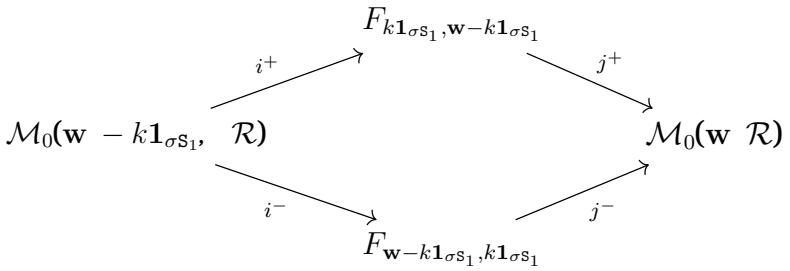
特别地，由于 $b_{\mathbf{v}'',\mathbf{v}''}=1$，系数 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}$ 仅在 $0\le\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\le k$ 时非零。另请回忆 $\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}=r_{\mathbf{v}'',\mathbf{v}'}=-\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}$，因此（5.8）给出

$$\begin{bmatrix}k\\\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\end{bmatrix}=\sum_{\substack{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'\\0\le\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\le k}}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}b_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\cdot v^{-\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}}.\tag{5.9}$$

为了继续推进，我们考虑自同构 $c:\ \mathcal{M}_0(\mathbf{w})\to\mathcal{M}_0(\mathbf{w})$，它由 $(x,y)\mapsto(y^t,x^t)$ 定义，其中 $\cdot^t$ 表示转置。显然，该映射置换了 $\mathcal{M}_0(\mathbf{w})$ 的分层：它将 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w}\ \mathcal{R})$ 映射到 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}^c,\mathbf{w}\ \mathcal{R})$，其中 $\mathbf{v}^c=\mathbf{v}_2\mathbf{1}_{\mathfrak{s}_1}+\mathbf{v}_1\mathbf{1}_{\Sigma\mathfrak{s}_1\circ}$

引理 5.2. $b_{\mathbf{v}',\ \mathbf{v}''}=\overline{b_{\mathbf{v}'^c,\ \mathbf{v}''^c}}$。

证明。 考虑以下关于 $\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\ \mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}}$（参见 §§4.3）：



根据 [Ach21，定理 2.10.3]，我们有如下关于限制函子的同构：

$$\Delta^{\mathbf{w}}_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}}=(i^+)^!(j^+)^*,\quad\Delta^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}}=(i^-)^!(j^-)^*.$$

特别地，根据 $b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}$ 的定义，我们有

$$(i^+)^!(j^+)^*\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})=\bigoplus_{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'}b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\cdot\mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes\mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}''_1-\mathbf{v}''_2)].$$

取韦迪耶对偶，得到

$$(i^+)^*(j^+)^!\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) = \bigoplus_{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'} \overline{b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}}\cdot \mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes \mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}_2''-\mathbf{v}_1'')]. \tag{5.10}$$

另一方面，根据双曲局部化定理 [Bra03], ，我们知道

$$(i^+)^!(j^+)^*\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) \cong (i^-)^*(j^-)^!\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$$

因此，取韦迪耶对偶可得

$$\begin{aligned}(i^-)^!(j^-)^*\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) &= (i^+)^*(j^+)^!\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})\\ &= \bigoplus_{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'} \overline{b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}}\cdot \mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes \mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}_2''-\mathbf{v}_1'')].\end{aligned} \tag{5.11}$$

现在我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}_0(\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathcal{R}) & \xrightarrow{i^+} & F_{k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}} & \xrightarrow{j^+} & \mathcal{M}_0(\mathbf{w},\mathcal{R})\\
{\scriptstyle c^{-1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle c} & & {\scriptstyle c^{-1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle c} & & {\scriptstyle c^{-1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle c}\\
\mathcal{M}_0(\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},\mathcal{R}) & \xrightarrow{i^-} & F_{\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1},k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1}} & \xrightarrow{j^-} & \mathcal{M}_0(\mathbf{w},\mathcal{R})
\end{array}$$

由于 c 是一个同构，因此我们有

$$(c^{-1})^*(i^-)^!(j^-)^*c^* = (c^{-1})^*(i^-)^!c^*(j^+)^* = (c^{-1})^*c^*(i^+)^!(j^+)^* = (i^+)^!(j^+)^*$$

由此，根据（5.11），

$$\begin{aligned}(i^+)^!(j^+)^*\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) &= (c^{-1})^*(i^-)^!(j^-)^*c^*\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) = (c^{-1})^*(i^-)^!(j^-)^*\mathcal{L}(\mathbf{v}'^c,\mathbf{w})\\
&= (c^{-1})^*\bigoplus_{\mathbf{v}''^c\le\mathbf{v}'^c} \overline{b_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c}}\cdot \mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes \mathcal{L}(\mathbf{v}''^c,\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}_1''-\mathbf{v}_2'')]\\
&= \bigoplus_{\mathbf{v}''\le\mathbf{v}'} \overline{b_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c}}\cdot \mathcal{L}(0,k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})\boxtimes \mathcal{L}(\mathbf{v}'',\mathbf{w}-k\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{s}_1})[k(\mathbf{v}_1''-\mathbf{v}_2'')]\end{aligned}$$

与（5.10）比较可得 $b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = \overline{b_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c}}$。 □

今后我们可以假设 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \le \min\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$，因此 $\mathbf{v}$ 是 $I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ 中的极大元。我们将 $v^{-\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w})}P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}$ 记为 $\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ 在 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ 的一般点处的茎的 Poincaré 多项式。众所周知，

$$\deg(P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) < \dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}).$$

考虑 $\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的分解。设 $\mathbf{v}''\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ 满足 $0\le \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\le k$；通过在 $x_{\mathbf{v}'',\mathbf{w}}$ 处取茎，我们得到

$$\begin{aligned}v^{-\dim \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})}P(F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) =& a_{\mathbf{v},\mathbf{v}}\cdot v^{-\dim \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R})}P_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} + a_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}v^{-\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R})}\\ &+ \sum_{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\setminus\{\mathbf{v}\},\mathbf{v}'>\mathbf{v}''} a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\cdot v^{-\dim \mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R})}P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 $P(F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''})$ 是纤维 $F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}$ 的 Poincaré 多项式。根据我们对 $\mathbf{v}$ 的假设，容易看出 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}}=1$。因此，应用 (5.2)，等式 (5.12) 给出

$$\begin{aligned} P(F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) =& P_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} + v^{2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''})}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \\ &+ \sum_{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\setminus\{\mathbf{v}\},\mathbf{v}'>\mathbf{v}''} v^{2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'})}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

注意，多项式$P_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}$ 满足

$$\deg(P_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) < \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) = 2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}). \tag{5.14}$$

此外，由（5.9）可知，$a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}$ 的次数为$\leq \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'})$，因此

$$\begin{aligned} &\deg\left(a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\cdot v^{2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'})}P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\right) \\ &\leq \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) + 2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) + \deg(P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) \\ &= \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) + \dim\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) + \deg(P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) \\ &= 2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} + \deg(P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}). \end{aligned} \tag{5.15}$$

引理 5.3. 对任意$\mathbf{v}''\leq\mathbf{v}'$，我们有

$$\deg(P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) < \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|(k-|\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|). \tag{5.16}$$

证明。由于$\mathbf{v}''\leq\mathbf{v}'$，我们可以写成$\mathbf{v}''=\mathbf{v}'-s\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathtt{S}_1}$。此外，由于$P_{\mathbf{v}'}$、$\mathbf{v}''=P_{\mathbf{v}'^c}$、$\mathbf{v}''^c$，不妨设 $s>t$ （$s=t$ 的情形是平凡的）。在此情形下，$\mathcal{L}(\mathbf{v}''^c,\mathbf{w})$不出现在 $\pi(\mathbf{v}'^c,\mathbf{w})$的分解中（这可由(5.7)看出），因此在 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}''^c,\mathbf{w}\ \mathcal{R})$处取$\mathcal{L}(\mathbf{v}''^c,\mathbf{w}\ \mathcal{R})$的茎表明

$$\begin{aligned} \deg(P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) &= \deg(P_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c}) \leq 2\dim F_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c} \\ &= \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'^c,\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}''^c,\mathbf{w},\mathcal{R}) + (t-s)(k-(t-s)) \\ &= \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) - (s-t)(k+(s-t)) \\ &< \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) - (s-t)(k-(s-t)) \\ &= \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}), \end{aligned}$$

其中我们用到了（5.2）。 □

命题 5.4。 对于任意满足 $0\leq\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\leq k$ 的 $\mathbf{v}''\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$，系数 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}$ 均非零。

证明。结合引理 5.3，方程 (5.15) 可推出

$$\begin{aligned} &\deg\left(v^{2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'})}a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\right) \\ &< 2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} + \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathcal{R}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|(k-|\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|) \\ &= \dim\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathcal{R}) + \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) - \dim\mathcal{M}_0^{\mathrm{reg}}(\mathbf{v}'',\mathbf{w},\mathcal{R}) - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|(k-|\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|) \\ &= 2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} + \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|(k-|\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|). \end{aligned}$$

回顾一下，$\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}=\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}$。若 $\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\geq 0$，则

$$\begin{aligned} &\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|(k-|\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|) \\ &= \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}(k-\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k(\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} - \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) + \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}^2 - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}^2 + \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}^2 \\
&= -2k\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} + 2\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} - 2\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \\
&= 2\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} - k) \le 0.
\end{aligned}
$$

另一方面，对于 $\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\ \mathbf{v}''} \le 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|(k - |\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}|) \\
&= \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}) - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}(k - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}) + \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}(k + \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}) \\
&= \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}^2 - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}^2 + \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}^2 = 2\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}^2 - 2\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \\
&= 2\mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} \le 0.
\end{aligned}
$$

因此，以下不等式成立：

$$
\deg\left(v^{2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}(k - \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'})} a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} P_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}\right) < 2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}.
$$

由于多项式 $P(F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''})$ 的次数为 $2\dim F_{\mathbf{v},\mathbf{v}''}$，由 (5.13) 可得 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \neq 0$。□

推论 5.5. $b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} \neq 0$ 当且仅当 $\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = 0$.

证明。由于对于任意 $\mathbf{v}'' \in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$，$a_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \neq 0$ $0 \le \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \le k$，方程 (5.9) 表明，$b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} \neq 0$ 当且仅当$0 \le \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \le k$，其中 $\mathbf{v}$ 是满足 $\mathbf{v}' \in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ 且$0 \le \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} \le k$的任意向量。特别地，取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ 可得，$b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} \neq 0$ 当且仅当 $0 \le \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} \le k$。但同样的论证也适用于 $b_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c}$，且我们有 $r_{\mathbf{v}'^c,\mathbf{v}''^c} = -\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}$，因此引理 5.2 蕴含所述结论。□

根据推论 5.5，等式 (5.9) 可简化为

$$
\begin{bmatrix} k \\ \mathtt{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\mathbf{v}'' \le \mathbf{v}' \\ \mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = 0}} a_{\mathbf{v},\mathbf{v}'} b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}. \tag{5.17}
$$

命题 5.6. $a_{\mathbf{v},\ \mathbf{v}''} = \begin{bmatrix} k \\ \mathtt{r}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix}_{\mathbf{v},\ \mathbf{v}''}$ 和 $b_{\mathbf{v}',\ \mathbf{v}''} = \delta_{\mathbf{v}',\ \mathbf{v}''}$。

证明. 令 $\mathbf{v}'' = \mathbf{v} - s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1} - t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}$ 表示 $0 \le s - t \le k$，我们对 t 使用归纳法来证明该命题。对于情形 $t = 0$，满足 $\mathbf{v}' \ge \mathbf{v}''$，$\mathtt{r}_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = 0$ 的唯一序列 $\mathbf{v}' \in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ 是 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}''$，因此 (5.17) 给出 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}''} = \begin{bmatrix} k \\ s \end{bmatrix}$ 和 $b_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''} = \delta_{\mathbf{v}',\mathbf{v}''}$。现在假设该断言对任意满足 $0 \le b < t$ 的 $\mathbf{v}'' = \mathbf{v} - a\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1} - b\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}$ 均已证明。由 (5.17)，我们有

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} k \\ s - t \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{t} a_{\mathbf{v},\mathbf{v}-(s-i)\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-(t-i)\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}} b_{\mathbf{v}-(s-i)\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-(t-i)\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}} + a_{\mathbf{v},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}} \\
&= \sum_{i=1}^{t} \begin{bmatrix} k \\ s - t \end{bmatrix} b_{\mathbf{v}-(s-i)\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-(t-i)\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}} + a_{\mathbf{v},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}}.
\end{aligned}
$$

由于每个 $b_{\mathbf{v}-(s-i)\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-(t-i)\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}}$ 和 $a_{\mathbf{v},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}}$ 都属于 $\mathbb{N}[v, v^{-1}]$，且后者非零，因此唯一的可能性是 $b_{\mathbf{v}-(s-i)\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-(t-i)\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1},\mathbf{v}-s\mathbf{1}_{\mathbf{s}_1}-t\mathbf{1}_{\Sigma\mathbf{s}_1}} = 0$ for $1 \le i \le t$。至此，归纳步骤完成。□

命题5.7。 对于任意一对 (**v**,**w**)，我们有

$$\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})=\begin{cases}\displaystyle\bigoplus_{\substack{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\\ 0\le \mathbf{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\le \mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2}} \begin{bmatrix}\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\\ \mathbf{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\end{bmatrix}\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) & \text{if } \mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\ge 0,\\ \displaystyle\bigoplus_{\substack{\mathbf{v}'\in I_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})\\ \mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\le \mathbf{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\le 0}} \begin{bmatrix}-\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\\ -\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mathbf{v}'}\end{bmatrix}\mathcal{L}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) & \text{if } \mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\le 0.\end{cases}$$

证明。由于我们已经确定了系数 $b_{\mathbf{v},\ \mathbf{v}'}$，第一种情形由 (5.9) 得出。情形 $\mathbf{w}_1\le\mathbf{w}_2$ 可以用类似的方法处理。□

利用 $\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的分解，我们现在可以推出 $\widetilde{L(\mathbf{v},\mathbf{w})}$ 关于$\mathbf{R}$的生成元的显式表达式。为简化记号，我们设

$$E:=L(0,\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}),\quad F:=L(0,\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}),\quad K:=L(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}^1),\quad K'=L(\mathbf{v}^{\Sigma 1},\mathbf{w}^1).$$

根据命题5.6（及其类似命题），我们立即得到以下乘法公式：

推论 5.8。对于任意强 l-占优对(**v**,**w**)，若$\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_2$,，则有

$$E^k\cdot L(\mathbf{v},\mathbf{w})=v^{k(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}L(\mathbf{v},\mathbf{w}+k\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}),\quad L(\mathbf{v},\mathbf{w})\cdot E^k=v^{k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)}L(\mathbf{v},\mathbf{w}+k\mathbf{1}_{\mathbb{S}_1}),$$
$$F^k\cdot L(\mathbf{v},\mathbf{w})=v^{k(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)}L(\mathbf{v},\mathbf{w}+k\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}),\quad L(\mathbf{v},\mathbf{w})\cdot F^k=v^{k(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}L(\mathbf{v},\mathbf{w}+k\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}).$$

命题5.9。对于 $a,b\ge 0$，有

(5.18)

$$E^aF^b=\begin{cases}\displaystyle\sum_{0\le\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\le b} v^{a(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\frac{[b+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[b+1]}L(\mathbf{v},a\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}) & \text{if } a\ge b,\\ \displaystyle\sum_{0\le\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\le a} v^{b(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}\begin{bmatrix}a+1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+1\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\frac{[a+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[a+1]}L(\mathbf{v},a\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}) & \text{if } b\ge a.\end{cases}$$

证明。由推论5.8，我们可以假设 $a=b$。在此情形下，我们注意到

$$\pi(\mathbf{v},b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1})=\bigoplus_{i=0}^{\min\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}}\mathcal{L}(\mathbf{v}-i\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}-i\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1},b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}).\tag{5.19}$$

那么，例 5.1 给出

$$\Delta^{b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}}_{b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1},b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}}(\pi(\mathbf{v},b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}))=v^{b(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}\begin{bmatrix}b\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\mathcal{L}(0,b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1})\boxtimes\mathcal{L}(0,b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}),$$

因此，由（5.19），我们得到

$$\begin{aligned}&\Delta^{b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}}_{b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1},b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}}(\mathcal{L}(\mathbf{v},b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1}+b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}))\\ &=v^{b(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}\Big(\begin{bmatrix}b\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b\\ \mathbf{v}_1-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ \mathbf{v}_2-1\end{bmatrix}\Big)\mathcal{L}(0,b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1})\boxtimes\mathcal{L}(0,b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1})\\ &=v^{b(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)}\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\frac{[b+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[b+1]}\mathcal{L}(0,b\mathbf{1}_{\sigma\mathbb{S}_1})\boxtimes\mathcal{L}(0,b\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathbb{S}_1}).\end{aligned}$$

取对偶后，即得到所需的公式。 □

为了推导 $L(\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的显式公式，我们需要用对偶典范基来表示 $E^aF^bK^cK'^d$。下面的引理说明如何由（5.18）推导出这一结果。

引理 5.10 （参见 [LP26，引理 4.19]）。 对任意 l-占优对 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 和 $(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\in(V^0,W^0)$ 满足 $\sigma^*\mathbf{w}^0-\mathcal{C}_q\mathbf{v}^0=0$，有

$$L(\mathbf{v}^0,\mathbf{w}^0)\cdot L(\mathbf{v},\mathbf{w})\in v^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}L(\mathbf{v}+\mathbf{v}^0,\mathbf{w}+\mathbf{w}^0).$$

引理 5.11。 对于任意强 l-占优对 $(\mathbf{v}、\mathbf{w})$，有

$$K\cdot L(\mathbf{v},\mathbf{w})=v^{\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2}L(\mathbf{v}+\mathbf{1}_{\sigma\mathcal{S}_1},\mathbf{w}),\qquad L(\mathbf{v},\mathbf{w})\cdot K=v^{\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_1}L(\mathbf{v}+\mathbf{1}_{\sigma\mathcal{S}_1},\mathbf{w})$$
$$K'\cdot L(\mathbf{v},\mathbf{w})=v^{\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_1}L(\mathbf{v}+\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathcal{S}_1},\mathbf{w}),\qquad L(\mathbf{v},\mathbf{w})\cdot K'=v^{\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2}L(\mathbf{v}+\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathcal{S}_1},\mathbf{w}).$$

证明。 由引理5.10 可得

$$K\cdot L(\mathbf{v},\mathbf{w})=v^{a_{\mathbf{w}}}L(\mathbf{v}+\mathbf{1}_{\sigma\mathcal{S}_1},\mathbf{w})=\overline{L(\mathbf{v},\mathbf{w})\cdot K},$$

对 K' 也同理。整数 $a_{\mathbf{w}}$ 可利用 $\pi(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 和（5.4）的分解来确定。 □

命题 5.12。 对于任意强 l-占优对 $(\mathbf{v}、\mathbf{w})$，有

(5.20)

$$L(\mathbf{v},\mathbf{w})=\sum_{k=l}^{n}(-1)^{k-l}\sum_{\substack{\mathbf{v}'_1\geq\mathbf{v}_1,\mathbf{v}'_2\geq\mathbf{v}_2\\ \mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2=k}}v^{f_{\mathbf{w}}(\mathbf{v},\mathbf{v}')}\begin{bmatrix}n-\mathbf{v}'_2-\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}'_1-\mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}_2\\ \mathbf{v}'_2-\mathbf{v}_2\end{bmatrix}E^{\mathbf{w}_1-k}F^{\mathbf{w}_2-k}K^{\mathbf{v}'_1}K'^{\mathbf{v}'_2},$$

其中 $n=$最小值$\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$, $l=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, 和

$$f_{\mathbf{w}}(\mathbf{v},\mathbf{v}')=(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)+(n+1-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2)[(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)-(\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2)].$$

证明。 我们需要证明 (5.20) 是 (5.18) 的逆公式。根据推论 5.8，只需考虑 $a=b$ 的情形。将 (5.20) 代入 (5.18) 并应用引理 5.11，可得

$$\begin{aligned}E^bF^bK'^cK^d=&\sum_{0\leq\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\leq b}\sum_{\substack{\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2\leq b+c+d\\ \mathbf{v}'_1\geq\mathbf{v}_1+c,\mathbf{v}'_2\geq\mathbf{v}_2+d}}(-1)^{(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)-(\mathbf{v}_1+c+\mathbf{v}_2+d)}v^{b(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)+f_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{v}')}\\ &\cdot\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\frac{[b+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[b+1]}\begin{bmatrix}b+d-\mathbf{v}'_2-\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}'_1-\mathbf{v}_1-c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b+c-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}_2\\ \mathbf{v}'_2-\mathbf{v}_2-d\end{bmatrix}\\ &\cdot E^{b+c+d-k}F^{b+c+d-k}K'^{\mathbf{v}'_1}K^{\mathbf{v}'_2}\\ =&\sum_{0\leq\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\leq b}\sum_{\substack{\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2\leq d\\ \mathbf{v}'_1\geq\mathbf{v}_1,\mathbf{v}'_2\geq\mathbf{v}_2}}(-1)^{(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)-(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)}v^{b(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)+f_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{v}'+\mathbf{u})}\\ &\cdot\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b+1\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix}\frac{[b+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[b+1]}\begin{bmatrix}b-\mathbf{v}'_2-\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}'_1-\mathbf{v}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}_2\\ \mathbf{v}'_2-\mathbf{v}_2\end{bmatrix}\\ &\cdot E^{b+c+d-k}F^{b+c+d-k}K'^{\mathbf{v}'_1+c}K^{\mathbf{v}'_2+d}\end{aligned}$$

其中我们记

$$\mathbf{w} = (b+c+d)\mathbf{1}_{\sigma \mathtt{S}_1} + (b+c+d)\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathtt{S}_1}, \quad \mathbf{u} = c\mathbf{1}_{\mathtt{S}_1} + d\mathbf{1}_{\Sigma\mathtt{S}_1}.$$

右端中 $E^b F^b K'^c K^d$ 的系数显然为 1，因此只需证明，对于任意（固定的）$\mathbf{v}_1'$，$\mathbf{v}_2' \geq 0$，满足 $0 < \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' \leq b$，下列等式成立：

$$\sum_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{v}'} (-1)^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2} \cdot v^{(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)} \begin{bmatrix} b+1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \frac{[b+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[b+1]} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = 0.$$

另一方面 h　并且，回想一下，在（5.18）的证明中，我们已经得到了下列恒等式：

$$\begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \frac{[b+1-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2]}{[b+1]}.$$

因此，只需证明下列引理。 □

引理 5.13. 对于任意非负整数 $\mathbf{v}_1'$、$\mathbf{v}_2'$，满足 $0 < \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' \leq b$，令

$$J_1 = \sum_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{v}'} (-1)^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2} \cdot v^{(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \sum_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{v}'} (-1)^{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2} \cdot v^{(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}.$$

那么 $J_1 = J_2$。

证明。 我们将用到以下标准二项式恒等式：

$$\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} n-x-1 \\ n \end{bmatrix}, \tag{5.21}$$

$$\sum_{k=0}^{n} v^{xk-y(n-k)} \begin{bmatrix} x \\ n-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

其中 x，y，m 是整数，且 $n \geq 0$。将（5.21）应用于 J_1，我们得到 t

$$\sum_{\mathbf{v}_1=0}^{\mathbf{v}_1'} (-1)^{\mathbf{v}_1} v^{\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \sum_{\mathbf{v}_2=0}^{\mathbf{v}_2'} (-1)^{\mathbf{v}_2} v^{-\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\mathbf{v}_1=0}^{\mathbf{v}_1'} (-1)^{\mathbf{v}_1'} v^{\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \sum_{\mathbf{v}_2=0}^{\mathbf{v}_2'} (-1)^{\mathbf{v}_2'} v^{-\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}.$$

现在我们应用（5.22）得到

$$\sum_{\mathbf{v}_1=0}^{\mathbf{v}_1'} v^{(b+1)\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2')} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix},$$

$$\sum_{\mathbf{v}_2=0}^{\mathbf{v}_2'} v^{(b+1)\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2')} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_2' \end{bmatrix},$$

由此我们得出结论

$$\begin{aligned} J_1 &= (-1)^{\mathbf{v}_1'} v^{b\mathbf{v}_1'} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} \cdot (-1)^{\mathbf{v}_2'} v^{-b\mathbf{v}_2'} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_2' \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'} v^{b(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2')} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_2' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

类似的论证也适用于 J_2，此时我们得到

$$\begin{aligned} J_2 =& \sum_{\mathbf{v}_1=1}^{\mathbf{v}_1'} (-1)^{\mathbf{v}_1} v^{\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \\ & \cdot \sum_{\mathbf{v}_2=1}^{\mathbf{v}_2'} (-1)^{\mathbf{v}_2} v^{-\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\ =& \sum_{\mathbf{v}_1=0}^{\mathbf{v}_1'-1} (-1)^{\mathbf{v}_1'} v^{(\mathbf{v}_1+1)(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1 \\ \mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1-1 \end{bmatrix} \\ & \cdot \sum_{\mathbf{v}_2=0}^{\mathbf{v}_2'-1} (-1)^{\mathbf{v}_2'} v^{-(\mathbf{v}_2+1)(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1)} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1 \\ \mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2-1 \end{bmatrix} \\ =& (-1)^{\mathbf{v}_1'} v^{(b+1)\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-b-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_1'-1 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{\mathbf{v}_2'} v^{-(b+1)\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1'+b+1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_2'-1 \end{bmatrix} \\ =& (-1)^{\mathbf{v}'+\mathbf{v}_2'} v^{b(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2')} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_1'-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2'-1 \\ \mathbf{v}_2'-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

显然，对于 $J_1 = J_2$ 在任何情况下都成立（如果 $\mathbf{v}_1' = 0$ 或 $\mathbf{v}_2' = 0$，那么 J_1 和 J_2 都会化为 0）。□

注记 5.14。在 [BG17] 中，作者给出了双规范$\widetilde{}$基的显式公式，该基属于 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$；其中量子卡西米尔元

$$C = EF - v^{-1}K - vK' = FE - vK - v^{-1}K'$$

起着重要作用。由（5.20）可知 $C = L(0, \mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{S}_1} + \mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathfrak{S}_1})$。事实上，这些元素$C^{(m)}$ 由以下递归定义

$$C \cdot C^{(m)} = C^{(m+1)} + KK'C^{(m-1)}, \quad \forall m \geq 1$$

在 [BG17第 4 节中，1] 不过是 $L(0, m\mathbf{1}_{\sigma\mathfrak{S}_1} + m\mathbf{1}_{\sigma\Sigma\mathfrak{S}_1})$ 在我们的记号下的表示，特别是$\widetilde{\mathbf{U}}_v(\mathfrak{sl}_2)$ 的双典范基与对偶典范基重合。它也与$\widetilde{}$基的公式 Θ 在 [Sh22] 中为$\mathbf{U}_v(\mathfrak{sl}_2)$ 构造的基相同。

References

[Ach21] P. Achar，《反常层及其在表示论中的应用》，第**258**卷，美国数学学会，2021年。[BBD82] A.A. Beilinson、J. Bernstein、P. Deligne，《反常层》，Ast´erisque **100**，1982年。

[BG17] A. Berenstein 和 J. Greenstein, 《双典范基》, Adv. Math. 316 (2017), 381–468。[Bra03] T. Braden, 《交叉上同调的双曲局部化》, Transform. Groups 8 (2003), no. 3, 209–216。[Br13] T. Bridgeland, 《通过复形的 Hall 代数构造量子群》, Ann. Math. 177 (2013), 739–759。[CZ26] X. Chen、X. Zhou, 《量子群的基与 $\imath$ $\mathfrak{sl}_2$的量子群》, J. Algebra 690 (2026), 425–474。[DDPW08] B. Deng、J. Du、B. Parshall 和 J. Wang, 《有限维代数与量子群》, 《数学调查与专著丛书》150。美国数学学会, 普罗维登斯, RI, 2008年。[dCM02] M. A. A. de Cataldo 和 L. Migliorini, 《硬 Lefschetz 定理与半小映射的拓扑》, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 35 (2002), no. 5, 759–772。[GLS13] C. Geiss、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer, 《量子坐标环上的簇结构》, Selecta Math. (N.S.) 19 (2013), 337–397。[Ha88] D. Happel, 《有限维代数表示论中的三角范畴》。伦敦数学会讲义丛书 119, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1988年。[HL15] D. Hernandez 和 B. Leclerc, 《量子格罗滕迪克环与导出霍尔代数》, J. Reine Angew. Math. 701 (2015), 77–126。[KKKO18] S.-J. Kang、M. Kashiwara、M. Kim 和 S.-j. Oh, 《簇代数的幺半范畴化》, J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), 349–426。[Ka91] M. Kashiwara, 《泛包络代数的 Q 类比的晶体基》, Duke Math. J. 63 (1991), 456–516。[KS16] B. Keller 和 S. Scherotzke, 《分次箭图簇与导出范畴》, J. Reine Angew. Math. 713 (2016), 85–127。[Ko14] S. Kolb, 《量子对称 Kac-Moody 对》, Adv. Math. 267 (2014), 395–469。[Let99] G. Letzter, 《量子化包络代数的对称对》, J. Algebra 220 (1999), 729–767。[LP25] M. Lu 和 X. Pan, 《量子群的对偶典范基与 $\imath$量子群 I: Hall 代数》, arXiv:2504.19073v2。[LP26] M. Lu 和 X. Pan, 《量子群的对偶典范基与 $\imath$量子群 II: 几何》, arXiv:2603.01350。[LR24] M. Lu 和 S. Ruan, 《带权射影直线的 $\imath$Hall 代数与量子对称对 III: 准分裂型》, arXiv:2411.13078。[LW21a] M. Lu 和 W. Wang, 《Hall 代数与量子对称对 II: 反射函子》, Commun. Math. Phys. 381 (2021), 799–855。[LW21b] M. Lu 和 W. Wang, 《Hall 代数与量子对称对 III: 箭图簇》, Adv. Math. 393 (2021), 108071。[LW22a] M. Lu 和 W. Wang, 《Hall 代数与量子对称对 I: 基础》, 伦敦数学会会刊 124 (1): 1–82。[Lus90a] G. Lusztig, 《由量子化泛包络代数产生的有限维 Hopf 代数》, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 257–296。[Lus90b] G. Lusztig, 《由量子化包络代数产生的正典基》, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 447–498。[Lus91] G. Lusztig, 《箭图、层与量子化包络代数》, J. Amer. Math. Soc. 4 (2)(1991), 365–421, 1991。[Lus93] G. Lusztig, 《量子群导论》, Birkh¨auser, 波士顿, 1993年。[Na01] H. Nakajima, 《箭图簇与量子仿射代数的有限维表示》, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 145–238 (电子版)。[Na04] H. Nakajima, 《箭图簇与量子仿射代数的 t类比 q特征》, Ann. Math. 160 (2004), 1057–1097。[Q16] F. Qin, 《通过循环箭图簇构造量子群 I》, Compos. Math. 152 (2016), 299–326。[Rin90] C. Ringel, 《Hall 代数与量子群》, Invent. Math. 101 (1990), 583–591。[Rin96] C.M. Ringel, 《量子群的 PBW 基》, J. reine angrew. Math. 470 (1996), 51–88。[Sch19] S. Scherotzke, 《广义箭图簇与三角范畴》, Math. Z. 292 (2019), 1453–1478。

[SS16] S. Scherotzke 和 N. Sibilla，箭图簇与 *Hall* 代数，伦敦数学会会刊 **112**（2016），1002–1018。[Sh22] L. Shen，量子群的簇性质，arXiv:2209.06258[VV03] M. Varagnolo 和 E. Vasserot，层与量子格罗滕迪克环《纪念 Issai Schur 论文集》（Chevaleret/雷霍沃特，2000），数学进展 **210**（Birkhäuser Boston，波士顿，MA，2003），345–365。

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱：luming@scu.edu.cn

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.China电子邮箱：xiaolong pan@stu.scu.edu.cn