伪非退化双直纹超曲面的几何

Junzhen Li 和 Kentaro Saji

2026年3月5日

arXiv:2603.03382v1 [math.DG] 3 Mar 2026

摘要

我们研究欧氏四维空间中双直纹超曲面的奇点。通过考察相邻直母线之间距离最小的点，我们得到了脐线的一种刻画。我们引入伪非退化双直纹超曲面的概念，并考察其基本性质。我们证明，通过高度函数从配备 Frenet 型标架的曲线构造出的双直纹超曲面是伪非退化的。此外，我们还通过以这种方式构造的伪非退化双直纹超曲面的勒让德曲线及其奇点，研究原曲线的性质。

1 引言

本文研究欧氏四维空间中的单参数平面族 $\boldsymbol{R}^4$，称为双直纹超曲面。 $\boldsymbol{R}^3$ 中的直纹曲面是微分几何中的经典研究对象，近年来不仅在微分几何领域，也在其他若干领域受到关注。例如，参见 $[4, 7, 8]$ 和 $[2, 5, 11, 13, 14]$。双直纹超曲面自然地将直纹曲面推广到高维空间，许多作者都对其进行了研究 $[1, 12, 15]$。在 $[15]$, 中，引入了双直纹超曲面的非退化性概念。在这一条件下，可以自然地定义嵌入曲面和脐线；它们类似于直纹曲面的脐线，因为奇点位于该曲线上。本文将脐线刻画为那些在无穷小意义下使相邻直纹之间的距离最小的点的轨迹，并由此证明， $[15]$ 意义下的脐线也具有相同的含义。我们为双直纹超曲面引入另一种概念——伪非退化性，并定义伪非退化双直纹超曲面上的嵌入曲面和第二直纹曲线。给定 $\boldsymbol{R}^4$中的一条曲线，我们取一个 Frenet 型标架，并定义关于其中一个标架向量的高度函数。该高度函数的判别集给出一个伪非退化双直纹超曲面。通过研究这些超曲面的嵌入曲面和奇点，我们获得了有关原曲线几何的信息。

2020年数学主题分类。主要分类：57R45；次要分类：53A07、53A25。关键词与短语：双直纹超曲面，脐线。部分受 JSPS KAKENHI 资助编号 25K07001、22KK0034 支持。

2 双直纹超曲面

本节介绍双直纹超曲面及其基本性质。更多细节请参见 [1, 15]。

2.1 基本概念与定义

设 $\gamma\colon (\boldsymbol{R},0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$ 和 $P\colon (\boldsymbol{R},0) \to \mathrm{Gr}_2(4)$ 为曲线芽，其中 $\mathrm{Gr}_2(4)$ 是格拉斯曼流形。取 P 的一个基向量场 $X, Y\colon (\boldsymbol{R},0) \to \boldsymbol{R}^4$，由下式定义的超曲面单参数族

$$f(t,s,r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$$

对于 $t \in (\boldsymbol{R},0)$ 以及 $s,r \in \boldsymbol{R}$，称其为双直纹超曲面芽，或简称双直纹超曲面。由于 $O = \{(t,s,r) \in \boldsymbol{R}^3 \mid t = 0\}$ 是一个闭集，因此可以自然地考虑沿着 O 的映射芽，并将它们记为 $f : (\boldsymbol{R}^3, O) \to \boldsymbol{R}^4$，或者写作 $f\colon (\boldsymbol{R}^3, (0,s,r)) \to \boldsymbol{R}^4$，以明确标示变量。由于我们研究的是 0 处的芽，表达式“对所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$”意指存在 0 的一个开邻域 $I \subset \boldsymbol{R}$，使得该命题对所有 $t \in I$ 都成立。我们称 γ 为基曲线，称两个向量 X 和 Y 为指向曲线。平面 P 称为直母线。此定义推广了 $\boldsymbol{R}^3$ 中直纹曲面的概念。双直纹超曲面的性质，包括其一般奇点，已在 $[1, 15]$ 中得到研究。对于任意双直纹超曲面芽 $f = \gamma(t) + sX(t) + rY(t) : (\boldsymbol{R}^3, (0,s,r)) \to \boldsymbol{R}^4$，我们可以选择指向曲线 X 和 Y，使得对所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$，$|X| = |Y| = 1$, $\langle X, Y\rangle = 0$ 且 $\langle X, Y'\rangle = \langle X', Y\rangle = 0$，即满足以下条件。

引理 *2.1*。*(*[15, 引理 *3.2*]*)* 对于任意芽 $X, Y\colon (\boldsymbol{R},0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$，若其对于所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$ 均线性无关，则存在 $\tilde{X}, \tilde{Y}\colon (\boldsymbol{R},0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$ 满足

$\tilde{X}, \tilde{Y}, \langle X, Y\rangle_{\boldsymbol{R}} = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle_{\boldsymbol{R}}$, $|\tilde{X}| = |\tilde{Y}| = 1$, $\langle \tilde{X}, \tilde{Y}\rangle = 0$，并且对于所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$，有 $\langle \tilde{X}, \tilde{Y}'\rangle = \langle \tilde{X}', \tilde{Y}\rangle = 0$，其中 $' = d/dt$。

这里，$\langle , \rangle$ 表示 $\boldsymbol{R}^4$ 中的标准内积，而 $\langle X_1, \ldots, X_k\rangle_{\boldsymbol{R}}$ 表示由 $X_1, \ldots, X_k$ 张成的子空间。若导向曲线 X 和 Y 满足条件 $|X| = |Y| = 1$, $\langle X, Y\rangle = 0$ 以及 $\langle X, Y'\rangle = 0$ 对于所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$ 均成立，则称它们是约束适配的。在本文中，我们假设所有双直纹超曲面的导向曲线均取为约束适配的。若映射 $P\colon \boldsymbol{R} \to \mathrm{Gr}_2(4)$ 在 $t \in \boldsymbol{R}$ 处满足：对于 $P(t)$ 的一个基 $\{X(t)\ Y(t)\}$，$X(t)$、$Y(t)$、$X'(t)$、$Y'(t)$ 线性无关，则称其在 $t \in \boldsymbol{R}$ 处是非退化的。非退化性不依赖于基和参数的选择。若双直纹超曲面芽 $f(t,s,r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$ 满足：对于所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$，$P = \langle X, Y\rangle_{\boldsymbol{R}}\colon (\boldsymbol{R},0) \to \mathrm{Gr}_2(4)$ 均为非退化的，则称其为非退化的。若双直纹超曲面 $f(t,s,r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$ 满足 $P = \langle X, Y\rangle_{\boldsymbol{R}}$ 为常平面，则称其为柱面。注意，f 是柱面，当且仅当对于所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$，$\dim\langle X, Y, X', Y'\rangle_{\boldsymbol{R}} = 2$。对于非退化双直纹超曲面 $f(t,s,r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$，存在函数 $B(t) = (b_1(t)\ b_2(t)\ b_3(t)\ b_4(t))$，使得

$$\gamma' = b_1 X + b_2 Y + b_3 X' + b_4 Y' \tag{2.1}$$

对所有 $t \in (\boldsymbol{R},0)$ 均成立。不同于 $\boldsymbol{R}^3$ 中直纹曲面的情形，在四维空间中，非退化双直纹超曲面与柱面之间存在差距。我们引入另一种非退化性概念。若映射 $P\colon \boldsymbol{R} \to \mathrm{Gr}_2(4)$ 在 $t \in \boldsymbol{R}$ 处满足伪非退化性，即 $P(t)$ 的一组基 $\{X(t)\ Y(t)\}$ 满足

$$\dim \langle X(t), Y(t), X'(t), Y'(t)\rangle_{\boldsymbol{R}} = 3.$$

伪非退化性不依赖于基和参数的选取。

定义 2.2。若双直纹超曲面 $f(t,s,r)=\gamma(t)+sX(t)+rY(t)$ 满足：对所有 $t\in(\boldsymbol{R},0)$，$P=\langle X,Y\rangle_{\boldsymbol{R}}:(\boldsymbol{R},0)\to \mathrm{Gr}_2(4)$ 均为伪非退化，则称其为伪非退化。

对于具有约束适配的直母线曲线 X 和 Y 的伪非退化双直纹超曲面 $f(t,s,r)=\gamma(t)+sX(t)+rY(t)$，以下结论之一成立：$\dim\langle X,Y,X'\rangle_{\boldsymbol{R}}=3$，或 $\dim\langle X,Y,Y'\rangle_{\boldsymbol{R}}=3$。必要时交换 X 和 Y，我们可以假设

$$\dim\langle X,Y,X'\rangle_{\boldsymbol{R}}=3$$

对于伪非退化双直纹超曲面，任意 $t\in(\boldsymbol{R},0)$ 均成立。经过参数变换，我们假设对于任意 $t\in(\boldsymbol{R},0)$，$|X'|=1$ 均成立，此时伪非退化性和约束适配性保持不变。在此假设下，存在函数 $a(t)$ 和 $B(t)=(b_1(t)\ b_2(t)\ b_3(t)\ b_4(t))$，使得

$$\begin{aligned} Y' &= aX' \\ \gamma' &= b_1X+b_2Y+b_3X'+b_4Z \quad (Z=X\wedge Y\wedge X') \end{aligned} \tag{2.2}$$

对任意 $t\in(\boldsymbol{R},0)$ 都成立。在此，我们将 X_1、X_2、$X_3\in\boldsymbol{R}^4$ 的三重外积定义为

$$X_1\wedge X_2\wedge X_3=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4\\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14}\\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34}\end{pmatrix},$$

其中 $X_i=(X_{i1},\ X_{i2},\ X_{i3},\ X_{i4})$（$i=1$、2、3），且 $\boldsymbol{e}_1=(1$、0、0、0)、$\boldsymbol{e}_2=(0$、1、0、0)、$\boldsymbol{e}_3=(0$、0、1、0)、$\boldsymbol{e}_4=(0$、0、0、1)。由于 $\{X,Y,X',Z\}$ 是沿 γ 的标准正交标架场，我们有以下 Frenet-Serre 型公式：

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\X'\\Z\end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix}X\\Y\\X'\\Z\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&a&0\\-1&-a&0&\delta\\0&0&-\delta&0\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

其中 $\delta=-\det(X,Y,X',X'')$。由于 $A\in\mathfrak{o}(4)$，对于给定的函数 $a(t)$ $\delta(t)$，存在唯一的标准正交标架 $\{X(t)\ Y(t)\ X'(t)\ Z(t)\}$，其满足 (2.3)，且在 $\boldsymbol{R}^4$ 上相差等距变换。此外，对于给定的标准正交标架 $\{X(t)\ Y(t)\ X'(t)\ Z(t)\}$ 和 $B(t)=(b_1(t)\ b_2(t)\ b_3(t)\ b_4(t))$，存在唯一的 γ 满足 (2.2)，且在 $\boldsymbol{R}^4$ 中相差平移。

在本文中，对于伪非退化双直纹超曲面 $f=\gamma+sX+rY$，我们假设 X 与 Y 是约束适配的，并且 $|X'|=1$。我们讨论非退化双直纹超曲面与伪非退化双直纹超曲面的正面性。映射 $f:(\boldsymbol{R}^3,0)\to(\boldsymbol{R}^4,0)$称为正面，如果存在映射 $\nu:(\boldsymbol{R}^3,0)\to\boldsymbol{R}^4$，使得 $|\nu|=1$，并且对任意点 $p\in(\boldsymbol{R}^3,0)$以及任意向量 $X\in T_p\boldsymbol{R}^3$，成立$\langle df_p(X)\ \nu(p)\rangle=0$。映射 ν称为 f的单位法向量。正面 f称为前，如果(f,ν)是浸入。我们有如下命题。

命题 2.3. 设 $f(t,s,r)=\gamma(t)+sX(t)+rY(t):(\boldsymbol{R}^3,(0,s,r))\to(\boldsymbol{R}^4,0)$ 是一个双直纹超曲面芽。(1) 若 f 非退化，则 f 在奇点处永远不是正面。(2)若 f 伪非退化，则 f 在奇点处是正面，当且仅当对所有 $t\in(\boldsymbol{R},0)$，$b_4=0$。

证明。 (1) 设 f非退化，并设 $(b_1,\dots,b_4)$ 是由 (2.1) 定义的函数。于是我们看到

$$\begin{aligned} f_t =& b_1X + b_2Y + (b_3+s)X' + (b_4+r)Y', \\ f_s =& X, \\ f_r =& Y, \\ f_t \wedge f_s \wedge f_r =& (b_3+s)X\wedge Y\wedge X' + (b_4+r)X\wedge Y\wedge Y'. \end{aligned}$$

那么， $f_t \wedge f_s \wedge f_r$ 的方向的极限存在，当且仅当存在函数$\alpha(t,s,r)$ $\beta(t,s,r)$，使得 α $(t,s,r)(b_3+s)$ $+\beta(t,s,r)(b_4+r)$ $=0$ 且$(\alpha(t,s,r),\beta(t,s,r))$ $\neq(0,0)$成立。然而， s 和 r 是独立变量，因此这种情况不会发生。由此证明了（1）。（2）设 f 是伪非退化的，且 a 和$(b_1,\dots,b_4)$是由（2.2）定义的函数。那么我们可以看到

$$\begin{aligned} f_t =& \ b_1X + b_2Y + (b_3+s+ra)X' + b_4Z, \\ f_s =& \ X, \\ f_r =& \ Y, \\ f_t \wedge f_s \wedge f_r =& \ (b_3+s+ra)X\wedge Y\wedge X' + b_4X\wedge Y\wedge Z. \end{aligned} \tag{2.4}$$

在奇点处， $b_4=0$。若 $b_4\equiv 0$，则 $X\wedge Y\wedge X'$ 可取为单位法向量， f 是正面的，其中 $\equiv$ 表示等式恒成立。若 b_4 在奇点附近非常值，则 $f_t\wedge f_s\wedge f_r$ 的方向的极限存在，当且仅当存在函数 $\alpha(t,s,r)$ $\beta(t,s,r)$，使得 $\alpha(t,s,r)(b_3+s+ra)$ $+\beta(t,s,r)b_4=0$ 且$(\alpha$ (t,s,r) $\beta(t,s,r))$ $\neq(0,0)$成立。然而， s 是独立变量，因此这种情况不会发生。由此证明了（2）。 □

我们称带有 $b_4\equiv 0$ 的伪非退化双直纹前波面为伪非退化双直纹超曲面。关于伪非退化双直纹前波面的波前性，有如下结论。

命题2.4。 设 $f(t,s,r)=\gamma(t)+sX(t)+rY(t)$ 是一个伪非退化双直纹前波面。那么， f 在奇点处是一个波前，当且仅当 X,Y,X',X'' 在该点线性无关。

证明。 由命题 2.3 的证明可知， f 是一个具有单位法向量 $\nu=X\wedge Y\wedge X'$ 的正面。由 (2.4)，奇点处 df 的核由 $\eta=\partial_t-b_1\partial_s-b_2\partial_r$ 生成。因此 $\eta(X\wedge Y\wedge X')=X\wedge Y\wedge X''$ 成立。因此， f 是一个波前，当且仅当 $X\wedge Y\wedge X'$ 和 $X\wedge Y\wedge X''$ 线性无关。考虑由 $T(V)=X\wedge Y\wedge V$ 定义的线性映射 $T\colon \boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^4$。由于 X 和 Y 线性无关，因此 $\ker T=\langle X,Y\rangle_{\boldsymbol{R}}$。因此， T 的像是 $\boldsymbol{R}^4$ 的一个二维子空间。现在注意到 $T(X')$ $=X\wedge Y\wedge X'$ 且 $T(X'')=X\wedge Y\wedge X''$，向量 $T(X')$ 和 $T(X'')$ 在 $\operatorname{Im}T$ 中线性无关，当且仅当它们在商空间中的等价类

$$\boldsymbol{R}^4/\ker T \ \cong\ \boldsymbol{R}^4/\langle X,Y\rangle_{\boldsymbol{R}}$$

线性无关。这等价于 X、Y、X'、X'' 线性无关，因此断言得证。

□

2.2 脐曲面与勒让德曲线

我们讨论双直纹超曲面的勒让德曲线的一种类比。我们从直纹曲面的勒让德曲线的几何刻画开始。设 $\gamma:(\boldsymbol{R},0)\to$

$(\boldsymbol{R}^n,0)$ 为一曲线芽。设 $X:(\boldsymbol{R},0)\to\boldsymbol{R}^n$ 为一向量，使得 $|X|=1$ 成立。一条直纹曲面 由

$$g(t,s)=\gamma(t)+sX(t). \tag{2.5}$$

若曲线 $\sigma(t)=\gamma(t)+s(t)X(t)$ 满足 $\sigma'\cdot X'\equiv 0$，则称其为勒让德曲线。若直纹曲面 g 对所有 $t\in(\boldsymbol{R},0)$ 都满足 $X'\neq 0$，则称其为非柱面直纹曲面。在非柱面直纹曲面上，满足 $s(t)=-\langle\gamma'(t)\ X'(t)\rangle/\langle X'(t)\ X'(t)\rangle$ 的曲线 $\sigma(t)=\gamma(t)+s(t)X(t)$ 是勒让德曲线。若 $X'\equiv 0$，则对于任意 $s(t)$，曲线 $\sigma(t)=\gamma(t)+s(t)X(t)$ 都是勒让德曲线。关于在 $X'(0)=0$ 且 X' 不恒为零的情形下勒让德曲线的性质，见 [6]。我们通过考察相邻直纹之间的距离来刻画勒让德曲线。固定参数 t_0，并假设 $t_0=0$，再固定一个小数 ε。我们有

$$\gamma(\varepsilon)=\gamma(0)+\varepsilon\gamma'(0)+\varepsilon^2a(\varepsilon),\quad X(\varepsilon)=X(0)+\varepsilon X'(0)+\varepsilon^2b(\varepsilon)$$

我们定义一个函数

$$\begin{aligned}d(\varepsilon,s_1,s_2)=&\big|\gamma(0)+s_1X(0)-\gamma(\varepsilon)-s_2X(\varepsilon)\big|^2/2\\=&\big|(s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\big|^2/2.\end{aligned}$$

这表示直母线上 $t=0$ 和 $t=\varepsilon$处各点之间的距离。微分 d_{s_1} 和d_{s_2} 为

$$d_{s_1}=X(0)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}d_{s_2}=&-X(0)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big)\\&-\varepsilon X'(0)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big)\\&-\varepsilon^2b(\varepsilon)\cdot\Big((s_1-s_2)X(0)-\varepsilon(\gamma'(0)+s_2X'(0))-\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\Big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

由 (2.6)，方程 $d_{s_1}=0$ 等价于

$$s_1=s_2+\varepsilon(\gamma'(0)\cdot X(0))+\varepsilon^2(a(\varepsilon)+s_2b(\varepsilon))\cdot X(0).$$

将其代入 (2.7)，得到

$$d_{s_2}=\varepsilon^2\Big(\gamma'(0)\cdot X'(0)+s_2X'(0)\cdot X'(0)+\varepsilon*\Big),$$

其中 $*$ 表示一个在后续计算中不会用到的值。因此，$(d_{s_1},d_{s_2})=(0,0)$ 等价于

$$s_1=-b_3(0)+\varepsilon*,\quad s_2=-b_3(0)+\varepsilon*,\quad \left(b_3(0)=\frac{\gamma'(0)\cdot X'(0)}{X'(0)\cdot X'(0)}\right).$$

这意味着，脐线是以无穷小意义使相邻直纹之间距离最小的点的轨迹。 [15] 中双直纹超曲面的脐线定义具有这一性质。当 $|X|=1$时，直纹曲面（2.5）是柱面，若 $X'\equiv 0$。当 $\sigma'\equiv 0$时，非柱面直纹曲面（2.5）是圆锥面，也就是说，其脐线的像是一个点。当 γ' 且对所有 $t\in$（$\boldsymbol{R}$,0），X 线性相关时，非柱面直纹曲面（2.5）是切线曲面 。

设 $f(t,s,r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$ 为一个双直纹超曲面，且 X, Y是约束适配的。若对任意 t，曲线 $\sigma(t) = \gamma(t) + s(t)X(t) + r(t)Y(t)$ 满足 $\sigma' \cdot X' = \sigma' \cdot Y' = 0$，则称其为脐线。我们定义

$$\begin{aligned} d(\varepsilon, s_1, s_2, r_1, r_2) =& \Big|\gamma(0) + s_1X(0) + r_1Y(0) - (\gamma(\varepsilon) + s_2X(\varepsilon) + r_2Y(\varepsilon))\Big|^2/2 \\ =& \Big|(s_1 - s_2)X(0) + (r_1 - r_2)Y(0) \\ & - \varepsilon(\gamma'(0) + s_2X'(0) + r_2Y'(0)) + \varepsilon^2 * \Big|^2/2. \end{aligned}$$

于是我们看到

$$\begin{aligned} d_{s_1} =& X(0) \cdot \Big((s_1 - s_2)X(0) + (r_1 - r_2)Y(0) - \varepsilon(\gamma'(0) + s_2X'(0) + r_2Y'(0)) + \varepsilon^2 * \Big), \\ d_{r_1} =& Y(0) \cdot \Big((s_1 - s_2)X(0) + (r_1 - r_2)Y(0) - \varepsilon(\gamma'(0) + s_2X'(0) + r_2Y'(0)) + \varepsilon^2 * \Big). \end{aligned}$$

因此，$(d_{s_1}, d_{r_1}, d_{s_2}, d_{r_2}) = (0, 0)$ 等价于 $s_1 = s_2 + \varepsilon *$、$r_1 = r_2 + \varepsilon *$ 和

$$\begin{aligned} X'(0) \cdot X'(0)s_2 + X'(0) \cdot Y'(0)r_2 =& -\gamma'(0) \cdot X'(0) + \varepsilon * \\ X'(0) \cdot Y'(0)s_2 + Y'(0) \cdot Y'(0)r_2 =& -\gamma'(0) \cdot Y'(0) + \varepsilon *. \end{aligned}$$

因此，脐线也是这样一条点的轨迹：从无穷小意义上看，这些点使相邻直纹之间的距离最小。若 f 是非退化的，则矩阵

$$A = \begin{pmatrix} X' \cdot X' & X' \cdot Y' \\ X' \cdot Y' & Y' \cdot Y' \end{pmatrix}$$

对所有 t 都是正则的，并且存在唯一的脐线。若 f 是伪非退化的，则 $\sigma' \cdot X' = \sigma' \cdot Y' = 0$ 和 $\sigma' \cdot X' = 0$ 等价。此外，矩阵 A 和

$$\begin{pmatrix} X' \cdot X' & X' \cdot Y' & -\gamma' \cdot X' \\ X' \cdot Y' & Y' \cdot Y' & -\gamma' \cdot Y' \end{pmatrix}$$

对所有 t 的秩均为一，存在一个曲面 $\tilde{\sigma}(t, k) = \gamma(t) + s(t, k)X(t) + r(t, k)Y(t)$，使得对于任意满足 $\mathrm{image}\,\sigma \subset \mathrm{image}\,\tilde{\sigma}$ 的曲线 $\sigma(t) = \gamma(t) + s(t)X(t) + r(t)Y(t)$，它都是一条脐线。我们称曲面 $\tilde{\sigma}$ 为伪非退化双直纹超曲面的嵌入曲面。我们定义

$$s(t, r) = -a(t)r - b_3(t) \quad \left(b_3(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot X'(t)}{X'(t) \cdot X'(t)}\right). \tag{2.8}$$

则 $\tilde{\sigma}(t, k) = \gamma(t) + s(t, k)X(t) + kY(t)$ 是一个嵌入曲面。事实上，$\tilde{\sigma}(t, k(t))' \cdot X'(t) = (\gamma' + (-ak - b_3)X' + kY') \cdot X' = 0$ 对任意函数 $k(t)$ 成立。将 $s(t, r)$ 代入 f 的公式，我们得到一个显式参数化

$$\sigma_1(t, r) = \tilde{\gamma}(t) + r\tilde{X}(t) \quad \left(\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - b_3(t)X(t),\ \tilde{X}(t) = \frac{-a(t)X(t) + Y(t)}{|-a(t)X(t) + Y(t)|}\right) \tag{2.9}$$

对于嵌入曲面。若 $a' \neq 0$，则这是一个非柱面直纹曲面，而 σ_1 的脐线为

$$\sigma_2(t) = \tilde{\gamma}(t) + r(t)\tilde{X}(t), \quad r(t) = -\frac{\tilde{\gamma}'(t) \cdot \tilde{X}'(t)}{\tilde{X}'(t) \cdot \tilde{X}'(t)}. \tag{2.10}$$

我们称 σ_2 为第二直纹曲线。通过直接计算可得

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}' &= (b_1 - b_3')X + b_2 Y, \quad \tilde{X}' = -a'(a^2+1)^{-1/2}(X + aY), \\ \left\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \right\rangle &= \frac{(a')^2}{(a^2+1)^2}, \quad \left\langle \tilde{\gamma}', \tilde{X}' \right\rangle = \frac{-a'}{(a^2+1)^{3/2}}\omega, \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中我们设

$$\omega(t) = a(t)b_2(t) + b_1(t) - b_3'(t). \tag{2.12}$$

因此，我们得到第二直纹曲线的参数化

$$\sigma_2(t) = \tilde{\gamma}(t) + \frac{\omega(t)(a(t)^2+1)^{1/2}}{a'(t)}\tilde{X}(t). \tag{2.13}$$

我们考察嵌入曲面为特殊曲面时所满足的条件。如果伪非退化双直纹超曲面的嵌入曲面是柱面（分别为圆锥面、切线可展曲面），则称该伪非退化双直纹超曲面为柱面型（分别为圆锥型、切线可展型）。根据上述论证，伪非退化双直纹超曲面的嵌入曲面的像绝不会是单点。此外，除非原超曲面属于柱面型、圆锥型或切线可展型，否则其像不可能是一条曲线。

定理 2.5。由 a、δ、B 构造的伪非退化双直纹超曲面 $f(t、\ s、\ r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$ 是柱面型，当且仅当 $a' \equiv 0$；并且 f 是圆锥型，当且仅当

$$a' \neq 0 \quad and \quad a''(t)\omega(t) - a'(t)\Big(\omega'(t) + a'(t)b_2(t)\Big) \equiv 0.$$

此外，f 为切线可展型当且仅当 $\omega \equiv b_4 \equiv 0$。

˜证明。由 (2.11)，若对任意 t有 $X' = 0$ 成立，则嵌入曲面为柱面。若对任意 t有 $\sigma_2' = 0$ 成立，则嵌入曲面为圆锥面。由 (2.13)，我们有

$$\sigma_2'(t) = \frac{a''(t)\omega - a'(t)\big(\omega' + a'(t)b_2(t)\big)}{a'(t)^2}\Big(a(t)X(t) - Y(t)\Big).$$

于是我们得到关于圆锥型的断言。对 (2.9) 求导，可见 $\tilde{\gamma}'$ =$(b_1 - b_3')X_1 + b_2 Y + b_4 Z$。由于 σ_1 的指向曲线与 $-aX + Y$成比例，切线可展型的断言随之成立。

□

2.3 奇点及其判据

定义 2.6. 两个映射芽 f，g：$(\boldsymbol{R}^3,\ 0) \to (\boldsymbol{R}^4,\ 0)$ 称为 $\mathcal{A}$-等价，如果存在定义域的微分同胚 φ：$(\boldsymbol{R}^3,\ 0) \to (\boldsymbol{R}^3,\ 0)$ 以及陪域的微分同胚Φ：$(\boldsymbol{R}^4,\ 0) \to (\boldsymbol{R}^4,\ 0)$，使得

$$\Phi \circ f \circ \varphi^{-1} = g.$$

映射芽 f 被称为惠特尼伞 $\times$ 区间，如果它在原点处与 $(t,s,r) \mapsto (t,s,r^2,tr)$ $\mathcal{A}$-等价。映射芽 f被称为尖点边，如果它在原点处与 $(t,s,r) \mapsto (t,s,r^2,r^3)$ $\mathcal{A}$-等价。映射芽 f被称为燕尾，如果它在原点处与 $(t,s,r) \mapsto (t,s,3r^4+2tr^2,4r^3+tr)$ $\mathcal{A}$-等价。映射芽 f被称为尖点蝴蝶，如果它在原点处与 $(t,s,r) \mapsto (t,s,-5r^4-4tr^2-2sr,4r^5+2tr^3+sr^2)$ $\mathcal{A}$-等价。映射芽 f 被称为尖点交叉帽 $\times$ 区间，如果它

$\mathcal{A}$-等价于 $(t,\ s,\ r) \mapsto (t,\ s,\ r^2,\ sr^3)$，在原点处。惠特尼伞 $\times$ 区间不是正面，尖点交叉帽 $\times$ 区间是正面的，但在奇点处不是前。尖点边、燕尾和尖点蝴蝶在奇点处都是前。

有一些实用方法可以判定这些奇点是否属于上述类型。

引理 2.7. 设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$ 是一个映射芽，并且 (t,s,r) 是一个坐标系，其中 $f_t(0,0,0) = 0$。那么 f 是惠特尼伞 $\times$ 区间，当且仅当

$$\det(f_s, f_r, f_{rt}, f_{tt}) \neq 0 \quad or \quad \det(f_s, f_r, f_{st}, f_{tt}) \neq 0$$

在 $(t,s,r) = (0,0,0)$ 成立。

尽管这一事实众所周知，证明可见于 [16,定理 2.6]。

设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$ 是一个正面映射，并设 ν 是 f的单位法向量。若函数 λ 满足 λ 是.....的非零标量倍，则称其为奇点标识

$$\det(f_t, f_s, f_r, \nu).$$

若 λ 是奇点标识，则 $\lambda^{-1}(0)$ 是 $S(f)$ 的奇点集合。若 $d\lambda_0 \neq 0$成立，则称 f 的奇点 0 是非退化的。若 0 是非退化的，则 $S(f)$ 在 0 附近是一个流形。假设秩 $df_0 = 2$，则存在一个向量场 η，使得对于任意 $p \in S(f)$，都有 $\ker df_p := \langle \eta_p \rangle_{\boldsymbol{R}}$。这个 η 称为零向量场。我们定义

$$S_2(f) = \{p \in S(f) \,|\, \eta_p \in T_p S(f)\} = \{p \,|\, \lambda(p) = \eta\lambda(p) = 0\}.$$

我们称 $S_2(f)$ 为第二奇异集。

通过奇点标识和零向量场给出了尖点边、燕尾和尖点蝴蝶的判据。

引理 2.8. ([18, 推论 2.5]) 设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$ 是一个秩为秩 $df_0 = 2$的前。设 λ是奇点标识，η 是零向量场。那么，f 是尖点边当且仅当 $\eta\lambda(0) \neq 0$ 成立，f 是燕尾当且仅当

$$\operatorname{rank} d(\lambda, \eta\lambda) = 2, \quad \eta\lambda(0) = 0, \quad \eta\eta\lambda(0) \neq 0$$

成立，并且 f 是尖点蝴蝶当且仅当满足

$$\operatorname{rank} d(\lambda, \eta\lambda, \eta\eta\lambda) = 3, \quad \eta\lambda(0) = 0, \quad \eta\eta\lambda(0) = 0, \quad \eta\eta\eta\lambda(0) \neq 0.$$

对于非前沿奇点，有如下判据。设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0) \to (\boldsymbol{R}^4,0)$ 是一个正面，设 ν 是 f 的法向量，不必是单位向量。设 λ 是奇点标识，η 是零向量场。我们假设 $\eta\lambda(0) \neq 0$。那么根据这一假设，可以取 $S(f)$ 的一个参数化 $\Sigma(t,r)$。我们令 $f(t,r) = f(\Sigma(t,r))$。我们定义函数 $\psi(t,r)$ 为

$$\psi(t,r) = \det\left(\hat{f}_t, \hat{f}_r, \nu(\Sigma(t,r)), (\eta\nu)(\Sigma(t,r))\right). \tag{2.14}$$

我们有如下定理。

定理2.9。设 f：$(\boldsymbol{R}^3$、$0) \to (\boldsymbol{R}^4$、$0)$ 是一个满足 $\eta\lambda(0) \neq 0$的正面，其中 λ 是奇点标识，η 是零向量场。设 $\Sigma(u$、$v)$ 是 $S(f)$ 的参数化，并按(2.14)设置 ψ。则，当且仅当 $\psi = 0$ 且 $d\psi_0 \neq 0$时，f 在 $\times$ 区间内是尖点交叉帽。

证明。 我们首先注意到，该条件不依赖于奇点标识、法向量、 $S(f)$的参数化、零向量场以及目标空间上坐标系的选择。显然，除目标空间坐标系以外，其他对象的选择不影响该条件，因为替换它们只会使 ψ 乘以一个不消失函数。对于目标空间坐标系的选择，只需证明下面的引理即可。

引理 2.10. 在上述设定下，当用一个微分同胚替换目标空间上的坐标时，函数 ψ 会乘上一个非零函数。

证明. 我们取目标空间上的一个微分同胚 Φ。设 $\tilde{f} = \Phi \circ f$，且 $\tilde{\nu}$ 是 $\tilde{f}$ 的一个法向量。设 $\tilde{\psi} = \det(\tilde{f}_t, \tilde{f}_r, \tilde{\nu}, \eta\tilde{\nu})(\Sigma(t,r))$。我们证明 $\tilde{\psi}$ 是 ψ 乘以一个非零函数。微分 $d\Phi$ 可视为一个 $GL(4, \boldsymbol{R})$ 值映射 $W\colon (\boldsymbol{R}^3, 0) \to GL(4, \boldsymbol{R})$。于是 $\tilde{f}$ 的一个法向量为 $\tilde{\nu} = {}^tW^{-1}\nu$。由于 η 是零向量场，因此有

$$\tilde{\psi} = \det(Wf_t, Wf_r, {}^tW^{-1}\nu, {}^tW^{-1}\eta\nu)(\Sigma(t,r)).$$

由于该断言不取决于 $S(f)$ 的参数化选择以及 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\nu$ 的选择，我们设 f_t， f_r 是 $S(f)$ 上的一个标准正交标架。于是 f_t， f_r， ν 是 $S(f)$ 上的一个标准正交标架，且 $\eta\nu$ 与这些向量垂直。在 $p \in S(f)$ 上取 $T_p\boldsymbol{R}^4$ 的一个标准正交标架 $\{e_1, \dots, e_4\}$，使其满足 $\hat{f}_t = e_1$， $\hat{f}_r = e_2$， $\nu = e_3$， $\eta\nu = ke_4$。则由该标架表示的 ψ 为 $\psi = k$。直接计算可得

$$\tilde{\psi} = \left(\langle We_3, We_3 \rangle \langle We_4, We_4 \rangle - \langle We_3, We_4 \rangle^2 \right) \det W\psi,$$

这就证明了该断言。 □

我们回到定理2.9的证明。由条件可知秩 $df_0 = 2$，通过对源空间作坐标变换，可将 f写成$(t, r, f_3(t,r,w)\ f_4(t,r,w))$。取 $S(f) = \{w = 0\}$，并且零向量场为 ∂_w，再次对源空间作坐标变换，并对目标空间作坐标变换，可将 f 写成$(t, r, w^2 f_3(t,r,w)\ w^2 f_4(t,r,w))$。由条件 $\eta\lambda \neq 0$，我们有$(f_3, f_4) \neq (0,0)$在0处成立，因此可以假设 $f_3 \neq 0$。此外，我们可以假设 $f_3 > 0$。令 $w = \sqrt{f_3}$。于是可以将 f写成$(t, r, w^2, w^2 f_4(t,r,w))$。由于它写成了$(t, r, w^2, w^2(f_{41}(t,r,w^2) + w f_{42}(t,r,w^2))$，因此可以将 f写成$(t, r, w^2, w^3 f_4(t,r,w^2))$。由于该条件不依赖于适配三元向量场及目标空间坐标系的选取，我们令 $\xi_1 = \partial_t, \xi_2 = \partial_r, \eta = \partial_w$。于是 ψ 是 f_4的非零倍数。因此，$((f_4)_t, (f_4)_r) \neq (0,0)$成立。所以我们可以假设$(f_4)_r \neq 0$。令 $\tilde{r} = f_4(t,r,w^2)$，可知r 可以写成 $r = f_5(t, \tilde{r}, w^2)$。因此， f与$(t, f_5(t,r,w^2)\ w^2, r w^3)$是 $\mathcal{A}$-等价的。令 $f_0 = (t, r, w^2, rw^3)$，且 $\Phi(X_1, \dots, X_4) = (X_1, f_5(X_1, X_2, X_3)\ X_3, X_4)$。那么 $f = \Phi \circ f_0$ 成立，由此可得该断言。 □

设 0 是正面 f 的一个非退化奇点。若三元向量场 (ξ_1, ξ_2, η) 满足： ξ_1， ξ_2 线性无关且与 $S(f)$ 相切，而 η 是零向量场，则称其为适配的 。我们设

$$\bar{\psi} = \det(\xi_1 f,\ \xi_2 f,\ \nu,\ \eta\nu), \tag{2.15}$$

其中 ζh 表示函数 h 沿向量场 ζ的方向导数。由于 η 的方向在奇点集上是唯一的，我们得到如下推论：

推论 2.11. 设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0)\to(\boldsymbol{R}^4,0)$ 为一个正面，且 $\eta\lambda(0)\neq 0$。设 λ 为奇点标识，η 为零向量场。我们假设 $\eta\lambda\neq 0$。设(ξ_1,ξ_2,η) 为一个适应向量场三元组。则 f 是尖点交叉帽 $\times$ 区间当且仅当 $\psi=0$ 且$(\xi_1\psi,\xi_2\psi)\neq(0,0)$ 在0处，其中(ξ_1,ξ_2,η) 是一个适应向量场三元组，且 ψ 是(2.15)中定义的函数。

参见 [3] 尖点交叉帽的判据，以及 [17] 奇异曲线的无参数版本。

2.4 伪非退化双直纹超曲面的奇点

在本小节中，我们使用在 (2.2) 中定义的函数 $a(t)$ $\delta(t)$ $B(t)=(b_1(t)\dots,b_4(t))$ 来描述伪非退化双直纹超曲面的奇点。

Let $f(t,s,r)=\gamma(t)+sX(t)+rY(t)$ 是一个伪非退化双直纹前波面 .

引理 2.12。 伪非退化双直纹前波面的奇点集f 与嵌入曲面的像重合。第二奇异集与第二直纹曲线的像重合。

证明。 由 (2.4) 可知，奇点标识可取为 $\lambda(t,s,r)=b_3(t)+s+ra(t)$，零向量场可取为 $\eta=\partial_t-b_1\partial_s-b_2\partial_r$。奇异集为 $S(f)=\{(t,s,r)\,|\,b_3(t)+s+ra(t)=0\}$，而第二奇异集为

$$S_2(f)=\{p\in S(f)\,|\,ra'-\omega=0\}=\{(t,s,r)\,|\,r=\omega/a',\ s=-b_3-a\omega/a'\},$$

其中 ω 在 (2.12) 中定义。因此 $f(S_2(f))$ 由下式参数化

$$\gamma-b_3X+\frac{\omega}{a'}(-aX+Y)=\tilde{\gamma}+\frac{\omega(a^2+1)^{1/2}}{a'}\tilde{X},$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 与 X 在 (2.9) 中定义。将此与 (2.13) 比较，即得该断言。

□

定理 2.13. 设 $f=\gamma+sX+rY:(\boldsymbol{R}^3,(0,s,r))\to(\boldsymbol{R}^4,0)$ 为伪非退化双直纹正面。设 $p=(0,s,r)$ 为 f 的奇点，即 $b_3(t)+s+ra(t)=0$ 成立。我们假设 f 在 p 处为前，即 $\delta(0)\neq 0$。则 f 在 p 处为尖点边当且仅当

$$ra'-ab_2-b_1+b_3'\neq 0 \tag{2.16}$$

在 $t=0$处 成立。芽 f 在 p 处为燕尾当且仅当 (A) 或 (B) 成立，其 e

(A) $a'=0$、$-ab_2-b_1+b_3'=0$ 和 $q_0\neq 0$ 在 $t=0$处，其中

$$q_0=-ab_2'+ra''-2b_2a'-b_1'+b_3''. \tag{2.17}$$

(B) $r=(ab_2+b_1-b_3')/a'$ 和 $q_1\neq 0$ 在 $t=0$处，其中

$$q_1=(b_2a''-a'b_2')+(b_1-b_3')a''-2b_2(a')^2-a'b_1'+a'b_3''. \tag{2.18}$$

芽 f 在 p 处是尖点蝴蝶，当且仅当 $a'\neq 0$, $r=(ab_2+b_1-b_3')/a'$,$q_1=0$ 且 $q_2\neq 0$ 在 $t=0$处，其中

$$q_2=a(b_2a'''-a'b_2'')+a'''(b_1-b_3')-3b_2a'a''-3(a')^2b_2'+a'(-b_1''+b_3'''). \tag{2.19}$$

证明。由于奇点标识 λ 为 $\lambda = b_3 + s + ra$，且零向量场η 为 $\eta = \partial_t - b_1\partial_s - b_2\partial_r$。我们可以直接应用引理 2.8，得到结论。对于尖点蝴蝶的情形，我们令 (2.18) 左端为零并求解所得方程，将解代入条件 $\eta\eta\eta\lambda \neq 0$，得到 (2.19)。

□

f 不是正面波面的情形，即 $b_4 \neq 0$的情形，有如下结论。

定理 2.14. 设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0) \to (\boldsymbol{R}^4, 0)$ 是一个伪非退化双直纹超曲面。那么， f 是惠特尼伞 $\times$ 区间，当且仅当 $b_4 \neq 0$ 且 $b_4' \neq 0$。

证明。 设 f 是一个伪非退化双直纹超曲面。由 (2.4) 可知，当 $f_t = 0$时，$\det(f_s, f_r, f_{st}, f_{tt}) = ab_4'$ 且 $\det(f_s, f_r, f_{rt}, f_{tt}) = b_4'$。因此得到所需结果。

□

f 是正面波面但不是前波面的情形，有如下结论。

定理 2.15. 设 $f:(\boldsymbol{R}^3,0) \to (\boldsymbol{R}^4, 0)$ 是一个伪非退化双直纹前波面。设 $p = (t, s, r)$ 是 f的一个奇点，即 $b_3(t) + s + ra(t) = 0$ 成立。那么， f 是尖点交叉帽 $\times$ 区间，当且仅当 $\delta = 0$ 且 $\delta' \neq 0$。

证明。由于 $S(f) = \{b_3 + s + ra\}$，我们取

$$\xi_1 = \partial_t - (b_3' + ra')\partial_s, \quad \xi_2 = -a\partial_s + \partial_r$$

¯和 η 如上。通过直接计算，我们得到 $\psi = \delta$。这表明该断言成立。

□

我们给出一个在 ×区间上具有尖点交叉帽的伪非退化双直纹前波面的例子。

例 2.16. 设 $f(t, s, r) = \gamma(t) + sX(t) + rY(t)$，其中

$$\begin{aligned}
\gamma(t) = \Big(0, &\int (\cos t - t^4 \sin t)\, dt - t^4 \cos t, \int (\sin t + t^4 \cos t)\, dt - t^4 \sin t, \\
&\int (\sin t + t + t^4(\cos t + 1))\, dt - t^4(\sin t + t)\Big), \\
X(t) = &\big(0, \cos t, \sin t, \sin t + t\big), \\
Y(t) = &\big(1, 0, 0, 0\big).
\end{aligned}$$

则 f 是伪非退化双直纹前波面。事实上，沿 f 的单位法向量场为

$$\nu(t) = \frac{(0, t\cos t - \sin t,\ 1 + \cos t + t\sin t,\ -1)}{((t\cos t - \sin t)^2 + (1 + \cos t + t\sin t)^2 + 1)^{1/2}}.$$

More此外， f 的奇点标识和零向量场可取为

$$\lambda(t, s, r) = \det(f_t, f_s, f_r, \nu) = s \quad \text{and} \quad \eta = \partial_t + (4t^3 - 1)\partial_s.$$

因此，奇异集为 $S(f) = \{(t, s, r) \mid s = 0\}$. 由此可知， η是横截于 $S(f)$ 的零向量场，并且 f 的奇点是非退化的。直接计算可得

$$\psi(t, r) = \det\big(X, Y, X', X''\big) = -t.$$

因此， f 在(0,0, r)处的奇点是一个尖点交叉帽 $\times$ 区间。

2.5 伪非退化双直纹波前的一般奇点

在本节中，我们证明伪非退化双直纹超曲面的一般奇点是尖点边、燕尾、尖点蝴蝶或尖点交叉帽 $\times$ 一个区间。关于非退化双直纹超曲面的一般奇点，见 [15, 第 5] 节。设 M 为一个无边界的一维流形。我们将 $PSF = \{d = (a, \delta, b_1, b_2, b_3) \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^5)\}$ 定义为配备惠特尼 C^∞ 拓扑的伪非退化双直纹正面空间，因为这样的正面由这些数据决定，见第2.1节。

定理 2.17. 存在一个稠密子集 $\mathcal{O} \subset PSF$，使得对于任意 $d = (a, \delta, b_1, b_2, b_3) \in \mathcal{O}$，由 d 确定的伪非退化双直纹正面 f 在任意$(t, s, r) \in M \times \boldsymbol{R}^2$ 处，在 $\times$区间内是正则的，或具有尖点边、燕尾、尖点蝴蝶或尖点交叉帽奇点。

证明. 令 $J^3(M, \boldsymbol{R}^5)$ 为三阶喷射丛。$J^3(M, \boldsymbol{R}^5)$ 上的坐标系为$x = (t, d, d', d'', d''')$。我们定义 $J^3(M, \boldsymbol{R}^5)$ 的三个代数子集如下：

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \{j^5 d(t) \in J^3(M, \boldsymbol{R}^5) \mid a'(t) = -a(t)b_2(t) - b_1(t) + b_3'(t) = 0\}, \\
Q_2 &= \{j^5 d(t) \in J^3(M, \boldsymbol{R}^5) \mid q_1(t) = q_2(t) = 0\}, \\
Q_3 &= \{j^5 d(t) \in J^3(M, \boldsymbol{R}^5) \mid \delta(t) = \delta'(t) = 0\},
\end{aligned}
$$

其中 q_1 和 q_2 在 (2.18) 和 (2.19) 中定义。我们证明 q_1 和 q_2 没有公因子。假设 q_1 和 q_2 有公因子 k。由于 q_2 关于 a''' 是线性的，若 k 含有 a'''，则 k 不能整除 q_1。因此，k 不含有 a'''。由于 k 整除 q_2，所以 k 同时整除 $q_3 = ab_2 + b_1 - b_3'$ 和 $q_4 = -aa'b_2'' - 3b_2a'a'' - 3(a')^2b_2' + a'(-b_1'' + b_3'')$。由于 q_3 关于 b_3' 是线性的，且 q_4 不含有 b_3'，由同样的论证可得 k 必须是非零实数。因此，q_1 和 q_2 没有公因子。所以，Q_1、Q_2、Q_3 是余维大于或等于 2 的代数子集。因此，映射 $d\colon M \to \boldsymbol{R}^5$ 的喷射延拓 $j^5 d\colon M \to J^3(M, \boldsymbol{R}^5)$ 横截于 $Q_i (i = 1, 2, 3)$，当且仅当 $j^5 d(M) \cap Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$。根据定理 2.13 和 2.15，条件 $j^5 d(M) \cap Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$ 等价于结论。由 Thom 喷射横截定理，集合 $\mathcal{O} = \{d \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^5) \mid j^5 d$ 横截于 Q_1、Q_2、$Q_3\}$ 是稠密的。这证明了该断言。

□

通过同样运用定理 2.14 的论证，可以证明伪非退化双直纹超曲面的典型奇点是 Whitney 伞 $\times$区间。

3 由高度函数构造的双直纹超曲面

3.1 沿曲线的 Frenet 型标架

设 $\gamma\colon I \to \boldsymbol{R}^4$ 为 $\boldsymbol{R}^4$ 中的一条曲线。我们假设存在一个函数 l 和一个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，使得 $\gamma'(t) = l\boldsymbol{e}_1$ 成立。我们还假设存在一个函数 κ_1 和一个单位向量 $\boldsymbol{e}_2$，使得 $\boldsymbol{e}_1' = \kappa_1 \boldsymbol{e}_2$ 成立。我们还假设存在一个函数 κ_4 和一个单位向量 $\boldsymbol{e}_3$，使得 $\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1 = \kappa_4 \boldsymbol{e}_3$ 成立。我们令 $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$。于是我们有如下 Frenet-Serret 型公式：

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_4 & 0 \\ 0 & -\kappa_4 & 0 & \kappa_6 \\ 0 & 0 & -\kappa_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix}. \tag{3.1}
$$

我们将以上述方式构造的标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 称为沿 γ 的 ***Frenet*** 型标架。

定义 3.1. ([9]) 若曲线芽 $\gamma: (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^4, 0)$ 满足 $\operatorname{rank} G = 4$（分别为 3），则称其具有有限密切类型（分别称为伪有限密切类型），其中

$$G = \left(\gamma'(0), \gamma''(0), \ldots, \gamma^{(k)}(0), \ldots\right).$$

若函数或向量值函数 $h: (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^k, 0)$ $(k \geq 1)$ 满足 $h'(0) = \cdots = h^{(m-1)}(0) = 0$ 且 $h^{(m)}(0) \neq 0$，则称其重数为 m。若存在 m 使得 h 的重数为 m，则称 h 具有有限重数。假设 $\gamma: (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^4, 0)$ 具有伪有限密切类型。那么存在函数 l 和单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，使得 $\gamma'(t) = l\boldsymbol{e}_1$ 成立。若 $\boldsymbol{e}_1$ 不具有有限重数，则 G 的秩为一。因此，存在函数 κ_1 和单位向量 $\boldsymbol{e}_2$，使得 $\boldsymbol{e}_1' = \kappa_1 \boldsymbol{e}_2$ 成立。若 $\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1$ 不具有有限重数，则 G 的秩为二。因此，存在函数 κ_4 和单位向量 $\boldsymbol{e}_3$，使得 $\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1 = \kappa_4 \boldsymbol{e}_3$ 成立。因此，对于伪有限密切类型曲线 γ，存在 Frenet 型标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_4\}$，其中 $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$。若 γ 满足 $\operatorname{rank}(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 3$，则上述术语就是通常的 Frenet-Serret 型论证。参见 [19, 第 44], 页或 [10]。根据假设，每个函数 l、κ_1、κ_4 都具有有限重数；并且若 γ 具有有限密切类型，则 κ_6 也具有有限重数。若从 $\boldsymbol{e}_1^{\perp}$ 中取 $\boldsymbol{e}_2$，并从 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle_{\boldsymbol{R}}^{\perp}$ 中取 $\boldsymbol{e}_3$，则上述过程可以顺利进行。在这种情况下，Frenet-Serret 型公式 (3.1) 中出现的矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_4 & \kappa_5 \\ -\kappa_2 & -\kappa_4 & 0 & \kappa_6 \\ -\kappa_3 & -\kappa_5 & -\kappa_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

为简便起见，我们采用前一种标架。

3.2 沿曲线的可展超曲面

设 $\gamma: (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^4, 0)$ 是一条伪有限密切类型曲线，并设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ 为 Frenet 型标架。对于沿 γ 的单位向量场 $\boldsymbol{v}$，我们定义函数 $H_{\boldsymbol{v}}: I \times \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$ 如下:

$$H_{\boldsymbol{v}}(t, x) = \boldsymbol{v}(t) \cdot \big(x - \gamma(t)\big).$$

这称为相对于 $\boldsymbol{v}$ 的高度函数。此外，令 $h_{\boldsymbol{v}}(t) = H_{\boldsymbol{v}}(t, 0)$。函数 $H_{\boldsymbol{v}}$ 可解释为四参数单变量函数族。对于每个 $t \in I$，集合

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{v}} = \{x \in \boldsymbol{R}^4 \mid H_{\boldsymbol{v}}(t, x) = 0\}$$

是与 $\boldsymbol{v}$ 正交的超平面。因此，$\mathcal{H}_{\boldsymbol{v}}$ 是一个单参数平面族。考虑这个平面族的包络

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} = \{x \in \boldsymbol{R}^4 \mid \text{ there exists } t \in I \text{ such that } H_{\boldsymbol{v}}(t, x) = H_{\boldsymbol{v}}'(t, x) = 0\},$$

其中 $' = \partial/\partial t$。令 $i = 1, 2, 3, 4$，我们在假设 $\boldsymbol{v}' \neq 0$ 的条件下，考察 $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{e}_i\}$ 的情形。于是，我们得到由 γ 构造的四个包络 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{e}_i}$ 的参数化。此处及下文中，如果不会引起混淆，我们将省略函数的变量（t）。

引理 3.2。 我们定义由下式给出的四个双直纹超曲面

$$
\begin{aligned}
&S_1(t,s,r)=\gamma+\left(\frac{l}{\kappa_1}\right)\boldsymbol{e}_2+s\boldsymbol{e}_3+r\boldsymbol{e}_4, \quad where\ \kappa_1\neq 0;\\
&S_2(t,s,r)=\gamma+s\boldsymbol{e}_4+r\left(\frac{\kappa_4\boldsymbol{e}_1+\kappa_1\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{\kappa_4^2+\kappa_1^2}}\right), \quad where\ (\kappa_1,\kappa_4)\neq(0,0); \qquad (3.2)\\
&S_3(t,s,r)=\gamma+s\boldsymbol{e}_1+r\left(\frac{\kappa_6\boldsymbol{e}_2+\kappa_4\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{\kappa_6^2+\kappa_4^2}}\right), \quad where\ (\kappa_4,\kappa_6)\neq(0,0);\\
&S_4(t,s,r)=\gamma+s\boldsymbol{e}_1+r\boldsymbol{e}_2, \quad where\ \kappa_6\neq 0.
\end{aligned}
$$

于是， S_i 的像与集合 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{e}_i}$重合，其中 $i=1$，2，3，4。此外，若$\kappa_4\neq 0$，则 S_1 与 S_4 是伪非退化的；若$(\kappa_4,\ \kappa_1\kappa_4')\neq(0,\ 0)$，则 S_2 是伪非退化的；并且若$(\kappa_4,\ \kappa_4'\kappa_6)\neq(0,\ 0)$，则 S_3是伪非退化的。

证明。 我们证明情形 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_4$。 由条件 $H_{\boldsymbol{e}_4}(t,x)=0$可知，存在 $c_1,c_2,c_3\in\boldsymbol{R}$使得 $x-\gamma=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_4$。 由(3.1)及 $\gamma'=l\boldsymbol{e}_1$。 此外，将 $x-\gamma$代入公式 $H'_{\boldsymbol{e}_4}(t,x)=0$，我们得到

$$
H'_{\boldsymbol{e}_4}(t,x)=\boldsymbol{e}_4'\cdot\big(x-\gamma\big)=-\kappa_6\boldsymbol{e}_3\cdot(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3)=-\kappa_6c_3.
$$

因此，在条件 $\kappa_6\neq 0$下 $c_3=0$。因此，我们设 $x-\gamma=s\boldsymbol{e}_1+r\boldsymbol{e}_2$，其中 $s=c_1\in\boldsymbol{R}$和 $r=c_2\in\boldsymbol{R}$。因此，像

$$
x(t,s,r)=\gamma+s\boldsymbol{e}_1+r\boldsymbol{e}_2
$$

与 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{e}_4}$重合。对 (3.2) 中的导向曲线求微分，得 $\boldsymbol{e}_1'=\kappa_1\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_2'=-\kappa_1\boldsymbol{e}_1+\kappa_4\boldsymbol{e}_3$。因此， S_4 是伪非退化的，当且仅当 $\kappa_4\neq 0$。通过类似的计算，可以证明 $i=1$,2, 3 的情形。 S_1 和 S_4 的导向曲线及其微分由下式给出

$$
\begin{aligned}
X_1=\boldsymbol{e}_3,\quad X_1'=-\kappa_4\boldsymbol{e}_2+\kappa_6\boldsymbol{e}_4 \quad\text{and}\quad Y_1=\boldsymbol{e}_4,\quad Y_1'=-\kappa_6\boldsymbol{e}_3;\\
X_4=\boldsymbol{e}_1,\quad X_4'=\kappa_1\boldsymbol{e}_2 \quad\text{and}\quad Y_4=\boldsymbol{e}_2,\quad Y_4'=-\kappa_1\boldsymbol{e}_1+\kappa_4\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

因此，我们看到，如果 $\kappa_4\neq 0$，那么 $\dim\{X_1,Y_1,X_1'\}=\dim\{X_4,Y_4,X_4'\}=3$。 S_2 和 S_3 的导向曲线及其微分由下式给出

$$
\begin{aligned}
&X_2=\boldsymbol{e}_4, && X_2'=-\kappa_6\boldsymbol{e}_3;\\
&Y_2=\frac{\kappa_4\boldsymbol{e}_1+\kappa_1\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_4^2}}, && Y_2'=\frac{\kappa_1\kappa_4'-\kappa_1'\kappa_4}{(\kappa_1^2+\kappa_4^2)^{3/2}}\Big(\kappa_1\boldsymbol{e}_1-\kappa_4\boldsymbol{e}_3\Big)+\frac{\kappa_1\kappa_6}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_4^2}}\boldsymbol{e}_4.\\
&X_3=\boldsymbol{e}_1, && X_3'=\kappa_1\boldsymbol{e}_2;\\
&Y_3=\frac{\kappa_6\boldsymbol{e}_2+\kappa_4\boldsymbol{e}_4}{\sqrt{\kappa_4^2+\kappa_6^2}}, && Y_3'=\frac{\kappa_1\kappa_6}{\sqrt{\kappa_4^2+\kappa_6^2}}\boldsymbol{e}_1+\frac{\kappa_4\kappa_6'-\kappa_4'\kappa_6}{(\kappa_4^2+\kappa_6^2)^{3/2}}\Big(\kappa_4\boldsymbol{e}_2-\kappa_6\boldsymbol{e}_4\Big).
\end{aligned}
$$

因此，我们看到，如果 $(\kappa_1\kappa_4',\kappa_4)\neq(0,0)$ 且 $(\kappa_4,\kappa_4'\kappa_6)\neq(0,0)$，那么 S_2 和 S_3 都是伪非退化的。 □

根据上述计算，我们看到 S_i 的单位法向量为 $\boldsymbol{e}_i$ ($i=1$，2、3、4)，因此它们都是正面。由于每个 $\boldsymbol{e}_i$ 都是一条曲线，每个双直纹正面 S_i 都是可展的。

4 双直纹正面的奇点 $S_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

本节中，我们将描述在何种条件下，由式 (3.2) 得到的正面 S_i 会呈现第2.3节中介绍的奇点，这些奇点用 γ 的函数 l、κ_1、κ_4、κ_6 表示。

4.1 正面 S_1的性质

我们假设 $\kappa_1\kappa_4\neq 0$，并令 $\hat{\gamma}=\gamma+l\boldsymbol{e}_2/\kappa_1$。于是，$S_1$ 可写为 $S_1(t,\ s,\ r)=\hat{\gamma}+s\boldsymbol{e}_3+r\boldsymbol{e}_4$。令 $X_1=\boldsymbol{e}_3$ 和 $Y_1=\boldsymbol{e}_4$。偏导数为

$$(S_1)_t=\Big(\frac{l'\kappa_1-l\kappa_1'}{\kappa_1^2}-s\kappa_4\Big)\boldsymbol{e}_2+\Big(\frac{l\kappa_4}{\kappa_1}-r\kappa_6\Big)\boldsymbol{e}_3+s\kappa_6\boldsymbol{e}_4,\ (S_1)_s=X_1,\ (S_1)_r=Y_1. \tag{4.1}$$

我们看到

$$\lambda_1=-s\kappa_4\kappa_1^2+l'\kappa_1-l\kappa_1',\quad \eta_1=\partial_t-(l\kappa_4/\kappa_1-r\kappa_6)\partial_s-s\kappa_6\partial_r \tag{4.2}$$

可将其作为 S_1的奇点标识和零向量场。由于导向曲线不是约束适配的，我们对其进行修改，使其成为约束适配的。令 θ 为满足 $\theta'=\kappa_6$的函数，并定义

$$\hat{X}_1=\cos\theta X_1-\sin\theta Y_1,\qquad \hat{Y}_1=\sin\theta X_1+\cos\theta Y_1.$$

于是，X_1 和 Y_1 是约束适配的。我们选取满足 $\cos\theta\neq 0$的 θ。由于 $|(X_1)'|=|\cos\theta\kappa_4|$，令

$$\tilde{t}=\int^t|\cos\theta\kappa_4|dt=\tau(t).$$

那么，$X_1(\tau^{-1}(\tilde{t}))$、$Y_1(\tau^{-1}(\tilde{t}))$ 和 $d\hat{X}_1(\tau^{-1}(\tilde{t}))/d\tilde{t}$构成一组正交归一组。式 (2.2) 中定义的函数 a,δ 和 $B=(b_1,\dots,b_4)$ 为

$$a=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \delta=\frac{\kappa_1}{|\cos\theta\kappa_4|},\ B=\left(\frac{l\kappa_4\cos\theta}{\kappa_1|\cos\theta\kappa_4|},\ \frac{l\kappa_4\sin\theta}{\kappa_1|\cos\theta\kappa_4|},\ \frac{l\kappa_1'-l'\kappa_1}{\kappa_1^2(\kappa_4\cos\theta)^3},\ 0\right). \tag{4.3}$$

这里注意到 $dt/d\tilde{t}=1/|(\hat{X}_1)'|=1/|\cos\theta\kappa_4|$。利用 (2.8)、(2.10) 和定理 2.13，分别可以由这些数据推导出 S_1 的嵌入曲面和脐线，以及相应的奇点条件。若省略条件 $\kappa_4\neq 0$，则定义了正面 S_1。

定理 4.1。我们假设 $\kappa_1\kappa_4\neq 0$。正面 S_1 是柱面型的，当且仅当$\kappa_6\equiv 0$。正面 S_1 是圆锥型的，当且仅当 $f_{1cone}\equiv 0$，其中

$$\begin{aligned}
f_{1cone}=&l\Big\{\kappa_1^3\kappa_4^3\big(\kappa_6\kappa_4'-\kappa_4\kappa_6'\big)+\kappa_1^2\big(-\kappa_1'\kappa_4^4\kappa_6-2\kappa_1'\kappa_4'^2\kappa_6-\kappa_1'\kappa_4\kappa_4'\kappa_6'+\kappa_1'\kappa_4\kappa_4''\kappa_6\\
&-\kappa_1'\kappa_4^2\kappa_6^3+2\kappa_1''\kappa_4\kappa_4'\kappa_6+\kappa_1''\kappa_4^2\kappa_6'-\kappa_1'''\kappa_4^2\kappa_6\big)\\
&+\kappa_1\big(-4\kappa_1'^2\kappa_4\kappa_4'\kappa_6-2\kappa_1'^2\kappa_4^2\kappa_6'+6\kappa_1'\kappa_1''\kappa_4^2\kappa_6\big)-6\kappa_1'^3\kappa_4^2\kappa_6\Big\}\\
&+l'\kappa_1\Big\{\kappa_1^2\big(\kappa_4^4\kappa_6+\kappa_4^2\kappa_6^3+2\kappa_6\kappa_4'^2+\kappa_4\kappa_4'\kappa_6'-\kappa_4\kappa_4''\kappa_6\big)\\
&+\kappa_1\kappa_4\big(4\kappa_1'\kappa_4'\kappa_6+2\kappa_1'\kappa_4\kappa_6'-3\kappa_1''\kappa_4\kappa_6\big)+6\kappa_1'^2\kappa_4^2\kappa_6\Big\}\\
&-l''\kappa_1^2\kappa_4\Big\{\kappa_1\big(2\kappa_4'\kappa_6+\kappa_4\kappa_6'\big)+3\kappa_1'\kappa_4\kappa_6\Big\}+l'''\kappa_1^3\kappa_4^2\kappa_6.
\end{aligned}$$

证明。 该断言可通过 $a' = 2\kappa_6/(1+\cos 2\theta)$ 并利用（4.3）计算 $a''\omega - a'(\omega' + a'b_2)$ 得出。 □

定理 4.2. 假设 $\kappa_1\kappa_4 \neq 0$。对于伪非退化双直纹前波面$S_1(t,s,r)$，设 $p=(t,s,r)$ 是 S_1 的一个奇点，即满足 $\lambda_1 = 0$。假设S_1 在 p 处是一个前。那么， S_1 在 p 处是尖点边，当且仅当 $\mathcal{W}_{1c} \neq 0$，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{1c} =&\eta_1\lambda_1\\ =&r\kappa_1^3\kappa_4^2\kappa_6 + \cos\theta\Big\{ -2\kappa_4 l(\kappa_1')^2 + \kappa_1\big(2\kappa_4\kappa_1' l' + l(-\kappa_1'\kappa_4' + \kappa_4\kappa_1'')\big)\\ &- \kappa_1^2\big(\kappa_4^3 l - \kappa_4' l' + \kappa_4 l''\big)\Big\} + \sin\theta\Big\{\kappa_1\kappa_4\kappa_6\big(l\kappa_1' - \kappa_1 l'\big)\Big\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

成立。当且仅当 $\mathcal{W}_{1c} = 0$ 且 $\mathcal{W}_{1s} \neq 0$时，芽 S_1 在 p 处是燕尾，其中

$$\mathcal{W}_{1s} = \eta_1\mathcal{W}_{1c} = \kappa_1(\mathcal{W}_{1c})_t - \kappa_4 l\big(\sin\theta(\mathcal{W}_{1c})_r + \cos\theta(\mathcal{W}_{1c})_s\big). \tag{4.5}$$

当且仅当 $\mathcal{W}_{1c} = \mathcal{W}_{1s} = 0$、 $\kappa_6 \neq 0$ 和$\mathcal{W}_{1b} \neq 0$时，芽 S_1 在 p 处是尖点蝴蝶，其中

$$\mathcal{W}_{1b} = \eta_1\mathcal{W}_{1s} = \kappa_1(\mathcal{W}_{1s})_t - \kappa_4 l\big(\sin\theta(\mathcal{W}_{1s})_r + \cos\theta(\mathcal{W}_{1s})_s\big). \tag{4.6}$$

芽 m S_1 在 p 处是尖点交叉帽 $\times$ 区间，当且仅当 $\kappa_1 = 0$ 且 $\kappa_1' \neq 0$.

证明。 由于奇点标识、零向量场以及式（2.14）中定义的函数 ψ 可取为式（4.2）中的形式，因此结论成立。 □

由于第二奇异集与脐面上的脐线重合，

$$\big(\mathcal{W}_{1s}|_{\lambda=0,\,\mathcal{W}_{1c}=0}\big)(t)$$

与 $f_{1cone}(t)$相差一个非零函数倍数。

4.2 正面 S_2的性质

我们假设$(\kappa_1,\ \kappa_4) \neq (0,\ 0)$，$(\kappa_4,\ \kappa_1\kappa_4') \neq (0,\ 0)$。由于$S_i(i = 2,\ 3,\ 4)$情形的论证相同，我们仅给出基本数据 a， δ， B和 λ， η。关于 S_2 的偏微分为

$$\begin{aligned}(S_2)_t =&\boldsymbol{e}_1\Big(l + \frac{r\kappa_1(\kappa_1\kappa_4' - \kappa_4\kappa_1')}{A_2^3}\Big) - \boldsymbol{e}_3\frac{sA_2^3\kappa_6 + r\kappa_4(\kappa_1\kappa_4' - \kappa_4\kappa_1')}{A_2^3} + \boldsymbol{e}_4\frac{r\kappa_1\kappa_6}{A_2},\\ (S_2)_s =&X_2 = \boldsymbol{e}_4,\\ (S_2)_r =&Y_2 = \frac{\kappa_4\boldsymbol{e}_1 + \kappa_1\boldsymbol{e}_3}{A_2},\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $A_2 = (\kappa_1^2 + \kappa_4^2)^{1/2}$。我们看到

$$\lambda_2 = A_2(l\kappa_1 + s\kappa_4\kappa_6) + r(-\kappa_4\kappa_1' + \kappa_1\kappa_4'), \tag{4.8}$$

$$\eta_2 = \partial_t - \frac{r\kappa_1\kappa_6}{A_2}\partial_s + \frac{sA_2^3\kappa_6 + r\kappa_4(-\kappa_4\kappa_1' + r\kappa_1\kappa_4')}{\kappa_1 A_2^2}\partial_r \tag{4.9}$$

可取为 S_2的奇点标识和零向量场。设 θ 为满足 $\theta' = -\kappa_1\kappa_6/A_2$的函数。令

$$\hat{X_2} = \cos\theta X_2 - \sin\theta Y_2, \qquad \hat{Y_2} = \sin\theta X_2 + \cos\theta Y_2,$$

ˆ ˆ我们看到 X_2 和 Y_2 是约束适配的，并且

$$|(\hat{X}_2)'|^2 = \frac{\Big(\kappa_4\kappa_6 A_2\cos\theta + (\kappa_4\kappa_1' - \kappa_1\kappa_4')\sin\theta\Big)^2}{(A_2)^{\frac{5}{2}}}.$$

ˆ 我们选取满足 $|(X_2)'| \neq 0$ 的 θ。式 (2.2) 中定义的函数 a、δ 和 $B = (b_1, \ldots, b_4)$ 为

$$\begin{aligned} a &= \frac{\kappa_4\kappa_6 A_2\sin\theta + (\kappa_1\kappa_4' - \kappa_1'\kappa_4)\cos\theta}{\kappa_4\kappa_6 A_2\cos\theta + (\kappa_1'\kappa_4 - \kappa_1\kappa_4')\sin\theta}, \\ \delta &= \frac{A_2}{|(\hat{X}_2)'|} \\ B &= \left(-\frac{l\kappa_4\sin\theta}{A_2|(\hat{X}_2)'|},\ \frac{l\kappa_4\cos\theta}{A_2|(\hat{X}_2)'|},\ \frac{l\kappa_1 A_2}{(\kappa_4\kappa_6 A_2\cos\theta + (\kappa_1'\kappa_4 - \kappa_1\kappa_4')\sin\theta)|(\hat{X}_2)'|^2},\ 0\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

根据这些数据，利用 (2.8)、(2.10) 和定理 2.13，我们分别可以导出 S_2 的嵌入曲面和脐线，以及奇点的条件。

由于计算过程类似，且具体条件本身并无特别启发性，我们省略细节。

4.3 正面 S_3 的性质

我们假设 $(\kappa_4,\ \kappa_6) \neq (0,\ 0)$，$(\kappa_4,\ \kappa_4'\kappa_6) \neq (0,\ 0)$。我们有

$$\begin{aligned} (S_3)_t &= \boldsymbol{e}_1\Big(l - \frac{r\kappa_1\kappa_6}{A_3}\Big) + \boldsymbol{e}_2\Big(s\kappa_1 + \frac{r\kappa_4(\kappa_4\kappa_6' - \kappa_4'\kappa_6)}{A_3^3}\Big) + \boldsymbol{e}_4\frac{r\kappa_6(\kappa_4\kappa_6' - \kappa_4'\kappa_6)}{A_3^3}, \\ (S_3)_s &= X_3 = \boldsymbol{e}_1, \\ (S_3)_r &= Y_3 = \frac{\kappa_6\boldsymbol{e}_2 + \kappa_4\boldsymbol{e}_4}{A_3}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $A_3 = \sqrt{\kappa_4^2 + \kappa_{6^\circ}^2}$ 我们看到

$$\lambda_3 = s\kappa_1\kappa_4 A_3 + r(-\kappa_6\kappa_4' + \kappa_4\kappa_6'), \tag{4.12}$$

$$\eta_3 = \partial_t + \left(-l + \frac{r\kappa_1\kappa_6}{A_3}\right)\partial_s + \frac{-s\kappa_1 A_3^3 + r\kappa_4\big(\kappa_6\kappa_4' - \kappa_4\kappa_6'\big)}{\kappa_6 A_3^2}\partial_r \tag{4.13}$$

可作为 S_1 的奇点标识和零向量场。由于导向曲线并非约束适配的，我们对其进行修改，使其成为约束适配的。设 θ 为满足 $\theta' = \kappa_1\kappa_6/A_3$ 的函数。令

$$\hat{X}_3 = \cos\theta X_3 - \sin\theta Y_3, \qquad \hat{Y}_3 = \sin\theta X_3 + \cos\theta Y_3,$$

ˆ ˆX_3 和 Y_3 是约束适配的，并且

$$|(\hat{X}_3)'|^2 = \frac{\Big(\cos\theta\kappa_1\kappa_4 A_3 + \sin\theta\big(\kappa_6\kappa_4' - \kappa_4\kappa_6'\big)\Big)^2}{(A_3)^4}.$$

ˆ 我们选择满足 $|(X_3)'| \neq 0$ 的 θ。式 (2.2) 中定义的函数 a, δ 和 $B = (b_1, \ldots, b_4)$ 为

$$\begin{aligned} a &= \frac{\kappa_1\kappa_4 A_3 \sin\theta + (\kappa_4\kappa_6' - \kappa_4'\kappa_6)\cos\theta}{\kappa_1\kappa_4 A_3 \cos\theta + (\kappa_4'\kappa_6 - \kappa_4\kappa_6')\sin\theta}, \\ \delta &= \frac{A_3}{|(\hat{X}_3)'|} \\ B &= \left(\frac{l\cos\theta}{|(\hat{X}_3)'|},\ \frac{l\sin\theta}{|(\hat{X}_3)'|},\ 0,\ 0 \right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

由这些数据，我们可以分别利用 (2.8)、(2.10) 和定理 2.13，求出 S_3的嵌入曲面和脐线，以及奇点的条件。细节从略。

4.4 正面 S_4的性质

我们假设 $\kappa_4\kappa_6 \neq 0$。有

$$(S_4)_t = \big(l - r\kappa_1\big)\boldsymbol{e}_1 + s\kappa_1\boldsymbol{e}_2 + r\kappa_4\boldsymbol{e}_3, \quad (S_4)_s = \boldsymbol{e}_1, \quad (S_4)_r = \boldsymbol{e}_2. \tag{4.15}$$

我们看到

$$\lambda_4 = r\kappa_4, \quad \eta_4 = \partial_t + (-l + r\kappa_1)\partial_s - s\kappa_1\partial_r \tag{4.16}$$

可作为 S_4的奇点标识和零向量场。由于导向曲线并非约束适配的，我们对其进行修正，使其成为约束适配的。设 θ 是满足 $\theta' = \kappa_1$的函数。令

$$\hat{X}_4 = \cos\theta X_4 - \sin\theta Y_4, \qquad \hat{Y}_4 = \sin\theta X_4 + \cos\theta Y_4,$$

ˆX_4 和ˆ Y_4 是约束适配的，并且 $|(\hat{X}_4)'|^2 = \kappa_4^2\sin^2\theta$。我们选取满足 $\sin\theta \neq 0$的 θ。由 (2.2) 定义的函数 a、δ和 $B = (b_1, \ldots, b_4)$为

$$a = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \delta = \frac{\kappa_6}{|\kappa_4\sin\theta|},\ B = \left(\frac{l\cos\theta}{|\kappa_4\sin\theta|},\ \frac{l\sin\theta}{|\kappa_4\sin\theta|},\ 0,\ 0 \right). \tag{4.17}$$

根据这些数据，我们分别利用 (2.8)、(2.10) 和定理 2.13，推导出 S_4的嵌入曲面和曲线，以及奇点的条件。细节从略。

参考文献

[1] M. Altın、A. Kazan 和 D. W. Yoon，《欧几里得空间中的 2-直纹超曲面4维空间》，《几何与物理杂志》166 (2021)，104236，共 13 页。[2] S. Fl¨oryand H.Pottman，《建筑中的有理化与设计用直纹曲面》，LIFE in:formation. On Responsive Information and Variations in Architecture，ACADIA 2010 会议录，(2010)，103–109。[3] S. Fujimori、K. Saji、M. Umehara 和 K. Yamada，《极大曲面的奇点》，《数学杂志》259 (2008)，第 4 期，827–848。

[4] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada，《交叉帽的内蕴不变量》，《精选数学》(N.S.)20 (2014),769-785.

[5] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada，具有公共折痕的曲面折叠与折痕图案，《应用数学进展》121 (2020), 102083, 10 pp.[6] H. Hayashi，具有有限重数的直纹曲面的几何，arXiv:2505.13823。[7] S. Izumiya and S. Otani，沿曲线对曲面的平坦逼近，《数学论证》48 (2015), no. 2, 217-241。[8] S. Izumiya and N. Takeuchi，$\boldsymbol{R}^3$中的直纹曲面奇点，《剑桥哲学会数学论文集》130 (2001), 1–11。[9] G. Ishikawa，曲线的可展曲面及相对于密切类型的决定性，《数学季刊》46, (1995), 437-451。[10] C. Jordan，关于 ′空间中 ‵维曲线的理论，《巴黎科学院报告》79 (1874), 795-797。[11] J. Li，两个曲面的粘合轨迹的几何，arXiv:2506.01397。[12] N. Macit and M. D¨uld¨ul，$\mathbb{E}^3$ 和$\mathbb{E}^4$中的弗雷内曲线的一些新伴随曲线，《土耳其数学杂志》38 (2014), 1023-1037。[13] Y. Pan, Z. Xu, B. Wang and B. Deng，面向自由曲面网格的分片直纹逼近，《ACM图形学汇刊》44, 1-18。[14] M. Peternell, H. Pottmann and B. Ravani，直纹曲面的计算几何，《计算机辅助设计》31, (1999), 17-32。[15] K. Saji，四维空间中非退化二重直纹超曲面的奇点，《广岛数学杂志》32 (2002), 309-323。[16] K. Saji，高维映射的莫兰奇点判据，《数理解析研究所讲究录别册》B55 (2016), 205–224。[17] K. Saji and R. Shimada，从三维空间到三维空间的基本奇点与尖点边复合所成的奇点，《数学科学研究》13 (2026), no. 1, Paper No. 6。[18] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada，A_k 波前的奇点，《剑桥哲学会数学论文集》146 (2009), 731-746。[19] M. Spivak，《微分几何综合导论》，第二卷，Publish or Perish, Inc.，得克萨斯州休斯敦，1999年。

神户大学理学研究科数学系，日本神户市灘区六甲台1-1，邮编657-8501 电子邮箱：wayne990203@outlook.com 电子邮箱：saji@math.kobe-u.ac.jp