arXiv:2603.03413v1 [math.AG] 3 Mar 2026

从调和四元组到三角群：一些经典不变量

Giorgio Ottaviani 著，附录由
Vincenzo Galgano 撰写

谨以此文纪念数学爱好者 *Alan Huckleberry*。

摘要

这些讲义是 2025年5月在 Tromsø 举行的 Lie-Størmer暑期学校课程讲稿的扩展版本，课程主题为：从经典到现代发展的不变量理论，并属于 $TiME$ 活动的一部分。我们着重阐述二元四次形式与三元三次型（以及随后出现的模形式）之间基于其调和不变量和等调和不变量的类比。本文在椭圆情形和双曲情形下介绍三角群及其相关铺砌。讨论内容还包括一篇简短的希尔伯特论文，该论文探讨幂多项式，并曾推荐给参与者。附录包含一些习题及其解答概要，还包括由 Vincenzo Galgano 编写的一节 Pfaffian 专题。

目录

1 引言：调和四元组与交比 1 2 二元四次型 5 3 三元三次型 13 4 有限多面体群与ADE分类 18 5 幂多项式簇的协变式。希尔伯特的一篇短文。29 6 双曲三角群与模形式 36 7 附录：Pfaffian 与习题，作者：V. Galgano 43

1 引言：调和四元组与交比

不变量理论中最早的有趣构型之一涉及调和四元组。它们的应用可以追溯到毕达哥拉斯音阶，而“调和”这一名称

由塔兰托的阿尔库塔斯于公元前三世纪提出 [Sev, §1, 15], 。在自然音阶中，长度分别为 1、$\frac{4}{5}$、$\frac{2}{3}$ 的三个和弦构成基本和弦 C-E-G（do-mi-sol）。

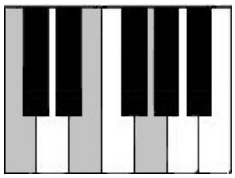

图 1： 由调和4元组构成的和弦 *C-E-G*。

第二个长度是另外两个长度的调和平均数。

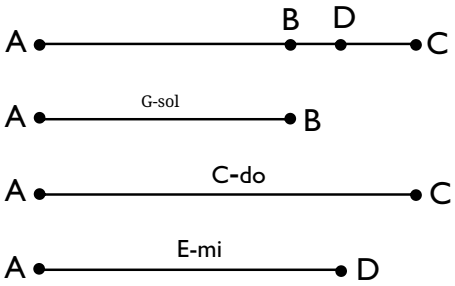

图 2： *AD* 是 *AB* 与 *AC* 之间的调和平均数。请注意，声音频率与长度互为倒数。

代数关系为

$$\frac{2}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

由此得到 $AB \cdot AC - AD \cdot AC = AB \cdot AD - AB \cdot AC$，很容易看出它等价于

$$\frac{AC}{DC} = -\frac{AB}{DB}. \tag{1.1}$$

方程（1.1）是阿波罗尼奥斯在其著名著作《圆锥曲线论》第三卷的命题37中得出的关系。

在图3中，将 A、 B、 C 视为已知，而 D 为待作。

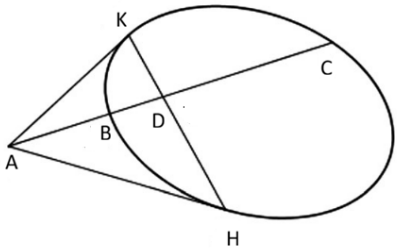

图 3：阿波罗尼奥斯作图：D 是 A、B、C 之后的第四调和点。该作图不依赖于圆锥曲线。此图出自 *[DCG]* 的引言。

直线AH与AK与（光滑）圆锥曲线相切，因此HK是A的极线。交点D不依赖于该圆锥曲线，这一事实乍看之下颇为令人惊讶，并显示出希腊化时期数学文化所达到的深度。可将该圆锥曲线取为圆，从而使工匠能够完成尺规作图。尺规确实是古代的主要计算工具。参见附录7.2中的习题。我推荐Del Centina与Gimigliano所著的射影几何历史记述 *"From Here to Infinity"*[DCG]，以获取更多信息。

由于求 D 的方程是线性的，因此 D 的坐标与 A、 B 和 C属于同一个域。不涉及平方根。因此，可以只用直尺而不用圆规进行作图。这就是利用完全四边形作第四调和点的作图，见图 4。

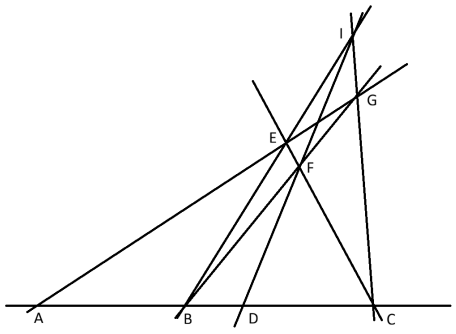

图 4：完全四边形的调和性质。已知 A、B、C 共线，取一个不在该直线上的 E，再在 CE 上取 F。随后按照图示依次确定 G 、 I 和 D。点 D 不依赖于 E 、 F 的选取，且是 A、B、C 之后的第四调和点。

第二种作法在代数上很重要，但在实际应用中不如阿波罗尼奥斯的方法，因为后者所需步骤更少。这些 TiME讲座的目的之一，就是让这些构造之美得以延续。受特罗姆瑟学校参与者的鼓励，我在这些讲义中加入了这两种调和构造。

值得一提的是，调和平均数是射影不变量，而算术平均数仅是仿射不变量。同时，也有必要提醒读者，音乐中的基本和弦 C-E-G 是一种度量不变量。应用仿射变换后，我们的耳朵仍能感受到和谐音，这对应于调性变化；但一般的射影变换会破坏 C 与 E 之间的比例。换言之，乐曲并非射影不变。例如，和弦 C-G-C（哆-索尔-哆）仍对应一个调和四元组，但听起来却完全不同。

$\mathbb{P}^1$ 中的调和点四元组标志着不变量理论的诞生。不变量理论为几何学提供了坚实的代数描述。其出发点是，点、子空间或子簇等几何对象都是用坐标来描述的。坐标系并非天然确定，而是需要作出一些选择。幸运的是，这些选择构成的集合上存在群作用。最相关的例子是群 $GL(V)$，它恰好描述了向量空间的有序基的集合 V。因此，在选定一组有序基作为单位元后，这个集合便具有群结构。许多年前，在我数学研究生涯的开端，我从 Alan Huckleberry 那里学到了这一基本观察。由此，我们得到 $GL(V)$ 在 V 上的群作用。在射影层面，群 $PGL(V)$ 作用于$\mathbb{P}(V)$，但通常更适合用其万有覆盖 $SL(V)$ 替代 $PGL(V)$。给定一个群作用，不变量就是一个定义在几何对象上的函数，它在该作用下保持不变。

让我们在此设定下描述调和四元组。给定 $\mathbb{P}^1$上的4个有序点，其坐标分别为(a_0, a_1)、(b_0, b_1)、(c_0, c_1)、(d_0, d_1)，记$(ab) :=\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$，依此类推。考虑 $SL(2)$在

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$上的作用。这三个表达式

$$(ab)(cd) \qquad (ac)(bd) \qquad (ad)(bc)$$

是 $SL(2)$-不变量，并且它们线性相关，因为它们的交错和为零。 $\mathbb{P}^1$ 上四个有序点的不变量环由这些表达式张成，精确陈述见 [O12，§5中的定理35。3]

公式(1.1)等价于

$$\frac{(ac)(bd)}{(ab)(cd)} = -1$$

或者也等价于

$$\frac{(ac)(bd)}{(ad)(bc)} = \frac{1}{2}$$

其中左端称为这四个点的交比。四个互异点的交比可以取 $\lambda \in \mathbb{C}$ 中除$\lambda = 0,1, \infty$之外的所有值，这些例外值对应于含有二重点的四元组。

复数引入四元组的历史后，人们发现了一类新的特殊四元组，在某些方面甚至比调和四元组更为特殊。它们知名度较低，因为它们从来不会有四个实

点。属于这一新类别的四元组称为等调和四元组。用交比表示时，它们由以下性质确定，而该性质的证明是直接计算即可得到的。

命题 1.1. 设 $A=(a_0,a_1)$、 $B=(b_0,b_1)$、 $C=(c_0,c_1)$ 和 $D=(d_0,d_1)$ 是四个互不相同的点。将这4 个点重新排列后，交比$(ac)(bd)\ \ (ad)(bc)=\lambda$ 取6 个不同的值

$$\lambda,\frac{1}{\lambda},1-\lambda,\frac{1}{1-\lambda},\frac{\lambda-1}{\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1}$$

除非

1. $\lambda\in\left\{-1,2,\frac{1}{2}\right\}$，可将其作为调和4元组的定义；*2.* $\lambda\in\left\{e^{i\pi/3},e^{-i\pi/3}\right\}$，可将其作为等调和4元组的定义

在结束这篇引言时，我觉得有必要记住：自19世纪以来，基于 $\sqrt[12]{2}$ 的十二平均律音阶使音乐与不变量理论之间的联系从精确转向近似。十二平均律中 C-E-G（do-mi-sol）的交比是

$$\frac{(2^{-1/3}-2^{-7/12})}{2^{-1/3}(1-2^{-7/12})}=0,478\ldots$$

其近似值为1 2 ，即*4.3%*，处于受过训练的耳朵刚好能够察觉的边缘。

2 二元四次型

二元四次型是两个变量的 4 次齐次多项式。它们有 4 个根，可以将其视为 $\mathbb{P}^1$中的四个点，并计入重数。若在 $\mathbb{C}$上讨论（从现在起我们都将如此），则除去非零常数因子后，它们由根唯一确定。二元四次型空间很容易与对称张量积 $\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2$ 对应起来。除去非零常数因子后，二元四次型可以看作 $\mathbb{P}^1$上无序的点的四元组，即在对称群Σ_4作用下等价的四元组。若多项式 $\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2$ 有 4 个互异的根，则称其为非奇异。

命题 2.1. 设 $Z=\{z_1,\ldots,z_4\}$ 且 $z_i\in\mathbb{P}^1$ 为二元四次型 $f=\sum_{i=0}^4 a_i\binom{4}{i}x^{4-i}y^i$ 的根集。

- Z 是调和4元组，当且仅当 $J:=-a_2^3+2\,a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4+a_0a_2a_4=0$。
- Z 是等调和4元组，当且仅当 $I:=3\,a_2^2-4\,a_1a_3+a_0a_4=0$。
- Z 是非奇异的，当且仅当 $D:=I^3-27J^2\neq 0$。

命题 *2.1* 的第一个证明：对于计算机代数爱好者，值得一提的是，命题 2.1 可以直接通过计算证明：以命题 1.1 中得到的交比值为起点，进行格罗布纳基消元。值得注意的是， I 和 J 的表达式会自动显示在屏幕上。下面是带有一些注释的 M2 代码[GS] 。

KK=toField(QQ[q]/ideal(q^2-q+1))---- q=exp(2*i*pi/3) R=KK[a_0..a_4,x,y,t_0..t_3]f=sum(5,i->a_i*binomial(4,i)*x^(4-i)*y^i)---二元四次形式 x4=symmetricPower(4,matrix{{x,y}}) H=minors(2,contract(x4,product(4,i->(x-t_i*y)))||contract(x4,f))--系数与根 J1=H+ideal(2*(t_2-t_0)*(t_3-t_1)-(t_3-t_0)*(t_2-t_1))--交比=1/2 I1=H+ideal(q*(t_2-t_0)*(t_3-t_1)-(t_3-t_0)*(t_2-t_1))---交比=1/q J=-(gens eliminate({t_0,t_1,t_2,t_3},J1))_(0,0)---次数 3--调和 I=3*(gens eliminate({t_0,t_1,t_2,t_3},I1))_(0,0)---次数 2---等调和

众所周知，判别式的情形也可以用同样的方法处理。 □

此外，从理论上进一步理解也很有价值。请注意（参见[Dolg，第9.2]节）：

$$J = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

事实上，(2.1) 中的 3×3 矩阵是收缩算子对应矩阵的（12倍）

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^2 V^\vee & \to & \mathrm{Sym}^2 V \\ \partial & \mapsto & \partial f \end{array} \tag{2.2}$$

在标准基 $\{\partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2\}$ 和 $\{x^2, 2xy, y^2\}$下。

引理2.2。

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1 \ such\ that\ a_i = \lambda^{4-i}\mu^i$$

证明。 由于代入 a_i的值后，任意两行都成比例，因此蕴含关系 $\Longleftarrow$ 显然。为证明蕴含关系 $\Longrightarrow$，不失一般性，可设 $a_0 = 1$, $a_1 = t$。于是，前两行的线性相关性说明第二行是第一行的 t 倍；这意味着 $a_2 = t^2$ 和 $a_3 = t^3$。同理，考察第三行可得$a_4 = t^4$。

□

命题 *2.1* 的第二种证明： J 的行列式表达式使我们能够将超曲面 $V(J)$ 解释为四次有理正规曲线 C_4 的割线簇；后者是由线性形式的四次幂构成的四次型轨迹。

事实上，记 $C_f := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$。引理2.2等价于以下陈述：

$$\mathrm{rk} C_f \leqslant 1 \Longleftrightarrow f = (\lambda x_0 + \mu x_1)^4.$$

因此，对于两个线性形式 ℓ_1, ℓ_2，我们有

$$\mathrm{rk}\left(C_{\ell_1^4 + \ell_2^4}\right) = \mathrm{rk}\left(C_{\ell_1^4} + C_{\ell_2^4}\right) \leqslant \mathrm{rk} C_{\ell_1^4} + \mathrm{rk} C_{\ell_2^4} = 1 + 1 = 2. \tag{2.3}$$

割线簇 $\sigma_2(C_4)$ 是割线$\{\ell_1^4+\ell_2^4 \mid \ell_i$ 线性形式$\}$的轨迹的 Zariski闭包。该轨迹还包含切簇，即切线的并集，它是 x^3y 的 $SL(2)$-轨道。

不等式 (2.3) 表明 $\sigma_2(C_4) \subseteq V(J)$。由于 $V(J)$ 是一个 3 维不可约簇，因此等式成立（另一种证明见练习 7.18）。事实上，$V(J)$ 是三个 $SL(2)$-轨道的并，它们分别是 C_4、C_4 的切簇和 $\{\ell_1^4+\ell_2^4 \mid \ell_i \in \mathbb{P}^1\}$ 的割线轨迹。

因此，二元四次形式是调和的，当且仅当它是两个四次幂之和，或是这类和的极限。其典型代表是 $f=x^4-y^4$，它的根是四个四次单位根。第一页中由我们的 C-E-G（do-mi-sol）定义的二元四次形式为

$$f = x(x-y)(5x-4y)(3x-2y) = 15\,x^4 - 37\,x^3y + 30\,x^2y^2 - 8\,x\,y^3 = \frac{i}{4}\left(\frac{-5+i}{2}x+2y\right)^4 - \frac{i}{4}\left(\frac{-5-i}{2}x+2y\right)^4$$

用西尔维斯特方法已求得 f 作为两个四次幂之和的分解（现代而精彩的介绍见 [BGI]）；这是因为计算 (2.2) 的核并验证

$$2\left(2\partial_x + \frac{5-i}{2}\partial_y\right)\left(2\partial_x + \frac{5+i}{2}\partial_y\right) f = \left(8\partial_x^2 + 20\partial_x\partial_y + 13\partial_y^2\right) f = 0$$

I的解释更为微妙。一个典型的代表是 $f=x(x^3-y^3)$，其根为三个三次单位根及其中心点。在球极投影下，它们对应于球面上四面体的四个顶点，但该四面体并非正四面体。Klein 选择了另一个代表，即

$$\Psi = x^4 - 2\sqrt{-3}x^2y^2 + y^4$$

其根为 $\pm a,\ \pm b$其中 $a=\frac{1+i}{\sqrt{3}-1}$, $b=\frac{1-i}{\sqrt{3}+1}$。在球极投影中，它们对应于球面上的正四面体的四个顶点，见图 5。

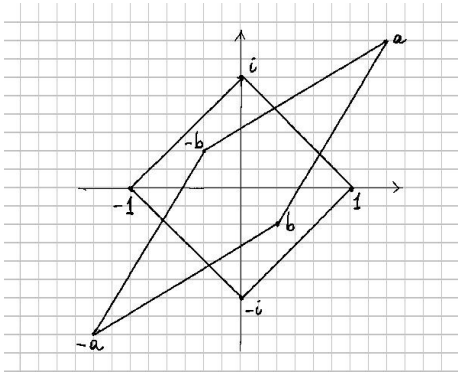

图 5：正方形的四个顶点构成一个调和4元组，其中 $J=0$。另一个菱形的四个顶点构成一个等调和4元组，其中 $I=0$。这里$a=\frac{1+i}{\sqrt{3}-1}$，$b=\frac{1-i}{\sqrt{3}+1}$。

在 [O12] I 中，我为命题 2.1 的非调和情形给出了三种不同的证明：一种基于雷诺算子，第二种基于李代数作用，第三种使用转协变，见 [O12，第 1 节中注 1 之前的段落。2]我们将在定理 2.6 中回顾转协变的主要性质，以及式 (2.4) 中 I, J 的相应表达式。 □

命题 2.3. 设 $f\in$对称幂$^4\mathbb{C}^2$ 非奇异。则

$$\#Isotropy(f)=\begin{cases}4 & IJ\neq 0\\ 8 & J=0\\ 12 & I=0\end{cases}.$$

稳定子分别是群 $D_2=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$、$D_4$ 和 A_4（两个二面体群和一个交错群）。

相应地，$\mathbb{P}^4=\mathbb{P}$（对称幂$^4\mathbb{C}^2$）中作为超曲面的 $SL(2)$-轨道次数为六次，且其方程对某个 $k\in\mathbb{C}$具有形式 $I^3-kJ^2=0$，除非是二次的两个特殊轨道 $V(I)$ 和三次的 $V(J)$。在注 2.5 中我们将看到，判别式与六次的一般轨道不同构，因为它具有更大的奇异轨迹。

关于半稳定点的定义，请参阅本书中 K. DeVleming 的讲座 [DeV]。非半稳定点组成的代数簇称为零锥，它与所有不变量的零点集重合。对于点的四元组，零锥由至少有 3 个点重合的四元组组成。对于二元四次型，零锥是 $V(I,\ J)$（参见习题 7.19）。零锥与具有重数为 $\geqslant 3$ 的根的四次型轨迹重合，并由两个轨道组成，即 C_4 及其切簇。注意，平方型（具有两个重数为 2 的根）的四次型是半稳定的，除非它们有一个重数为 4 的根。我们将在第 5 节再次遇到平方型簇，届时将讨论希尔伯特的论文 [Hil86]。

命题 2.4. *[DO，第 II.2 章，定理 1，第 23] 页。对于* $p=(p_1,\ldots,p_4)\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$,

- p 是半稳定的，当且仅当 $p_1, \ldots, p_4$ 中至多有2个相同。
- p 稳定当且仅当点 p_1、……、p_4 互不相同。

该映射

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\right)^{ss} & \to & \mathbb{P}^1 \\ (a,b,c,d) & \mapsto & ((ac)(bd),(ad)(bc)) \end{array}$$

是模空间上的商映射。
二元四次型的对称化版本是如下商映射

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{P}^4\right)^{ss} = \mathbb{P}^4 \setminus V(I,J) & \to & \mathbb{P}^1 \\ f & \mapsto & \left(I^3, J^2\right) \end{array}$$

注 2.5. 在半稳定四次型中还有形式 $x^2y(x+y)$，它具有一个二重点。其轨道是判别式 $D = I^3 - 27J^2$，该判别式的奇异轨迹中包含零锥，也包含平方型簇。一般轨道的奇异轨迹中只包含零锥。

通过转协变可以系统地构造不变量。

定理 2.6. 设 $\dim U = 2$。设 $\min(d,e) \geqslant n$。存在唯一的双线性 $SL(2)$-不变量映射

$$\mathrm{Sym}^d U \times \mathrm{Sym}^e U \to \mathrm{Sym}^{d+e-2n} U$$

使得

$$(u^d, v^e) \mapsto u^{d-n} v^{e-n} (u \wedge v)^n.$$

若 $f \in S^d U$、$g \in S^e U$，则其表达式为

$$(f,g)_n = \frac{n!}{d!}\frac{n!}{e!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\partial f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \frac{\partial g}{\partial x^i \partial y^{n-i}} \ ,$$

称为 f 与 g 的第 n 次超越式。

证明. 唯一性是显然的，因为任一多项式都可以表示为线性形式的幂之和（这一陈述等价于如下事实：有理正规曲线的线性张成是整个环境空间）。为证明存在性，我们首先计算

$$\begin{aligned} (u^d, v^e)_n &= \frac{n!}{d!}\frac{n!}{e!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\partial u^d}{\partial x^{n-i} \partial y^i} \frac{\partial v^e}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u^{d-n} v^{e-n} (u_0 v_1)^{n-i} (u_1 v_0)^i = u^{d-n} v^{e-n} (u_0 v_1 - u_1 v_0)^n \ . \end{aligned}$$

这一计算使得检验 $SL(2)$-不变性变得容易，因为根据线性性，只需在 $f = u^d$、$g = v^e$ 时进行检验。在此情况下，对于任意 $h \in SL(2)$，我们有

$$(h\cdot u^d, h\cdot v^e)\mapsto (h\cdot u)^{d-n}(h\cdot v)^{e-n}(u\wedge v)^n = h\cdot (u^d, v^e)_n$$

证明完成。 □

注意，$(f,g)_1$ 是雅可比式，而 $(f,f)_2$ 是海森式。戈丹的一个经典定理指出，二元形式的所有不变量都可以表示为转协变的迭代。

对于 $f\in$对称幂$^4\mathbb{C}^2$，我们可以用转协变来表示不变量 I 和 J。事实上，很容易验证

$$I=(f,f)_4 \qquad J=(f,(f,f)_2)_4. \tag{2.4}$$

T定理 2.7. 不变量环 $\mathbb{C}[$对称幂$^4\mathbb{C}^2]^{SL(2)}$ 是多项式环 $\mathbb{C}[I,J]$.

证明可参见 [O12，定理 25]。注意， $SL(2)$ 的不变量环与 $GL(2)$ 的半不变量环一致（关于半不变量，参见（4.5））。

备注 2.8. 我们已经看到，当投影到球面 $S^2=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上时，等调和四次型的四个根是正四面体的四个顶点，而调和四次式的四个根共面，且是一个正方形的顶点。这个优美的描述需要谨慎理解。在 $SL(2)$作用下，调和四次式的四个根可能不再具有正方形的度量构型，但仍保持共面。等调和四次型的四个根也是如此：它们可能不再具有四面体的度量构型。

备注 2.9。 不变量 I 可以写成一个 *Pfaffian*：关于 *Pfaffian* 的更多内容，参见附录 *7.1*。事实上，除标量倍数外，

$$I=\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_0 & 2\,a_1 & 3\,a_2\\ -a_0 & 0 & a_2 & 2\,a_3\\ -2\,a_1 & -a_2 & 0 & a_4\\ -3\,a_2 & -2\,a_3 & -a_4 & 0\end{pmatrix}.$$

这个 4×4 矩阵对应于复合线性映射（对于 维数$U=2$)

$$\mathrm{Sym}^3U^\vee \xrightarrow{a} \mathrm{Sym}^3U \xrightarrow{b} \mathrm{Sym}^3U$$

其中 a由该映射的第三对称幂诱导得到

$$\begin{array}{ccc} U^\vee & \to & U\\ \partial_v & \mapsto & \partial_v(x\wedge y)\end{array}$$

及 $b(g) = (g,f)_2$。

一般二元四次形式在 $SL(2)$ 意义下等价（见练习 7.17）于铅笔中的一个成员

$$x^4+6tx^2y^2+y^4. \tag{2.5}$$

铅笔 (2.5) 中任意四次型的海森仍是铅笔中的一个成员 [CO，备注 3.4]。对于这个四次型铅笔，两个不变量具有简单形式$I = 1 + 3t^2$ 和 $J = t(1-t)(1+t)$，而判别式是 $(3t-1)^2(3t+1)^2$ 的一个标量倍数。

下面的命题是定理 2.7 的一个有趣推论。

命题 2.10. 考虑海森映射

$$H : \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^4.$$

则海森映射的雅可比式是 $I \cdot J$ 的标量倍数。

证明. 海森映射的雅可比式是一个次数为 5 的不变量（它是一个具有线性元的 5×5 矩阵的行列式）。该陈述由定理 2.7 得出。由于海森映射是 2 : 1 且是支配的，雅可比式实际上非零。 □

命题 2.11 （参见习题 7.19）。 *Hessian* 映射是 J 的极映射。它一般是 $2:1$ 的，且其分支轨迹与超曲面 $V(J)$ 重合。此外，给定 $f \in$对称幂$^4\mathbb{C}^2$，则 $J(f) = 0$ 当且仅当 $H(f)$ 是一个正方形，而 $I(f) = 0$ 当且仅当 $H(H(f))$ 与 f 成比例。

Enriques 和 Fano 在其开创性著作 [EF] 的最后部分专门研究了特殊的$SL(2)$-轨道。我们在此重述以下出发点，其证明并不困难。

定理 2.12 (Enriques-Fano [EF]). 二元形式 f 的 $SL(2)$-轨道是一个 3-维簇，当且仅当其稳定子有限。当 $d \geqslant 3$ 且 f 有 d 个不同的根时，这一条件成立。在这种情况下，作为 $\mathbb{P}$(对称幂$^d\mathbb{C}^2$)中的代数簇，其闭包的次数为

$$\deg \overline{(SL(2) \cdot [f])} = \frac{d(d-1)(d-2)}{\#Stab(f)}$$

其中， $Stab(f)$ 是 $PGL(2)$中的一个有限群。

在论文末尾，Enriques 和 Fano 列出了四个具有稠密轨道且带有$SL(2)$-作用的光滑三维簇，它们来自多面体群。这很可能是对源自 Klein 多面体群分类（我们将在第 4 节继续讨论）的轨道进行的首次几何研究。所有这些情形的方程均由协变式 $(f, f)_4$, 得到；对于二元四次型而言，它就是非调和不变量。四面体情形见 [EF, §25]，；八面体情形见 [EF, §26]；最后，二十面体情形见 [EF, §27]。二十面体情形堪称一项杰作，全文长达五页，其中明确写出了协变式 $(f, f)_4$ 的 17 个方程。根据这些方程可以证明这些例子是光滑的，因为只需计算闭轨道代表元 x^d 处雅可比式的秩即可。

仅仅一个世纪之后，Aluffi 和 Faber 证明了一个引人注目的结果：这些例子（及其幂）是唯一的光滑三维簇，即：

定理 2.13 (Aluffi-Faber [AF], 命题 4.2)。 某些 $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d\mathbb{C}^2)$ 中的光滑3维 $SL(2)$轨道闭包如下，共有四类：

1. $(x^3+y^3)^k$*,* $k \geqslant 1$的轨道闭包，稳定子为 $D_3 = S_3 \subset PSL(2)$；*2.* $(x^4+xy^3)^k$*,* $k \geqslant 1$的轨道闭包（非调和四次型的幂），稳定子为四面体群 $A_4 \subset PSL(2)$；*3.* $(x^5y - xy^5)^k$*,* $k \geqslant 1$的轨道闭包，稳定子为八面体群$S_4 \subset PSL(2)$；*4.* $(x^{11}y+11x^6y^6-xy^{11})^k$*,* $k \geqslant 1$的轨道闭包，稳定子为二十面体群 $A_5 \subset PSL(2)$。

得到的四个三维簇分别为（对于 $k=1$）

1. $\mathbb{P}^3$；*2.* Q_3，光滑二次三维簇；*3.* $\mathbb{P}^6$中的五次德尔佩佐三维簇 V_5；*4.* 亏格12的素*Fano*三维簇 $U_{22} \subset \mathbb{P}^{12}$。

$k \geqslant 1$ 的轨道分别与这些轨道同构，并由线丛 $\mathcal{O}(k)$嵌入。

在 [AF] 中也可以找到定理 2.12 的现代证明。这个故事还有一个有趣的后续，因为定理 2.13 中的全部四个代数簇都是光滑Fano三维簇的实例，也就是说，它们的反典范丛 $-K$ 是充足的。Mukai和Umemura在 [MU], 中指出了这一事实，并引用了Enriques-Fano的论文[EF]。由于 [Roth，第 V 章第 §7],节未收录亏格12的素Fano三维簇，有时甚至有人声称Fano并不知道这个 U_{22} 代数簇，这很矛盾，因为 U_{22} 是由Fano本人和Enriques共同引入的。

在 [MU 中，注记 6.5] 代数簇 $X = U_{22} \subset \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^{12}\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^{12}$ 的一个妙处已得到阐明。他们意识到，$H^0(-K_X) = \mathrm{Sym}^{12}\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{Sym}^0\mathbb{C}^2$ 作为 $SL(2)$-模，维数为 14，因此其反典范嵌入位于 $\mathbb{P}^{13}$中，其中一个超平面 $H = \mathbb{P}\mathrm{Sym}^{12}\mathbb{C}^2$ 和一个点 $P = \mathbb{P}\mathrm{Sym}^0\mathbb{C}^2$ 是“典范地”定义的。反典范嵌入的平面截面是典范曲线。反典范嵌入是有序对 $(f, P) \in \mathrm{Sym}^{12}\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{Sym}^0\mathbb{C}^2$的 $SL(2)$-轨道的闭包，其中 $f = x^{11}y+11x^6y^6-xy^{11}$ 来自定理 2.13 的第 4 项。交集 $H \cap X$是一个奇异曲面，同构于 12 次有理正规曲线的切簇。从 P 到 H 的投影，将 X 的反典范嵌入映到一个与 X 本身同构的代数簇，并且它与 $SL(2)$-轨道 f的闭包重合。注意，U_{22} 的平面截面正是典范曲线的投影。其饱和理想由 31 个二次曲面生成。通过用 M2 [GS] 对 Enriques 和 Fano 给出的 17 个二次曲面所生成的理想取饱和，从而得到这 31 个二次曲面，是一项颇有意思的练习。U_{22} 的一个微妙性质是，U_{22} 中的直线簇参数化方案是非约化的，而且确实对应于非约化多项式 $(x^2+y^2+z^2)^2$, 参见 [Muk, Sch] [Fae, §5,§8.2]。

注记 2.14. U_{22} 在 $\mathbb{P}^{13}$ 中的反典范嵌入的贝蒂数与其超平面截面（即切曲面）的贝蒂数相同。它们为

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
total:	1	45	231	550	693	660	693	550	231	45	1
0 :	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1 :	.	45	231	550	693	330	.	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.	330	693	550	231	45	.
3 :	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1

这些贝蒂数是在 *[AFPRW]*中计算的。对 *12* 次有理正规曲线的这项计算，是证明一般典范曲线的格林猜想的关键工具；与 *Voisin* 最初的证明相比，这种方法更为简洁。关于这一研究的精彩介绍，参见 *[EL]* 和 *[RS]*。

值得看看 $U_{22} \subset \mathbb{P}^{12}$的贝蒂数。使用 *M2 [GS],* 可得

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
total:	1	31	140	504	1 298	2 046	2 079	1 474	759	288	78	13	1
0 :	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1 :	.	31	109	108	11	.	.	.	.	.	.	.	.
2 :	.	.	31	396	1 287	2 046	2 079	1 474	759	287	78	13	1
3 :	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.

查看前面的表格，尤其是标为 *9* 的那一列，可以发现二十面体仍有一些微妙之处有待揭示。

注记 2.15. 定理 *2.13* 的第 *3* 项和第 *4* 项可以表示为幂和簇。具体而言，代数簇 V_5 参数化了三个加项 $\sum_{i=0}^{2} l_i^2$，它们表示一个光滑圆锥曲线 q *[Muk*，命题 *10]*。素 *Fano* 3 维簇 U_{22} 参数化了平方表达式 $\sum_{i=0}^{5} l_i^4 = q^2$ *[*中的加项，见 *Muk*，定理 *14]*。这一结果还有一个实数域上的对应版本：当六条直线 l_i 为实直线时，它们恰好对应正二十面体的六对顶点，见 *[Rez*，定理 *9.13]*。这再次揭示了二十面体与 U_{22}之间的联系。

代数簇 U_{22} 具有一个 *6* 维变形族，作为亏格为 *12* 的 *Fano 3* 折叠 X_{22}，其对应于各项 $\sum_{i=0}^{5} l_i^4 = g$；此处 g 是一条一般的平面四次曲线，确实由亏格为 3 *[* 的曲线构成的 *6* 维代数簇 M_3 参数化，*Muk*，定理 *11]*。

注 2.16。 在 $\mathbb{P}^{13}$ 中还有另一族次数为 *22* 的 *Fano 3* 折叠，*Fano* 在他的最后一篇论文中对此作了描述。它的指标为 *2*，后来 *Andreatta* 和 *Pignatelli* 在 *[AP],* 中对其进行了修订，他们称这个例子为*"Fano* 的最后一个 *Fano"*。

3 三元三次型

考虑三元三次型 $f \in$ 对称幂$^3\mathbb{C}^3$。在本节中，我们将椭圆曲线与商空间 $\mathbb{C}/\Lambda$ 之间众所周知的对应关系视为已知，其中 Λ 是一个格，参见例如 [Hart，第 IV 节§4]。这本质上是亏格为 1 的曲线的阿贝尔定理。

在 $SL(3)$ 的作用下，三元三次型与二元四次型的表现非常相似。

原因来自以下构造。

令 $f \in$对称幂$^3\mathbb{C}^3$并选取 $p \in V(f) \subset \mathbb{P}^2$。投影 $\pi_p\colon V(f) \to \mathbb{P}^1$ 是 2 : 1 的，并且根据黎曼–胡尔维茨公式恰有四个分歧点 $z_i \in V(f)$ 和四个分支点 $\pi_p(z_i) \in \mathbb{P}^1$。这里我们默认任意椭圆曲线都具有复环面的结构，这就是椭圆曲线的阿贝尔定理。因此，在固定一个拐点作为原点后，椭圆曲线上的三个点共线，当且仅当它们在群结构中的和为零。在此情形下，π_p的四个分歧点是方程 $2z+p=0$ 的四个解 z，这从格结构中显而易见，见图6。

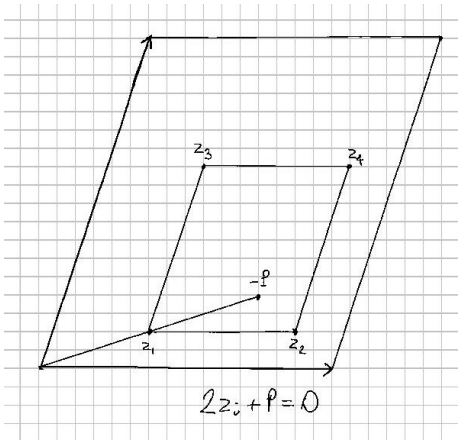

图6：点 $z_1,\dots z_4$ 是格$\mathbb{C}/\Lambda$中方程 $2z+p=0$ 的解，其中 Λ 的生成元是平行四边形的两条独立边。

定理3.1 (Salmon)。 这四个（无序）分支点的 $SL(2)$类不依赖于 $p \in V(f)$。

*Pr*证明。 这基本上就是 [Hart 引理 IV 4.4]。我们给出另一种证明。

这四个分支点给出了二元四次型不变量环上的一个映射。根据定理 2.7，我们得到一个映射

$$V(f) \xrightarrow{I^3,J^2} \mathbb{P}^1.$$

由于这四个点总是互不相同（见图6），该映射的像落在$\mathbb{P}^1\setminus(27,\ 1)$中，换言之，它避开了判别式。由于像包含在一个仿射簇中，或者更简单地说，由于它是一个整体正则函数，因此它必为常数。 □

Salmon定理在我们的论述中的重要性在于，它建立了三元三次型与二元四次形式之间的联系。

精确地说，Salmon定理给出了一个从三元三次型的 $SL(3)$-类到二元三次型的$SL(2)$-类的映射。

这两个不变量环本质上是相同的。事实上，I 的拉回是次数为4的不变量 $\mathcal{A}$，称为阿隆霍尔德不变量。J 的拉回是次数为6的不变量 $\mathcal{T}$。

我们来准确地陈述这个结果。

定理 3.2。三元三次型 $\mathbb{C}[\text{对称幂}^3\mathbb{C}^3]^{SL(3)}$ 的不变量环是多项式环 $\mathbb{C}[\mathcal{A},\mathcal{T}]$。

满足 $\mathcal{A}(g)=0$ 的三元三次型 g 称为等调和型。换言之，当以该三次曲线上的任意一点为中心作投影时，所得的四个分支点构成一个等调和二元四次形式，该三次型便称为等调和型。Salmon定理指出，如果从某一点投影得到一个等调和二元四次形式，那么从任意一点投影都会得到一个等调和二元四次形式。一个基本例子是 $g=x^4+y^4+z^4$，即费马三次曲线。阿隆霍尔德不变量可以写成一个 Pfaffian，见 [O12，第 4 节7]和附录 7.1。

满足 $\mathcal{T}(g)=0$ 的三元三次型 g 称为调和型。换言之，当以该三次曲线上的任意一点为中心作投影时，所得的四个分支点构成一个调和二元四次形式，该三次型便称为调和型。

这两个特殊情形的一个有趣之处在于，它们分别对应格的两个特殊情形。

命题 3.3. 给定一个格 $\Lambda\subset\mathbb{C}$, $\Lambda=\langle 1,\tau\rangle$，满足 $\mathrm{Im}\tau>0$，椭圆曲线 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的自同构（固定点 $P_0\in\mathbb{C}/\Lambda$）与满足条件 $\alpha\Lambda=\Lambda$ 的复数 α 之间存在一一对应。

此外，我们有

$$\{\alpha\in\mathbb{C}|\alpha\Lambda=\Lambda\}\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}_6=\{e^{\pi ik/3}|k=0,\dots 5\} & if\ \Lambda=\langle 1,e^{\pi i/3}\rangle\\ \mathbb{Z}_4=\{i^k|k=0,\dots 3\} & if\ \Lambda=\langle 1,i\rangle\\ \mathbb{Z}_2=\{\pm 1\} & otherwise.\end{cases}$$

情形 $\Lambda=\langle 1,e^{\pi i/3}\rangle$ 对应于等调和曲线。情形 $\Lambda=\langle 1,i\rangle$ 对应于调和曲线。

证明。等调和情形是 [Hart，例 IV 4.20.2]。就格 Λ 而言，它对应于 $\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4}$ 的消失（见 [Hart，定理 IV 4.12B]）。

消失是由格的 $\mathbb{Z}_6$ 不变性导致的，具体如下。由于绝对收敛，我们可以重新排列求和次序，并对每个 $\mathbb{Z}_6$ 轨道求和。令 $\tau=e^{\pi i/3}$，且满足 $\tau^6=1$。任意固定 $\omega\in\Lambda\setminus\{0\}$ 的轨道上的六项给出 $\sum_{j=0}^{5}(\omega\tau^j)^{-4}=\omega^{-4}(\tau^0+\tau^{-4}+\tau^{-2}+\tau^0+\tau^{-4}+\tau^{-2})=0$。因此，任意轨道上的和都为零，从而得到 $\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4}=0$。

调和情形见 [Hart，《例 IV 4.20》1]。就格 Λ 而言，这对应于 $\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}$ 的消失。

消失是由格的 $\mathbb{Z}_4$ 不变性导致的，具体如下。由于绝对收敛，我们可以重新排列求和顺序，并对每个 $\mathbb{Z}_4$ 轨道求和。任意固定 $\omega\in\Lambda\setminus\{0\}$ 的轨道中的四项给出 $\sum_{j=0}^{3}(\omega i^j)^{-6}=\omega^{-6}(i^0+i^{-2}+i^0+i^{-2})=0$。因此，任意轨道上的和都为零，由此可得$\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}=0$。

这些和称为艾森斯坦级数，参见定理 6.2。

□

三元三次型的零锥由 y^2z-x^3 的轨道闭包构成，这是一条带有尖点的曲线。该闭包包含以下五个轨道，下面列出它们的代表元和维数

	$representative$	$dimension$
	$y^2z - x^3$	7
	$x(y^2 - xz)$	6
	$xy(x + y)$	5
	x^2y	4
	x^3	2

图 7：零锥中三元三次型的 $SL(3)$-轨道

请注意，“三角形” xyz 不在零锥中，并且它确实是半稳定的 .

海森的系数（即海森矩阵的行列式）张成一个维数为 10 的三次型子空间，并生成一个理想，我们称之为 $\mathcal{H}$。

阿龙霍尔德不变量的偏导数张成另一个三次型子空间，其维数为 10，并生成第二个理想，我们将其称为 $\mathcal{A}$。

使用 M2 [GS], 进行的以下计算很直接，它表明 $\mathcal{H}$ 的零点集具有概形论的非约化结构（饱和理想与根理想不同！），参见 [CO，命题 4.3]。

命题 3.4. 设 $\mathcal{H}$ 为由海森的系数构成的10个三次型生成的理想，设 $\mathcal{A}$ 为由阿龙霍尔德不变量的10 个偏导数生成的理想，设 $\mathcal{M} = (a_0, \ldots, a_9)$ 为极大齐次理想。则有以下结论：

$\mathcal{H}$: $\mathcal{M}^\infty = \mathcal{H}$
$\sqrt{\mathcal{H}} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{H}\mathcal{A}$:
$\mathcal{M}^\infty = \mathcal{A} \oplus \mathcal{H}$
$\sqrt{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{H}$

海森映射 $\mathbb{P}^9 \overset{\mathcal{H}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^9$ 的次数为 3[CO，定理 4.7]。

映射 $\mathbb{P}^9 \overset{\mathcal{A}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^9$ 的次数又是三次。

二元四次型的铅笔 (2.5) 的类似物是黑塞束

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6sxyz \tag{3.1}$$

这个族共享相同的 9 个拐点，并且具有如下性质：黑塞束中一个成员的海森仍是黑塞束的一个成员 [CO，定理 4 的证明.7]。

黑塞束的非调和不变量为 $S = I' = s(s^3 - 1)$。调和不变量为 $T = J' = 8s^6 + 20s^3 - 1$，判别式是 $J'^2 - 64I'^3$ 的倍数，且与 $8s^3 + 1$ 成正比。

从 $(1, -1, 0)$ 投影黑塞束后，根据 Salmon定理计算得到的二元四次形式显然为 $(x + 2sy)(x^3 - 6x^2ys - 4y^3)$。

Salmon定理给出的 (2.5) 与 (3.1) 之间的对应并非平凡。通过分别计算两种情形下的不变量 $j = I^3/D$，我们得到如下对应

$$\frac{(1 + 3t^2)^3}{(3t - 1)^2(3t + 1)^2} = \frac{s^3(1 - s^3)^3}{8(s^3 + 1/8)^3}.$$

这一代数对应的实图如下。

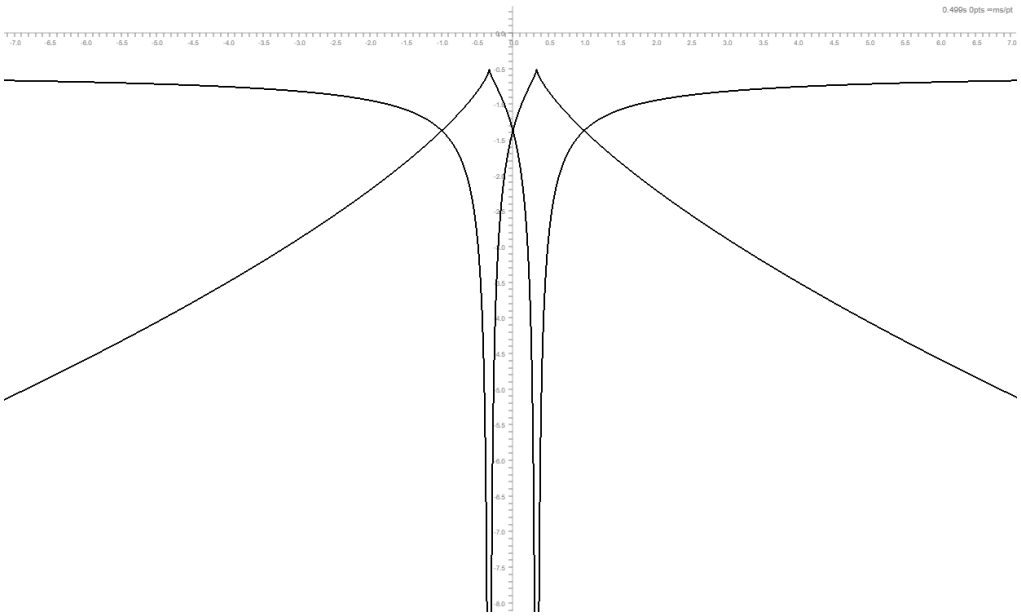

图 8：根据 *Salmon*定理，二元四次型的实规范铅笔（横坐标）与三元三次型（纵坐标）之间的对应。在两个尖点处，判别式为零。三个结点对应于调和情形。等调和情形不会出现在 $\mathbb{R}$ 上。

横坐标为二元四次型 (2.5) 的参数 t，纵坐标为三元三次型 (3.1) 的参数 s。两个尖点对应于判别式为零的情形，即 $(t, s) = (\pm 1/3, -1/2)$。三个结点对应于调和情形，它们的纵坐标相同，均为 $8s^6 + 20s^3 - 1$的唯一负实根 $s = -1.366\ldots$，横坐标为 $t \in \{-1, 0, 1\}$。注意，当 $s \in \mathbb{R}, s < -1/2$时，黑塞束由两个连通分支组成。

注 3.5. *Elisabetta Rocchi* 在 *[Roc]* 中研究了二元四次型与三元三次型之间的另一种类比。群 $SL(2)$ 作用于格拉斯曼簇 $Gr(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^4)$内部的二元四次型束。束 *(2.5)* 的轨道恰好是定理 *2.13* 第 *3* 项中的法诺三维簇 V_5 。同样，群 $SL(3)$ 作用于三元三次型束。黑塞束在格拉斯曼簇$Gr(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^9)$ 内部的轨道是一个8维簇 X ，其描述见 *[Roc]*。它由九个轨道组成，并具有一个由两个轨道构成的4维奇异轨迹。值得探究的是，X 是否为 $\mathbb{Q}$-*Cartier*；若是， X 是否为法诺簇。

4 有限多面体群与ADE分类

我们回顾一下，在实数域上有实李群的二对一覆盖$SU(2) \to SO(3, \mathbb{R})$。

多面体群可以看作 $SO(3, \mathbb{R})$的有限子群。它们在 $SU(2)$中的拉回称为二元多面体群。

复数域上的版本是二对一覆盖 $SL(2, \mathbb{C}) \to SO(3, \mathbb{C})$。

$SO(3, \mathbb{R})$的有限子群作用于球面。循环子群 $\mathbb{Z}_n$ 与由以下元素生成的群共轭：

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/n) & -\sin(\pi/n) & 0 \\ \sin(\pi/n) & \cos(\pi/n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

它绕轴 $South - North$旋转 $2\pi/n$。地球上的时区提供了一个很好的表示。每个时区都是循环群作用的一个基本域 T，这意味着 $\cup_g gT = S^2, \mathring{T} \cap g\mathring{T} = \emptyset \quad \forall g \in \mathbb{Z}_n, \ g \neq 1$。时区可以看作一个退化的球面三角形，其角度为 $2\pi/n, 2\pi/n, \pi$。Klein 对有限群 $G \subset SO(3, \mathbb{R})$ 给出了完整的分类，我们回顾他的分类。

有两种基本类别，即刚才介绍的循环群，以及含有 D_n $2n$ 个元素的二面体群。

在循环情形下，拉回到 $SU(2)$后仍是一个阶数加倍的循环群$\mathbb{Z}_{2n}$，它由 $\mathbb{Z}_n$的某个生成元的两个拉回之一生成。群 $\mathbb{Z}_{2n}$ 作用的基本域恰好是前一个基本域的一半，它沿角 $2\pi/n$的平分线划分。

阶为 $2n$ 的二面体群 D_n 是正 n边形的对称群，并且可以通过交换北极和南极的技巧嵌入 $SO(3)$中，就像在

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/n) & \sin(\pi/n) & 0 \\ \sin(\pi/n) & -\cos(\pi/n) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

k 次幂的 (4.2) 和 (4.2) 对于 $k = 0$、.....、$n-1$构成了 D_n 的所有元素。球面可以铺砌成 $2n$ 个测地三角形，其中 n 个位于赤道上方， n 个位于赤道下方，每个三角形的角分别为 $\frac{\pi}{2}$、 $\frac{\pi}{2}$、 $\frac{2\pi}{n}$。拉回到 $SU(n)$ 后得到二元二面体群，其阶为 $4n$。

基本域仍是一个三角形，其面积是先前三角形的一半，即其角分别为 $\frac{\pi}{2}$、 $\frac{\pi}{2}$、 $\frac{\pi}{n}$。

三个最有趣的子群对应于对偶意义下的柏拉图立体类别，即四面体群 A_4 、六面体群/八面体群 S_4 和十二面体群/二十面体群 A_5。每个面都是一个有 p 条边的正多边形。将面的中心与该面上的所有顶点相连。我们得到 p 个三角形，它们是 $SO(3)$中这些群的基本域。

下表显示了二元群的群阶和测地三角形的角度（此处p 表示角度 π/p）；该三角形是二元群的基本域。任何二元群的阶都是对应群阶的两倍。请注意，第一个表格恰好涵盖了二元多面体群。

			p	q	r
循环	$\mathbb{Z}_n$	n	1	n	n
二面体	D_r	$2r$	2	2	r
四面体	A_4	12	2	3	3
八面体	S_4	24	2	3	4
二十面体	A_5	60	2	3	5

(4.3)

按照这种解释，多面体群可被视为椭圆三角群。

每个有向图 Q由一个顶点集 I 、一个棱集 Ω 以及源映射和目标映射 $s, t\colon \Omega \to I$ 定义。这称为箭图。每个有限箭图 Q 在 $\mathbb{Z}^I$上带有一个二次型

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i\in I} v_i w_i - \sum_{h\in\Omega} v_{s(h)} w_{t(h)}$$

及其对称化版本

$$(v, w) = \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle$$

T所关联的二次型$q_Q(v) = \frac{1}{2}(v, v)$称为蒂茨型[Kir, §1.5]。

现设 $\Gamma(p, q, r)$为“星形”图，由长度分别为(p, q, r)的三条分支在一个中心顶点处交汇而成。若 p、 q、 r 之一为 1，则只有两条分支。一个初等事实[Kir, 定理 1.30]是：$q_{\Gamma(p,q,r)}$ 为正定当且仅当

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \tag{4.4}$$

现在该列出以下不等式的所有整数解了

$(1/p + 1/q + 1/r) > 1$

p	q	r
2	2	$r \geqslant 2$
2	3	3
2	3	4
2	3	5

$(1/p + 1/q + 1/r) = 0$

p	q	r
2	3	6
2	4	4
3	3	3

4.3 中的每个群都对应一个带有相应（p， q， r）的“星形”图。对应关系如下

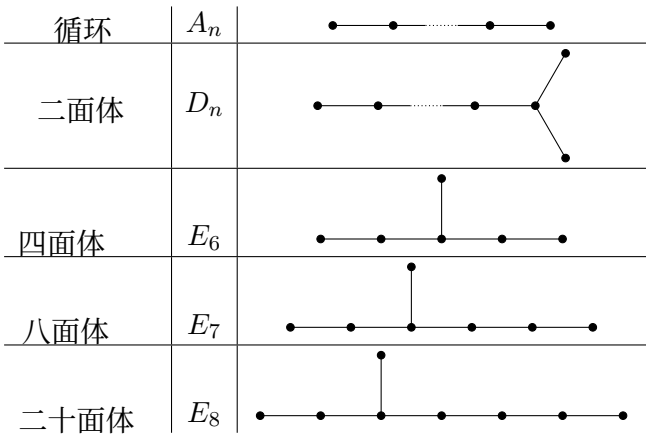

图9：多面体群的Dynkin图。ADE分类。

所列出的图恰好是 Dynkin图，并且它们与满足（4.4）的正整数解相对应。

基本定理是：当且仅当 q_Q 为正定时， Q 才是图 9 中的某个图。 [Kir，定理 1。28]。这与图的定向无关。

我们将在注 4.11 中概述 McKay对应，这是观察图与群之间相同 ADE 对应关系的一种替代性且更“现代”的方式。

我们将此前讨论过的球面的测地三角形镶嵌概括为群作用下的基本域。我们回顾一下初等的

命题 4.1。 单位球面上一个角度为$\frac{\pi}{p}$、 $\frac{\pi}{q}$、 $\frac{\pi}{r}$ 的测地三角形，其面积等于 $\frac{-\pi}{p} \mp \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} - \pi$。特别地，我们有不等式

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

反过来，给定一个角度为 $\frac{\pi}{p}$、 $\frac{\pi}{q}$、 $\frac{\pi}{r}$ 的三角形，使得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

我们得到一个球面镶嵌，其三角形与给定三角形全等；还有一个有限群 $G \subset SO(3)$ 作用于球面，使该三角形成为基本域。三角形的数量与 $|G|$ 相同，等于面积之比

$$\frac{4}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1}$$

Klein 有一个绝妙的想法：从确定顶点的形式中，恢复多面体群的半不变量。对于所有多面体，计算过程都类似。这种构造的精妙之处蕴含在以下两个惊人的事实中

$$\begin{cases} \text{Hessian(Vertices)} &= \text{Faces} \\ \text{T(Vertices)} &= \text{Edges} \end{cases}$$

其中我们回顾一下，二元形式 f 的协变式 T 是 $T(f) = \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ H_x & H_y \end{pmatrix}$，其中 $H = Hess(f)$。不变量 T 将在第 5 节讨论希尔伯特论文时发挥关键作用，见定理 5.6。

我们从四面体开始。正如第 2 节所预期的那样，它涉及命题 2.1 中出现的等调和二元四次型。我们采用 [Klein] 中的相同记号。

命题 4.2。 设 $\Phi = x^4 + 2\sqrt{-3}x^2y^2 + y^4$ 是一个等调和四次型。其根是一个四面体的顶点。于是

$\Psi = Hess(\Phi) = x^4 - 2\sqrt{-3}x^2y^2 + y^4$ 再次是等调和的。其根对应于每个面的形心（这有时称为反四面体）

$t = T(\Phi) = xy(x^4 - y^4)$ 是一个六次型，其根对应于每条棱的中点。它们是一个八面体的顶点。

给定一个带有 G-作用的环 R，其不变量环为

$$R^G := \{f \in R | g \cdot f = f \quad \forall g \in G\}.$$

半不变量环通过一维表示来定义，即群同态 $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$。它们构成一个群 $\Gamma_G = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$，有时称为 G 的特征标群（不要将这些一维特征标与高维特征标混淆，后者只是类函数，且可能为零）。半不变量环为

$$R_s^G := \{f \in R | \exists \chi \in \Gamma_G \text{ such that } g \cdot f = \chi(g) f \quad \forall g \in G\}. \tag{4.5}$$

注意包含关系 $R^G \subset R_s^G$。

定理 1（Molien）。 [Stu,§2.2]

$$\sum_{d=0}^{\infty} \dim K[u_1, \ldots, u_n]_d^G \, t^d = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(I_n - tA)}.$$

Molien 定理可推广至半不变量，具体如下。

命题 4.3。 设 G 是作用于 U上的有限群。

1. 在对称代数 S^*U 上诱导的不变子环的希尔伯特级数 s

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \dim \left(S^i U\right)^G t^i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - tg)} \tag{4.6}$$

其中 g 作用于 U。

2. 若 χ: $G \to \mathbb{C}^*$ 是一维特征标，则关于 χ 的半不变量子环定义为 $(S^iU)_\chi = \{f \in S^iU | g \cdot f = \chi(g)f\}$ 其希尔伯特级数为

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \dim \left(S^iU\right)_\chi t^i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\overline{\chi(g)}}{\det(1-tg)} \tag{4.7}$$

证明。第一种情形由 [Stu] 定理 2.2.1 得出。第二种情形只需稍作修改，注意当 $\chi = id$ $(S^iU)_{id} = (S^iU)^G$ 时。 □

$A_4 \subset SO(3, \mathbb{R})$ 的特征标表为（见 [FH, 习题 2.26] ）

size	1	3	4	4
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	ω	ω^2
ρ_3	1	1	ω^2	ω
ρ_4	3	-1	0	0

(4.8)

这些知识足以理解四面体群和二元四面体群的半不变量环。

(4.8) 的有趣之处在于出现了三个一维表示。第一行给出单位元，而第二行和第三行互为对偶。

四面体群作为 $SO(3)$ 的子集，就是 Alt(4)，它有 12 个元素。
令 φ: $SU(2) \to SO(3, \mathbb{R})$。定义

$$\rho' : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\sigma' : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -(1-i) \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

二元四面体群是 $H_{24} = \varphi^{-1}(\text{Alt}(4))$，它有 24 个元素，并由 R 和 S生成。我们有

$$\rho = \varphi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \varphi(S) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 ρ 和 σ 生成 $Alt(4)$。由于对任意 $A \in K^{n \times n}$，特征多项式 $\det(I_n - tA)$ 在相似变换下不变，因此 $\mathbb{C}[u, v]^{H_{24}}$ 的希尔伯特级数为

$$\sum_{d=0}^{+\infty}\dim\big(\mathbb{C}[u,v]_d^{H_{24}}\big)t^d=\frac{1}{|H_{24}|}\sum_{A\in H_{24}}\frac{1}{\det(I_2-tA)}$$

$$=\frac{1}{24}\Bigg(\frac{1}{\det(I_2-tI_2)}+\frac{1}{\det(I_2+tI_2)}+\frac{3}{\det(I_2-tR)}+\frac{3}{\det(I_2+tR)}$$

$$+\frac{4}{\det(I_2-tS)}+\frac{4}{\det(I_2+tS)}+\frac{4}{\det(I_2-tS^2)}+\frac{4}{\det(I_2+tS^2)}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{24}\Bigg(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{3}{1+t^2}+\frac{3}{1+t^2}$$

$$+\frac{4}{1-t+t^2}+\frac{4}{1+t+t^2}+\frac{4}{1+t+t^2}+\frac{4}{1-t+t^2}\Bigg).$$

现在注意到 $(1-t^6)=(1-t^2)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$。因此，希尔伯特级数可简化为

$$\frac{1-t^4+t^8}{(1-t^6)(1-t^4)}$$

将分子和分母同时乘以 $(1+t^4)(1-t^{12})$，得到

$$\sum_{d=0}^{+\infty}\dim\big(\mathbb{C}[u,v]_d^{H_{24}}\big)t^d=\frac{1-t^{24}}{(1-t^6)(1-t^8)(1-t^{12})}.$$

这意味着可以推测，$\mathbb{C}[u,v]^{H_{24}}$ 有 3 个生成元，其次数分别为 6、8、12，并且由唯一的 24 次代数关系相联系。这一论断确实正确，并且可以证明，这些次数对应的三个可能的不变量分别为

1. x^5y-xy^5，四面体各棱的中点，

2. $(x^4-2\sqrt{3}ix^2y^2+y^4)(x^4+2\sqrt{3}ix^2y^2+y^4)$，其中两个因子分别为等调和形式，并分别在图 5 中菱形的顶点 $\{\pm a,\pm b\}$ 及其绕 $\pi/2$的旋转所对应的点处为零；它们分别对应于四面体及其对偶四面体的顶点，

3. $(x^4-2\sqrt{3}ix^2y^2+y^4)^3$.

这个不变量环的性质并没有预想的那么丰富。注意，$g=(x^4-2\sqrt{3}ix^2y^2+y^4)$不是不变量，而只是一个半不变量；事实上，(4.9) 中R 的作用保持 g 不变，而 (4.10) 中 S 的作用则将 g 乘以 $e^{2\pi i/3}$。在接下来的小节中，我们将计算三个著名多面体群的半不变量环，结果表明，这些半不变量环包含了这三个多面体的基本几何信息。

4.1 二元四面体群的半不变量

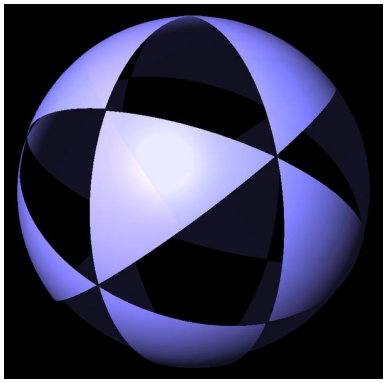

图10：二元四面体群，(2，3，3)，24 个三角形。

图 10 所示的由 24 个三角形构成的镶嵌，是这样得到的：在球面内接一个四面体，然后对每个面进行重心细分，将该面的中心与每个顶点以及每条棱的中点相连。再从球心将这种划分投影到球面上，于是每个三角形都成为球面上的测地三角形。注意，顶点的一个小邻域可能与比棱上某点的小邻域更多的基本区域相交。这表明商空间中的行为有所不同，可以在轨形的框架下理解；但这些讲义不讨论这一内容。

Alt(4) 的共轭类有 4 个，大小分别为 1，3，4，4，代表元为 i $\varphi(I_2)$、 $\varphi(R)$、 $\varphi(S)$、 $\varphi(S^2)$；因此，二元四面体群 H_{24} 的共轭类有 8 个，大小分别为 1，1，3，3，4，4，4，4，代表元为 I_2， $-I_2$， R， $-R$， S， $-S$， S^2， $-S^2$。

命题4.4。 考虑阶为24 的二元四面体群 G 在 S^2 上的作用。它有三个一维特征标，其特征标如下（第一行表示每个共轭类的大小）

1	1	6	4	4	4	4	
id	1	1	1	1	1	1	1
χ	1	1	1	ω^2	ω	ω	ω^2
χ'	1	1	1	ω	ω^2	ω^2	ω

我们使用命题 *4.3* 中的 *Molien*公式。

半不变量环汇集了三个一维特征标的贡献。我们得到半不变量环的希尔伯特级数为

$$\frac{1}{24}\left(\frac{3}{(1-t)^2}+\frac{3}{(1+t)^2}+\frac{6\cdot 3}{1+t^2}\right)=\frac{1-t^2+t^4}{(1-t^2)^2(1+t^2)}=\frac{1+t^6}{(1-t^4)^2}=\frac{1-t^{12}}{(1-t^4)^2(1-t^6)}$$

最后一个表达式表明，存在三个次数分别为 4、4、6 的生成元，并且它们之间有一个 12 次关系。这是正确的，以下命题将对此加以证明。

命题 4.5。 $\forall g \in G,\ g \cdot \Phi = \chi(g)\Phi,\ g \cdot \Psi = \chi'(g)\Psi,\ g \cdot t = t$。因此， $\Phi,\ \Psi,\ t$ 是半不变量。半不变量环由 $\Phi,\ \Psi,\ t$ 生成，并满足关系

$$12\sqrt{-3}t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0$$

证明。 由 Φ、 Ψ、 t 生成的环是半不变量环的子环，且二者具有相同的希尔伯特级数。因此，这两个环相同。这个论证也完全适用于八面体和二十面体情形，我们不再重复。 □

练习 4.6. 四面体群作用于 $\mathbb{C}^3$ 的半不变量环的希尔伯特级数为

$$\frac{1-t^6}{(1-t^2)^3(1-t^3)}$$

它由3 个二次多项式和一个三次多项式生成，并满足一个次数为6的关系。

4.2 二元八面体群的半不变量

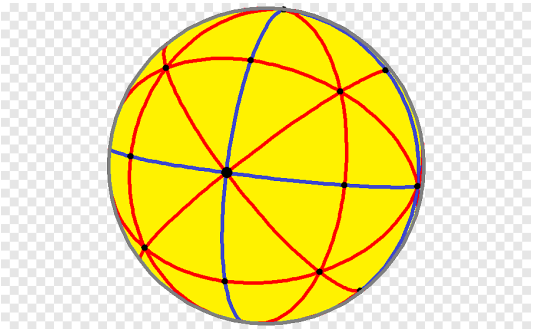

图 11：二元八面体群，(2, 3,4)，48 个三角形

在八面体情形中，只有两个一维特征标。我们有如下表格

1	1	6	6	8	8	18	18	
id	1	1	1	1	1	1	1	1
χ	1	1	-1	-1	1	1	-1	1

利用Molien公式，半不变量环的希尔伯特级数为

$$\frac{1}{48}\left(\frac{2}{(1-t)^2}+\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{8\cdot 2}{1-t+t^2}+\frac{8\cdot 2}{1+t+t^2}+\frac{6\cdot 2}{1+t^2}\right)=\frac{1-t^{24}}{(1-t^6)(1-t^8)(1-t^{12})}$$

最后一个表达式表明存在次数分别为 6、8、12 的三个生成元，并且它们之间存在一个 24 次关系。

命题 4.7。 $t = xy(x^4 - y^4)$ 是一个六次型，其根对应于一个八面体的顶点。

Then
$W = Hess(t) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$ 的根对应于每个面的形心。

$\Xi = T(t) = x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12}$ 的根对应于每条棱的中点。它们是一个二十面体的顶点。

命题 4.8. $\forall g \in G,\ g \cdot t = \chi(g)t,\ g \cdot W = W,\ g \cdot \Xi = \chi(g)\Xi.$
因此， t、 W、 Ξ是半不变量。半不变量环由 t、 W、Ξ 生成，并满足关系

$$108t^4 - W^3 + \Xi^2 = 0$$

4.3 二元二十面体群的半不变量

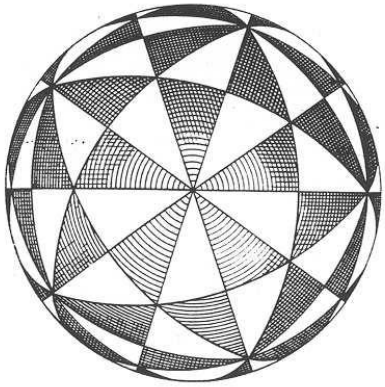

图 12：二元二十面体群，(2,3,5)，120 个三角形。

二元二十面体群有 10 个共轭类，其基数分别为 1，1，12，12，12，12，15，15，20，20。二十面体群 a_5 是第一个单群，因此出现了一种新现象：群特征是平凡的。因此，唯一的半不变量就是不变量，从而简化了之前的计算，使半不变量环与不变量环重合。换句话说，只需使用 Molien 定理 4 的标准形式即可，我们不需要命题 4.3。

希尔伯特级数为

$$\frac{1}{120}\left(\frac{1}{1-2t+t^2}+\frac{1}{1+2t+t^2}+12\frac{1}{1-\rho_0 t+t^2}+12\frac{1}{1+\rho_0 t+t^2}+12\frac{1}{1-\rho_1 t+t^2}+12\frac{1}{1+\rho_1 t+t^2}\right.$$
$$\left.+15\frac{1}{1+t^2}+15\frac{1}{1+t^2}+20\frac{1}{1+t+t^2}+20\frac{1}{1-t+t^2}\right),$$

其中 $\rho_0 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$，且 $\rho_1 = 1 + \rho_0$。

化简并乘以

$$\prod_{j=0}^{2}(t^{2j}+t^{2j\pm1}+t^{2j\pm20})\prod_{j=5}^{5}(t^{2j}+t^{2j\pm6}+t^{2j\pm15}),$$

我们得到

$$\frac{(1-t^{12})(1-t^{20})(1-t^{30})}{1-t^{60}}.$$

这表明我们有次数分别为 12、20、30 的生成元，并且存在一个次数为 60 的关系.....这再次是正确的。事实上，我们有

命题 4.9。 $f=(x^{11}y+11x^6y^6-xy^{11})$ 是一个 *12* 次不变量，表示二十面体的顶点

$H(f)$ 的次数为 *20*，表示各个面
$T(f)$ 的次数为 *30*，表示各条棱。不变量环由 f,$H(f)$、 $T(f)$ 生成，满足关系

$$T^2+H^3-1728f^5=0$$

f 中的二元形式的四阶转极（见定理 2.6）具有如下表达式

$$(f,f)_4=f_{xxxx}f_{yyyy}-4f_{xxxy}f_{xyyy}+6f_{xxyy}^2$$

定理 4.10 (Klein)。 *[Klein，第 I 章 §13]*一个次数为4 的非奇异实二元形式 f 在正四面体的顶点处为零，当且仅当$(f,f)_4=0$

一个次数为6的非奇异实二元形式 f 在正八面体的顶点处为零，当且仅当$(f,f)_4=0$

一个次数为12 的非奇异实二元形式 f 在正二十面体的顶点处为零，当且仅当$(f,f)_4=0$

理解定理 4.10 中实性条件的关键在于， $SL(2,\mathbb{C})$ 的紧致部分是 $SU(2)$，而后者是 $SO(3,\mathbb{R})$ 的万有覆盖。因此，实元素在球面上作为等距变换作用，并保持任意正多面体不变。

作为球面镶嵌与§6中双曲镶嵌之间的一段插曲，现在正是呈现下一个平面镶嵌的恰当时机。

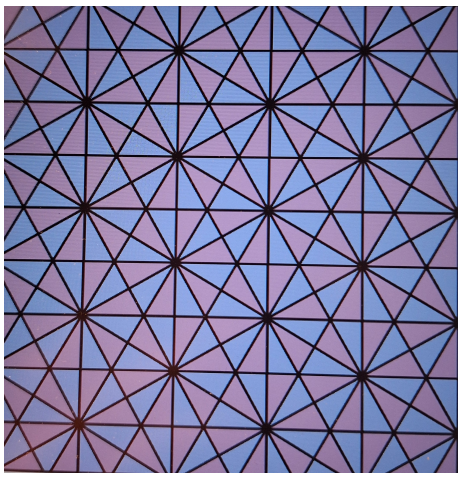

图13：二分六边形群，$(2,3,6)$

注记 4.11. 在本注记中，我们概述 *McKay*对应；借助该对应，我们可以由多面体群（具体而言，由其特征标表）构造扩展 *Dynkin* 图。

群 $G \subset SL(2)$ 的不可约表示可视为一个图的顶点 V_i 。设 V 为标准的2维表示。箭头$V_i \to V_j$ 的数目按定义是$\dim_G \mathrm{Hom}(V_i, V \otimes V_j)$。

请完全按照图 *14* 获取扩展 *Dynkin* 图的箭图。详情请参见 *[Kir, §8.3]*。

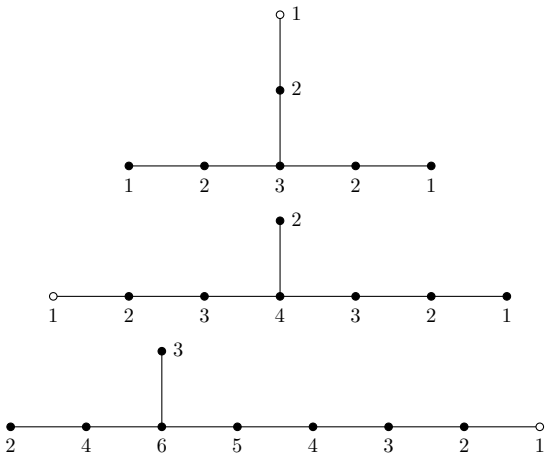

图14：根据McKay对应，分别对应于四面体的扩展 Dynkin 图。

5 幂多项式代数簇的协变式。希尔伯特的一篇短文。

在学校期间，参与者分成若干群，讨论并尝试理解希尔伯特于 1886年 发表在《数学年刊》上的论文 [Hil93], 的要点。本节是讲座中的一段插曲，反映了学校所遵循的时间顺序。

希尔伯特于1862年出生，并于1885年在柯尼斯堡（今加里宁格勒）获得博士学位。因此，这是一篇颇具青春气息的论文，全文只有四页。论文提出的问题如下

问题给定一个 f 次数为 $n = \mu\nu$ 的齐次多项式，存在一个 g 次数为 ν 的齐次多项式，使得其存在的条件是什么？

$$f = g^{\mu}.$$

希尔伯特通过构造一个恰好在上述 μ次幂代数簇上为零的协变式，完整回答了二元形式的情形。颇为奇怪的是，希尔伯特的这篇论文被遗忘了一个多世纪，可能是因为它没有被收入这本珍贵的书籍 [Hilinv], ；该书汇集了希尔伯特大部分《不变量理论》论文的英文译本。罗塔在1999年于学术讨论会讲座 [Ro]中指出了希尔伯特这一结果的重要性。下面引用罗塔本人的话

很长一段时间里，我都认为这个问题无解，直到有一天，我翻阅希尔伯特文集第二卷时，偶然发现希尔伯特早已彻底解决了它。这个解法可以用影算记号优雅地表达出来。这只是希尔伯特在不变量理论方面若干令人惊叹却已被遗忘的成果之一。

2014 年，Abdesselam 和 Chipalkatti 发表了精彩的论文 [AC], ，他们以完全不同的方式构造了同一个希尔伯特协变式。他们甚至将这一构造推广到了任意维数。

令 $d = \mu\nu$。定义

$$X_{d,\mu,n} := \{g^{\mu} | g \in \mathrm{Sym}^{\nu}\mathbb{C}^{n+1}\}, \qquad \text{the affine variety of } \mu\text{-powers.}$$

命题 5.1. $X_{d,\ \mu,\ n}$ 是光滑的（作为射影簇而言；这意味着仿射簇仅在原点处是奇异的），它是由对 $v_{\mu}(\mathbb{P}$对称幂$^{\nu}\mathbb{C}^{n+1})$ 的投影所成的锥。

$$T_{g^{\mu}} X_{d,\mu,n} = \{g^{\mu-1}h | h \in \mathrm{Sym}^{\nu}\mathbb{C}^{n+1}\}.$$

证明。 通过展开 $(g + \epsilon h)^{\mu} = g^{\mu} + \epsilon\mu g^{\mu-1}h + \ldots$ 来计算切空间。由于所有切空间的维数都相同，因此该代数簇是光滑的。 □

我们想概述希尔伯特结果在 [Hil93] 中最初几个有趣的情形。我们为平方四次型和立方六次型的簇构造方程。让我们回顾一下线性形式的幂的如下刻画，它给出了有理正规曲线的方程。

命题5.2. 给定 $f \in$对称幂$^d\mathbb{C}^2$,

$$\exists\ a\ linear\ form\ \ell\ such\ that\ f = \ell^d \Longleftrightarrow Hess(f) = 0$$

证明。 $\Longrightarrow$显然。

$\Longleftarrow$ 该假设等价于映射 $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{(f_x, f_y)} \mathbb{P}^1$ 的雅可比式为零。因此，该映射的维数下降，其像缩为一点。于是存在标量 $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$，使得 $\lambda f_x + \mu f_y = 0$，这意味着 $f_{\lambda x+\mu y} = 0$。因此，经过线性坐标变换后， f 只依赖于一个变量。结论得证。 □

作为起始例子，考虑平方形式的二元四次形式。这是 $\mathbb{P}^4$ 中的韦罗内塞曲面，为了将它与其著名的母体区分开来，后者是 $\mathbb{P}^5$ 中通过完全线性系 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$ 嵌入的韦罗内塞曲面。在$\mathbb{P}^4$ 中的嵌入由 $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$的一个余维一子空间给出。从几何上看，它是从一个一般点 $p \in \mathbb{P}^5$ 作投影得到的。

引理 5.3. 假设 f 的一个根也是海森 H的一个根。那么它至少是 f的一个二重根。

证明. 不妨设 $f = xg$，由假设可知 x 整除 H。计算

$f_x = g + xg_x$, $f_y = xf_y f_{xx} = 2g_x + xg_{xx}$,

$f_{xy} = g_y + xg_{xy}$, $f_{yy} = xg_{yy}$

因此，若 x 整除 H，则可推出 x 整除 g_y。由欧拉关系可知， x 整除 g，进而 x^2 整除 f，这正是我们想要的结论。 □

协变式 T将在下一个命题 5.4 中引入，它对本节至关重要，参见定理 5.6。

命题5.4. $\mathbb{P}^4$中平方的韦罗内塞曲面，即与 $X_{4,2,1}$ 相关的射影簇，其方程由以下协变式给出

$$T = \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ H_x & H_y \end{pmatrix},$$

其中 f 是一个二元四次形式，而 $H = Hess(f)$。

证明。 </style>韦罗内塞曲面在 上是 () 的轨道闭包。我们计算 ()，然后计算 ()。反过来，假设 ()。() 是双次数为 (6,3) 的双齐次多项式，也就是说，它关于 (x, y) 的次数为 6，关于 a_i 的次数为 3。假设 $T(f) = 0$ 意味着展开 $T = \sum_{i=0}^{6} x^{6-i} y^i T_{(i)}(a_0, \ldots, a_4)$ 后，所有七个多项式 $T_{(i)}$ 都为零。定义 T 的行列式是映射的雅可比式

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{(f,H)} \mathbb{P}^1$$

当且仅当映射的维数下降时，该式才为零；而当且仅当存在一个齐次多项式 G 使得 $G(f, H) = 0$时，映射的维数才会下降。我们有如下关系

$$\sum_{i=0}^{k} a_i f^i H^{k-i} = 0$$

并且我们可以假设 $a_0 a_k \neq 0$ （否则可以除以适当次数的 f 和H，从而降低 G的次数）。该关系意味着 f 的每个根都是H 的根，反之亦然。到目前为止的论证适用于任意次数的 f （映射 $(f,\ H)$ 从 $\mathbb{P}^1$ 到 $\mathbb{P}^1$ 必须改为 $(f^{2d-4},\ H^d)$，但 f和 H 具有相同根这一结论仍然成立）。现在我们才用到 $\deg f = 4$。由引理 5.3可知， f 没有单根，因此它是一个平方。这就完成了证明。

□

命题 5.5。 $\mathbb{P}^6$ 中的立方曲面，即与 $X_{6,3,1}$ 相关联的射影代数簇，其方程由协变式给出

$$T = \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ H_x & H_y \end{pmatrix},$$

其中 f 是一个二元六次型，且 $H = Hess(f)$。

证明。 立方曲面是 $f = (xy)^3$ 的轨道闭包。我们计算 $H(f) = -45(xy)^4$ 和 $T(f) = 0$。反过来，设 $T(f) = 0$。我们要证明 f 是一个立方。与命题 5.4 的证明完全相同，我们可以看出 f 没有单根，因此它可以分解为 $f = (g_1 g_2 g_3)^2$ 或 $f = (h_1 h_2)^3$，其中 $\deg g_i = \deg h_j = 1$。我们需要排除 $f = (g_1 g_2 g_3)^2$ 的情形。反设 $f = (g_1 g_2 g_3)^2$。

在相差 $SL(2)$ 作用的意义下，我们有三种情形： $f = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ $(x^3+y^3)^2$ $(x^2y)^2$ $(x^3)^2$ 在前两种情形中

我们计算 $T(f) \neq 0$，而在第三种情形中， f是一个立方，并且它是可容许的。至此证明完毕。

□

这些例子应当说明，即使是 d 为偶数且二元形式为二次型的幂这一最简单情形，也并非平凡。事实上，希尔伯特构造推广了命题 5.4 与命题 5.5，并表明

定理 5.6. 设 d 为偶数。 $\mathbb{P}^d$ 中 $d/2$ 次幂的曲面，即与 $X_{d,d/2,1}$ 相关联的射影簇，其方程由协变式给出

$$T = \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ H_x & H_y \end{pmatrix},$$

其中 f 是次数为 d 的二元形式，且 $H = Hess(f)$。

定理 5.6 只是接下来的定理 5.9 的一个特例（针对 $\nu = 2$）。为了解释希尔伯特技巧，我们必须回顾作用于协变式的两个微分算子。

我们从 [O12] 回忆，二元形式 $f = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{d}{i} x^{d-i} y^i$ 的协变式是一个双齐次多项式 $F(a,\ x) = \sum_{k=0}^{q} F_k(a) \binom{q}{k} x^{q-k} y^k$，其双次数为 $(m,\ q)$。因此， ϕ_k的权为 $\frac{1}{2}(dm - q) + k$，所以最小权 ϕ_0的权为 $\frac{1}{2}(dm - q)$，最大权 ϕ_q的权为 $\frac{1}{2}(dm + q)$。

我们有两个微分算子，可应用于上述任意 $F(a,\ x)$。

$D=\sum_{i=0}^{d-1}(i+1)a_i\frac{\partial}{\partial a_{i+1}}$
$\Delta=\sum_{i=0}^{d-1}(d-i)a_{i+1}\frac{\partial}{\partial a_i}$
D 保持 leading degree 不变。D 使权减 1，而 Δ 使权增 1。算子 D 对应于 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2)$，而 Δ 对应于 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2)$，参见 [O12，第 3 节。3]。

我们有（见 [O12，命题 11]

命题 5.7。（*i*） $D\Delta-\Delta D=\sum_{i=0}^{d}(d-2i)\,a_i\frac{\partial}{\partial a_i}$。

（*ii*）设 $a_0^{\nu_0}\dots a_d^{\nu_d}$ 是一个次数为 $\sum_{i=0}^{d}\nu_i=m$、权为 $\sum_{i=0}^{d}i\nu_i=p$ 的单项式。那么

$$(D\Delta-\Delta D)(a_0^{\nu_0}\dots a_d^{\nu_d})=\sum_{i=0}^{d}(d-2i)\nu_i(a_0^{\nu_0}\dots a_d^{\nu_d})=(dm-2p)(a_0^{\nu_0}\dots a_d^{\nu_d}).$$

现在考虑一个双次数为（m，q）的协变式 $F(a,x)$。当 $q=0$ 时，它是不变量。其最小权 p 满足 $\frac{1}{2}(dm-q)=p$，最大权则满足 $\frac{1}{2}(dm+q)=p+q$。

双次数为（m，q）的协变式 $F(a,x)$ 的一个最小权是一个等压多项式 $F_0(a)$，其次数为 m，权为 $\frac{1}{2}(dm-q)$，并满足两个等价条件 $DF_0=0$ 或 $\Delta^{q+1}F_0=0$ 之一。

同理，双次数为 (m,q) 的协变式 $F(a,x)$ 的一个最大权是次数为 m、权为 $\frac{1}{2}(dm+q)$ 的等压多项式 $F_q(a)$，它满足两个等价条件 $D^{q+1}F_q=0$ 或 $\Delta F_q=0$ 之一。

事实上，协变式 F 的权是以 $(\frac{dm}{2},\frac{dm}{2})$ 为中心的线段。

我们所用的基本性质是 Δ 的莱布尼茨法则（对 D 也成立）

$$\Delta(fg)=f\Delta(g)+\Delta(f)g$$

这进而推出

$$\Delta(f^k)=kf^{k-1}\Delta(f)$$

命题 5.8。设 $f=\sum_{i=0}^{d}a_i\binom{d}{i}x^{d-i}y^i$。那么 $\Delta(f)$ 可被 x 整除，且比值 $(\frac{1}{x}\Delta(f))$ 等于偏导数 $\partial_y f$。

特别地，$\Delta^{d+1}(f)=0$。

希尔伯特关于该协变式的一般公式为

$$f^{\nu+1-1/\mu}\Delta^{\nu+1}(f^{1/\mu}) \tag{5.1}$$

注意，当 $f=g^\mu$ 时，我们有 $\Delta^{\nu+1}(f^{1/\mu})=\Delta^{\nu+1}g$，而最后这个表达式由命题 5.8 可知为零。应将有理指数 $1/\mu$ 形式化地理解，整个表达式可以展开为一个等价的整数指数表达式，见下一个例 5.10。表达式 (5.1) 是经典不变量理论中的典型公式。它是一种简洁优雅的表述，能神奇地导出一系列非平凡的多项式和标量。

根据定义，显然它关于 a_i的次数为 $\nu+1$。可以证明，它在 x 中的次数为 $0(0,\ y$；这一点并不显然，我们将在下面的例子中验证这一事实，并在概述定理 5.9 的证明时加以说明。

[希尔86]伯特主定理如下

定理 5.9 (希尔伯特**)**。 给定一个次数为 $n=\mu\nu$ 的二元形式 f，存在一个次数为 ν 的齐次多项式 g

$$f=g^{\mu}$$

当且仅当

$$f^{\nu+1-1/\mu}\Delta^{\nu+1}(f^{1/\mu})=0.$$

例 5.10。 来看 $\nu=2,\ \mu=3$ 的情形，此时条件是二元六次型为一个立方。

条件是

$$f^{8/3}\Delta^3(f^{1/3})$$

我们计算

$$\Delta(f^{1/3})=\frac{1}{3}f^{-2/3}\Delta f$$

$$\Delta^2(f^{1/3})=-\frac{2}{9}f^{-5/3}(\Delta f)^2+\frac{1}{3}f^{-2/3}\Delta^2 f$$

$$\Delta^3(f^{1/3})=\frac{10}{27}f^{-8/3}(\Delta f)^3-\frac{4}{9}f^{-5/3}\Delta f\Delta^2 f-\frac{2}{9}f^{-5/3}\Delta f\Delta^2 f+\frac{1}{3}f^{-2/3}\Delta^3 f=$$
$$\frac{1}{3}f^{-8/3}\cdot\left(\frac{10}{9}(\Delta f)^3-2f\Delta f\Delta^2 f+f^2\Delta^3 f\right)$$

这个计算表明，我们必须乘以 $f^{8/3}$ 才能得到一个多项式。对于二元六次型，希尔伯特协变式（相差一个标量倍数）可写为

$$\left(\frac{10}{9}(\Delta f)^3-2f\Delta f\Delta^2 f+f^2\Delta^3 f\right)$$

它是一个关于18 $x,y)$ 的次数为18 、关于(x,y) 的多项式，且关于 a_i的次数为3 。实际上，这个多项式可被 x^6整除；进行这样的除法后，它变成一个关于(x,y)的次数为12的多项式，与命题 *5.5* 中找到的协变式 T 成比例。要验证这一结论，只需检查 x^{18} 的系数是否与 *(5.2)* 中的 $2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_3$ 成比例。

一般而言（$\nu=2$，任意 μ），类似的计算为

$$\Delta(f^{1/\mu})=\frac{1}{\mu}f^{\frac{1-\mu}{\mu}}\Delta f$$

$$\Delta^2(f^{1/\mu}) = \frac{1-\mu}{\mu^2} f^{\frac{1-2\mu}{\mu}} (\Delta f)^2 + \frac{1}{\mu} f^{\frac{1-\mu}{\mu}} \Delta^2 f$$

$$\begin{aligned}\Delta^3(f^{1/\mu}) &= \frac{(1-\mu)(1-2\mu)}{\mu^3} f^{\frac{1-3\mu}{\mu}} (\Delta f)^3 + \frac{2(1-\mu)}{\mu^2} f^{\frac{1-2\mu}{\mu}} (\Delta f)(\Delta^2 f) + \frac{(1-\mu)}{\mu^2} f^{\frac{1-2\mu}{\mu}} (\Delta f)(\Delta^2 f) + \frac{1}{\mu} f^{\frac{1-\mu}{\mu}} (\Delta^3 f) \\ &= \frac{1}{\mu} f^{\frac{1-3\mu}{\mu}} \cdot \left(\frac{(1-\mu)(1-2\mu)}{\mu^2} (\Delta f)^3 + \frac{3(1-\mu)}{\mu} f(\Delta f)(\Delta^2 f) + f^2(\Delta^3 f) \right)\end{aligned}$$

同样，我们必须乘以 $f^{\frac{3\mu-1}{\mu}}$，才能得到一个多项式。括号中的表达式关于二元形式 $f(x,\ y)$ 的系数 a_i 是三次的。此外，它可被 x^6 整除；完成这一步后，所得表达式关于变量 $x,\ y$ 的次数为 $3d-6$，现在它是一个协变式。

定理 *5.9* 的证明思路：给定一个多项式 $f \in \mathrm{Sym}^{\nu\mu}\mathbb{C}^2$，我们寻找满足某些条件的情形，使得存在 $g \in \mathrm{Sym}^{\nu}\mathbb{C}^2$，满足 $g^\mu = f$。我们要寻找这样的条件，使得 $f^{1/\mu}$ 是次数为 ν 的多项式。众所周知，坐标 t 中的函数 $h(t)$ 是次数为 ν 的多项式，当且仅当 $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu+1}(h(t)) = 0$。

希尔伯特的思路相当清楚。他形式上考虑 $f^{1/\mu}$，并施加条件

$$\Delta^{\nu+1}(f^{1/\mu}) = 0$$

根据命题 5.8，这样可以保证 $f^{1/\mu}$ 是一个多项式。为了构造一个协变式并使结果为多项式，我们发现必须将这个算子乘以 f 的适当次幂，如 $f^{\nu+1-1/\mu}\Delta^{\nu+1}(f^{1/\mu})$。

We 已在具体情形（$d=4,\ \nu=2$）、（$d=6,\ \nu=2$）中解释过细节 .

我们仅简要概述一般情形的一些考量；详细证明见 [AC]，其中他们研究了我们算子 Δ 的一种精化，也将（$x,\ y$）纳入其中。

我们的协变式的最小权为

$$a_0^{\nu+1-1/\mu}\Delta^{\nu+1}a_0^{1/\mu}$$

它在 a_i 中的次数和权为 $\nu+1$。因此，次数 q 满足 $\frac{1}{2}d(\nu+1) - q = \nu+1$，从而得到 $q = (d-2)(\nu+1)$。

注意 $\Delta(a_0) = da_1,\ \Delta^2(a_0) = d(d-1)a_2$，以及 $\Delta^i(a_0) = \frac{d!}{(d-i)!}a_i$。

因此，对于 $\nu=1$，我们得到 $\mu=d$，而最小权 $a_0^{2-1/d}\Delta^2(a_0^{1/d})$ 与以下成正比

$$-a_1^2 + a_0a_2$$

它与海森的最小权成正比。

对于 $\nu=2$，我们得到 $\mu=d/2$，并且 $\Delta^3(a_0^{1/\mu})$ 与之成正比

$$(1-d/2)(1-d)d^2a_1^3 + 3(d/2)(1-d/2)d(d-1)a_0a_1a_2 + (d/2)^2(d-1)(d-2)a_0^2a_3$$

这与.....成正比

$$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 \tag{5.2}$$

而这又与 $T = f_x H_y - f_y H_x$ 的最小权成正比。

特别注意这两个消失

$D(-a_1^2 + a_0 a_2) = 0$

and

$D(2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3) = 0.$

这些只是以下情形的特例

$$D(a_0^{\nu+1-1/\mu} \Delta^{\nu+1} a_0^{1/\mu}) = 0$$

而这是一个非平凡的习题，由希尔伯特在 [Hil86] 中证明，或见 [Hil93, (III)§1.6]，或见[AC，引理 4.1]。 □

注 5.11. 我们讨论理想 $I_{X_{d,\mu,n}}$ 的生成元的次数。希尔伯特针对 $n = 1$ 构造了理想中次数为 $\geqslant d/\mu + 1$ 的元素，并且如上文所见，他证明 *Hilbert* 协变式的元素集合论地截出该代数簇。*Abdesselam* 与 *Chipalkatti* 在 *[AC，定理 1.2]* 中证明，*Hilbert* 协变式概形论地截出$X_{d,\mu,n}$ 。最近，*Raicu*、*Sam*、*Weyman* 与 *Yang* 在 *[RSWY]* 中证明，该理想由希尔伯特构造的元素生成，因此他们完整地描述了理想$I_{X_{d,\mu,1}}$。

该理想的生成元对每个 $n \geqslant 1$ 的次数均为 $\geqslant \nu + 1$ 。对于 $X = X_{d,\ \mu,\ n} \subset \mathbb{P}$(对称幂$^\nu \mathbb{C}^{n+1}$)，我们想理解为什么 $I_X(\nu) = 0$。通过限制，我们可以假设 $n = 1$（类似的限制论证见 *[FGOV，定理 3.8]*）。注意， $\mathbb{P}$(对称幂$^d \mathbb{C}^2$) 上次数为 ν 的多项式限制到 $\mathbb{P}$(对称幂$^\nu \mathbb{C}^{n+1}$) 上时，仍为次数为 d 的多项式 $\simeq X$。考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X(\nu) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d \mathbb{C}^2)}(\nu) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\nu)$$

它在 H^0 层给出

$$0 \longrightarrow I_X(\nu) \longrightarrow \mathrm{Sym}^\nu \mathrm{Sym}^d \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\phi} \mathrm{Sym}^d \mathrm{Sym}^\nu \mathbb{C}^2$$

在 *[RSWY]* 中，证明了 ϕ 是一个同构，这意味着 $I_X(\nu) = 0$。*Hermite* 互反律保证 ϕ 的目标与源同构，但映射 ϕ 的具体作用方式相当微妙， *[RSWY]* 对此进行了描述。另见 *[RS], [AC07], [O12，第 1.3]* 节。

下面的命题表明，幂的海森有一个简单的表达式。我们倾向于将它放在本节末尾陈述，以避免打断对希尔伯特论文的讨论；此外，它本身也具有独立的研究价值。当 $m = 2$ 时，这一特例已在 [COCDR, 命题 2.4], 中用不变量理论的方法证明。

命题 5.12. 设 $g = g(x_0, \ldots, x_n)$ 是一个次数为$m \geqslant 2$的齐次多项式。那么

$$Hess(g^k) = \frac{k^{n+1}(km-1)}{m-1} g^{(n+1)(k-1)} Hess(g)$$

若 $m = 1$ 则 $Hess(g^k) = 0$。

证明。考虑以下 g的偏导数。

$(g^k)_i = kg^{k-1}g_i \quad i = 0, \ldots, n$

$(g^k)_{ij} = kg^{k-1}g_{ij} + k(k-1)g^{k-2}g_ig_j \quad i, j = 0, \ldots, n$

Then

$$Hess(g^k) = \det\left(kg^{k-2}(gg_{ij} + (k-1)g_ig_j)_{i,j}\right) = k^{n+1}g^{(n+1)(k-2)}\det\left((gg_{ij} + (k-1)g_ig_j)_i\right.$$

矩阵 $(gg_{ij} + (k-1)g_ig_j)_{i,\ j}$ 是两个矩阵之和，其中第二个矩阵的秩为 1。展开其行列式后，只有两项不为零，我们得到以下表达式

$$g^{n+1}Hess(g) - (k-1)g^n \det\begin{pmatrix} 0 & \nabla g \\ (\nabla g)^t & (g_{ij}) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

文献中有时将这个技巧（稍作变形）称为“矩阵行列式引理”。

根据欧拉恒等式 $(m-1)g_i = \sum_{j=0}^n x_j g_{ij}$

我们进行列运算，将 $(-x_j)$ 乘以第 j 列后加到零列上，得到 (5.3) 中最后一个矩阵

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{m-1}\sum_{j=0}^n x_jg_j & g_0 & \cdots & g_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_i - \frac{1}{m-1}\sum_{j=0}^n x_jg_{ij} & g_{i0} & \cdots & g_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

再次利用欧拉恒等式，可将其化简为 $\begin{pmatrix} -\frac{m}{m-1}g & \nabla g \\ 0 & g_{ij}(-) \end{pmatrix}$

列运算不改变行列式，因此综合起来可得

$$Hess(g^k) = k^{n+1}g^{(n+1)(k-2)}\left(g^{n+1}Hess(g) + \frac{(k-1)m}{m-1}g^{n+1}Hess(g)\right) =$$

$$= \frac{k^{n+1}(km-1)}{m-1}g^{(n+1)(k-1)}Hess(g)$$

□

注 5.13。*F. Russo* 观察到，g 和 g^k 定义了相同的极映射。海森是极映射的雅可比式，因此显然，$Hess(g^k)$ 和 $Hess(g)$只可能相差 g的一个倍数。因此，命题 *5.12* 的重点在于计算这个标量倍数。

6 双曲三角形群与模形式

众所周知，上半平面 $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} | (\text{Im } w) > 0\}$ 与圆盘 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ 通过映射双全纯等价

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \Delta \\ w & \mapsto & \frac{w-i}{w+i} = z \end{array} \tag{6.1}$$

该映射称为凯莱变换。

$\mathbb{H}$的自同构定义为 $PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d} | a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}$。

通过凯莱变换， Δ的自同构与 $\mathbb{H}$ 的自同构相对应，我们将二者都视为 $PSL(2,\mathbb{R})$。在讨论 Δ的自同构时， $PSL(2,\mathbb{R})$以 $\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} | a,b \in \mathbb{C}, |a|^2-|b|^2=1 \right\}$的形式出现。

此外，如果在 $\mathbb{H}$ 上赋予庞加莱度量 $\frac{dwd\bar{w}}{(\mathrm{Im}\ w)^2}$，并在圆盘 Δ 上赋予度量 $\frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$，那么凯莱变换还是一个等距变换。这两种度量都具有负常曲率，且曲率等于 -1。上述所有自同构对于这些度量也都是等距变换。

设 τ, τ' 是半平面 $\mathbb{H}$ 中的两个数。考虑两个格 $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}, \Lambda' = \langle 1, \tau' \rangle_{\mathbb{Z}}$。众所周知，椭圆曲线 $\mathbb{C}/\Lambda$ 与 $\mathbb{C}/\Lambda'$ 同构，当且仅当对于某个 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL$，有 $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$。因此，商空间 $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ 可视为椭圆曲线的模空间。这个商空间颇为微妙，因为对应于调和曲线和等调和曲线的特殊点存在自同构，从而阻碍了椭圆曲线万有族的存在。仅从 GIT 商的层面来看，这个商空间同构于 $\mathbb{P}^1$。我们在三元三次型的模空间中见过这一事实（定理 3.2），不过重温关于 $\mathbb{H}$ 的另一种解析方法也很有用。

群 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 由 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 生成，对应于 $z \mapsto z+1$，而 $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 对应于 $z \mapsto -\frac{1}{z}$。

回想一下，函数 $q(z) = e^{2\pi iz}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-覆盖 $\mathbb{H} \to \Delta^*$。对于定义在 $\mathbb{H}$ 上且在 T 作用下不变的任意亚纯函数，也就是说，满足 $f(z+1) = f(z)$，存在一个定义在 Δ^* 上的亚纯函数 $\tilde{f}$，使得 $f(z) = \tilde{f}(e^{2\pi iz})$。换言之， f 的不变性使我们能够将 f 表示为 $q = e^{2\pi iz}$ 的函数。我们称这样的 $\tilde{f}$ 在 ∞ 处全纯，若 f 可以延拓为原点处的全纯函数。

Consider $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ and compute $gz = \frac{az+b}{cz+d}$

$$\frac{d(gz)}{dz} = (cz+d)^{-2} \tag{6.2}$$

这一计算引出了以下

定义 6.1. 权为 $k \in \mathbb{Z}$ 的模形式是定义在 $\mathbb{H}$ 上并满足以下条件的全纯函数

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \tag{6.3}$$

而且按上述意义在无穷远处全纯。这是有意义的，因为（*6.3*）等价于 $f(z+1) = f(z)$ 以及 $f(\frac{1}{z}) = z^{2k} f(z)$。

它们被称为“形式”，因为正如塞尔在 [Ser, VII 2.1] 中所阐释的，方程（6.2）可以写成

$$\frac{f(gz)}{f(z)} = \left(\frac{d(gz)}{dz}\right)^{-k}$$

or

$$f(gz)\,(d(gz))^k = f(z)\,(dz)^k\,.$$

模形式的基本例子是艾森斯坦级数

$$G_k(z) = \sum_{(m.n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} \qquad k\in\mathbb{Z}, k\geqslant 1$$

我们已在命题 3.3 的证明中见过艾森斯坦级数。 G_k 是权为 k 的模形式，因为 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 的作用仅仅对应于对级数重新排序，而该级数绝对收敛。

记 M_k 为权为 k 的模形式所构成的向量空间。显然存在映射 $M_a\times M_b\to M_{a+b}$，从而在 $\oplus_{k\geqslant 0}M_k$ 上定义了分次环结构。

主要结果如下，它表明这个分次环类似于二元四次型的不变量环（定理 2.7）或三元三次型的不变量环（定理 3.2）。

定理 6.2。 *[Ser，第 VII 部分第 3 节推论 2。2]* 分次环 $\oplus_{k\geqslant 0}M_k$ 同构于多项式环 $\mathbb{C}[G_2, G_3]$。

注意，条件 $G_2 = 0$ 再次对应于等调和情形，而条件 $G_3 = 0$ 对应于调和情形，参见命题 3.3。还要注意，定理 6.2 对艾森斯坦级数有非平凡的推论，例如， G_4 是 G_2^2 的一个标量倍数，而 G_5 是 G_2G_3 的一个标量倍数。

回顾以下内容是有益的：

定理 6.3 （黎曼一致化定理）。

- 每个亏格零的黎曼曲面都同构于球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$，其中，福比尼–施图迪度量与 S^2 的欧几里得度量仅相差一个比例因子，且具有正常数高斯曲率。

- 每个亏格一的黎曼曲面都同构于第 3 节中的商空间 $\mathbb{C}/\Lambda$ ，并且可以赋予源自 $\mathbb{C}$平坦度量的度量。

- 每个亏格为 $g\geqslant 2$ 的黎曼曲面都同构于商空间 Δ/Γ ，其中$\Gamma\subset PSL(2,\ \mathbb{R})$ 是庞加莱度量的等距变换群。特别地，该黎曼曲面具有负的正常数高斯曲率度量。

圆盘 Δ 可以按照与我们在球面上所做的完全类似的方式进行镶嵌。黎曼一致化定理中的商空间 Δ/Γ 的结构¯至少在有理数域 $\mathbb{Q}$上的例子中，与我们对多面体群所做的类似。

这开启了双曲三角群的精彩故事，我们用下面两幅图来介绍它们

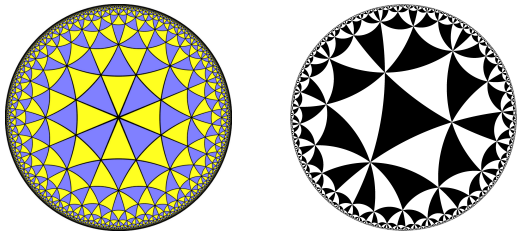

图15：角度分别为 $\pi/3$、 $\pi/3$、 $\pi/4$ （记作 (3, 3, 4)）和 $\pi/4$、 $\pi/4$、 $\pi/5$ （(4, 4,5)）的圆盘镶嵌。

由于凯莱变换 (6.1)，它们可以看作是 Δ 的镶嵌，或者等价地，看作是 $\mathbb{H}$ 的镶嵌。

本节中的大多数图片首次出现在 Fricke 和 Klein 合著的影响深远的论著 [FK] 中。这部论著以及两位作者的其他出版物，标志着数学呈现方式的一次突破。这些图片是在没有电脑的情况下绘制的，令人印象深刻；而如今显然已普遍使用电脑。格罗滕迪克的一些原始手绘草图保存在他的档案中，其中也呈现了相同的镶嵌，可在网上通过“grothendieck artistic drawing”找到。

考虑一个测地三角形，其边分别为 L_0, M_0, N_0，且分别与角π/l, π/m, π/n 相对。这个概念在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$、 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$中都有意义；在这些空间里，我们可以将L_0, M_0, N_0 视为包含这些边的完整“直线”（测地线）。令 L（分别地， M, N）为关于 L_0（分别地， M_0, N_0）的反射。由 L, M, N生成的群称为 $T^*(l,\ m,\ n)$。

从群论的角度看，它由 [Magn, Theor. 2.8]给出。

$$T^*(l,m,n) := \langle L, M, N | L^2 = M^2 = N^2 = 1, (LM)^n = (MN)^l = (NL)^m = 1 \rangle$$

$T^*(l,\ m,\ n)$中由 L,M, N的偶次复合构成的指标 2 子群（这些复合对应于保向映射）记为 $T(l,\ m,\ n)$，称为三角群。

命题6.4. *[Magn, Theor. 2.10]* $T(l, m, n)$ 由 $A = LM$和 $B = MN$ 生成，其群论定义为

$$T(l,n,m) := \langle A, B | A^n = B^l = (AB)^m = 1 \rangle$$

给定 $\mathbb{H}$ 的一个镶嵌，其中的三角形角度分别为 π/l、 π/m、 π/n，满足

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1, \quad \text{this is the inequality opposite to (4.4)},$$

我们有 $T(l,\ n,\ m)$ 在 $\mathbb{H}$ 上的作用。微分几何中的一条基本结果保证，现在任意三角形的面积与命题 4.1 中的面积符号相反。具体而言，我们有

命题 6.5. $\mathbb{H}$上测地三角形的面积，若其角度为$\frac{\pi}{l}$、 $\frac{\pi}{m}$、 $\frac{\pi}{n}$，则等于 $\pi-\frac{\pi}{l}-\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}$。特别地，我们有不等式

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$$

$T(l,m,n)$的基本域由两个相邻的三角形组成，其角度为 π/l、 π/m、 π/n。

我们有如下同构

$$\mathbb{H}/T(l,m,n)=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

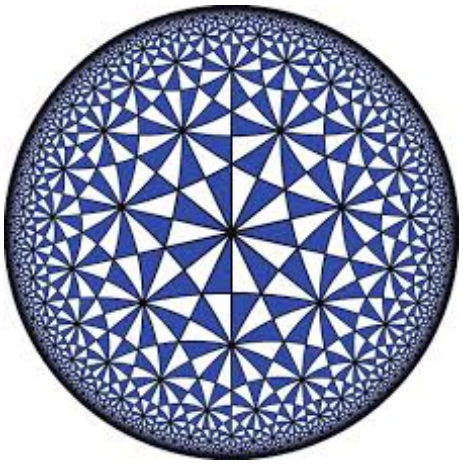

图 16：二分六边形群，$(2,3,7)$。它含有一个指数为 168 的子群 $\Gamma\subseteq T(2,3,7)$，其商空间为 Klein 四次曲线 $X(7)$。

以下 Belyi 关于亏格 $g\geqslant 2$的定理可视为黎曼一致化定理 6.3 的算术精化。

定理 6.6 (Belyi)**.** 记$\overline{\mathbb{Q}}$ 为代数数域。设 X 是一个亏格为 $g\geqslant 2$的黎曼曲面。以下条件等价

1. X 定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$上，
2. $X\simeq\mathbb{H}/\Gamma$ 与具有有限指数的 $\Gamma\subset T(l,m,n)$，$l,\ m,\ n<\infty$,
3. $X\simeq(\mathbb{H}/\Gamma)^c$ 具有有限指数，其中对应于 ∞ 的顶点称为尖点，需要进行紧化（见注 6.7）。

贝利定理的标准表述指出，1. 等价于将 X 视为在三个点 $\{0,1,\infty\}$处分歧的 $\mathbb{P}^1$ 覆盖。实际上，有限映射 $\mathbb{H}/\Gamma \to \mathbb{H}/T(l,\ m,\ n) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$是一个分歧覆盖，至多在 3 个点处分歧，这些点对应于角度为 $\pi/l,\ \pi/m,\ \pi/n$的双曲三角形的顶点。在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上，这三个点可以设为 $\{0,1,\infty\}$。详情见 [Wol，第 3 章 §3.定理3]。

这一见解使我们能够考察许多经典例子。
主合同子群为

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}$$

两个相关的群为

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N \right\}$$

显然

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N)$$

注 6.7。 我们将 $Y(N) = PSL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(N)$记作。这是一个非紧黎曼曲面，可以通过添加一些对应于 Δ 上边界点的点将其紧化；图 *17* 展示了与 $\Gamma(2)$相关的情形。 Δ 上任何一个有零角（对应于 π/∞）的测地三角形都有一个顶点位于边界上。紧化曲面记作 $X(N)$。注意，这与之前的镶嵌不同，之前的镶嵌中三角形的顶点都位于圆盘内部。

图 17 左侧展示了 $PSL(2,\ \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \{\alpha, \beta | \alpha^2 = \beta^3 = 1\}$ 的基本域（由一个白色三角形和一个与其相邻的黑色三角形组成），

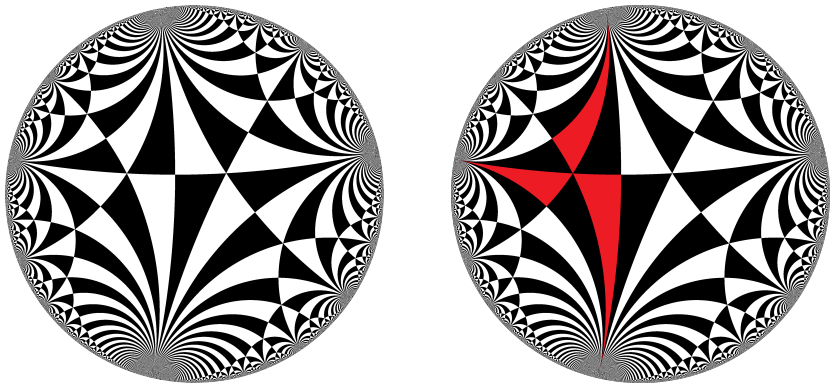

图 17：右图为 $2\ \Gamma(2)\ =\ T(\infty,\infty,\infty)$ 的模群，它是 $T(2,3,\infty) = PSL(2,\mathbb{Z})$ 的指数为 6 的子群；左图为后者。

将 $\Gamma(N)$ 替换为 $\Gamma_1(N)$（分别为 $\Gamma_0(N)$），即可得到黎曼曲面 $Y_1(N)$（分别为 $Y_0(N)$）及其紧化 $X_1(N)$（分别为 $X_0(N)$）。

这些例子中有许多已经在我们的叙述中出现过。可以证明，$X(n)$ 参数化了带有其 N挠点的一组固定基的椭圆曲线。特别地，$X(3)$ 参数化了带有其 3-挠点的椭圆曲线，这些点对应于拐点。因此，$X(3)$ 的亏格为零，它对应于黑塞束 (3.1) 中的参数 s。曲线 $X(6)$ 的亏格为 1，它是 Fermat 非调和三次曲线；而 $X(7)$ 同构于 Klein 四次曲线 $x^2y + y^2z + z^2x$。这是自同构群阶数最大的四次曲线，其自同构群的阶为 168。J. Baez 的精彩网页 [Baez] 上给出了一个利用三角群结构证明这一上界的证明。

$X(N)$ 的亏格可以用一个算术公式计算，相关数据可在 A001767 [AOEIS], https://oeis.org/A001767 查到。类似地，$X_1(N)$ 的亏格列于 A029937 https://oeis.org/A029937；而 $X_0(N)$ 的亏格列于 A001617，https://oeis.org/A001617。



图 18：三角群，$(5, \infty, \infty)$

我们以图 19 中 Escher 绘制的双曲圆盘镶嵌图为这些讲座收尾。这让我们想起 Weyl 的一句话 [Weyl，页码 500] “在当今，拓扑学天使与抽象代数恶魔为每个数学领域的灵魂而战”。



图 19：Escher 的《圆的极限 IV（魔鬼与天使）》。这里，每个半个魔鬼与相邻的半个天使拼合，构成 $T(2，6，6)$ 的一个基本域。

7 附录：Pfaffian 与习题，作者：V. Galgano

7.1 Pfaffian

我们将目光转向反对称形式的一个不变量：Pfaffian。设 V是一个维数为 N的复向量空间，我们考虑它的反对称平方 $\bigwedge^2 V$，其元素是形如 $\tilde{\omega} = \sum_i v_i \wedge w_i$的 2-形式，向量 v_i、$w_i \in V$取遍所有可能值。固定 V的一组基 $(e_1，\ldots\ldots，\ e_N)$，便可定义 $\bigwedge^2 V$与 $N \times N$ 反对称矩阵向量空间之间的线性同构，它将一个 2-形式$\tilde{\omega} = \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j$ 对应到反对称矩阵 $\omega = (\omega_{ij})$。因此，我们也常用外平方来表示反对称矩阵。

$SL(V)$ 在 V 上的自然作用诱导出 $\bigwedge^2 V$ 上的作用，其定义为 $g\cdot(v\wedge w) = (g\cdot v)\wedge(g\cdot w)$，这对应于合同变换 $g\cdot\omega = g\omega g^t$ 作用。Pfaffian 是 $\bigwedge^2 V$ 的一个 $SL(V)$-不变量，仅在偶数 $N =$ 维数 V时定义。因此，我们分别讨论 V 维数为偶数或奇数的情形。

偶维情形。固定 $N = 2n$。n 阶 2-形式$\tilde{\omega} \in \bigwedge^2 V$ 的外幂 $\tilde{\omega}^{\wedge n}$ 是 $\bigwedge^{2n} V \simeq \mathbb{C}^\vee$ 上的一个 $2n$-形式。固定 V 的一组基 $(e_1，\ \ldots，\ e_{2n})$，即确定了 $\bigwedge^{2n} V$ 的一个生成元 $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n}$。反对称矩阵 ω 的 *Pfaffian* $\mathrm{Pf}(\omega) \in \mathbb{C}$ 是满足以下条件的复标量：

$$\tilde{\omega}^{\wedge n} := (n!)\mathrm{Pf}(\omega) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n}\ .$$

注意到，$\tilde{\omega}^{\wedge k}$中 $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{2k}}$的系数与 $(\tilde{\omega}|_{i_1,\ldots,i_{2k}})^{\wedge k}$中的相同，因为它是通过将 $\{i_1, \ldots, i_{2k}\}$划分为所有可能的 k 个双指标子集得到的

个子集。特别地， $\tilde{\omega}^{\wedge k}$中 $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_{2k}}$的系数为 $k!\mathrm{Pf}(\omega|_{i_1,\ldots,i_{2k}})$。由此得到表达式

$$\tilde{\omega}^{\wedge k}=(k!)\sum_{i_1,\ldots,i_{2k}}\mathrm{Pf}(\omega|_{i_1,\ldots,i_{2k}})e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_{2k}}\ . \tag{7.1}$$

例 7.1。

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}=a\quad,\quad \mathrm{Pf}\begin{pmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\-b&-d&0&f\\-c&-e&-f&0\end{pmatrix}=af-be+cd\ .$$

Exer习题 7.2。 对于任意 $g\in GL(2n)$，均有 $\mathrm{Pf}(g\omega g^t)=\det(g)\mathrm{Pf}(\omega)$。特别是，

$$\mathrm{Pf}\in\left[\mathrm{Sym}^n\left(\textstyle\bigwedge^2 V^\vee\right)\right]^{SL(V)}\ .$$

证明。

$$\begin{aligned}&(n!)\mathrm{Pf}(g\omega g^t)e_1\wedge\ldots\wedge e_{2n}=\widetilde{(g\omega g^t)}^{\wedge n}=(g\cdot\tilde{\omega})^{\wedge n}=g\cdot(\tilde{\omega})^{\wedge n}=\\&=(n!)\mathrm{Pf}(\omega)(g\cdot e_1\wedge\ldots\wedge e_{2n})=(n!)\mathrm{Pf}(\omega)\det(g)e_1\wedge\ldots\wedge e_{2n}\ .\end{aligned}\qquad\square$$

注 7.3。 *Pfaffian* 定义了 n 次超曲面于 $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$ 中：这里，*Pfaffian* 的概念优于行列式的概念，因为后者定义的是非约化概形。

注 7.4。 从表示论视角来看，泛型$2n\times 2n$ 反对称矩阵的 *Pfaffian* 是 $SL(2n)$-模 对称幂 $^n(\bigwedge^2\mathbb{C}^{2n})^\vee$ 中唯一的 $SL(2n)$-不变量（可约）。

设 $J_1:=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$，并令 $J_{n,r}=\mathrm{diag}(J_1,\ldots,J_1,\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})$ 为具有前 r 个对角块等于 J_1 的 $2n\times 2n$ 块对角矩阵。

练习 7.5。 以下事实成立：

1. $\mathrm{Pf}(J_{n,n})=1$；*2.* 存在 $g\in GL(2n)$ 使得 $g\omega g^t=J_r$，其中 r 为某个值；*3.* 反对称矩阵的秩为偶数；*4.* $\mathrm{Pf}(\omega)\neq 0$ 当且仅当 ω 满秩。

提示：对于 (2)，假设 $n=2$ 和 $\omega_{12}\neq 0$，并证明存在 g，使得对于任意 $i\geqslant 3$，都有 $(g\omega g^t)_{1i}=0$。

˜证明。矩阵 $J_{n,\ n}$ 对应于 2-形式 $J = \sum_{i=1}^{n} e_{2i-1} \wedge e_{2i}$，其 n 次楔幂为 $(n!)$ $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n}$，因此第一个结论成立。对于其他结论，我们使用归纳论证。记

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \ldots & \omega_{1\,2n} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \ldots & \omega_{2\,2n} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & & & \\ \vdots & \vdots & & \omega' & \\ -\omega_{1\,2n} & -\omega_{2\,2n} & & & \end{pmatrix}.$$

除非 $\omega = 0$ （也就是说 ω 的秩至少为 1），否则我们可以假设 $\omega_{12} \neq 0$。考虑可逆矩阵

$$g' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega_{12}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_{23}\omega_{12}^{-1} & -\omega_{13}\omega_{12}^{-1} & & & \\ \vdots & \vdots & & Id_{2n-2} & \\ \omega_{2\,2n}\omega_{12}^{-1} & -\omega_{1\,2n}\omega_{12}^{-1} & & & \end{pmatrix} \in GL(2n).$$

Then

$$g'\omega(g')^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \omega'' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(J_1, \omega'').$$

根据归纳假设，ω'' 的秩为偶数 $2(r-1)$，并且存在 $g'' \in GL(2n-2)$，使得 $g''\omega''(g'')$ $^t = J_{r-1}$。由此可知，ω 的秩为偶数 $2r$，且 $g := g'\mathrm{diag}(Id_2,\ g'') \in GL(2n)$ 满足 $g\omega g^t = J_r$。特别地，ω 满秩当且仅当 $\mathrm{Pf}(\omega) \neq 0$。

□

注 7.6。</style>令人惊讶的是，标准形 $g\omega g^t = J_r$ 在任意域（甚至 $\mathbb{Q}$）上都成立，这与对称对应形式（西尔维斯特标准形）不同，后者只在 $\mathbb{R}$上成立。事实上，西尔维斯特标准形需要平方根，而反对称矩阵的标准形只需要单位元。

习题 7.7. 以下事实等价：

1. ω 的秩为 $\geqslant 2k$；*2.* $\tilde{\omega}^{\wedge k} \neq 0$；*3.* ω 有一个非奇异的 $2k \times 2k$ 主子矩阵。

证明。(2) 与 (3) 的等价性由 (7.1) 得出。给定秩为 $2r$ 的 ω，存在 $g \in GL(2n)$，使得 $J_{n,r} = g\omega g^t$。特别地，$\widetilde{J_n}_{,r}^{\wedge k} = (g \cdot \tilde{\omega})^{\wedge k} = g \cdot \tilde{\omega}^{\wedge k}$，并且 $\omega^{\wedge k} \neq 0$ 当且仅当 $\widetilde{J_n}_{,r}^{\wedge k} \neq 0$，当且仅当 $r \geqslant k$。

□

Pfaffian 满足递归公式

$$\mathrm{Pf}(\omega)=\sum_{j=2}^{2m}(-1)^j\omega_{1j}\mathrm{Pf}(\omega_{\widehat{[1j]}}) \tag{7.2}$$

其中，$\omega_{\widehat{[1j]}}$ 表示从 ω 中删去第 1 行、第j行以及对应列后得到的主子矩阵。

习题 7.8。 对于任意偶数阶反对称矩阵 ω ，有

$$\det(\omega)=\mathrm{Pf}(\omega)^2\ .$$

证明。 若 ω 不满秩，则两个值都为零。若 ω 满秩，则存在$g\in GL(2n)$，使得 $g\omega g^t=J_{n,\ n}$ 于是得到

$$\det(g)^2\mathrm{Pf}(\omega)^2=\mathrm{Pf}(g\omega g^t)^2=\mathrm{Pf}(J_{n,n})^2=1=\det(g\omega g^t)=\det(g)^2\det(\omega)\ .\qquad\square$$

注 7.9。 从历史上看，凯莱 *[Cay]*证明了任意反对称矩阵（不论其阶数的奇偶性）的行列式都是一个平方，并将 ***Pfaffian*** 精确定义为行列式的平方根。特别地，这一关系解释了为什么奇数阶反对称矩阵的 ***Pfaffian*** 定义为零。

奇数维情形。 固定 $N=2n+1$。奇维反对称矩阵的 Pfaffian 定义为零。给定 $\omega\in\bigwedge^2\mathbb{C}^N$，其伴随矩阵 （或伴随矩阵）是满足下式的 $N\times N$矩阵 $\mathfrak{ad}\omega$

$$\omega\cdot\mathfrak{ad}\omega=\det(\omega)I\ .$$

矩阵 $\mathfrak{ad}\omega$ 是 ω的余子式矩阵的转置，即

$$\mathfrak{ad}\omega=\left((-1)^{i+j}\det(\Omega_{ji})\right)_{i,j}$$

其中，Ω^{ij} 是通过删去第 i 行和第 j 列从 ω 得到的子矩阵。

习题 7.10. 对于 $\omega\in\bigwedge^2\mathbb{C}^{2n+1}$ （奇数阶），伴随矩阵 $\mathfrak{ad}\omega$ 是对称的。

证明。 由于 ω 是反对称的，因此 $\Omega^{ji}=-\Omega^t_{ij}$，故

$$(\mathfrak{ad}\omega)_{ji}=(-1)^{i+j}\det(\Omega_{ij})=(-1)^{i+j}\det(\Omega_{ji})=(\mathfrak{ad}\omega)_{ij}\ .\qquad\square$$

习题 7.11. 对于任意 $\omega\in\bigwedge^2\mathbb{C}^{2n+1}$，都有 $Rk(\mathfrak{ad}\omega)\leqslant 1$；且等号成立当且仅当 $Rk(\omega)=2n$。

证明。 注意， $\mathfrak{ad}\omega=0$ 当且仅当 ω 的所有 $2n\times 2n$ 阶子式都为零，而这又当且仅当 $\mathrm{Rk}(\omega)\leqslant 2n-1$。只需证明，若 $\mathrm{Rk}(\omega)=2n$，则 $\mathrm{Rk}(\mathfrak{ad}\omega)=1$。
假设 $\mathrm{Rk}(\omega)=2n$，则 $\dim\ker(\omega)=1$。由于 $\det(\omega)=0$，因此有 $\omega\cdot\mathfrak{ad}\omega=\mathbf{0}$，也就是说， $\mathfrak{ad}\omega$ 的列属于 $\ker(\omega)$。于是 $\mathrm{Rk}(\mathfrak{ad}\omega)=1$。 $\square$

练习 7.12. 设 $C_i:=\mathrm{Pf}(\Omega_{ii})$。则 $\det(\Omega^{ij})=C_iC_j$。

证明。 我们不妨假设 $\mathrm{Rk}(\mathfrak{ad}\omega) = 1$，否则结论显然成立。我们知道 $\mathfrak{ad}\omega$ 是对称的，因此存在 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{2n+1})^t \in \mathbb{C}^{2n+1}$ 使得$\mathfrak{ad}\omega = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^t$。特别地，我们得到

$$v_i^2 = \det(\Omega_{ii}) = C_i^2 \quad , \quad v_i v_j = (-1)^{i+j} \det(\Omega_{ji}) \ .$$

于是 $C_i^2 C_j^2 = v_i^2 v_j^2 = \det(\Omega_{ij})^2$, , 从而 $\det(\Omega_{ij}) = \pm C_i C_j$。这是一个多项式恒等式，因此对反对称矩阵的任意取值都必须成立。特别地，只需对 $\Omega = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_1, 0)$ 进行验证即可得出结论，其中该2×2 块 J_1 出现了 n 次。

□

练习 7.13。 向量 $(C_1, -C_2, C_3, \dots, -C_{2n}, C_{2n+1})$ 属于核(ω)。

证明。 注意，主子式 Pfaffian（即对角子矩阵的 Pfaffian）会降低 ω 的秩，这是习题 7.11 的推论。现在，令 $C := (C_1, -C_2, C_3, \dots, -C_{2n}, C_{2n+1})$，并令 $C' := \omega C \in \mathbb{C}^{2n+1}$。于是:

$$C_i' = \sum_{j<i} (-1)^j \omega_{ji} C_j + \sum_{j>i} (-1)^{j+1} \omega_{ij} C_j \ .$$

乘以 $(-1)^{i+1} C_i$ 得到

$$\begin{aligned}(-1)^{i+1} C_i C_i' &= (-1)^{i+1} \left(\sum_{j<i} (-1)^j \omega_{ji} C_i C_j + \sum_{j>i} (-1)^{j+1} \omega_{ij} C_i C_j \right) \\ &\overset{\clubsuit}{=} \sum_{j<i} (-1)^{i+j+1} \omega_{ji} \det(\Omega_{ij}) + \sum_{j>i} (-1)^{i+j+2} \omega_{ij} \det(\Omega_{ij}) = \det(\omega) = 0\end{aligned}$$

其中等式 ($\clubsuit$由练习 7.12 得出。 □

练习 7.14。 设 $D_k := \{[\omega] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n+1}) \mid Rk(\omega) \leqslant 2k\}$ 是由 ω 的所有$(2k+2) \times (2k+2)$ 子 *Pfaffian* 的消失所定义的行列式簇。那么

1. D_k 的奇异轨迹是 D_{k-1}; *2.* D_k 的余维为$\binom{2n+1-2k}{2}$。

证明。 记 $J_{n,k}^\circ := \mathrm{diag}(J_{n,k}, 0)$，其大小为 $(2n+1) \times (2n+1)$。一般点 $[\omega] \in D_k$的秩为 $2k$。于是存在 $g \in GL(2n+1)$ 使得 $g\omega g^t = J_{n,k}^\circ$。特别地，轨道 $GL(2n+1) \cdot [J_{n,k}^\circ]$ 在 D_k 中稠密，因此它们具有相同的维数。

轨道 $GL_{2n+1} \cdot [J_{n,k}^\circ]$ 稠密，因此其中的点在 D_k 中是光滑的。为了证明 $Sing(D_k)$ 与 $D_{k-1} = D_k \setminus (GL_{2n+1} \cdot [J_{n,k}^\circ])$ 重合，只需注意到，根据（7.2）中的 Pfaffian 递归公式，次数为 m 的 Pfaffian 的临界点（即梯度为零的点），恰好是所有次数为 $m-1$ 的子 Pfaffian 均为零的点。

现在来计算 D_k的余维。给定映射

$$\begin{array}{rccc} \psi: & GL(2n+1) & \longrightarrow & D_k \\ & g & \mapsto & g J_{n,k}^\circ g^t \end{array}$$

$[J^\circ_{n,k}]$处的纤维为 $\psi^{-1}([J^\circ_{n,k}]) = \{h \in GL_{2n+1} \mid hJ^\circ_{n,k}h^t = J^\circ_{n,k}\}$。纤维中的矩阵 h由以下关系确定

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AJ_k & 0 \\ CJ_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AJ_kA^t & AJ_kC^t \\ CJ_kA^t & CJ_kC^t \end{pmatrix}.$$

这意味着

$$\begin{cases} AJ_kA^t = J_k \\ CJ_kC^t = \mathbf{0} \\ AJ_kC^t = \mathbf{0} \end{cases}.$$

由于 $CJ_kC^t = \mathbf{0}$，因此 C不可逆。但另一方面，$AJ_kA^tJ_k^t = I_{2k}$，所以 A 可逆。于是 AJ_K 也可逆，因此我们得到 $C = \mathbf{0}$。
因此，$\psi^{-1}(J^\circ_{n,\ k})$ 由形如 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 的矩阵给出，其中 $A \in Sp(2k)$ 是辛的，$B \in Mat(2k \times (2n+1-2k))$ 且 $C \in GL(2n+1-2k)$。应用纤维维数定理可推出 D_k 的余维。

□

Pfaffian 与 $SL(V)$-表示。 我们假定读者对表示的最高权理论以及 $SL(V)$ 已有一定了解。设 $V = \mathbb{C}^N$。我们用 V_λ 表示 $SL(V)$ 中最高权为 $\lambda \in \mathbb{Z}^{N-1}$ 的不可约表示。若 $\lambda = (a_1, \ldots, a_{N-1})$，则 V_λ 属于张量积（参见 [FH，第 15.3] 节）

$$\mathrm{Sym}^{a_1}V \otimes \mathrm{Sym}^{a_2}(\textstyle\bigwedge^2 V) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Sym}^{a_{N-1}}(\bigwedge^{N-1} V).$$

注意，对于所有 i，$\mathrm{Sym}^{a_1}V = V_{(a_1,0,\ldots,0)}$ 和 $\bigwedge^i V = V_{(0,\ldots,1_i,\ldots 0)}$ 都是不可约的，而对于每个 $i \geqslant 2$ 和 $a_i \geqslant 2$，$\mathrm{Sym}^{a_i}(\bigwedge^i V)$ 都不是不可约的。

我们关注 $\bigwedge^2 V$ 的二次协变式。它们属于 $SL(V)$-模 $\mathrm{Sym}^2(\bigwedge^2 V^\vee)$，该模分解为以下不可约模

$$\mathrm{Sym}^2(\textstyle\bigwedge^2 V^\vee) = V_{(0,2,0,\ldots)} \oplus V_{(0,0,0,1,0,\ldots)} = V_{(0,2,0,\ldots)} \oplus \bigwedge^4 V^\vee.$$

直和项 $V_{(0,2,0,\ldots)}$ 可以理解为映射的核，该映射是 $SL(V)$-等变的

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathrm{Sym}^2(\bigwedge^2 V^\vee) & \longrightarrow & \bigwedge^4 V^\vee \\ & \alpha \cdot \beta & \mapsto & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

其中 α, β 是 $\bigwedge^2 V^\vee$ 中的 2-形式。核是以下两个子空间的直和：

(S1) $\langle (e_i \wedge e_j)(e_h \wedge e_k) \mid \{i,j\} \cap \{h,k\} = \emptyset \rangle_{\mathbb{C}}$;

(S2) $\left\langle (e_{i_1} \wedge e_{i_2})(e_{i_3} \wedge e_{i_4}) + (e_{i_1} \wedge e_{i_3})(e_{i_2} \wedge e_{i_4}), (e_{i_1} \wedge e_{i_4})(e_{i_2} \wedge e_{i_3}) + (e_{i_1} \wedge e_{i_3})(e_{i_2} \wedge e_{i_4}) \mid \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \in \binom{[N]}{4} \right\rangle_{\mathbb{C}}$.

上述映射 ψ 是将 Pfaffian（大小为 4×4）视为投影到 $\bigwedge^4 V^\vee$上的等变投影的坐标的一种巧妙方式，也就是说，它们是 $\bigwedge^2 V$的二次协变式。事实上，给定一个 2-形式 $\tilde{\omega}\in\bigwedge^2 V^\vee$，其第二外幂为

$$\tilde{\omega}^{\wedge 2}=\sum_{I\in\binom{[N]}{4}}\mathrm{Pf}(M_I)e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge e_{i_3}\wedge e_{i_4}\in\bigwedge^4 V^\vee.$$

注意，对于 $N=4$，求和项 $V_{(0,0,0)}=\bigwedge^4 V^\vee\simeq\mathbb{C}$ 是一维的，由唯一的 $SL(4)$ 次数为 2 的不变量张成，它是一般4×4 反对称矩阵的 Pfaffian。对于 $N\geqslant 5$，不存在次数为 2 的 $SL(N)$-不变量，因为 $[\mathrm{Sym}^2(\bigwedge^2 V^\vee)]^{SL(V)}$ 不含平凡表示。不过，4×4Pfaffian 张成了 $\bigwedge^2 V$ 的所有二次协变式。

7.2 二元与三元形式

调和四元组。设 P、X、Y 是 $\mathbb{R}^2$ 中三个共线点，且 X 位于线段 PY 上。对于任意一条经过 X 和 Y 的仿射圆锥曲线 $\mathcal{C}$，设 ℓ_1、ℓ_2 是经过 P 且与 $\mathcal{C}$ 相切于两点 A、B 的直线。设 Q 为 AB 与 XY 的交点。称点 Q 为相对于 P 的 X 与 Y 的调和平均数，而 AB 是相对于极点 P 的极线。

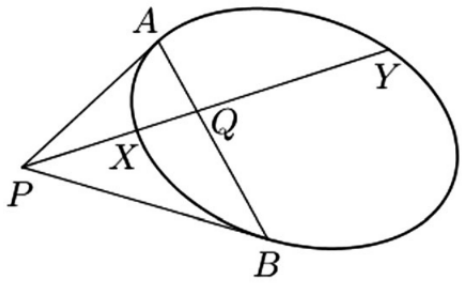

图 20：此图取自 [DCG]。

练习 7.15。点 Q 与圆锥曲线 $\mathcal{C}$无关。特别地，它只取决于交比 $PX:PY=QX:QY$。

证明。我们可以假设在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中，$P=[0:0:1]$、$X=[1:0:1]$ 以及 $Y=[\lambda:0:1]$，其中$\lambda\geq 1$。令 $\mathcal{C}\in$ 对称幂$^2\mathbb{R}^3$ 为由一个 3×3 对称矩阵 S定义的圆锥曲线。注意$s_{33}\neq 0$，因为 $P\notin\mathcal{C}$。$\mathcal{C}$ 经过 X 和 Y 当且仅当 $X^tSX=Y^tSY=0$，也就是说

$$\begin{aligned}s_{11}+2s_{13}+s_{33}&=0\\ \lambda^2 s_{11}+2\lambda s_{13}+s_{33}&=0\ .\end{aligned}$$

将第一个方程乘以 λ^2，再减去第二个方程，得到

$$2\lambda(\lambda-1)s_{13}+(\lambda^2-1)s_{33}=0\implies\frac{s_{13}}{s_{33}}=-\frac{\lambda+1}{2\lambda}\ .$$

点 $Q=[q\colon 0\colon 1]$ 是 P 的极线，当且仅当 $0=Q^tSP=qs_{13}+s_{33}$，因此 $\frac{1}{q}=-\frac{s_{13}}{s_{33}}$。特别地，

$$\frac{1}{q}=\frac{\lambda+1}{2\lambda}\ ,$$

因此 q （所以 Q）在圆锥曲线上独立。 □

二元四次形式。考虑变量x，y上的二元四次型空间 $\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2$，其上由 $SL(2)$ 通过坐标的线性变换作用。一般的 $f\in\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2$具有如下形式

$$f(x,y)=a_4x^4+4a_3x^3y+6a_2x^2y^2+4a_1xy^3+a_0y^4\ .$$

环 $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2]^{SL(2)}$ 中 $\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2$ 的 $SL(2)$-不变量由二次和三次形式生成

$$\begin{aligned}I(f)&=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2\\ J(f)&=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_0a_3^2-a_4a_1^2\ .\end{aligned}$$

若二元四次形式 f满足 $J(f)=0$，则称其为调和；若满足 $I(f)=0$，则称其为等调和。二元四次型 $f\in\mathrm{Sym}^4\mathbb{C}^2$ 的海森矩阵的行列式是一个四阶协变式（相对于 x，y）和二次协变式（相对于 a_0，…，a_4）

$$\begin{aligned}H(f)&=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\\ &=(a_4a_2-a_3^2)x^4+2(a_4a_1-a_3a_2)x^3y+(a_4a_0+2a_3a_1-3a_2^2)x^2y^2+\\ &\quad+2(a_3a_0-a_2a_1)xy^3+(a_2a_0-a_1^2)y^4\ .\end{aligned}\tag{7.3}$$

注 7.16。不变量 I 和 J 的起源应追溯到 *19* 世纪中叶 *Cayely* 的研究。在关于用符号方法求不变量的研究中，凯莱引入了一些称为转协变的微分算子。不变量 $I(f)$（相差一个比例因子）就是四阶转极 $(f,f)_4$。不变量 $J(f)$也以类似方式得到。它是迭代转矢算子$(f,(f,f)_2)_4$。注意，$(f,f)_2=H(f)_2=H$。明确的计算可见 *[Olv, §6]*。

凯莱的转协变是希尔伯特算子 D 和 Δ *[Hil93, §I.5],* 的某种先驱，它们提供了一种通过导子生成不变量的工具。

练习 7.17。证明一个一般的 $f\in$对称幂$\mathbb{C}^2$ 与以下形式之一射影等价

$$F_t=x^4+y^4+6tx^2y^2\ .$$

此外，当 $t\in\{0,\pm1\}$时，F_t是调和 的；当 $t=\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$时，则是非调和的。

证明。将 f 关于 y 去齐次化，得到 $f(x,1)=a_4x^4+4a_3x^3+6a_2x^2+4a_1x+a_0$。在重新缩放意义下，我们可以假设 $a_4=1$。写作 $f(x,1)=\prod_{i\in[4]}(x-\alpha_i)$。考虑 $SL(2)$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上的作用。于是存在一个 $g\in SL(2)$，将 $f(x,1)$ 的四个根映到 $F_t(x,1)$ 的四个根。这些将取决于参数 t，因为四个点在 $\mathbb{P}^1$ 上的模空间（同样，带有四个标记点的亏格零曲线的模空间

）同构于 $\mathbb{C}$。
该陈述的第二部分源于这样一个事实： F_t ar 的不变量 e

$$I(F_t) = 1 + 3t^2 \quad , \quad J(F_t) = t(1 - t^2) \ .$$

□

练习 7.18. $V(J)$ 中调和形式构成的代数簇，与次数为4 的有理正规曲线的割线簇 $\sigma_2(\nu_4(\mathbb{P}^1))$ 重合。

证明。 由四次型 F_t 得到的形式，对于 $t \in \{0, \pm 1\}$ 可写作$x^4 + y^4$、$_{12}(x + y)^4 + \frac{1}{2}($ $x - y)^4$以及$_{12}(x + iy)^4 + \frac{1}{2}(x - iy)^4$。它们属于同一个轨道 $SL(2) \cdot [x^4 + y^4]$，该轨道在 $\sigma_2(\nu_4(\mathbb{P}^1))$ 中稠密。另一方面，任意一般的调和形式都可通过 $x^4 + y^4$的 $SL(2)$ 作用得到，而其他任意调和形式都是它的退化，因此 $SL(2) \cdot [x^4 + y^4]$ 在 $V(J)$ 中也稠密。

□

习题 7.19。 *[另见 [CO], §4]* 以下事实成立：

1. $f = g^2$对于 $g \in$对称幂$^2\mathbb{C}^2$非退化 $\implies J(f) = 0, I(f) \neq 0$和 $H([f]) = [f]$;
2. $f = \ell^4$对于 $\ell \in \mathbb{C}^2 \implies J(f) = I(f) = 0$且 $H([f])$ 未定义； *3.* 限制在平方型簇上的海森映射在平方型簇上支配。特别地， $J(f) = 0 \iff H(f)$ 是一个平方；
4. 限制在 $V(I)$上的海森映射是一个双有理对合。特别地，$I(f) = 0 \iff H(H([f])) = [f]$。

证明。
1,2. </style}如果 $f = g^2$ 对于 $g \in$ 对称幂$^2(\mathbb{C}^2)$，直接计算可得

$$H(g^2) = 12H(g)g^2 \ .$$

由于 $H(g) = 0$ 当且仅当对某个 $\ell \in \mathbb{C}^2$ 有 $g = \ell^2 \in \nu_2(\mathbb{P}^1)$，在射影层面上，海森映射 H： $\mathbb{P}$(对称幂$^4\mathbb{C}^2$) $\dashrightarrow \mathbb{P}$(对称幂$^4\mathbb{C}^2$) 在 $\nu_4(\mathbb{P}^1)$ 上没有定义，即在 $[f] = [\ell^4]$ 上没有定义，而对所有非退化的 $g \in$ 对称幂$^2\mathbb{C}^2$，它在所有 $[g^2]$ 上是恒等映射。此外，任一 $f = g^2$ 都位于 x^4 或 $(xy)^2$ 的 $SL(2)$-轨道中。这两个轨道都位于割线簇 $\sigma_2(\nu_4(\mathbb{P}^1))$ 中，因而特别地位于 J 的零点集中。
最后，我们知道 $J(f) = I(f) = 0$当且仅当 f有一个重数至少为 3 的根。特别地， $V(I, J)$ 是 $\nu_4(\mathbb{P}^1)$ 的切向簇，由该曲线本身与轨道 $SL(2) \cdot x^3y$ 的并给出。

3. 若 f 是调和的，那么我们可以假设 $f = x^4 + y^4$ 的海森为 $12x^2y^2$，而为正方形是一个 $SL(2)$-不变量性质。另一方面，在射影等价意义下，我们可以假设 f 具有练习 7.17 中 F_t 的形式，其海森多项式为 $H(F_t) = 12^2\left(tx^4 + ty^4 + (1 - 3t^2)x^2y^2\right)$。对于 $t = 0$，这样的多项式是 $(12xy)^2$，且 F_t 是费马四次曲线，它是调和的。假设 $t \neq 0$ 并要求 $H(F_t)$为正方形，可得 $t = 0, \ \pm 1, \ \pm\frac{1}{3}$。前三种情形是调和的，而最后两种情形中， F_t 本身是一个正方形。

4. 一般的等调和对象在射影等价意义下，对于 $t = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ 等价于练习 7.17 中的 F_t 。直接计算表明， F_t 的海森为 $H(F_t) = tx^4 + ty^4 + (1 - 3t^2)x^2y^2$，特别地， $H(F_{\frac{i}{\sqrt{3}}}) = F_{-\frac{i}{\sqrt{3}}}$。这表明海森映射在 $V(I)$ 上是一个对合。反过来，写出铅笔 F_t 的一般形式，并要求海森映射在其上为对合，可得不变量 I为零。

□

三元三次型。 考虑变量 $x\,y\,z$ 中的三元三次型空间 $\mathrm{Sym}^3\mathbb{C}^3$，以及通过坐标线性变换作用的 $SL(3)$。不变量环

$$\mathbb{C}[\mathrm{Sym}^3\mathbb{C}^3]^{SL(3)} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{T} \rangle$$

由两个次数分别为 4 和 6 的形式生成，分别称为阿龙霍尔德不变量和克莱布施不变量。

任意一般的 $g \in \mathrm{Sym}^3\mathbb{C}^3$ 都可以通过 $SL(3)$ 变换为魏尔斯特拉斯形式（参见 [Dolg，第 9 章）

$$G = y^2z - x^3 - pxz^2 - qz^3 \ .$$

当 $q = 0$ 时，三次型 G 是调和的（等价地， $\mathcal{T}(G) = 0$）；当 $p = 0$ 时，它是等调和的（等价地， $\mathcal{A}(G) = 0$）。例如， $y^2 = x^3 \pm x$ 是调和的，而阿龙霍尔德证明了一般的等调和三元三次型都与费马三次曲线 $x^3 + y^3 + z^3$ 射影等价。

练习 7.20。 *3* 次割线簇 $\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2))$ 是 *3* 次韦罗内塞曲面的超曲面 $V(\mathcal{A})$ ，由阿龙霍尔德不变量定义。

证明。 与练习 7.18 的证明类似，只需考虑费马三次曲线$x^3 + y^3 + z^3$。事实上，它的 $SL(3)$-轨道在 $\sigma_3(\nu_3(\mathbb{P}^2))$ 和 $V(\mathcal{A})$ 中都稠密，因为任何等调和三元三次型要么属于这样的轨道，要么是它的退化。 □

练习 7.21 (另见 [CO], §5)。 以下事实成立：

1. $\mathcal{T}(G) = 0$ 当且仅当 $H(H(G))$ 与 G 成比例；*2.* $\mathcal{A}(G) = 0$ 当且仅当 $H(G)$ 由三条直线给出。

证明。 第一条结论可利用调和三元三次型的魏尔斯特拉斯形式验证。第二条结论可通过考察费马三次曲线得出。

□

注 7.22。 以上两个练习凸显了二元四次型与三元三次型之间另一个有趣的二分现象。事实上， $\nu_4(\mathbb{P}^1)$ 的割线簇对应于对称幂$^4\mathbb{C}^2$中的调和形式，而 $\nu_3(\mathbb{P}^2)$ 的第三割线簇则对应于对称幂$^3\mathbb{C}^3$中的等调和形式。另一方面，二元四次型的海森映射 $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ 在等调和形式上是一个对合，而三元三次型的海森映射 $\mathbb{P}^9 \dashrightarrow \mathbb{P}^9$ 在调和形式上是一个对合。

阿隆霍尔德不变量作为 Pfaffian。 设 $\mathrm{End}_0\mathbb{C}^3$ 表示无迹3×3 矩阵构成的空间。对于任意 $v^3 = v\otimes v\otimes v \in$ 对称幂$^3\mathbb{C}^3$，考虑线性映射

$$A_{v^3} : \mathrm{End}_0\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathrm{End}_0\mathbb{C}^3$$

使得

$$\big(A_{v^3}(M)\big)(w) = \big(M(v)\wedge v\wedge w\big)v \qquad \forall M\in \mathrm{End}_0\mathbb{C}^3,\ \forall w\in\mathbb{C}^3\ .$$

由线性性，映射 A_{v^3} 可扩展为任意 $f \in$Sym$^3\mathbb{C}^3$ 的 A_f。于是， A_f 由如下 9×9 矩阵描述

$$\begin{pmatrix} 0 & hess(f_z) & -hess(f_y)\\ -hess(f_z) & 0 & hess(f_x)\\ hess(f_y) & -hess(f_x) & 0\end{pmatrix}$$

其中， $hess(f_x)$ 是偏导数 f_x 的海森矩阵（ f_y， f_z 同理）。

练习 7.23 (参见 [Ott09], 定理 2.1)。 设 B_i 为删除 A_f 的第 i 行和列后得到的 8×8 主子矩阵。那么，对于所有i、 j，$\mathrm{Pf}(B_i) = \mathrm{Pf}(B_j)$。 此外，阿隆霍尔德不变量 $\mathcal{A}$ 与这些 ***Pfaffian*** 相同。

致谢

我们感谢 Lie-Størmer 中心、K. Kohn、A. Oneto、P. Santarsiero 和 E. Turatti，以及 C. Reiner，在充满启发的北极氛围中组织学校，并感谢所有参与者的关注。GO 感谢 P. Aluffi 和 D. Faenzi 在群作用和法诺簇方面提供的历史与数学帮助。特别感谢 M. Andreatta 和 R. Pignatelli 对 Fano 的最后一个 Fano 所作的解释，见注 2.16。C. Raicu 的见解使我们避免了注 5.11 中一个棘手的论证。注 5.13 则要归功于 F. Russo。GO 是 INdAM 意大利 GNSAGA 的成员，并获欧盟地平线欧洲（HORIZON）玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动项目 HORIZON–MSCA-2023-DN-JD 资助，资助协议编号为 101120296（TENORS）。VG 是意大利国家 GNSAGA-INdAM 的成员。

参考文献

[AOEIS] 在线整数数列百科全书，电子版发布于 https: //oeis.org，2010年。[AC07] A.Abdesselam, J. Chipalkatti, 布里尔-戈尔丹轨迹、转协变与福克斯猜想的一个类比, Adv. Math. 208 (2007), no. 2, 491–520.[AC] A. Abdesselam, J. Chipalkatti, 关于希尔伯特协变量，《加拿大数学杂志》 66 (2014), no. 1, 3–30.[AF] P. Aluffi, C. Faber, 线性轨道： d 个点的 $\mathbb{P}^1$，《纯粹与应用数学杂志》 445 (1993), 205–220。

[AP] M. Andreatta, R. Pignatelli, Fano 的最后一个 Fano, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 34 (2023), no. 2, 359–381.[AFPRW] M. Aprodu, G. Farkas, S. Papadima, C. Raicu, J. Weyman, Koszul 模与 Green 猜想, Invent. Math. 218 (2019), no. 3, 657–720.[Baez] J. Baez, Klein 四次曲线 https://math.ucr.edu/home/baez/klein.html, 2013[BGI] A. Bernardi, A. Gimigliano,M. Id`a, 计算对称张量的对称秩, J. Symbolic Comput. 46 (2011), no. 1, 34–53.[Cay] A.Cayley. 关于斜行列式。（回续第 XXXII 卷，第 119 页的回忆录），Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik 38 (1849年), pp. 93-96.[CO] C. Ciliberto, G. Ottaviani, Hessian 映射, Int. Math. Res. Notices, 8 (2022), 5781– 5817.[COCDR] C. Ciliberto, G. Ottaviani，附录由 J. Caro 和 J. Duque-Rosero 撰写，一般三元形式可由其海森矩阵恢复, arXiv:2406.05382，即将在 Documenta Mathematica 发表。[CRS] C. Ciliberto, F. Russo, A. Simis, Homaloidal 超曲面与海森矩阵消失的超曲面, Adv. Math. 218 (2008年), no.6, 1759–1805.[DCG] A. Del Centina, A. Gimigliano, 从这里到无穷远：追溯射影几何的起源与发展, Springer Nature Switzerland, 2025年.[DeV] K. DeVleming, 几何不变理论与模空间，本卷**[Dolg] I. Dolgachev, 经典代数几何：现代观点, 剑桥大学出版社, 2011年.[DO] I. Dolgachev, D. Ortland, 射影空间中的点集与 theta 函数, Ast´erisque, (165):210, 1988年。[EF] F. Enriques, G. Fano, 关于空间 Cremona 变换的连续变换群, 纯粹与应用数学年刊 (s. 2a) 15 (1897年), 59–98.[EL] L.Ein, R. Lazarsfeld, 切线可展曲面与定义代数曲线的方程, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 57 (2020年), no. 1, 23–38.[Fae] D. Faenzi, 类型为 V_{22} 的法诺三维簇上的向量丛, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 186 (2007), no. 1, 1–24.[F49] G. Fano, 关于一种具有典范截面曲线的特殊三维簇, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 6 (1949年), 151–156.[FGOV] C. Flavi, F. Gesmundo, A. Oneto, E. Ventura, 小切片秩与强度的多项式, arXiv:2509.12322.[FK] R. Fricke, F. Klein, 自守函数理论讲义，第 1 卷，CTM. Class. Top. Math., 3 高等教育出版社, 北京，2017年（德文初版于 1897年）。[FH] W. Fulton and J. Harris, 表示论, Graduate Texts in Mathematics 129. Springer- Verlag, 1991年.[GW] R. Goodman, N. Wallach, 经典群的表示与不变量, Encycl. Math. Appl., 68, 剑桥, 1998年。

[GS] D. R. Grayson与M. E. Stillman，Macaulay2，一个用于代数几何研究的软件系统，可从http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/获取。[Hart] R. Hartshorne，《代数几何》，Graduate Texts in Mathematics 52，施普林格，1997年。[Hilinv] D. Hilbert，《希尔伯特不变量理论论文》。由M.l Ackerman自德文译出，附R. Hermann评注。李群：历史、前沿与应用，VIII，Math Sci Press，布鲁克莱恩，马萨诸塞州，1978年。[Hil86] D. Hilbert. 论一个二元形式可表示为完全幂的必要且充分共变条件¨¨¨。《数学年刊》，第27卷，第158–161页，1886年（收入《论文集》II）。[Hil93] D. Hilbert，《代数不变量理论》，剑桥，1993。[Kir] A. Kirillov Jr.，箭图表示与箭图簇，美国数学学会研究生数学教材174，普罗维登斯，2016年。[Klein] F. Klein，《正二十面体讲义及五次方程的解》，多佛出版社，纽约，1956年（德文第一版，1884年）。[Magn] W. Magnus，《非欧镶嵌及其群》，学术出版社，纽约，1974年。[Man] L. Manivel，预齐性空间与射影几何，《都灵理工大学数学研讨会报告》71（2013年），第1期，35–118。[Muk] S. Mukai，法诺三维簇，伦敦数学会讲义丛书179，剑桥，1992年，255–263。[MU] S. Mukai，H. Umemura，极小有理三维簇，代数几何（东京/京都，1982年），490–518。《数学讲义》1016，Springer-Verlag，柏林，1983年。[Olv] P. Olver，《经典不变量理论》，剑桥大学出版社，第44号，1999年。[Ott09] G. Ottaviani，关于三次多项式华林问题的一个不变量，《名古屋数学杂志》（2009年），第193卷，第95–110页。[O12] G. Ottaviani，关于射影不变量的五次讲演，特伦托学校讲义，2012年9月，《都灵理工大学数学研讨会报告》，第71卷第1期（2013年），119–194。[RS] C. Raicu，S. Sam，Hermite 互反律与施瓦岑贝格丛，交换代数，689–721。施普林格，尚，2021年。[RSWY] C. Raicu，S. Sam，J. Weyman，F. Yang，二元形式的幂与导出埃尔米特互反律，arXiv:2602.15175。[Rez] B. Reznick，实线性形式偶次幂之和，《美国数学会纪要》96（1992年），第463号，viii+155 页。[Roc] E. Rocchi，黑塞铅笔簇，arXiv:2510.16417[Ro] G.C. 罗塔，不变量理论的两个转折点，《数学情报员》，第21卷（1），（1999年），20–27。[Roth] L. Roth，代数三维簇，特别关注有理性问题。数学及其边界领域成果，（新辑），第6册，Springer-Verlag，柏林，1955年。viii+142 页。

[Ru] F. Russo，关于某些特殊射影簇的几何，意大利数学联合会讲义，**18**，施普林格，尚，2016年。[Ser] J.P.塞尔，算术课程，法国大学出版社，1970年[Sev] F. Severi，射影几何补编，扎尼凯利，博洛尼亚，1906年[Sch] F. O. Schreyer，属为*12*的素法诺三维簇的几何与代数，Compositio Math. 127（2001年），第3期，297–319。[Stu] B. Sturmfels，不变量理论中的算法，施普林格，1993，维也纳。[Weyl] H. Weyl，不变量，《杜克数学杂志》5（3），（1939年），489–502。[Wol] J，Wolfart，多项式的*ABC*、儿童画与一致化：综述，载于第三届会议（ELAZ）论文集，美因茨，2004年。由W. Schwarz与J. Steuding编，弗朗茨·施泰纳出版社，斯图加特，2006年。

美国数学学会学科分类：13A50, 14N05, 15A72

Giorgio OTTAVIANI，佛罗伦萨大学“U. Dini”数学与计算机科学系，佛罗伦萨 Morgagni 大道 67/A，50134，意大利，电子邮件：
giorgio.ottaviani@unifi.it

Vincenzo GALGANO，马克斯·普朗克分子细胞生物学与遗传学研究所，及德累斯顿工业大学数学学院，
Pfotenhauerstraße 108，01307 德累斯顿，德国，电子邮件：
galgano@mpi-cbg.de