Prepared for submission to JHEP

# 非可逆对称性对 3+1d 中局域算符的作用

arXiv:2603.03438v1 [hep-th] 3 Mar 2026

**Pavel Putrov**[1] **和 Rajath Radhakrishnan**[1,2]

[1]国际理论物理中心，*Strada Costiera 11*，的里雅斯特 *34151*，意大利[2]牛津大学数学研究所，安德鲁·怀尔斯大楼，*Woodstock Road*，牛津，*OX2 6GG*，英国

Abstract:已知的大多数三维和四维量子场论中的非可逆对称性在局域算符上以可逆方式作用。一个例外是余集对称性，它可以通过将可逆对称性的一个非正规子群进行规范化而构造。在本文中，我们研究四维中一般有限非可逆对称性对局域算符的作用。我们证明，不含拓扑线算符的非可逆对称性必然在局域算符上以可逆方式作用。利用这一结果，我们论证了一般非可逆对称性在 $3+1$ 维时空中对局域算符的作用，可以分解为某些算符的可逆作用与规范化界面作用的复合。我们利用这一结果研究此类对称性何时无反常。我们找到了有限非可逆对称性在 $3+1$ 维时空中无反常的一个必要条件，并证明不含拓扑线算符的无反常非可逆对称性是非内禀不可逆的。

# 目录

**1 引言** **2**

**2 对局域算符的作用（ 2+1d） 6**

2.1 不含线算符的非可逆对称性 62.1.1 类群融合于 $\pi_0(\mathfrak{C})$，来自 3+1d对称拓扑场论 62.1.2 拓扑面算符的维数约化 82.2 一般有限非可逆对称性的作用 102.2.1 陪集非可逆对称性 102.2.2 一般情形 122.3 无反常非可逆对称性（ 2+1d） 13

**3 在 3+1d中对局域算符的作用** **14**

3.1 不含线算符的非可逆对称性 143.1.1 类群融合于 $\pi_0(\mathscr{C})$，来自 4+1d对称拓扑场论 153.1.2 拓扑膜算符的维数约化 163.2 一般有限非可逆对称性的作用 173.3 无反常非可逆对称性（ 3+1d） 183.3.1 不含拓扑线算符的非可逆对称性 183.3.2 一般情形 20

**4 结论 24**

# 1 引言

人们认识到，所有拓扑算符都必须被理解为量子场论（量子场论）的对称性，这引发了大量旨在理解它们的研究 [1–6]。这些对称性从时空维度为二开始便展现出其非平凡的性质：在该维度下，拓扑线算符可以对量子场论的局域算符产生非可逆作用。一个典型且研究充分的例子是伊辛共形场论（CFT），它是具有非可逆对称性的众多有理共形场论之一 [7, 8]。

在高维中，量子场论通常包含具有各种余维数的拓扑算符。例如，在 2+1d 中，我们既可以有拓扑线算符，也可以有二维面算符。在 3+1d 中，我们可以有拓扑三维膜算符、二维面算符和线算符，等等。乍看之下，随着时空维度的增加，拥有各种余维数的拓扑算符这一自由度似乎会使对称性结构变得丰富。虽然事实确实如此，但从某种意义上说，在高维中拓扑算符会受到更多限制。这些限制源于拓扑算符不能彼此独立存在，而必须满足各种相互一致性条件。例如，可以将一个余维为 1 的拓扑算符降维，从而得到一个余维更高的拓扑算符。通过这种关系，高余维算符的融合规则可以对低余维算符施加非平凡的约束。事实上，这对高维中此类算符的分类有着重要影响。在拓扑算符对彼此具有非平凡作用的拓扑量子场论中，这种约束尤其显著；因此，在四维及更高时空维数中，拓扑量子场论的分类相对更简单[9–13]。

尽管存在这些限制，已知各种由拓扑膜（三维）算符实现的非可逆对称性族存在于 3+1维量子场论中：

- 凝聚算符 [14–16]。
- 对偶缺陷 [17–19]。
- 陪集非可逆对称性 [20–22]。

在这些对称性中，只有陪集对称性会以非可逆的方式作用于局域算符。事实上，根据定义，凝聚算符由一组余维为 $\geq 2$ 的算符构成。因此，由于这些高余维算符对局域算符的作用是平凡的，凝聚膜算符的作用也同样是平凡的。在 3+1d 中，对偶缺陷通过规范化一个 1-形式对称性并重新标记场来发挥作用。因此，这种对称性对局域算符的作用是可逆的。陪集非可逆对称性

可以以非可逆的方式作用于局域算符。然而，由于它们是通过规范化一个可逆零形式对称性的子群构造而成的，其非可逆作用可以化简为一个可逆零形式对称性群的作用，以及一个规范化界面的作用。总而言之，上述非可逆对称性要么可逆地作用于局域算符，要么其作用可以化简为一个群和一个规范化界面的作用。鉴于这些例子，我们提出以下问题：

一般的非可逆0-形式对称性在 $d > 2$ 时空维数中对局域算符的作用是什么？

为回答这一问题，我们首先注意到，量子场论在 $d + 1$ 时空维数中的有限非可逆对称性由从余维一一直到余维零的拓扑算符实现。尽管这组算符一般而言可能非常复杂，但只有余维一算符能非平凡地作用于局域算符。此外，不同的余维一算符对局域算符的作用并不全都互不相同。考虑拓扑余维1算符对局域算符 $O$ 的作用，其定义为将拓扑算符滑过 $O$。两个余维一算符 $M_1$ 与 $M_2$ 若由拓扑余维二界面相连，则对局域算符具有相同的作用。这是因为该拓扑界面可以自由移动，从而我们可以使 $M_1$ 或 $M_2$ 穿过局域算符 $O$ （见图1）。作为特例，考虑凝聚膜算符。它们至少容许一种拓扑边界条件。换言之，凝聚算符与恒等余维一算符之间容许一个拓扑界面，因而必须平凡地作用于局域算符。

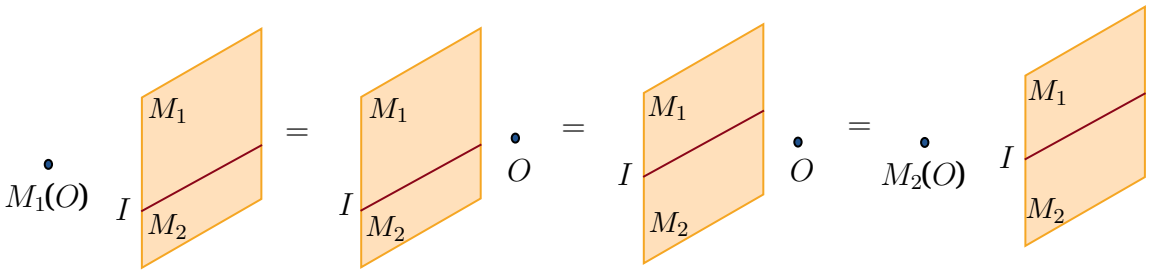


**图 1**。拓扑余维 1 算符对局域算符 $O$ 的作用，定义为将该拓扑算符滑过 $O$。如果两个余维 1 算符 $M_1$和 $M_2$ 由一个拓扑界面 $I$连接，那么可以自由变形 $I$，使其实现 $M_1$ 或 $M_2$ 对 $O$的作用。因此， $M_1$和 $M_2$ 对 $O$ 的作用必定相同。

对此的另一种理解方式是注意到，如果 $M_1$ 和 $M_2$ 由一个拓扑界面连接， $M_2$ 就可以通过对 $M_1$ 上的某些算符进行规范化而得到 $M_1$。因此， $M_2$ 可以理解为 $M_1$ 其上带有一个算符网络的（见图 2）。然而，由于 $M_1$ 上的算符网络具有余维 2 或更高，因而它们

不会作用于局域算符。因此， $M_1$ 和 $M_2$ 对局域算符的作用必定相同。

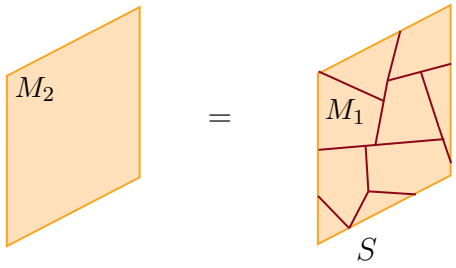


**图 2**。如果拓扑算符 $M_1$ 和 $M_1$ 由一个拓扑界面$I$联系起来，那么可以在其上放置一个由 $S := I^\dagger \times I$ 线构成的网络来构造 $M_2$ 。由于 $S$ 是一个余维二算符，因此它不会作用于局域算符。

在 $d+1$ 时空维数中，我们还可以考虑定义在$S^d$ 上的 $M_1$ 对一个局域算符 $O(x)$ 的作用，其中 $x$ 是球内的一个局域算符。我们可以在 $S^d$ 上引入一块 $M_2$ 局域片，并使其与界面 $I$相连。将界面 $I$ 扫过$S^d$ ，即可得到算符 $M_2$。因此，在 $S^{d-1}$上，存在拓扑界面连接的余维一算符被视为等同，因而它们对局域算符的作用相同。[1]

拓扑界面的存在定义了拓扑算符上的一个等价关系。就对局域算符的作用而言，我们只需考虑余维一算符的等价类。本文将证明，在不存在拓扑线算符时，余维一算符对局域算符的作用是可逆的。我们的论证是，余维一算符的等价类可以赋予类群融合。对于由一组拓扑算符描述的一般非可逆对称性，可能存在非平庸的拓扑线算符。在这种情况下，余维一算符的等价类不具有类群融合。然而，在四个及以上时空维度中，通过规范化消去所有线算符，可以将此类对称性约化为不含拓扑线算符的对称性。利用这一关系，我们将证明，余维一算符对局域算符的作用可以分解为某些可逆地作用于局域算符的余维一算符的作用，以及一个规范化界面的作用。正如我们将回顾的，这恰好就是陪集非可逆对称性对局域算符的作用方式。

[1]要完整描述非可逆对称性对局域算符的作用，必须考虑该对称性对扭曲扇区局域算符的作用，这类算符定义在线算符的端点处。在这种情况下，定义在 $S^{d-1}$ 上的余维一算符 $M$ 的作用取决于如何选择与承载该扭曲扇区局域算符的线算符相接的交汇处。存在拓扑界面连接的两个余维一算符，对扭曲扇区局域算符的作用完全相同，但交汇处的选择可以不同。关于这一点的详细讨论，请见2+1维中的 [23,第 3] 节。（另见 [24]。）

当非可逆对称性对局域算符的作用是可逆的时，局域算符属于某个 $G$有限群的表示 $G$。人们可能会想知道，是否存在一种有效的 't Hooft反常作用于 $G$ ，从而阻碍具有该对称性的平庸能隙相的存在。我们将通过证明以下结论，使这一直觉变得精确：不含拓扑线算符的非可逆对称性只有在存在某种规范化、使余维一算符在凝聚意义下可逆时，才是无反常的。此外，这种可逆对称性恰好就是 $G$ ，并且必须是无反常的。这一结果的一个特例重现了如下结论： $3+1$维中的无反常对偶缺陷具有群论性质 [25]。对于涉及拓扑线算符的一般非可逆对称性，我们发现，要使该对称性无反常，拓扑线算符的结构必须满足某种约束。在这种情况下，我们发现存在一种拓扑操作，可使一部分拓扑算符变为可逆。

本文的结构如下。为准备 $3+1$维中的分析，我们从第2 节开始。在该节中，我们回顾：在不存在拓扑线算符的情况下， $2+1$维中的拓扑面算符必须是可逆的。随后，我们研究一般非可逆面算符对局域算符的作用。在第3节中，我们研究三维拓扑膜算符对局域算符的作用。我们证明，在不存在拓扑线算符的情况下，膜算符等价类的集合可以赋予类群融合结构。利用这一结果，我们写出 $3+1$维中一般非可逆对称性作用于局域算符的表达式。在第3.3节中，我们研究无反常非可逆对称性。我们首先考察不含拓扑线算符的无反常非可逆对称性，并证明，实现这些对称性的拓扑算符经过凝聚后可以变为可逆算符。我们还推导出一般非可逆对称性无反常的一个显式必要条件。最后，在第4节中，我们将结果推广到包含费米子线算符的高阶融合范畴以及高维情形，并以一些未来研究方向作结。

注：本文始终假设，唯一的拓扑局域算符是恒等算符。我们只考虑由拓扑算符实现的玻色量子场论的非可逆对称性，其中每个拓扑算符都是一组简单拓扑算符的有限和。我们假设，在描述 $3+1$d 中非可逆对称性的拓扑算符集合里，不存在拓扑费米子线算符。这一假设是为了简化我们的论证；正如结论中所讨论的，我们可以将其推广到包含费米子拓扑线的情形。

# 2 对 2+1d 中局域算符的作用

在 2+1d 中，非可逆对称性由拓扑面算符和线算符实现。从数学上说，它们构成一个融合2-范畴 $\mathfrak{C}$，其对象描述面算符，1-态射描述两个面算符交汇处的线算符，而2-态射描述两条线算符交汇处的局域算符 [26, 27]。特别地，真正线算符可以理解为平凡面算符与其自身之间可能存在的交汇处。真正线算符记作 $\Omega\mathfrak{C}$。它们构成一个编织融合范畴。

在 2+1d 中，只有面算符能够对局域算符产生非平凡作用。此外，如引言中所述，由拓扑交汇相联系的面算符对局域算符具有相同的作用。考虑面算符的等价类：若两个面算符由拓扑交汇相联系，则认为它们是等价的。从数学上说，这些等价类就是融合2-范畴 $\pi_0(\mathfrak{C})$ 的舒尔分量。在下文中，我们将首先讨论非可逆对称性的情形，此时唯一的拓扑线算符是恒等线，之后再转向一般情形。

原则上，本节所得的结果可以由融合2-范畴 [28–30] 的分类推导出来。然而，在 3+1d 中，这样的分类尚不可得。因此，我们将采用不同的方法，并以一种能够推广到高维的方式进行阐述。

## 2.1 无线算符的非可逆对称性

假设拓扑算符由 $\mathfrak{C}$描述的非可逆对称性不包含任何非平凡的拓扑线算符。换言之，我们假设 $\Omega\mathfrak{C} \cong \mathrm{Vec}$，其中 Vec 是向量空间范畴。曲面算符对局域算符的作用仅取决于 $\pi_0(\mathfrak{C})$ 中的等价类。在下一小节中，我们将利用 $\mathfrak{C}$ 的对称拓扑场论证明，集合 $\pi_0(\mathfrak{C})$ 可以赋予类群融合规则。这意味着局域算符构成该群的一个表示。最后，我们将通过对拓扑算符进行维数约化，得到相同的结果。

### 2.1.1 来自 3+1d 对称拓扑场论的 $\pi_0(\mathfrak{C})$ 上的类群融合

考虑非可逆对称性 $\mathfrak{C}$ [31–38]的 3+1维对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$。[2] 根据构造，$\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$具有一个典范的 2+1维能隙边界条件，记为 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$，其上的拓扑算符构成范畴 $\mathfrak{C}$。拓扑线算符在 3 + 1维中的编织是平凡的。因此，$\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$中的线算符是威尔逊线，对应于

[2]从数学上说，$\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$ 是融合 2-范畴 $\mathfrak{C}$ [39, Section 3] 的德林费尔德中心。（另见[40]）

一个规范群 $G$。[3] 具体而言，利用德利涅定理 [41], 我们有

$$\Omega\mathcal{Z}(\mathfrak{C}) \cong \mathrm{Rep}(G) \ . \tag{2.1}$$

根据假设，范畴 $\mathfrak{C}$ 不包含任何非平凡的拓扑线算符。因此，Rep($G$)中的所有线算符在边界 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$上都必须变得平凡。换言之，边界条件 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ 是通过对所有 Rep($G$)线算符进行规范化而产生的。对线算符进行规范化后，我们得到一个具有对偶 0-形式 $G$ 对称性的理论，该对称性由拓扑膜算符 $M_g$、 $g \in G$实现。此外，对Rep($G$)进行规范化后，所有与这些线算符发生非平凡编织的曲面算符都会被禁闭。换言之，它们会成为 $M_g$ 算符的拓扑二维边界条件。事实上，由于 $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$是一个拓扑量子场论，除凝聚之外的所有曲面算符都必须与 Rep($G$)发生非平凡编织。因此，对 Rep($G$)进行规范化后，所有曲面算符都会被禁闭。所得的 3+1维拓扑量子场论是一个 $G$-对称保护拓扑相。边界 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ 可以理解为 3+1维拓扑量子场论 $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$与一个 $G$-对称保护拓扑相之间的拓扑界面。在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ 上的拓扑面算符（因而在 $\mathfrak{C}$中也是如此）正是 $G$-对称保护拓扑相中 $M_g$膜算符的扭曲扇区边界曲面算符（见图 3）。

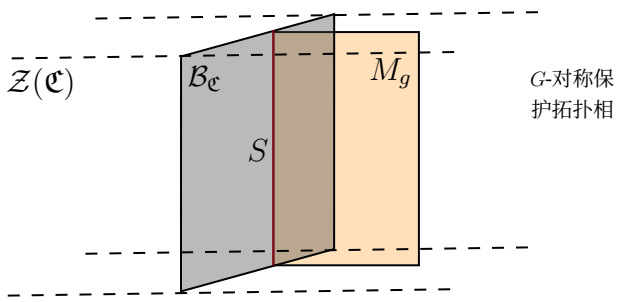


**图 3**。有隙边界 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ 可理解为拓扑量子场论$\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$与一个 $G$-对称保护拓扑相之间的界面；后者由对 $\Omega\mathcal{Z}(\mathfrak{C}) \cong \mathrm{Rep}(G)$ 对称性的规范化得到。附着在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ 上的曲面算符 $S$ 与 $G$-对称保护拓扑相中的一个膜算符 $M_g$ 相连，该膜算符实现了对偶0-形式对称性。图中省略了所有算符的一个维度。

令 $\mathfrak{D}_g$ 为余维1算符 $M_g$ 边界处面算符和线算符所构成的 2-范畴。那么，显然，对于 $g \neq h$， $\mathfrak{D}_g$ 和 $\mathfrak{D}_h$ 中的面算符之间不存在拓扑界面。此外， $\mathfrak{D}_g$ 包含唯一的单对象。为说明这一点，注意在一个 $G$-对称保护拓扑相中，每个 $M_g$ 都有唯一的边界条件。这是因为 2-范畴 $\mathfrak{D}_g$ 为平凡融合2-范畴 2Vec [42, 43] 提供了一个 $G$-扩展：

$$\mathfrak{D} := \bigoplus_{g\in G} \mathfrak{D}_g \ , \tag{2.2}$$

[3]这里我们假设不存在费米子线算符。我们的分析可以轻易推广到这种情形。

其中 $\mathcal{D}_e = 2\text{Vec}$。特别地，这个扩展范畴是一个融合2-范畴，其中面算符的融合规则遵循按 $G$ 的分次。我们有

$$S_g \times \overline{S_g} \in \mathfrak{D}_e \ , \tag{2.3}$$

对于某个简单曲面算子 $S_g \in \mathfrak{D}_g$ ， $S_g$ 是 $S_g$ 的定向反转。由于 $\mathfrak{D}_e$ 中唯一的简单曲面算子是恒等算符 $\mathbf{1}$，因此我们有 $S_g \times S_g = \mathbb{1}$。所以， $S_g$ 是可逆的。现在，假设 $S_g$ 和 $S'_g$ 是 $\mathfrak{D}_g$ 中的两个简单对象。我们有

$$S_g \times \overline{S'_g} = \mathbb{1} \ . \tag{2.4}$$

由于这些曲面算子是可逆的，因此我们有 $S_g = S'_g$。所以，每个 $\mathfrak{D}_g$ 都包含唯一的简单对象。这表明， $\mathfrak{C}$ 的曲面算子恰好是 $S_g$ ，其中 $g \in G$。此外，它们的融合遵循群乘法规则

$$S_g \times S_h = S_{gh} \ . \tag{2.5}$$

因此，在没有线算符的情况下， $\mathfrak{C}$ 中的曲面算子全都是可逆的，因而会可逆地作用于局域算符。这与如下事实一致： $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$ 是一个 $G$-Dijkgraaf-Witten（DW）理论。通过对 $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$ 的 $\text{Rep}(G)$ 2-形式对称性进行规范化而得到的边界条件，必定是带有某个 4-余循环 $\pi \in Z^4(G, \ U(1))$ 的 $2\text{Vec}_G^\pi$。[4]

### 2.1.2 拓扑面算符的维数约化

在上一节中，我们利用 $\mathfrak{C}$ 的 $3{+}1$维对称拓扑场论论证：若 $\mathfrak{C}$ 不包含线算符，则其中所有面算符都必须是可逆的。在本节中，我们将利用面算符到线算符的维数约化来证明同一结果。对于融合2-范畴，该证明已在 [13], 中给出，并遵循 [9, 12] 的结果。同一陈述的物理证明也在 [44]中作了说明。这里我们重现这一论证。该论证的推广将用于高维。

设 $S \in \mathfrak{C}$ 为一个曲面算符。将其置于 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上并收缩 $S^1$，便在$\Omega\mathfrak{C}$ 中产生一个线算符（见图4）。令 $L_S$ 为该线算符。 $L_S$ 一般而言是一个非简单线算符。它可以理解为曲面算符 $S$ 对恒等线算符$\mathbf{1}$的作用。 $S$ 对$\mathbf{1}$ 的作用显然包含$\mathbf{1}$。我们有

$$L_S = n_S \mathbf{1} + \dots \ . \tag{2.6}$$

其中 $n_S$ 是某个非零整数。此外，若 $S$ 是一个简单曲面算子$n_S = 1$。这是因为 $n_S$ 是位于拓扑点

[4]注意，对于 $\mathfrak{M}$ 一个模张量范畴（模张量范畴），$2\text{Vec}_G^\pi \boxtimes \mathfrak{M}$ 的对称拓扑场论也是一种 $G$-DW理论。然而，在我们的情形中，我们所关注的边界不包含任何线算符。因此，它必须由$2\text{Vec}_G^\pi$来描述。

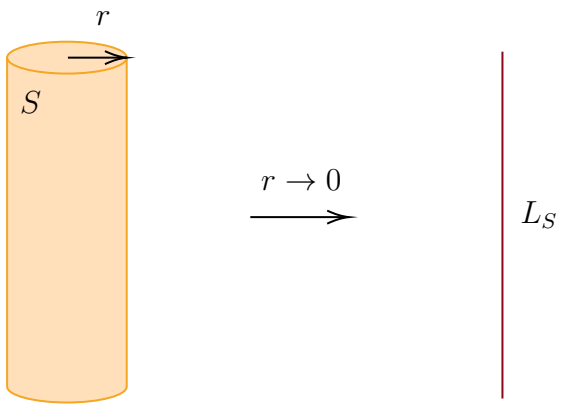


**图4**。考虑作用在 $S^1 \times \mathbf{R}$ 上的曲面算符 $S \in \mathfrak{C}$。当 $S^1$ 的半径趋于零时，我们得到一个线算符 $L_S$。由于算符 $S$ 是拓扑的， $L_S$ 也必须是拓扑的。

处、连接**1** 线与曲面 $S$的算符的向量空间维数。因此，若 $n_S > 1$，则曲面 $S$上必定存在多个拓扑局域算符，这与 $S$ 是简单的假设矛盾。若 $\mathfrak{C}$ 不包含任何非平凡线算符，则对所有 $S$， $L_S = \mathbf{1}$ 。

将曲面算符 $S$ 折叠，得到曲面算符 $S \times S$ （见图5）。显然， $S \times S$ 与恒等曲面算符之间存在一个界面。因此，融合 $S \times S$ 的结果必须包含一个凝聚曲面算符。我们有

$$S \times \bar{S} = C + \dots \,, \tag{2.7}$$

其中 $C$ 是一个凝聚曲面算符。

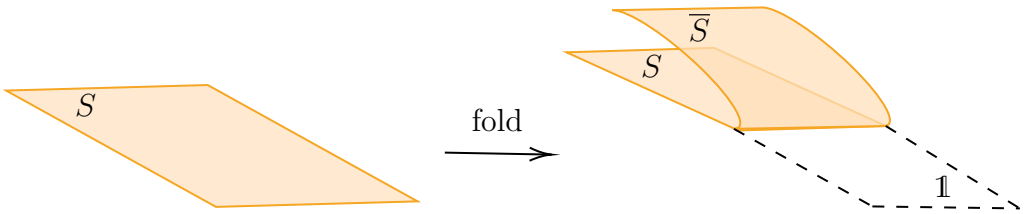


**图5**。折叠一个拓扑的曲面算符 $S$ ，会得到曲面算符 $S \times S$ 与恒等曲面算符 **1** 之间的界面。这表明，融合规则 $S \times S$ 的结果至少必须包含一个凝聚曲面算符。

考虑定义在 $S^1 \times \mathbf{R}$ 上的曲面算符 $S$ 和 $S$ ，使得这两个曲面算符的 $S^1$支撑是同心的。此外，假设 $S$ 的 $S^1$ 支撑半径（记为 $r_S$）大于 $r_S$ 类似定义的量。我们可以通过取 $r_S - r_S \to 0$ 的极限，在 $S^1 \times \mathbf{R}$ 上融合算符 $S$和 $S$，然后缩小所得算符的 $S^1$ 支撑，得到线算符 $L_{S\times S}$。另一种方法是缩小 $S$ 的 $S^1$ 支撑，得到线算符 $L_S$。现在，缩小

$S$ 的$S^1$ 支撑给出了 $S$ 对线算符 $\overline{L}_S$ 的作用。我们有

$$L_{S\times\overline{S}} = \overline{S}(L_S) \ , \tag{2.8}$$

其中，$\overline{S}(L_S)$ 是通过 $S$ 作用于 $L_S$ 获得的拓扑线算符。由于对所有 $S$ 都有 $L_S = \mathbf{1}$，我们得到

$$L_{S\times\overline{S}} = \overline{S}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \ . \tag{2.9}$$

因此，$S \times S$ 必须是一个简单曲面算符。利用（2.7），我们得到

$$S \times \overline{S} = C \ , \tag{2.10}$$

由于 $\mathfrak{C}$ 中不存在非平凡线算符，$C$ 必须是恒等曲面算符。这表明 $\mathfrak{C}$ 中的所有曲面算符都是可逆的。[5] 因此，这些曲面算符对局域算符的作用是可逆的。

## 2.2 一般有限非可逆对称性的作用

在上一节中，我们证明了由融合2-范畴 $\mathfrak{C}$ 描述的非可逆对称性（满足 $\Omega\mathfrak{C} \cong$ Vec）必须以可逆方式作用于局域算符。在本节中，我们将研究一般融合2-范畴对局域算符的作用。我们首先讨论陪集非可逆对称性，然后再考虑一般情形。

### 2.2.1 陪集非可逆对称性

考虑融合2-范畴 $2\mathrm{Vec}_G^{\pi}$，其中 $\pi \in Z^4(G, U(1))$，它描述具有反常 $\pi$ 的 0-形式 $G$ 对称性。我们将实现这一对称性的面算符记为 $S_g$，$g \in G$。考虑一个无反常子群$H$。对于某个 3-上链 $\omega$，有 $\pi|_H = d\omega$。对该子群进行规范化后，我们得到一个融合2-范畴

$$\mathfrak{C}(G, H, \pi, \omega) \ . \tag{2.11}$$

这是由双陪集$H\backslash G/H$实现的对称性所描述的陪集对称性。当 $H$ 是 $G$的非正规子群时，这是一种非可逆对称性。我们有

$$\Omega\mathfrak{C}(G, H, \pi, \omega) \cong \mathrm{Rep}(H) \ , \tag{2.12}$$

[5]对线算符进行维数约化时，类似的结果并不成立。事实上，即使不存在非平凡的拓扑局域算符，拓扑线算符也可能是不可逆的。在这种情况下，将拓扑线算符沿 $S^1$ 进行维数约化，会得到一个实数乘以单位局域算符。这个实数称为该线的量子维数，并满足融合规则。这不同于将余维更低的算符进行维数约化得到线算符的情形；后者必须是简单线算符的线性组合，且系数为非负整数。

这是对偶一形式对称性。设 $S$ 为 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$中的一个单对象。为研究 $S$ 对局域算符的作用，我们引入拓扑规范化界面 $\mathcal{I}$，它介于 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$与$2\mathrm{Vec}_G^\pi$之间，由对1-形式对称性$\mathrm{Rep}(G)$进行规范化而得到（见图6）。 $\mathcal{I}$ 可以理解为从 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$中的算符到$2\mathrm{Vec}_G^\pi$的映射，其中 $\mathcal{I}(S)$是 $S$在规范化$\mathrm{Rep}(H)$下的像。现在，复合 $\mathcal{I}^\dagger\times\mathcal{I}$是 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$[44, 45]中的凝聚曲面算子。这是因为$2\mathrm{Vec}_G^\pi$ 是通过在 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$中插入$\mathrm{Rep}(H)$算符网络而得到的。将 $\mathcal{I}$与 $\mathcal{I}^\dagger$融合后，该网络成为 $\mathcal{I}^\dagger\times\mathcal{I}$表面上的算符网络，而这正是在二维流形上对1-形式对称性$\mathrm{Rep}(H)$进行高阶规范化所得到的曲面算符。由于 $\mathcal{I}^\dagger\times\mathcal{I}$ 是凝聚缺陷，它不能作用于局域算符。现在，考虑$S$ 对局域算符的作用。 $S$ 的作用与该算符的作用相同

$$(\mathcal{I}^\dagger\times\mathcal{I})\times S\times(\mathcal{I}^\dagger\times\mathcal{I})=\mathcal{I}^\dagger\times(\mathcal{I}\times S\times\mathcal{I}^\dagger)\times\mathcal{I}=\mathcal{I}^\dagger\times S'\times\mathcal{I}\ , \tag{2.13}$$

其中 $S':=\mathcal{I}\times S\times\mathcal{I}^\dagger$ 是$2\mathrm{Vec}_G^\pi$中的一个曲面算符。因此， $S$对局域算符（例如 $O$）的作用由下式给出

$$S(O)=(\mathcal{I}^\dagger\times S'\times\mathcal{I})(O)=\mathcal{I}^\dagger(S'(O))\ , \tag{2.14}$$

其中在第二个等号处，我们利用了界面 $\mathcal{I}$ 不对局域算符起作用这一事实，因为它通过规范化1-形式对称性来作用。 $S'$ 不一定是$2\mathrm{Vec}_G^\pi$中的单对象。一般而言，它分解为可逆曲面的直和。假设

$$S'=\sum_{g\in G}n_gS_g\ , \tag{2.15}$$

where $n_g$ 是一个非负整数。 $S$ 对局域算符的作用由下式给出

$$S(O)=\mathcal{I}^\dagger\left(\sum_{g\in G}n_gS_g(O)\right)\ . \tag{2.16}$$

这表明， $S$ 的作用由可逆曲面$S_g$ 对局域算符的作用以及界面 $\mathcal{I}^\dagger$的作用共同决定。界面 $\mathcal{I}^\dagger$ 的作用相当于算符在对0-形式对称性 $H$进行规范化后的像。若算符 $\sum_{g\in G}n_gS_g$（$O$）在 $H$ 0-形式对称性下带荷，则它会被 $\mathcal{I}^\dagger$作用禁闭。换言之，此类算符成为非真实点算符。显然，一般而言， $S$ 对局域算符的作用是不可逆的。

上述讨论表明，一般陪集对称算符对局域算符的作用可以分解为0-形式对称性的作用和规范化界面的作用。鉴于陪集对称性是通过对$2\mathrm{Vec}_G^\pi$ 进行规范化得到的，这当然并不令人意外。在下一节中，我们将发现，这种作用

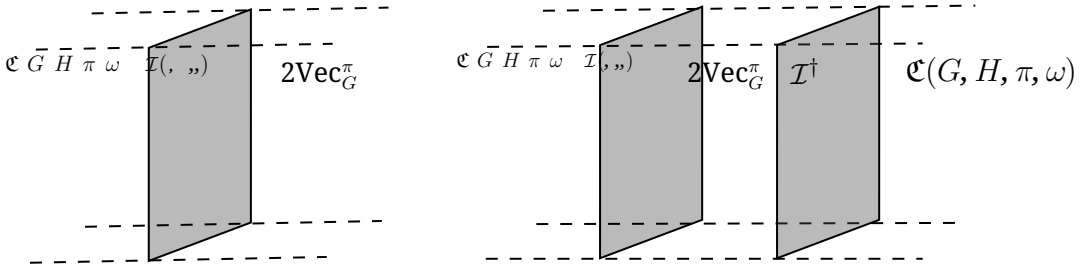


**图6**。左：规范化界面 $I$ 分隔 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$与$2\mathrm{Vec}_G^\pi$。右：界面 $\mathcal{I}^\dagger\times\mathcal{I}$的融合是 $\mathfrak{C}(G,H,\pi,\omega)$中的面算符。

一般非可逆对称性对局域算符的作用也可以分解为可逆曲面算子的作用和规范化界面的作用。

### 2.2.2 一般情形

一般而言，非可逆对称性 $\mathfrak{C}$ 包含一些线算符 $\Omega\mathfrak{C}=\mathcal{C}$。令$\mathcal{C}_0$ 为这样一个线算符子范畴，其中的线算符与 $\mathcal{C}$中的所有线算符编织时均为平凡。$\mathcal{C}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 中的透明线算符集合，因为它们无法通过与其他线算符编织而被检测到。对于某个有限群$G$，我们有 $\mathcal{C}_0\cong\mathrm{Rep}(G)$。考虑 $\mathfrak{C}$与另一个融合2-范畴$\mathfrak{D}$ 之间的拓扑界面 $\mathcal{I}$，后者由规范化 $\mathcal{C}_0$ 1-形式对称性得到。沿用上一小节的讨论，一般曲面算符 $S$ 对局域算符 $O$的作用可写为

$$S(O)=(\mathcal{I}^\dagger\times S'\times\mathcal{I})(O)=\mathcal{I}^\dagger(S'(O))\ , \tag{2.17}$$

其中 $S':=\mathcal{I}\times S\times\mathcal{I}^\dagger$ 是 $\mathfrak{D}$中的一个曲面算符。根据构造，$\Omega\mathfrak{D}$中不存在透明线算符。因此，$\Omega\mathfrak{D}$是一个模张量范畴（MTC）。考虑 $\mathfrak{D}$中的一个简单曲面算符 $Q$。假设其对恒等线算符 $\mathbf{1}$ 的作用满足

$$Q(\mathbf{1})=n_Q\mathbf{1}\quad\text{and}\quad\overline{Q}(\mathbf{1})=n_{\overline{Q}}\mathbf{1}\ , \tag{2.18}$$

对于某些非负整数 $n_Q$，$n_{\overline{Q}}$。由于 $Q$ 是一个简单曲面算子，$n_Q=n_{\overline{Q}}=1$。因此，$L_Q$ 第2.1.2节中为该曲面算子引入的线算符是$\mathbf{1}$。沿用那里的论证，我们得到

$$Q\times\overline{Q}=C\ , \tag{2.19}$$

其中，$C$ 是一个凝聚曲面算子。[44] 表明，在非可逆凝聚曲面 $C$的作用下，要么某个非平凡线算符被映射为平庸线$\mathbf{1}$，要么平庸线被映射为某个非平凡线算符。换言之，$C$ 或$C$ 必定会对$\mathbf{1}$产生非平凡作用。鉴于 $Q$ 和$Q$ 在恒等线算符上的作用是平凡的，$C$ 必定是一个可逆凝聚

曲面。这意味着 $Q$ 是可逆的。这个论证表明，在 $\mathfrak{D}$ 中，对模张量范畴 $\Omega\mathfrak{D}$ 里的线算符作用平凡的所有简单曲面算子都是可逆的。

另一方面，假设 $Q$ 非平凡地作用于$\mathbf{1}$。那么它必定是模张量范畴 $\Omega\mathfrak{D}$的非可逆对称性。模张量范畴的所有忠实对称性都由凝聚曲面算子实现 [14, 46]。因此，我们有

$$Q = P \times C \ , \tag{2.20}$$

其中， $P$ 是一个可逆曲面算子，它在 $\Omega\mathfrak{D}$ 上平凡作用，而 $C$ 是一个凝聚曲面算子。这一讨论表明，上述定义的曲面算子$S'$ 具有如下形式

$$S' = \sum_i n_i (P_i \times C_i) \ . \tag{2.21}$$

其中， $n_i$ 是非负整数，并且求和遍及 $\mathfrak{D}$ 中的某些简单曲面算子，这些算子具有 $P_i \times C_i$的形式，其中 $P_i$ 是可逆的，而 $C_i$ 是凝聚曲面。 $S'$ 在局域算符上的作用完全由可逆曲面算子 $P_i$ 在局域算符上的作用决定。因此，我们有

$$S(O) = \mathcal{I}^\dagger(S'(O)) = \mathcal{I}^\dagger\left(\sum_i n_i (P_i \times C_i)(O)\right) = \mathcal{I}^\dagger\left(\sum_i n_i P_i(O)\right) \ . \tag{2.22}$$

一般非可逆对称性 $S$ 的作用由可逆曲面算子 $P_i$ 的作用以及规范化界面 $\mathcal{I}^\dagger$共同决定。

## 2.3 2+1维中的无反常非可逆对称性

由融合2-范畴 $\mathfrak{C}$ 描述的非可逆对称性，若允许一个平庸能隙相，就称为无反常的。在数学上，这要求$\mathfrak{C}$ 存在一个纤维 2-函子 [47, 48]。显然，如果 $\Omega\mathfrak{C}$中的拓扑线算符彼此之间存在非平凡编织，那么 $\mathfrak{C}$就不可能允许一个平庸能隙相，因为这种非平凡编织是由线算符实现的 1-形式对称性的反常。因此，无反常的融合2-范畴 $\mathfrak{C}$ 满足[6]

$$\Omega\mathfrak{C} = \mathrm{Rep}(H) \tag{2.23}$$

对于某个有限群 $H$。这表明，无反常非可逆对称性都是陪集对称性。这类融合2-范畴可以通过规范化某个

[6]我们假设不存在透明费米子线算符，但这一讨论很容易推广到这种情况。

可逆零形式对称性 $G$ 的子群而得到，其中带有某种反常 $\pi \in Z^4(G,\ U(1))$。[7]

上述讨论表明，在2+1d 中，无反常非可逆对称性并非本质上不可逆，因为可以通过拓扑操作 [50]使其变为可逆。这不同于 1+1d，在那里，某些无反常非可逆对称性无法由有限群得到 [41, 51, 52]。在第 3.3节中，我们将研究 3+1d 中的无反常非可逆对称性。

# 3 对 3+1d 中局域算符的作用

在 3+1d 中，非可逆对称性由一个融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 描述，其对象为拓扑算符 [11, 26, 53]。这些算符承载拓扑膜、面算符和线算符的数据。拓扑面算符和线算符构成一个编织融合2-范畴，记作 $\Omega\mathscr{C}$。拓扑线算符构成一个对称融合范畴，记作 $\Omega^2\mathscr{C}$。由于拓扑线在 3+1d 中的编织是平凡的，我们必须有

$$\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathrm{Rep}(H)\ , \tag{3.1}$$

对于某个有限群 $H$。拓扑界面的存在为膜算符定义了一个等价关系。这些膜算符的等价类是 $\mathscr{C}$ 的舒尔分量，它们构成集合 $\pi_0(\mathscr{C})$。类似地，以相同方式定义的面算符等价类将记为 $\pi_0(\Omega\mathscr{C})$。

唯一能够对局域算符产生非平凡作用的算符，是支撑在时空三维子流形上的拓扑膜算符。在下面的小节中，我们将找出拓扑膜算符融合规则的约束，并利用这些约束确定它们对局域算符的作用。

## 3.1 不含线算符的非可逆对称性

考虑一个由融合 3-范畴$\mathscr{C}$ 描述的 3+1d 量子场论中的非可逆对称性。我们假设不存在拓扑线算符。也就是说

$$\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathrm{Vec}\ . \tag{3.2}$$

与 2+1d 中不同，这一假设并不会使所有其他拓扑算符都变为可逆。事实上，满足这一约束的一类重要非可逆对称性是对偶缺陷 [17, 18]。我们将证明，膜算符 $\pi_0(\mathscr{C})$ 的等价类集合可以赋予有限群 $G$ 的群结构，并且局域算符构成一个 $G$-表示。我们将利用 $\mathscr{C}$ 的 4+1d 对称拓扑场论（SymTFT） $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 来证明这一点。我们还将给出一个独立论证

[7]这类融合2-范畴称为群论型。注意，并非所有群论型融合2-范畴都是无反常的。其充要条件在 [49] 中推导。

说明如何利用膜算符在 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上的维数约化，得到对局域算符的可逆作用。

### 3.1.1 来自 4+1d 对称拓扑场论的 $\pi_0(\mathscr{C})$ 上的类群融合

考虑 $\mathscr{C}$ 的对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$，它允许一个规范边界条件$\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$，在该边界条件上，拓扑算符构成融合 3-范畴 $\mathscr{C}$。考虑 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中由对称融合范畴描述的拓扑线算符

$$\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \cong \mathrm{Rep}(G)\ , \tag{3.3}$$

其中 $G$是某个有限群。让我们来理解对称拓扑场论中的膜算符结构。为此，注意到对 $\mathrm{Rep}(G)$ 对称性进行规范化后，我们得到一个由融合 3-范畴 $\mathscr{D}$描述的新拓扑量子场论。也就是说，范畴 $\mathscr{D}$ 描述规范化理论中的真实膜算符，以及其面算符和线算符。存在一个作用于 $\mathscr{D}$ 上的对偶 0-形式 $G$ 对称性，由四维拓扑算符实现，例如 $K_g$、 $g \in G$。由于 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 是一个拓扑量子场论，其中所有非凝聚膜算符都会与 $\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中至少一个拓扑线算符发生非平凡编织。因此，对 $\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 进行规范化后，所有非凝聚膜算符都会被禁闭。换言之，它们成为 $K_g$ 的边界条件。 $K_g$ 的边界条件给出 $\mathscr{D}$ 的一个 $G$- 扩张，其形式为

$$\mathscr{D}_G := \bigoplus_{g\in G} \mathscr{D}_g\ , \tag{3.4}$$

其中， $\mathscr{D}_g$ 是位于 $K_g$边界上的拓扑算符所构成的3-范畴，且 $\mathscr{D}_e := \mathscr{D}$，其中 $e$ 是群 $G$的单位元。 $\mathscr{D}_G$ 中膜算符的融合规则按 $G$分级。拓扑量子场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$是通过对 $\mathscr{D}$的0-形式对称性 $G$ 进行规范化得到的。$\mathcal{Z}(\mathscr{D})$中的所有非凝聚膜算符都源自 $K_g$ 算符的边界条件。

考虑体到边界映射 $F_{\mathscr{C}}$： $\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$，它将 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$中的体算符映射到边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 上的算符。由于 $\mathscr{C}$不包含任何非平凡的拓扑线算符，因此我们有

$$F_{\mathscr{C}}(\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C})) = F_{\mathscr{C}}(\mathrm{Rep}(G)) \cong \mathrm{Vec}\ . \tag{3.5}$$

换句话说，$\Omega\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的所有线算符都可以终止于边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 上。边界条件 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 可理解为 SymTFT$\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 与通过规范化 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 的某个对称性而产生的对称保护拓扑相之间的界面，该对称性由拉格朗日代数 $L_{\mathscr{C}}$ 指定。由于 $\Omega\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的所有线算符都可以终止于 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 上，它们在规范化后的理论中变得平庸。因此，它们属于拉格朗日代数 $L_{\mathscr{C}}$。根据上述讨论，我们发现 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的所有膜算符都被禁闭在边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 上。因此，所得到的对称保护拓扑相必定具有一个

由四维算符 $K_g$实现的对偶0-形式对称性。 $\mathscr{C}$ 中的膜算符由边界条件的融合 3-范畴 $\mathscr{D}_g$ 确定，这些边界条件对应于 $K_g$ 算符。

假设 $M_1$ 与 $M_2$ 是 $\mathscr{C}$中的两个膜算符，它们之间允许存在拓扑界面 $I$ 。假设 $M_1$ 包含于融合 3-范畴 $\mathscr{D}_g$ 中，而$M_2$ 位于 $\mathscr{D}_h$中。假设 $M_1$ 与 $M_2$ 沿拓扑界面 $I$相连。沿该界面折叠后，我们发现膜算符$M_1 \times M_2$ 必须与恒等膜算符存在界面（见图7）。因此，我们得到融合规则

$$M_1 \times \overline{M_2} = C + \dots \ , \tag{3.6}$$

其中 $C$是某个凝聚膜算符，而.....表示融合结果中的其他膜算符。由于 $C$ 与恒等膜算符存在界面，它必须属于融合 3-范畴 $\mathscr{D}_e$，其中 $e$是群 $G$的单位元。为与该融合规则一致，我们必须有 $K_g \times K_h = K_e$。因此， $h = g^{-1}$ 且 $M_2 \in \mathscr{D}_g$。此外，为使融合(3.6)与 $K_g \times K_h = K_e$一致，其右端必须只包含 $\mathscr{D}_e = \mathscr{D}$中的膜算符。由于 $\mathscr{D}$ 描述的是一个 4+1维拓扑量子场论的真正的拓扑算符，其中的膜算符与线算符必须具有非退化链接。因此，由于按构造有$\Omega^2\mathscr{D} \cong \mathsf{Vec}$， $\mathscr{D}$ 不包含任何真正的非凝聚膜算符。这表明 $M_1 \times M_2$必须是凝聚膜算符。上述讨论表明，膜算符的等价类集合 $\pi_0(G)$可以由群元素 $g \in G$忠实标记。此外，分别属于由 $g$ 和 $h$标记的等价类的两个膜算符 $M_1$ 与 $M_2$ 的融合，必须得到由 $gh$标记的等价类中的一个膜算符。因此，集合 $\pi_0(G)$可以配备类群融合规则。该群为$\mathsf{Z}_2$ 的融合 3-范畴的例子包括3Vec$_{\mathbb{Z}_2}$ 和Tambara–Yamagami三范畴 [17, 18, 53]。某些在 $\pi_0(G)$上具有非阿贝尔群结构的融合 3-范畴，作为类 $\mathcal{S}$ 理论 [54, 55]的对称性出现。

回顾一下，膜算符对局域算符的作用仅取决于 $\pi_0(\mathscr{C})$ 中的等价类。特别地，包含恒等算符的等价类中的所有膜算符都是凝聚算符，它们对局域算符的作用是平凡的。由于 $\pi_0(\mathscr{C})$ 中等价类的代表元遵循 $G$ 融合规则，局域算符构成一个 $G$-表示。因此，对局域算符的作用是可逆的。

### 3.1.2 拓扑膜算符的维数约化

令 $M$ 是支撑在 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上的膜算符。将 $S^2$ 收缩后，我们得到某个拓扑线算符 $L_M$。假设唯一的拓扑线算符是

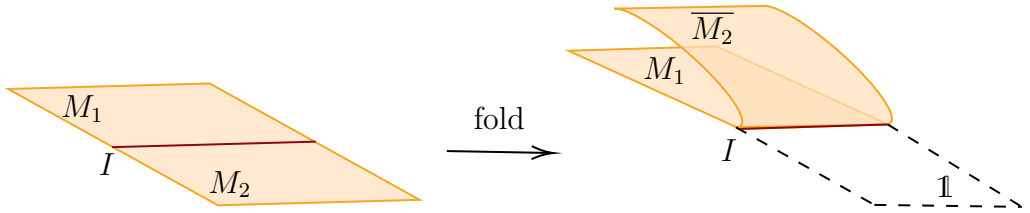


**图 7**。将左侧膜算符 $M_1$ 和 $M_2$ 的构型沿界面 $I$ 折叠后，我们发现，膜算符 $M_1 \times M_2$ 与平凡膜算符 $\mathbf{1}$ 之间必定存在一个界面。因此，融合 $M_1 \times M_2$ 必须包含一个凝聚膜算符。

恒等线算符，那么我们必有

$$L_M = n_M \mathbf{1} \ \forall M, \tag{3.7}$$

其中 $n_M$ 是某个非负整数重数。运用与2+1d 中相同的论证，我们发现，如果膜算符 $M$ 是简单的，那么整数 $n_M$ 必须为 $\mathbf{1}$。因此， $S^2 \times \mathbb{R}$ 上的所有膜算符都可以降维为平凡线算符 $L_M = \mathbf{1}$。现在，考虑融合规则

$$M \times \overline{M} = C + \dots \tag{3.8}$$

其中 $C$ 是某个凝聚膜算符。将等式两边同时降维后，我们发现除非满足以下条件，否则会产生矛盾

$$M \times \overline{M} = C \ . \tag{3.9}$$

考虑 $M$ 对某个局域算符 $O$ 的作用。由于凝聚算符$C$ 对 $O$ 的作用是平凡的，我们发现 $M$ 的作用必定是可逆的，其逆作用为 $M$。因此，我们发现膜算符对局域算符的作用是可逆的。

## 3.2 一般有限非可逆对称性的作用

考虑由融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 描述的 3+1d 中的一般有限非可逆对称性。拓扑线算符构成 $\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathrm{Rep}(H)$。对这一 $\mathrm{Rep}(H)$ 2-形式对称性进行规范化后，我们得到由融合 3- 范畴 $\mathscr{D}$ 描述的对称性。我们有 $\Omega^2\mathscr{D} \cong \mathrm{Vec}$。因此，根据上一节的结果，膜算符 $\pi_0(\mathscr{D})$ 的等价类由有限群 $G$ 忠实地标记，而膜算符在 $\mathscr{D}$ 中对局域算符的作用是可逆的。考虑通过对 $\mathrm{Rep}(H)$ 2-形式对称性进行规范化而得到的、位于 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 之间的拓扑规范化界面 $\mathcal{I}$。类似于我们在 2+1d 中关于规范化界面的讨论，请注意，$\mathcal{I}^\dagger \times \mathcal{I}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的凝聚膜算符，它由对

3-流形上的 Rep($H$) 2-形式对称性进行高阶规范化得到。

设 $M$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个膜算符。考察它对局域算符 $O$ 的作用。我们有

$$M(O) = ((\mathcal{I}^\dagger \times \mathcal{I}) \times M \times (\mathcal{I}^\dagger \times \mathcal{I}))(O) = (\mathcal{I}^\dagger \times M' \times \mathcal{I})(O) = (\mathcal{I}^\dagger \times M')(O) \ , \tag{3.10}$$

这里我们用到了这样一个事实： $\mathcal{I}$ 通过规范化 Rep($H$) 2-形式对称性来作用，因此不会作用于局域算符。这里， $M'$ 是 $\mathscr{D}$ 中的一个膜算符，不一定是简单算符。考虑它的分解

$$M' = \sum_{U \in \mathscr{D}} n_U U \ , \tag{3.11}$$

其中 $n_U$ 是非负整数， $U$ 是 $\mathscr{D}$ 中的一个简单膜算符。 $M$ 对 $O$ 的作用可写为

$$M(O) = (\mathcal{I}^\dagger \times M')(O) = \mathcal{I}^\dagger \left( \sum_{U \in \mathscr{D}} n_U U(O) \right) . \tag{3.12}$$

注意，简单膜算符 $U \in \mathscr{D}$ 对局域算符的作用是可逆的，因为 $\mathscr{D}$ 是一个不含非平凡线算符的融合 3-范畴。这表明，一般非可逆对称性 $M$ 对局域算符的作用可分解为某些膜算符 $U$ 的作用（这些膜算符对局域算符的作用是可逆的），以及规范化界面 $\mathcal{I}^\dagger$ 的作用。

## 3.3 3+1d 中的无反常非可逆对称性

考虑一个 3+1d 量子场论中由融合 3-范畴$\mathscr{C}$描述的拓扑算符。若该理论存在平庸能隙相，则它是无反常的。从数学上讲，这应对应于 $\mathscr{C}$ 存在一种恰当的纤维 3-函子概念。本节中，我们将假设 $\mathscr{C}$ 无反常，并推导这一假设的一些推论。我们首先考察不含拓扑线算符的非可逆对称性。我们将证明，通过拓扑操作，可以使 $\mathscr{C}$中的所有拓扑算符都变为可逆。这表明，在 3+1d 中，不含拓扑线算符的无反常非可逆对称性并非本质上不可逆。这推广了 3+1d [25]中关于对偶缺陷的结果。最后，我们将研究一般的无反常非可逆对称性，并推导出关于拓扑线算符的一些约束。

在 3+1 维中，对偶对称性的反常已在 [56–58] 中得到研究。

### 3.3.1 不含拓扑线算符的非可逆对称性 s

考虑一个融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ ，它描述了 3+1维中的一种非可逆对称性，该对称性由拓扑膜和曲面实现。我们将假设唯一的

拓扑线算符是恒等线算符。在这种情况下，我们在第3.1 节了解到，可以在连通分支 $\pi_0(\mathscr{C})$上定义一个由有限群 $G$ 给出的类群融合规则，并且具有这种对称性的量子场论的局域算符属于一个 $G$-表示。直观地说，可以猜想，如果这个群 $G$ 存在反常，那么这个融合 3-范畴必定也存在反常。本节将通过证明融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 可以转化为另一个融合 3-范畴 $\mathscr{D}$，使得 $\mathscr{D}$ 的每个连通分支都至少包含一个可逆膜算符，来将这一直觉精确化。我们将证明，这些可逆膜算符必定实现一种无反常的 $G$ 0-形式对称性。

设融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 无反常。考虑由融合 3-范畴 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 和对应于 $\mathscr{C}$ 的典范拉格朗日代数 $L_{\mathscr{C}}$ 描述的 $4{+}1$d 对称拓扑场论。由于 $\mathscr{C}$ 无反常，$\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 必须具有一个磁性拉格朗日代数 $L_{\mathscr{E}}$，其中 $\mathscr{E}$ 是由 $L_{\mathscr{E}}$ 定义的有能隙边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 上拓扑算符的融合 3-范畴。该代数与 $L_{\mathscr{C}}$ 磁性对应，意味着能够终止于 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 的算符不能终止于 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$，反之亦然。通过对具有边界条件 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ [59, 60] 的对称拓扑场论进行区间紧化，可以得到实现对称性 $\mathscr{C}$ 的平庸能隙相。所得相必须只有一个拓扑局域算符。因此，对称拓扑场论中的线算符由 $\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \cong \mathrm{Rep}(G)$ 标记，其中能够终止于边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 的线算符不能终止于边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$。由于 $\mathscr{C}$ 不包含任何拓扑线算符，对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的所有线算符都必须能够终止于边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$。这意味着 $\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的所有非平凡线算符都不能终止于 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$。因此，体到边界映射 $F_{\mathscr{E}}\colon \mathcal{Z}(\mathscr{C}) \to \mathscr{E}$ 给出

$$F_{\mathscr{E}}(\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C})) \cong \mathrm{Rep}(G)\ . \tag{3.13}$$

请注意，一般而言，体到边界映射 $F_{\mathscr{C}}$ 预期是满射。这意味着，$\mathscr{C}$ 中的所有简单拓扑算符都必须出现在某个对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的拓扑算符经体到边界映射得到的像中。然而，当 $F_{\mathscr{C}}$ 仅作用于 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 中的拓扑线算符时，它一般不是满射。例如，若 $\mathscr{E}$ 描述某个拓扑量子场论的对称性，那么对称拓扑场论$\mathcal{Z}(\mathscr{E})$中不含任何非平庸的真正的拓扑线算符 [11]。这是因为 $\mathscr{E}$ 含有具有非退化链接的拓扑面算符和线算符。然而，这些算符无法作为真正的拓扑算符存在于 $4{+}1$维对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{E})$ 中，因为拓扑面算符和线算符在$4{+}1$维中编织平庸。[8] 在这种情况下，$F_{\mathscr{E}}(\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{E})) \cong \mathrm{Vec}$，而对于非平庸的$3{+}1$维拓扑量子场论，$\Omega^2\mathscr{E}$是非平庸的。一般而言，$F_{\mathscr{E}}(\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{E}))$ 是 $\mathscr{E}$ 中与所有面算符编织平庸的线的子范畴。在我们的设定中，$\mathscr{E}$ 是一个融合 3-范畴，它

[8] 与曲面发生非平凡编织的线算符，源自对称拓扑场论中的扭曲扇区线算符。关于这一事实在 $2{+}1$d 陈-西蒙斯理论的 $3{+}1$d 对称拓扑场论中的情形，请参见 [61]。

由于 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 是 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$的磁性边界条件，因此它是无反常的。因此， $\mathscr{E}$ 中曲面与线之间的编织必须是平庸的。否则，非平庸的编织就是一种 1-形式/2-形式对称性混合反常，它会阻碍平庸能隙相的存在。这一讨论意味着

$$\Omega^2\mathscr{E} = F_{\mathscr{E}}(\mathrm{Rep}(G)) \cong \mathrm{Rep}(G)\ . \tag{3.14}$$

定义通过对 $\mathscr{E}$ 的 Rep($G$) 2-形式对称性进行规范化而得到的融合 3-范畴 $\mathscr{D}$ 。我们有

$$\Omega^2\mathscr{D} \cong \mathrm{Vec}\ . \tag{3.15}$$

此外，由于 $\mathscr{D}$ 是通过对 $\mathscr{E}$ 的一个对称性进行规范化而得到的，因此必有

$$\mathcal{Z}(\mathscr{D}) \cong \mathcal{Z}(\mathscr{E}) \cong \mathcal{Z}(\mathscr{C})\ . \tag{3.16}$$

因此，$\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{D}) \cong \Omega^2(\mathcal{Z}(\mathscr{C})) \cong \mathrm{Rep}(G)$。将第 3.1 节中的结果应用于 $\mathscr{D}$，我们发现舒尔分量 $\pi_0(\mathscr{D})$ 由群 $G$ 标记。此外，由于 $\mathscr{D}$ 是通过对 $\mathscr{E}$ 的 Rep($G$) 2-形式对称性进行规范化而得到的， $\mathscr{D}$ 必须包含一个无反常的对偶 $G$ 0-形式对称性。换言之， $\mathscr{D}$ 包含一个形如 $3\mathrm{Vec}_G$ 的融合3-子范畴。这意味着膜算符 $\pi_0(\mathscr{D})$ 的等价类各自都包含一个可逆代表元。

上述讨论表明，存在一种拓扑操作，可以从融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 变换到 $\mathscr{D}$ ，使膜算符在凝聚缺陷意义下可被变为可逆。因此，一个没有拓扑线算符的无反常融合 3-范畴$\mathscr{C}$ 是非内禀不可逆的。

### 3.3.2 一般情形

考虑一个一般的融合 3-范畴 $\mathscr{C}$，其中

$$\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathrm{Rep}(H)\ , \tag{3.17}$$

对某个有限群 $H$。假设 $\mathscr{C}$ 无反常。实现 $\mathscr{C}$ 的平庸能隙相可以由对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 的区间紧化得到，其边界条件为 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$，其中 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 是磁性边界条件，其上的拓扑算符的融合 3-范畴由 $\mathscr{E}$ 给出。令

$$\Omega^2\mathscr{E} \cong \mathrm{Rep}(K)\ , \tag{3.18}$$

对于某个有限群 $K$。此外，令 $\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \cong \mathrm{Rep}(G)$。由于 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 与 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$是磁性的，属于 $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ 且可在 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 处终止的线算符 $L_\pi$ 不能在$\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$处终止。考虑体到边界映射 $F_{\mathscr{C}}\colon \mathcal{Z}(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$，它描述了体内对称拓扑场论中的算符如何映射到边界条件$\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$上的算符。按照构造，对对称拓扑场论中的拓扑线算符作用时，这一

映射必须是

$$F_{\mathscr{C}}(\mathrm{Rep}(G)) \cong \mathrm{Rep}(H)\ . \tag{3.19}$$

由于假设 $\mathscr{C}$ 是无反常的，因此该映射在拓扑线算符上必须是满射。具体而言，该映射为 $F_{\mathscr{C}}(L_\pi) = L_{\pi|_H}$，其中 $\pi|_H$ 是表示 $\pi \in \mathbf{Rep}(G)$ 在子群 $H$ 上的限制。映射 $F_{\mathscr{C}}$ 满射的原因是，$H$ 的所有不可约表示都包含在 $\pi|_H$ 中，其中 $\pi|_H$ 对应某个不可约表示 $\pi \in \mathbf{Rep}(G)$。类似地，对于边界条件 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$，我们得到

$$F_{\mathscr{E}}(\mathrm{Rep}(G)) \cong \mathrm{Rep}(K)\ , \tag{3.20}$$

由于假设 $\mathscr{E}$ 也是无反常的（假设 $\mathscr{C}$ 是无反常的），该映射在拓扑线算符上同样是满射。此映射通过将 $G$ 的表示限制到子群 $K$ 上给出。考虑 $\mathscr{C}$ 中的线算符 $L_\rho$，其中 $\rho \in \mathbf{Rep}(H)$。对称拓扑场论中的线算符若在边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 上变为包含 $L_\rho$ 的线算符，则这些线算符构成的集合为

$$X_{H,\rho} := \{L_\pi, \pi \in \mathrm{Rep}(G) \mid \pi \in \mathrm{Ind}_H^G(\rho)\}\ . \tag{3.21}$$

由于边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 相对于 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$是磁性的，因此 $X_{H\,\text{中},\,\mathbf{1}}$ 唯一能够终止于 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 的线算符是平凡线算符（见图 8）。考虑线算符

$$L = \sum_{\pi \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1})} n_\pi L_\pi\ , \tag{3.22}$$

其中，$n_\pi$ 是不可约表示 $\pi \in \mathbf{Ind}_H^G(\mathbf{1})$ 的重数。将 $L$ 与边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 融合后，在$\mathscr{E}$中只能产生一个恒等线算符。我们有

$$F_{\mathscr{E}}(L) = \mathbf{1} + \ldots \tag{3.23}$$

由于 $F_{\mathscr{E}}$ 在线算符上的作用由限制映射给出，因此我们有

$$\mathrm{Res}_K^G L = \mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}) = \mathbf{1} + \ldots \tag{3.24}$$

诱导表示的限制可以使用麦基限制公式明确确定（例如，参见 [62]）

$$\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}) = \sum_{g \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{{}^gH\cap K}^K({}^g\mathbf{1})\ , \tag{3.25}$$

其中 ${}^gH := gHg^{-1}$，${}^g\mathbf{1} = \mathbf{1}$ 是对平凡表示的共轭作用。由平凡表示诱导出的表示在其分解为不可约表示时总是包含平凡表示。因此，对于

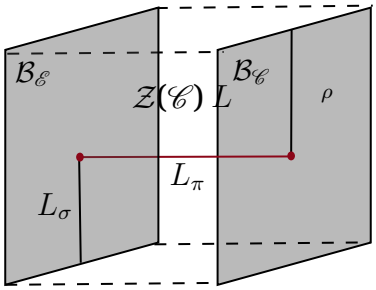


**图8**。考虑对具有有能隙边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 和 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 的对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 进行区间紧化，可得到具有 $\mathscr{C}$ 对称性的平庸能隙相。体线算符 $L_\pi$（其中 $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$）在边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 上产生线算符 $L_\rho$，且 $\rho \in \mathrm{Res}^G_H(\pi)$。类似地，它在边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$ 上产生线算符 $L_\sigma$，且 $\sigma \in \mathrm{Res}^G_K(\pi)$。对于平庸能隙相，任意非平庸的 $\pi$对应的平庸线不能同时属于 $\mathrm{Res}^G_H(\pi)$ 和 $\mathrm{Res}^G_K(\pi)$。

要使上述公式与要求（3.24）保持一致，我们必须有

$$|K\backslash G/H| = 1 \tag{3.26}$$

对于 $g \in G$，双陪集的大小为

$$|KgH| = \frac{|K||H|}{|K \cap {}^gH|} \ . \tag{3.27}$$

由于不同群元素对应的双陪集要么相等，要么不相交，因此若要使 $K\backslash G/H$ 成为单元素集合，必须有

$$|KeH| = |G| \ . \tag{3.28}$$

这意味着，

$$\frac{|K||H|}{|K \cap H|} = |G| \ . \tag{3.29}$$

现在，我们将证明，边界条件 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$和 $\mathcal{B}_{\mathscr{E}}$若要彼此为磁性边界条件，群 $H$ 和 $K$ 必须满足 $H \cap K = \{e\}$，其中 $e$ 是群 $G$的单位元。为此，注意到边界条件 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ 是通过对由拉格朗日代数 $L_{\mathscr{C}}$给出的 SymTFT $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 的一个对称性进行规范化而得到的。可以在边界上终止的线算符集合为集合$X_{H,\ \mathbf{1}}$，其中包含线算符 $L_\pi$，这里 $\pi \in$属于 $\mathrm{Rep}(G)$，且 $\pi|_H$ 包含$H$的平凡表示。这些线算符构成了产生有隙边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$所规范化的对称性 $L_{\mathscr{C}}$的一部分。在 4+1维拓扑量子场论中，拓扑线算符与3维膜算符发生非平凡编织。膜算符的连通分支由群 $G$的共轭类标记，例如 $M([g])$。该膜算符与线算符 $L_\pi$ 之间的编织由特征标 $\chi_\pi([g])$决定。

对$X_H$,1中的线进行规范化时，这些膜算符中有一些会变成完全受限的（非真实）算符。换言之，它们会附着在实现对偶0-形式对称性的四维膜算符的边界上。设 $[h]$ 是一个包含某个 $h \in H$的共轭类，则膜算符 $M([h])$不会因对$X_H$,1进行规范化而完全受限，因为 $\pi|_H$ 包含平凡表示。例如，假设 $H$ 是 $G$的正规子群，那么$X_H$,1是 Rep($G$)的一个融合子范畴，且与 Rep($G/H$)等价。在这种情况下，$\rho \in X_H$,1限制到 $H$ 上时满足$\rho|_H$ =dim($\rho$)1，其中1是 $H$的平凡不可约表示。因此，对于 $h \in H$ ，膜算符 $M([h])$与$X_H$,1中的所有线算符都平凡编织，并且在对$X_H$,1进行规范化后仍是真实膜算符。更一般地，当 $H$ 不是正规子群时，集合$X_H$,1中的线算符在融合下不封闭。不过，$X_H$,1在 Rep($G$)中构成一个可规范化代数对象（例如，参见 [63, 第 2]节）。对$X_H$,1进行规范化后， $M([h])$会变成膜算符的直和，其中一些是真实膜算符，另一些则是非真实膜算符。规范化后， $M([h])$的像中存在这些真实膜算符，这意味着对$X_H$,1进行规范化并不会使所有膜算符都受限，因此得到的拓扑量子场论不是对称保护拓扑相。[9] 然而，对 $L_{\mathscr{C}}$ 进行规范化必须得到一个对称保护拓扑相，才能对应于创建有隙边界。因此，膜算符 $M([h])$必须属于拉格朗日代数 $L_{\mathscr{C}}$。换言之，它必须能在有隙边界 $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$上终止。同理，对于 $k \in K$，膜算符 $M([k])$必须属于拉格朗日代数 $L_{\mathscr{E}}$。因此，若要$L_{\mathscr{C}}$ 相对于 $L_{\mathscr{E}}$ 为磁性边界条件，我们必须对所有 $g \in G$都有 $H \cap {}^gK = \{e\}$ 。利用(3.29)，我们得到

$$|G| = |K||H| \text{ and } |K \cap H| = 1 \ . \tag{3.30}$$

这表明，群 $G$ 必须是群 $H$ 和 $K$ 的 Zappa-Sz´ep 积。群 $G$ 有时也称为群 $H$ 和 $K$ 的双交叉积 $G = H \bowtie K$ 。总之，我们得到以下结果

融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 及 $\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathit{Rep}(H)$ 和 $\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \cong \mathit{Rep}(G)$ 只有在存在子群 $K \leq G$ 使得 $G = H \bowtie K$。时才是无反常的。

对于陪集非可逆对称性，这一条件已在 [22] 中证明。对于无反常融合2-范畴，该条件也成立，如 [49] 所示。我们的结果表明，这对融合 3-范畴普遍成立。请注意，对于一般的非可逆对称性，上述条件是该对称性无反常的必要条件，但并非充分条件。事实上，对于一个描述具有非平凡反常的 1-形式对称性 $A$ 的融合 3-范畴 $\mathscr{C}$，4+1d 对称拓扑场论 Z($\mathscr{C}$) 是一个规范群为 $A$ [57, 58, 64] 的 2-形式规范理论。在这种情况下， $G$ =$\mathsf{Z}_1$ ，因此上述必要条件显然成立。

[9]这一现象也会出现在 2+1维拓扑量子场论中：对由未在融合下封闭的线算符实现的 1-形式对称性进行规范化，会导致其他线算符变为部分禁闭。示例见 [45, 第 6 节3] 。

考虑一个无反常对称性 $\mathscr{C}$ 及其对应的融合 3-范畴 $\mathscr{E}$，它由对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathscr{C})$ 的一种磁性边界条件确定。定义通过对 $\mathscr{E}$ 的 Rep($K$) 2-形式对称性进行规范化而得到的融合 3-范畴 $\mathscr{D}$ 。我们有 $\Omega^2\mathscr{D} \cong$ Vec。此外，我们必须有

$$\mathcal{Z}(\mathscr{D}) \cong \mathcal{Z}(\mathscr{E}) \cong \mathcal{Z}(\mathscr{C}) \ . \tag{3.31}$$

因此，$\Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{D}) \cong \Omega^2\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \cong$ Rep($G$)。将第 3.1 节中的结果应用于 $\mathscr{D}$，我们发现连通分支 $\pi_0(\mathscr{D})$由群 $G$标记。此外，由于 $\mathscr{D}$ 是通过对 $\mathscr{E}$的 Rep($K$) 2-形式对称性进行规范化得到的，$\mathscr{D}$ 必定包含一个无反常的对偶 $K$ 0-形式对称性。换言之，$\mathscr{D}$ 包含一个形如 3Vec$_K$ 的融合子 3-范畴。这意味着，由 $K \leq G$ 标记的连通分支$\pi_0(\mathscr{D})$各自包含一个可逆膜算符。请注意，与上一节讨论的情形不同，此处$\mathscr{D}$ 的所有连通分支不一定都包含可逆膜算符。

由于融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 包含拓扑线算符，连通分支 $\pi_0(\mathscr{C})$并非由 $G$标记，而是由双陪集 $H\backslash G/H$标记。为说明这一点，注意我们可以对 $\mathscr{C}$ 的 Rep($H$) 2-形式对称性进行规范化，从而得到一个新的融合 3-范畴，记作 $\mathscr{N}$，使得 $\Omega^2\mathscr{N} \cong$Vec。利用第 3.1 节中的结果，我们发现连通分支 $\pi_0(\mathscr{N})$由群 $G$标记。融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 可以由 $\mathscr{N}$通过规范化一个由支撑在 $\pi_0(\mathscr{N})$中、由 $H \leq G$标记的膜算符实现的对偶 0-形式 $H$ 对称性得到。对这样的对称性进行规范化时，膜算符必须在 0-形式对称性 $H$ 的左右作用下取等同。因此，$\mathscr{C}$ 的连通分支由双陪集 $H\backslash G/H$标记。这个双陪集包含形如 $HgH$ 的元素，其中 $g \in G$。若 $G = H \bowtie K$，则存在唯一的 $k \in K$、$h \in H$ 使得 $g = hk$。因此，$HgH = HhkH = HkH$。因此，双陪集$H\backslash G/H$ （不一定唯一地）由群元素 $K$标记。由于 $\mathscr{C}$可以通过一次拓扑操作转化为融合 3-范畴 $\mathscr{D}$ ，且其中所有由 $K$ 标记的连通分支都包含可逆膜算符，因此我们发现，$\mathscr{C}$ 中的膜算符可以在 $\mathscr{D}$中通过凝聚变为可逆。

# 4 结论

我们已经论证，若两个拓扑算符之间存在拓扑界面，则它们对局域算符的作用相同。对于 $2{+}1$d 和 $3{+}1$d 中由一组不含非平凡拓扑线的拓扑算符给出的非可逆对称性，我们已经证明，其对局域算符的作用是可逆的。更一般的非可逆对称性，其作用可以分解为某些算符所给出的可逆作用，以及规范化界面的作用。

请注意，我们的结果也适用于具有透明费米子线算符的非可逆对称性。例如，考虑膜算符 $M$ 在 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上的维数约化，其中 $M$ 是融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个单对象，且唯一的非平凡线算符是费米子线算符。在数学上，我们有 $\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathrm{SVec}$。通过维数约化得到的线算符 $L_M$ 必须是玻色线。这是因为， $M$ 在 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上的维数约化 可以理解为 $M$ 对平凡线算符**1**的作用，而 **1** 是玻色线。拓扑算符对线算符的作用不会改变其拓扑自旋。因此， $L_M$ 必须是玻色线。根据我们的假设 $\Omega^2\mathscr{C} \cong \mathrm{SVec}$，我们发现，对所有简单的 $L_M = \mathbf{1}$ 均有 $M \in \mathscr{C}$。因此，这种维数约化的推论（第 3.1.2 节探讨了这些推论）适用于满足 $\Omega^2\mathscr{C} \cong$SVec 的融合3-范畴。

我们的许多结果也可推广到高维。在 $d+1$ 维中，我们可以考虑余维一拓扑算符 $M$ ，它位于流形 $S^{d-1} \times \mathbb{R}$上。收缩 $S^{d-1}$ 会产生线算符 $L_M$。若不存在非平庸的拓扑线算符，则 $L_M$ 必须是平庸线**1** ，对所有 $M$均如此。这表明 $M$ 在 $S^{d-1} \times \mathbb{R}$上的融合规则满足

$$M \times \overline{M} = C \ , \tag{4.1}$$

其中 $C$ 是凝聚算符。因此， $M$ 对局域算符的作用必须是可逆的。此外，我们关于无反常非可逆对称性的结果也可推广到高维。事实上，第3.3.2 节中的论证可在 $d+1$ 维中重复，从而得到如下结果：

一个由融合$d$-范畴 $\mathscr{C}$ 描述、且具有$\Omega^{d-2}\mathscr{C} \cong \mathrm{Rep}(H)$与$\Omega^{d-2}\mathcal{Z}(\mathscr{C}) \cong \mathrm{Rep}(G)$ 的非可逆对称性仅当存在子群 $K \leq G$ 使得 $G = H \bowtie K$时才是无反常的。

有若干自然的未来方向值得探索：

- 我们的结果为一种无法由有限群得到的无反常融合 3-范畴对称性留下了余地。找到此类对称性的一个例子，或通过表明 3+1维中的无反常非可逆对称性均为非内禀来排除这种可能性，将是有趣的。

- 我们已经证明，对于由融合 3-范畴 $\mathscr{C}$ 描述、没有拓扑线算符的非可逆对称性，舒尔分量 $\pi_0(\mathscr{C})$ 具有由有限群 $G$ 给出的群结构。应当可以将由高阶范畴的结合子所给出的非可逆对称性的反常数据，约化为 $G$的有效反常。写出这种反常的显式表达式将会很有意思。一条有希望的途径是将这一有效反常与定义
- 维对称拓扑场论 $\mathscr{C}(\ \pi_0)$时涉及的 5-上闭链联系起来。

这一有效反常与定义 4+1维对称拓扑场论 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$时涉及的 5-上闭链联系起来。

•尽管非可逆对称性对局域算符的作用受到很强的约束，我们常常仍希望研究涉及非规范不变点算符的关联函数。这些算符应理解为附着在适当威尔逊线上的点算符，从而使组合算符是规范不变的。理解非可逆对称性如何作用于这类算符，并找出对其关联函数的影响，将是非常有意义的。

• 拓扑量子场论中的拓扑算符，包括非可逆的拓扑算符，在各种量子纠错码中起着关键作用 [65–69]。在这一背景下理解我们结果的影响将是有意义的。

• 晶格上的对称性被迫具有与连续统中不同的结构。例如，存在一些由融合范畴描述的非可逆对称性，它们只有在与格点平移混合时，才能在具有张量积希尔伯特空间的格点模型上实现 [70–73]。理解这一点如何影响这些对称性对格点模型局域算符的作用，将是有意义的。

• 本文重点讨论了有限非可逆对称性。一个自然的开放问题是理解连续非可逆对称性[74, 75]的结构。此类对称性的各种例子可以由可逆连续对称性 [76]构造出来。此外，在 1+1维中还存在真正的非可逆连续对称性，它们并不被认为能够由可逆对称性 [75]导出。若能理解高维中此类对称性的结构，并探究它们是否能对局域算符产生更丰富的作用，将会非常有趣。

## 致谢

我们感谢 Mahesh Balasubramanian、Matthew Buican、Clement Delcamp、David Hofmeier、Ho Tat Lam、Jamie Pearson、Johann Quenta-Raygada、Apoorv Tiwari 和 Matthew Yu 与本研究相关的讨论。RR 感谢 Yunqin Zheng 就本研究相关问题，尤其是陪集对称性，进行的多次交流。RR 衷心感谢加州大学洛杉矶分校、加州大学圣塔芭芭拉分校的卡弗里理论物理研究所、艾萨克·牛顿数学科学研究所、伯明翰大学、布巴内斯瓦尔国家科学教育与研究所、印度理工学院布巴内斯瓦尔分校、印度理工学院马德拉斯分校、印度科学理工学院

教育与研究特里凡得琅和国际理论科学中心的热情接待，本研究的部分工作正是在这些机构完成的。RR 的研究工作得到英国研究与创新署前沿研究基金的支持，该基金为欧洲研究委员会高级资助项目“量子场论与量子引力中的广义对称性”提供经费。

# 参考文献

[1] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, 和 B. Willett, 《广义全局对称性》, JHEP 02 (2015) 172, arXiv:1412.5148 [hep-th].[2] S. Schafer-Nameki, 《关于（非）可逆广义对称性的 ICTP 讲座》, Phys. Rept. 1063 (2024年) 1–55, arXiv:2305.18296 [hep-th].[3] T. D. Brennan 和 S. Hong, 《量子场论与粒子物理学中的广义全局对称性导论》, arXiv:2306.00912 [hep-ph].[4] L. Bhardwaj, L. E. Bottini, L. Fraser-Taliente, L. Gladden, D. S. W. Gould, A. Platschorre, 和 H. Tillim, 《广义对称性讲义》, Phys. Rept. 1051 (2024年) 1–87, arXiv:2307.07547 [hep-th].[5] R. Luo, Q.-R. Wang, 和 Y.-N. Wang, 《广义对称性及其应用讲义》, Phys. Rept. 1065 (2024 年 ) 1–43, arXiv:2307.09215 [hep-th].[6] S.-H. Shao, 《覆水难收：TASI 非可逆对称性讲座》, arXiv:2308.00747 [hep-th].[7] J. Frohlich, J. Fuchs, I. Runkel, 和 C. Schweigert, 《有理共形场论中的对偶与缺陷》, Nucl. Phys. B 763 (2007) 354–430, arXiv:hep-th/0607247.[8] C.-M. Chang, Y.-H. Lin, S.-H. Shao, Y. Wang, 和 X. Yin, 《二维中的拓扑缺陷线与重整化群流》, JHEP 01 (2019) 026, arXiv:1802.04445 [hep-th].[9] T. Lan, L. Kong, 和 X.-G. Wen, 《(3+1)D 玻色拓扑序的分类：点状激发全为玻色子的情形》, Phys. Rev. X 8 no. 2, (2018) 021074.[10] T. Lan 和 X.-G. Wen, 《 3+1 D 玻色拓扑序的分类（II）：部分点状激发为费米子的情形》, Phys. Rev. X 9 no. 2, (2019) 021005, arXiv:1801.08530 [cond-mat.str-el].[11] T. Johnson-Freyd, 《拓扑序的分类》, Commun. Math. Phys. 393 no. 2, (2022年) 989–1033, arXiv:2003.06663 [math.CT].[12] L. Kong, T. Lan, X.-G. Wen, Z.-H. Zhang, 和 H. Zheng, 《具有有限内对称性的各维度拓扑相分类》, JHEP 09 (2020) 093, arXiv:2003.08898 [math-ph].[13] T. Johnson-Freyd 和 M. Yu, 《没有线算符的融合2-范畴是类群》, Bull. Austral. Math. Soc. 104 no. 3, (2021) 434–442, arXiv:2010.07950[math.QA].[14] A. Kapustin 和 N. Saulina, 《3维拓扑场论与2维有理共形场论中的面算符》, arXiv:1012.0911 [hep-th].[15] D. Gaiotto 和 T. Johnson-Freyd, 《高阶范畴中的凝聚》, arXiv:1905.09566 [math.CT].

[16] K. Roumpedakis, S. Seifnashri, 和 S.-H. Shao, 《高阶规范化与非可逆凝聚缺陷》, 数学物理通讯 401 no. 3, (2023年) 3043–3107, arXiv:2204.02407 [hep-th].[17] Y. Choi, C. Cordova, P.-S. Hsin, H. T. Lam, 和 S.-H. Shao, 《 3+1 维中的非可逆对偶缺陷》, 《物理评论D辑》105 no. 12, (2022年) 125016, arXiv:2111.01139 [hep-th].[18] J. Kaidi, K. Ohmori, 和 Y. Zheng, 《(3+1)D 规范理论中的克拉默斯-瓦尼尔型对偶缺陷》, 《物理评论快报》128 no. 11, (2022年) 111601, arXiv:2111.01141 [hep-th].[19] Y. Choi, C. Cordova, P.-S. Hsin, H. T. Lam, 和 S.-H. Shao, 《 3+1 维中的非可逆凝聚、对偶与三重对偶缺陷》, 数学物理通讯 402 no. 1, (2023年) 489–542, arXiv:2204.09025 [hep-th].[20] L. Bhardwaj, S. Schafer-Nameki, 和 J. Wu, 《普适非可逆对称性》, 《物理进展》70 no. 11, (2022年) 2200143, arXiv:2208.05973 [hep-th].[21] P.-S. Hsin, R. Kobayashi, 和 C. Zhang, 《陪集非可逆对称性的分数化与奇异霍尔电导》, SciPost Phys. 17 no. 3, (2024年) 095, arXiv:2405.20401 [cond-mat.str-el].[22] P.-S. Hsin, R. Kobayashi, 和 C. Zhang, 《陪集非可逆对称性的反常》, arXiv:2503.00105 [cond-mat.str-el].[23] T. Bartsch, M. Bullimore, 和 A. Grigoletto, 《范畴对称性的表示论》, arXiv:2305.17165 [hep-th].[24] L. Bhardwaj 和 S. Schafer-Nameki, 《广义荷, 第二部分：非可逆对称性与对称性拓扑场论》, SciPost Phys. 19 no. 4, (2025年) 098, arXiv:2305.17159 [hep-th].[25] Z. Sun 和 Y. Zheng, 《何时对偶缺陷是群论型的? 》, JHEP 10 (2025年) 104, arXiv:2307.14428 [hep-th].[26] L. Bhardwaj, L. E. Bottini, S. Schafer-Nameki, 和 A. Tiwari, 《非可逆高阶范畴对称性》, SciPost Phys. 14 no. 1, (2023年) 007, arXiv:2204.06564 [hep-th].[27] C. L. Douglas 和 D. J. Reutter, 《融合2-范畴与4维流形的一个态和不变量》, arXiv 预印本 arXiv:1812.11933 (2018年) 。[28] L. Bhardwaj, D. Pajer, S. Schafer-Nameki, A. Tiwari, A. Warman, 和 J. Wu, 《(2+1)d 中具有非可逆对称性的有能隙相：第一部分》, SciPost Phys. 19 no. 2, (2025年) 056, arXiv:2408.05266 [hep-th].[29] T. D. D´ecoppet, P. Huston, T. Johnson-Freyd, D. Nikshych, D. Penneys, J. Plavnik, D. Reutter, 和 M. Yu, 《融合2-范畴的分类》, arXiv:2411.05907 [math.CT].[30] L. Bhardwaj, S. Schafer-Nameki, A. Tiwari, 和 A. Warman, 《(2+1)d 中具有非可逆对称性的有能隙相：第二部分》, arXiv:2502.20440 [hep-th].

[31] D. S. Freed与C. Teleman，“相对量子场论”，数学物理通讯326（2014年）459–476，arXiv:1212.1692 [hep-th]。[32] D. Gaiotto与J. Kulp，“轨形群胚”，JHEP 02（2021年）132，arXiv:2008.05960 [hep-th]。[33] L. Kong、T. Lan、X.-G. Wen、Z.-H. Zhang与H. Zheng，“代数高阶对称性与范畴对称性——对称性的全息与纠缠视角”，物理评论研究第2卷第4期，（2020年）043086，arXiv:2005.14178[cond-mat.str-el]。[34] F. Apruzzi、F. Bonetti、I. n. Garc´ıa Etxebarria、S. S. Hosseini与S. Schafer-Nameki，“源自弦理论的对称性拓扑场论”，数学物理通讯第402卷第1期，（2023年）895–949，arXiv:2112.02092 [hep-th]。[35] D. S. Freed、G. W. Moore与C. Teleman，“量子场论中的拓扑对称性”，arXiv:2209.07471 [hep-th]。[36] A. Chatterjee与X.-G. Wen，“作为拓扑序之影子的对称性及拓扑全息原理的推导”，物理评论B第107卷第15期，（2023年）155136，arXiv:2203.03596 [cond-mat.str-el]。[37] J. Kaidi、K. Ohmori与Y. Zheng，“面向非可逆缺陷的对称性拓扑场论”，数学物理通讯第404卷第2期，（2023年）1021–1124，arXiv:2209.11062 [hep-th]。[38] J. Kaidi、E. Nardoni、G. Zafrir与Y. Zheng，“对称性拓扑场论与非可逆对称性的反常”，JHEP 10（2023年）053，arXiv:2301.07112 [hep-th]。[39] J. C. Baez与M. Neuchl，“高维代数：I. 辫编织单oidal 2-范畴”，《数学进展》第121卷第2期，（1996年）196–244。[40] S. E. Crans，“辫编织单oidal 2-范畴与对称辫编织单oidal 2-范畴的广义中心”，《数学进展》第136卷第2期，（1998年）183–223。https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870898917200。[41] P. Deligne，“Cat´egories张量范畴”，莫斯科数学杂志第2卷第2期，（2002年）227–248。[42] T. D. D´ecoppet，“扩张理论与费米子强融合 2-范畴（附Thibault Didier D´ecoppet与Theo Johnson-Freyd撰写的附录）”，SIGMA 20（2024年）092，arXiv:2403.03211 [math.CT]。[43] T. D. D´ecoppet与M. Yu，“ 3+1d对称性富集拓扑序的分类”，arXiv:2509.10603 [math-ph]。[44] M. Buican与R. Radhakrishnan，“凝聚缺陷的可逆性与 2 + 1d量子场论的对称性”，数学物理通讯第405卷第9期，（2024年）217，arXiv:2309.15181 [hep-th]。[45] M. K. N. Balasubramanian、M. Buican、C. Delcamp与R. Radhakrishnan，“（2+1）d拓扑序中非可逆对称性的规范化”，arXiv:2507.01142 [hep-th]。[46] J. Fuchs、C. Schweigert与A. Valentino，“边界条件的双范畴",

以及三维拓扑场论中的表面缺陷”，数学物理通讯321（2013年）543–575，arXiv:1203.4568 [hep-th]。[47] L. Bhardwaj与Y. Tachikawa，“论二维中的有限对称性及其规范化”，JHEP 03（2018年）189，arXiv:1704.02330 [hep-th]。[48] R. Thorngren与Y. Wang，“融合范畴对称性。第一部分。反常流入与有能隙相”，JHEP 04（2024年）132，arXiv:1912.02817 [hep-th]。[49] T. D. D´ecoppet与M. Yu，“纤维2-函子与Tambara-Yamagami融合2-范畴”，arXiv:2306.08117 [math.CT]。[50] J. Kaidi、G. Zafrir与Y. Zheng，“$\mathcal{N} = 4$ 超杨-米尔斯理论的非可逆对称性与扭曲紧致化”，JHEP 08（2022年）053，arXiv:2205.01104 [hep-th]。[51] N. Saavedra Rivano，“Cat´egories坦纳卡范畴”，法国数学会通报（Bulletin de la Soci´et´e Math´ematique de France）100（1972年）417–430。http://eudml.org/doc/87193。[52] D.-C. Lu与Z. Sun，“内禀NISPT相、igNISPT相以及非可逆对称性的混合反常”，arXiv:2511.01965 [hep-th]。[53] L. Bhardwaj、T. D´ecoppet、S. Schafer-Nameki与M. Yu，“对偶缺陷的融合3-范畴”，arXiv:2408.13302 [math.CT]。[54] V. Bashmakov、M. Del Zotto、A. Hasan与J. Kaidi，“S类理论的非可逆对称性”，JHEP 05（2023年）225，arXiv:2211.05138 [hep-th]。[55] A. Antinucci、C. Copetti、G. Galati与G. Rizi，“非可逆对偶缺陷的“动物学”：来自 $\mathcal{S}$类的视角”，JHEP 04（2024年）036，arXiv:2212.09549[hep-th]。[56] A. Apte、C. Cordova与H. T. Lam，“非可逆对称性对有能隙相的阻碍”，物理评论B第108卷第4期，（2023年）045134，arXiv:2212.14605 [hep-th]。[57] C. Cordova、P.-S. Hsin与C. Zhang，“（3+1）d中非可逆对称性的反常”，SciPost Phys.第17卷第5期，（2024年）131，arXiv:2308.11706 [hep-th]。[58] A. Antinucci、F. Benini、C. Copetti、G. Galati与G. Rizi，“非可逆自对偶对称性的反常：分数化与规范化”，arXiv:2308.11707 [hep-th]。[59] C. Zhang与C. C´ordova，“（1+1）维范畴对称性的反常”，物理评论B第110卷第3期，（2024年）035155，arXiv:2304.01262[cond-mat.str-el]。[60] P. Putrov与R. Radhakrishnan，“由对称拓扑场论的有能隙边界得到的1+1D无反常非可逆对称性”，arXiv:2405.04619 [hep-th]。[61] R. Argurio、F. Benini、M. Bertolini、G. Galati与P. Niro，“论杨-米尔斯-陈-西蒙斯理论的对称性拓扑场论”，JHEP 07（2024年）130，arXiv:2404.06601[hep-th]。[62] 塞尔等，《有限群的线性表示》，第42卷。施普林格，1977年。

[63] A. Kirillov Jr 和 V. Ostrik，《关于 McKay 对应与 sl2 共形场论 ADE 分类的 q 类比》，《数学进展》171 第 2 期（2002 年）183–227。[64] X. Chen、A. Dua、P.-S. Hsin、C.-M. Jian、W. Shirley 和 C. Xu，《 4+1d 拓扑相中的环》，SciPost Phys. 15 第 1 期（2023年）001，arXiv:2112.02137[cond-mat.str-el]。[65] A. Y. Kitaev，《量子计算：算法与纠错》，《俄罗斯数学调查》52 第 6 期（1997 年）1191。[66] P.-S. Hsin、R. Kobayashi 和 G. Zhu，《超越 n1/3 距离屏障的非阿贝尔自纠错量子存储器与横向非Clifford门》，PRX Quantum 6 第 4 期（2025年）040360，arXiv:2405.11719 [quant-ph]。[67] S.-J. Huang、A. Warman、S. Schafer-Nameki 和 Y. Chen，《混合晶格手术：通过非阿贝尔曲面码实现非Clifford门》，arXiv:2510.20890[quant-ph]。[68] R. Radhakrishnan、A. Sharon 和 N. Tantivasadakarn，《通过非可逆对称性揭示动力学量子纠错码》，arXiv:2510.09565[hep-th]。[69] A. Warman 和 S. Schafer-Nameki，《通过非阿贝尔曲面码实现横向 Clifford 层级门》，arXiv:2512.13777 [quant-ph]。[70] N. Seiberg 和 S.-H. Shao，《马约拉纳链与伊辛模型——（非可逆）平移、反常与涌现对称性》，SciPost Phys. 16 第 3 期（2024年）064，arXiv:2307.02534 [cond-mat.str-el]。[71] N. Seiberg、S. Seifnashri 和 S.-H. Shao，《张量积希尔伯特空间上的非可逆对称性与 LSM型约束》，SciPost Phys. 16（2024年）154，arXiv:2401.12281 [cond-mat.str-el]。[72] D. E. Evans 和 C. Jones，《晶格上融合范畴对称性的算子代数方法》，arXiv:2507.05185 [math-ph]。[73] K. Inamura，《关于 1+1维张量积希尔伯特空间上的非可逆对称性的评论》，arXiv:2602.12053 [cond-mat.str-el]。[74] Q. Jia、R. Luo、J. Tian、Y.-N. Wang 和 Y. Zhang，《范畴连续对称性》，arXiv:2509.13170 [hep-th]。[75] D. Delmastro、A. Sharon 和 Y. Zheng，《非局域守恒流与连续非可逆对称性》，JHEP 11（2025年）072，arXiv:2507.22976[hep-th]。[76] A. Antinucci、G. Galati 和 G. Rizi，《关于连续2-范畴对称性与杨–米尔斯理论》，JHEP 12（2022年）061，arXiv:2206.05646 [hep-th]。