Erd˝os-纳撒森关于二阶渐近基的三个问题

Daniel Larsen

arXiv:2603.03472v1 [math.NT] 3 Mar 2026

摘要

我们研究三个用以衡量二阶渐近基稳健性的自然性质：表示函数发散、可分解为两个基的并，以及包含一个极小基。Erd˝os与纳撒森证明，表示函数足够迅速的增长（具体地，对适当的C，$r_A(n) \geq C \log n$）同时蕴含可分解性与极小基的存在。我们证明，在较弱的增长率下，这三个性质是相互独立的。该构造经由指数增长区间上的归纳方案进行。

1 引言

集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是渐近基（本文中总是二阶的），如果存在 n_0，使得每个 $n > n_0$ 都可以写成 $n = a + a'$，其中 $a \leq a' \in A$。表示函数 $r_A(n)$计算此类表示的个数。我们定义 $\tilde{r}_A(n)$为满足 $a'/a \in [1, 100]$的表示$a + a'$的个数。子集 $B \subseteq A$ 是极小渐近基，如果 B 是渐近基，但 B 的任何真子集都不是渐近基。

我们考察基的三个自然性质：

(P1) **表示函数发散：** $r_A(n) \to \infty$ 当 $n \to \infty$时。

(P2) 可分解性： $A = B \cup C$，其中 B 和 C 是不相交的渐近基 s.

(P3) 极小基的存在性： A包含一个极小渐近基。

性质 (P1) 和 (P2) 都表明其具有稳健性。性质 (P3) 则不那么显然属于同一类。特别是，极小渐近基在满足 (P3) 的同时，显然尽可能地缺乏稳健性。然而，如果每个整数在 A 中都有足够多种表示，那么渐近子基就有许多种选择，因此人们可能会期待其中存在一个极小的渐近子基。事实上，厄尔德什和纳撒森 [2] 证明，对于任意常数 $C > (\log 4\,3)^{-1}$，如果$r_A(n) > C \log n$ 对所有充分大的 n 都成立，那么 A 同时满足 (P2) 和 (P3)。这个神秘的常数暗示了这三个概念之间存在关联。然而，在本文中，我们将证明，对于增长较慢的情形，这三个性质彼此独立：

定理 1。 存在满足（*P1*）、（*P2*）和（*P3*）所有可能组合的渐近基。

在 [2, 问题 2], 中，厄尔德什˝和纳撒森询问（P1）是否蕴含（P2）。作者此前已借助一个基于 Claude 4.5 和 Gemini 3 Pro 构建的多智能体系统证明情况并非如此，其构造基于 [2]。在 [1], 厄尔德什˝和纳撒森推测，（P1）可能不足以蕴含（P3）。在预印本 [3], 中，我们使用了另一种构造证实了这一想法，表明即使对于充分大的 n，$r_A(n) > c\log n$ 也不足以蕴含（P3）。最后，[2, 问题 4] 询问（P2）是否蕴含（P3）。本文表明答案是否定的。

定理 1 的全部八种情形都可由同一个构造得到。我们需要定义一些辅助函数 ϕ, ψ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 它们将取决于我们试图实现的性质。首先，我们取 $h(n) := \lfloor n \cdot 10^{-8} \rfloor$。如果希望（P1）成立，我们选择$\phi(n) := n$；否则，当（P2）成立时使用常函数 2，否则使用常函数 1。如果希望（P3）成立，我们选择 ψ 为常函数 1；否则，我们选择 $\psi(n) := n$。

设 $N_i = 4^{i+1}$。令 $\mathscr{S}$ 为任意一种用于生成整数集的选择机制

$$G_k \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} \big(B_i \cup (N_{i+1} - G_i)\big)$$

and

$$H_k \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} \big(C_i \cup (N_{i+1} - H_i)\big)$$

给定任意整数集 B_i, C_i, G_i, H_i，其中 $1 \le i \le k-1$。

定理 2。若 $\mathscr{S}$ 具有如下性质：对所有 k 及所有输入集， G_k 与 H_k 不相交，并且 $F_k := G_k \cup H_k$ 中的元素均不大于 N_k，则存在集合 B_1、B_2、.....以及 C_1、C_2、.....，使得令 G_k、H_k 分别为 $\mathscr{S}$ 在这些输入下的输出（包括G_i、H_i，其中 $i < k$），则 B 满足以下条件：$B := \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(B_i \cup (N_{i+1} - G_i)\big)$ 以及 $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(C_i \cup (N_{i+1} - H_i)\big)$：

1. 每个 B_k、C_k 都由严格介于 N_k 和 N_{k+1}之间的正整数组成。*2.* $B \cap C = \emptyset$。*3.* 对 $\mathbb{N} \setminus \{N_i\}$中所有充分大的元素， $\tilde{r}_B(n)\ \tilde{r}_C(n) \ge h(n)$

4. 对充分大的 k， N_{k+1} 作为 $B \cup C$ 中两个元素之和的所有表示都满足 F_k。

我们将在第 4 节通过对 $B(k) = B \cap [1, N_{k+1}]$ 和 $C(k) = C \cap [1, N_{k+1}]$进行随机迭代构造，给出该定理的证明。

本节最后，我们用一张表格总结第 2 节和第 3 节所给出的八种构造的主要特点。

(P1)	(P2)	(P3)	A	$\phi(n)$	$\psi(n)$
T	T	F	$B \cup C$	n	n
F	T	F	$B \cup C$	2	n
T	T	T	$B \cup C$	n	1
F	T	T	$B \cup C$	2	1
T	F	F	B	n	n
F	F	F	B	1	n
T	F	T	B	n	1
F	F	T	B	1	1

2 可分解情形

现在我们说明定理 2 如何推出定理 1 中 A 为可分解集的四种情形。在每种情形下，只需描述相应的选择机制 $\mathscr{S}$。

在阶段 k，于是对于 $i < k$ 已给定 B_i, C_i, G_i, H_i，我们需要描述如何选取G_k与 H_k。我们定义 $B(k-1) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (B_i \cup (N_{i+1} - G_i))$，对 $C(k-1)$ 同样如此。我们称集合 S 为 k-合格，如果 $S = \{s_1, \dots, s_{\phi(k)}\} \subset B(k-1) \cup C(k-1)$，其中

$$\psi(k) \le s_1 < \cdots < s_{\phi(k)} \le N_k \tag{1}$$

并且 $|S\cap B(k-1)|, |S\cap C(k-1)|\geq 1$。一个集合是 累积地 k-合格，如果它对某个$i\leq k$是 i-合格的。

取满足以下条件的最小 $k_0\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$：对所有 $k>k_0$，至少有 k 个集合是 k-合格的。然后，对 $k\leq k_0$，令 $F_k=\emptyset$。否则，我们从所有尚未出现的、累积而言 k-合格的集合中，选取最大元素最小的 F_k。接着，我们定义 $\mathscr{S}$，使其产生

$$G_k := F_k\cap B(k-1),\ H_k := F_k\cap C(k-1).$$

引理 3. 值 k_0 有限。

证明。否则，$\mathscr{S}$ 总是产生空集。应用定理 2 可知，当 k 足够大时，$B(k-1)$ 有 $\gg N_k^{1/2}$ 个元素，尤其是远多于 $\phi(k)$ 中大于 $\psi(k)$ 的元素。这就导致矛盾。

□

每个累积而言 k-合格的集合最终都会作为某个 i 的 F_i 出现。

令 B 和 C 为将选择机制 $\mathscr{S}$ 应用于定理 2 后定义的对象。令 $A=B\cup C$。注意，根据定理 2 的性质 3，$r_A(n)$ 是否趋于 ∞，取决于 ϕ 是否趋于 ∞。

我们断言 B 是一个基。事实上，$r_B(n)\rightsquigarrow\infty$，这意味着

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}\setminus\{N_i\}} r_B(n)=\infty.$$

然而，我们还知道，对于每个足够大的 k，$N_{k+1}-G_k$ 和 G_k 都包含在 $B(k)$中，因此 N_{k+1} 在 $B+B$中至少有一种表示。同样的论证适用于 C，这意味着 A具有可分解性。

2.1 没有极小子基的基

假设 D是 A的一个子基。由于对于所有充分大的 i，$D+D$都包含 N_i，因此对于所有充分大的 k 以及所有 k-适格的集合 S，D 都与 S相交。

设 M 为一个正整数。设 k 为满足 $N_k>M$的最小整数。假设

$$|(B\setminus D)\cap[M,100M]|\geq\phi(k+4)$$

对 C也同样如此。于是存在 $[M,100M]$ 的一个子集，它是 $k+4$-适格的，且与 D不相交。我们得出结论：对于充分大的 M，

$$|(B\setminus D)\cap[M,100M]|<\phi(k+4)$$

or

$$|(C\setminus D)\cap[M,100M]|<\phi(k+4).$$

我们不失一般性地假设第一种情况成立。

现在删除 D的最小元素，得到 D'。固定 $t\in\{0,1,2,\dots 100\}$。首先假设对任意 i，$101M-t$ 都不具有 N_i 的形式。根据性质 3，$\tilde{r}_B(101M-t)\geq h(101M-t)$，因此，

$$r_{D\cap[M,100M]}(101M-t)>h(101M-t)-\phi(k+4)>1.$$

因此，

$$r_{D'}(101M-t)\geq r_D(101M-t)-1>0.$$

现在假设 $101M-t=N_i$，其中 i 充分大。在这种情况下，我们知道 ψ 趋于 ∞，因此对于充分大的 k，D 的最小元素不包含在任何k-合格集中。因此，$r_{D'}(101M-t)=r_D(101M-t)>0$，这使得 D' 成为一个基。由此可知 D 不是极小的。

这就完成了定理 1 中满足 (P2) 但不满足 (P3) 的两种情形 t.

2.2 带有极小子基的基

回想一下，在这种情形下，我们对所有 n 都令 $\psi(n) = 1$。我们断言 B 是一个极小子基。设 $b \in B$ 是任意元素。存在无穷多个包含 b 且不包含 B 中其他元素的合格集。这就得到一个 N_{j_i} 的无穷序列，其中 $r_B(N_{j_i}) = 1$ 且 $r_{B\setminus\{b\}}(N_{j_i}) = 0$。因此 $B \setminus \{b\}$ 永远不可能是一个基，这意味着 B 确实是极小的。

3 不可分解情形

现在我们处理四种不可分解情形。在本节中，若集合 S 包含于 $B(k-1)$ 中且满足 (1)，就称它为 k-适格。采用这个新的适格性定义后，我们通常按照第 2 节中的方式定义 $\mathscr{S}$，只不过将 $H_k = \emptyset$ 纳入考虑。

在 (P3) 成立但 (P1) 不成立的特殊情形下，我们固定一个满射函数 $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，其所有纤维均为无限集，并且对所有 n，都有 $\min F^{-1}(n+1) > \min F^{-1}(n)$。存在某个 k_0，使得对所有 k，$|B(k)| > k - k_0$。接着，我们令 $\mathscr{S}$ 生成如下序列

$$\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{k_0}, \{b_{F(1)}\}, \{b_{F(2)}\}, \{b_{F(3)}\}, \dots,$$

其中，对 $k > k_0$，$G_k = \{b_{F(k-k_0)}\}$，而 b_k 是 $B(k + k_0 - 1)$ 中大于 $b_1, \dots\dots, b_{k-1}$ 的最小元素。注意，这个定义并非循环定义，因为 $b_{F(k-k_0)} \in B(k-1)$，因为 $F(k-k_0) + k_0 - 1 \le k - 1$。

在所有情形中，我们随后应用定理 2 得到 B。（我们也会得到 C，但并不使用它。）注意，根据定理 2 的性质 3，$r_B(n)$ 是否趋于 ∞，取决于 ϕ 是否趋于 ∞。如前所述，B 是一个基，并且每一个 k-合格集都会作为某个 i 的 G_i 出现。由此可知，对所有充分大的 k 以及所有 k-合格集 S，任意子基 D 都与 S 相交。

设 M 为正整数。设 k 为满足 $N_k > M$ 的最小整数。显然，若 D 是 B 的子基，则对充分大的 M，

$$|(B \setminus D) \cap [M, M^2]| < \phi(2k+1). \tag{2}$$

注意，若 B 分解为 $B' \cup B''$，则该不等式对 $D = B'$ 和 $D = B''$ 成立。由于 B' 与 B'' 不相交，这意味着

$$|B \cap [M, M^2]| = |B' \cap [M, M^2]| + |B'' \cap [M, M^2]| < 2\phi(2k+1) \ll k,$$

这对较大的 M 是不可能的，因为 B 是渐近基。这就处理了全部四种情形中的不可分解性。

引理 4. 对任意子基 D，若 $D \setminus D'$ 在每个超二进区间$[M, M^2]$中有 $o(M^2)$ 个元素，则 $(D' + D') \cap (\mathbb{N} \setminus \{N_i\})$ 在 $(D + D) \cap (\mathbb{N} \setminus \{N_i\})$中具有有限补集。

证明。固定 $0 \le t \le 2M - 2$。假设 $M^2 - t$ 对任意 i都不具有形式 N_i。当 M 充分大时，定理 2 与 (2) 蕴含

$$r_{D \cap [M, M^2]}(M^2 - t) > h(M^2 - t) - \phi(2k).$$

因此，

$$r_{D' \cap [M, M^2]}(M^2 - t) > h(M^2 - t) - \phi(2k) - o(M^2) \gg M^2 > 0.$$

□

3.1 没有极小子基的基

设 D 是 B 的任意子基，并令 $D' \subset D$ 由 D 中除最小元素外的所有元素组成。在这种情况下，我们知道 ψ 趋于 ∞，因此对于充分大的 k，D 的最小元素不属于任何 k-可容许集。因此，对于充分大的 i，$r_{D'}(N_i) = r_D(N_i) > 0$。由引理 4，$D'$ 是一个基，所以 D 不是极小的。

至此，定理 1 中既不满足 (P2) 也不满足 (P3) 的两种情形均已讨论完毕。

3.2 具有极小子基的基

回顾一下，在这种情形下，我们对所有 n 都令 $\psi(n) = 1$。

设 B' 是 B 的一个子集，使得对于所有充分大的 k，$B \setminus B'$ 中小于或等于 N_k 的元素恰有 $\phi(k) - 1$ 个；并且对于所有 k，$B' \supset N_{k+1} - G_k$。这是可行的，因为当 k 足够大时，$|G_k| < k$。若我们处于有界表示函数的情形，这就意味着 $B' = B$。

任取一个元素 $b \in B'$。那么对于所有足够大的 k，$B \setminus (B' \setminus \{b\})$ 包含 $\phi(k)$ 个 $\leq N_k$，这意味着其中包含无穷多个 G_i。因此，无穷多个 G_i 无法与 $B' \setminus \{b\}$ 相交，这说明它不是一个基。（这里我们用到了这样一个事实：在有界表示函数的情形下，$\{b\}$ 会作为一个 G_i 出现无穷多次。）

另一方面，显然对所有充分大的 i，B' 都与 G_i 相交。将引理 4 应用于 $D = B$，我们得出结论：B' 是一个基，而且事实上是一个极小基。

4 构造

设 X_1、X_2、X_3 以如下方式划分 $\mathbb{N}$：每个正整数落入这三者中任意一个的概率相等，且这些选择相互独立。设 $X_i(S) = S \cap X_i$。我们用$X_i(a,b)$表示 $X_i((a,b))$。我们还用$(a,b)_{\text{core}}$表示$(a + (b-a)/100, b - (b-a)/100)$。

引理 5. 存在 $\epsilon > 0$，使得若 I 与 J 是大小为 $\geq m$的正整数区间，则$(I+J)_{\text{core}}$ 中某个元素在$X_i(I) + X_i(J)$ 中的表示少于 $m/2000$ 个的概率为 $\ll (1-\epsilon)^m$。

证明。每个元素 $z \in (I+J)_{\text{core}}$ 至少有 $m/100$ 个表示，表示为 $x + y$，其中 $x \in I$且 $y \in J$。因此，至少有 $m/200$ 种写法 $z = x_k + y_k$，其中 $x_k \in I$、$y_k \in J$，并且这 $2k$ 个元素 x_1、……、x_k、y_1、……、y_k 两两不同。对于每个 k，$x_k \in X_i(I)$ 与 $y_k \in X_i(J)$ 同时发生的概率为 $1/9$；对于不同的 k，这些事件相互独立。因此，表示的期望数量至少为 $m/1800$，所以根据切尔诺夫界，实际数量小于 $m/2000$的概率随 m呈指数衰减。 □

引理 6。 存在 $\epsilon > 0$ 具有以下性质。设 N 为充分大的正整数。设 I 和 J 为大小为 $> N/100$ 的正整数区间。如果 J 中的每个元素都小于 $4N$，那么对于任意 i、$j \in \{1,2,3\}$，

$$X_i(I) + X_i(4N - X_j(J)) \supset (I + 4N - J)_{\text{core}} \setminus \{4N\},$$

而且，右边的每个元素都能表示为左边所述元素之和的次数多于 $N \cdot 10^{-7}$，大于 $1 - (1-\epsilon)^N$。

证明。设 $4N + \Delta$ 是右边的任意一个元素。我们要寻找满足 $x - y = \Delta$ 的解，其中 $x \in X_i(I)$、$y \in X_j(J)$，且 $4N - y \in X_i$。

令 $S = (I - \Delta) \cap J$。令 $I = (a, b)$、$J = (c, d)$，以及 $\delta = (b - a + d - c)/100$。那么

$$a - d + \delta < \Delta < b - c - \delta,$$

因此， $I-\Delta$的下确界至多为 $d-\delta$，而 $I-\Delta$的上确界至少为 $c+\delta$。所以，要么 $I-\Delta\subset J$，此时 $|S|>N/100$；要么 S包含 $(c,\ c+\delta)$ 或 $(d-\delta,\ d)$ 之一，此时 $|S|\geq\delta>N/5000$。

令 Y 表示 S 的一个极大子集，使得集合 Y、 $Y+\Delta$、 $4N-Y$ 两两不相交。于是 $|Y|\geq|S|/9$。对每个 $y\in Y$，都有独立概率 $1/27$，使得 $y\in X_j(J)$、$y+\Delta\in X_i(I)$ 和 $4N-y\in X_{i'}$。与引理 5 中一样，利用切尔诺夫界即可得到该结果。 □

我们总是将此引理应用于 $i=1$、 $j=3$ 和 $J=(N/4,\ 3N/4)$。

现在我们来描述定理 2 中在阶段 k 所需的构造。此时，我们已经为 $i<k$ 定义了 B_i 和 C_i，并且已给定 $i\leq k$ 的 G_i 和 H_i。定义

$$B(k-1)=\bigcup_{i=1}^{k-1}(B_i\cup(N_{i+1}-G_i)),\ C(k-1)=\bigcup_{i=1}^{k-1}(C_i\cup(N_{i+1}-H_i)),\ A(k-1)=B(k-1)\cup C(k-1).$$

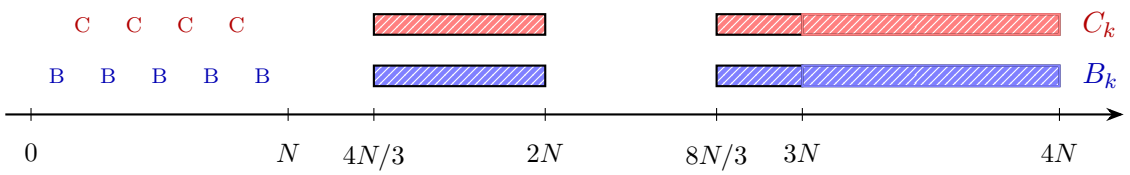
定义 $N=N_k$,

$$B_k=\Big((4N/3,2N)\cup(8N/3,3N)\cup\big(4N-((0,N)\setminus A(k-1))\big)\Big)\cap X_1(0,4N),\tag{3}$$

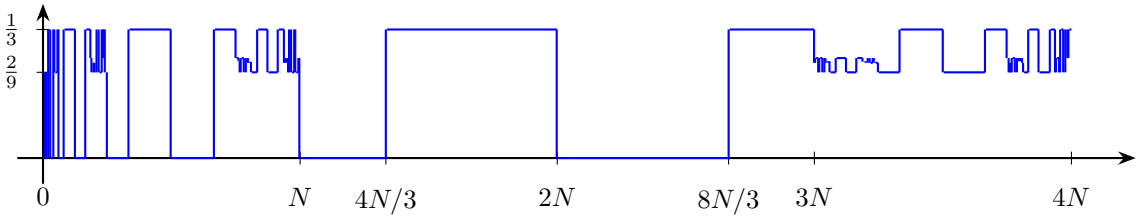
and

$$C_k=\Big((4N/3,2N)\cup(8N/3,3N)\cup\big(4N-((0,N)\setminus A(k-1))\big)\Big)\cap X_2(0,4N).\tag{4}$$

照例， $B(k)=B(k-1)\cup B_k\cup(4N-G_k)$，且 $C(k)=C(k-1)\cup C_k\cup(4N-H_k)$。构造示意如下:



下图说明了 $n\in B(k)$ 的概率随以下因素变化的情况 n.



命题 7。 以 1 的概率，当 k 足够大时，对于所有

$$n\in[3N_k/2,6N_k)\setminus\{4N_k\},$$

我们有 $\tilde{r}_{B(k)}(n)\geq h(n)$ ，对于 $C(k)$ 也同样成立。

证明。 注意到， $B(k)$ 包含以下子集:

$$X_1\left(\frac{N}{24},\frac{3N}{64}\right),X_1\left(\frac{2N}{3},\frac{3N}{4}\right),X_1\left(\frac{4N}{3},2N\right),X_1\left(\frac{8N}{3},3N\right),X_1(4N-X_3(N/4,3N/4)).$$

事实上，第一个属于 B_{k-3}，第二个属于 B_{k-1}。对于最后一个包含关系，我们使用了对所有 $i<k$ 都有 $N_{i+1}-G_i\subset[0,N/4]\cup[3N/4,N]$ 这一事实。

存在 $\epsilon>0$，使得以下各陈述以至少$1-(1-\epsilon)^N$的概率全部成立。由引理 5 应用于 $i=1$,

$$I\in\left\{\left(\frac{N}{24},\frac{3N}{64}\right),\left(\frac{2N}{3},\frac{3N}{4}\right),\left(\frac{4N}{3},2N\right),\left(\frac{8N}{3},3N\right)\right\},$$

以及 $J=(4N/3,2N)$，区间 $(67N/48,95N/24)\cup(25N/6,29N/6)$ 中的每个整数在 $B(k)$ 上至少有 $h(N)$ 个表示。将引理 6 应用于 $I=(2N/3,3N/4)$，范围 $[95N/24,25N/6]$ 内除 $4N$ 以外的每个整数在 $B(k)$ 上至少有 $h(N)$ 个表示。将同一引理应用于 $I=(4N/3,2N)$，$[29N/6,45N/8]$ 中的每个整数在 $B(k)$ 上至少有 $h(N)$ 个表示。引理 5 应用于 $I=J=(8N/3,3N)$ 可处理 $[45N/8,143N/24]$。最后，将引理 6 应用于 $I=(8N/3,3N)$，即可覆盖 $[143N/24,6N]$。根据博雷尔-坎泰利引理，这些陈述以概率 1 对所有充分大的 k 都成立。

请注意，在所有情形中，所考虑的和的各项之比都属于 $[1/100,100]$。

□

定理 *2* 的证明。观察 (3) 和 (4) 可知，性质 1 和 4 成立。我们有 B_k 和 C_k 彼此不相交（因为 X_1 和 X_2 不相交），并且根据大小关系，它们与 $B(k-1)$ 和 $C(k-1)$ 也不相交。由于根据关于 $\mathscr{S}$的假设，$G_k,H_k\subset A(k-1)$，性质 2 也成立。（注意，$4N-G_k,4N-H_k\subset(3N,4N)$ 与$A(k-1)$不相交。）根据命题 7，性质 3 以概率 1 成立。

□

我们感谢 Claude Sonnet 4.5 为本文的图形提供协助，并感谢 ChatGPT 5.2 Pro 帮助校对。

参考文献

[1] P. Erd˝os 和 M. B. Nathanson，《加法数论中的互异代表系与极小基》。《数论：卡本代尔 1979》（南伊利诺伊会议论文集，南伊利诺伊大学，伊利诺伊州卡本代尔，1979），第 89–107 页，《数学讲义》，751，施普林格，柏林，1979。

[2] P.Erd˝os 和 M. B. Nathanson，《将基划分为基的不交并》，《数论杂志》**29**(1988)，1–9。

[3] D. Larsen 和 M. Larsen，《没有极小子基的稳健加法基》，预印本 t.