arXiv:2603.03474v1 [math.CO] 3 Mar 2026

Co枚举避免两个平坦偏序模式的排列 s

曹诗琪[1],高慧华[2],Sergey Kitaev[3],和李逸天[41,2,4]组合数学中心，LPMC，南开大学，天津300071，中华人民共和国[3]数学系、数学与统计系，斯特拉斯克莱德大学，26 Richmond Street，格拉斯哥 G1 1XH，英国

电子邮箱：[1]shiqicao@mail.nankai.edu.cn，[2]huihuagao@mail.nankai.edu.cn，[3]sergey.kitaev@strath.ac.uk，[4]yitianli@mail.nankai.edu.cn。

摘要。偏序模式（POPs）在排列模式研究中发挥着重要作用，为描述大类经典模式提供了便利的框架。因此，枚举避免偏序模式的排列这一问题在文献中受到了广泛关注。特别是，高慧华和Sergey Kitaev解决了许多长度为4和5的避免偏序模式的排列的计数问题，将枚举与广泛的其他组合对象联系起来。

受他们工作的启发，我们开始研究同时避免属于平坦偏序模式类别的两个部分有序模式的排列。我们建立了避免此类部分有序模式的排列与 k-斐波那契数之间的联系。此外，我们给出了避免这些部分有序模式的排列与某些受限排列之间的一个双射，这使我们能够运用 Balti´c 提出的方法，推导出避免这些部分有序模式的排列的生成函数。最后，我们针对六种统计量，获得了长度不超过 5 的避免这两个部分有序模式的可分排列的计数结果，从而推广了高慧华等人关于可分排列中避免单个平坦偏序模式的结果。值得注意的是，当两个模式的长度均为 5 时，相应的生成函数是有理函数，其分子（分别为分母）中的各项之和包含 293（分别为 17）个单项式。

关键词： 偏序模式，联合分布， k-斐波那契数，受限排列，可分排列

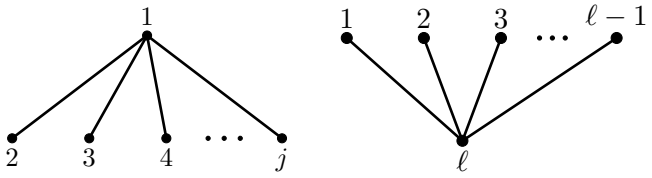
1 引言

令 S_n 表示所有 $[n]$ 的集合：$=\{1,2,\ldots,n\}$。（经典）模式是一个排列。若不存在子序列 $\pi_{i_1}\cdots\pi_{i_k}$，其中 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$，使得 $\pi_{i_j}<\pi_{i_r}$ 当且仅当 $p_j<p_r$，则排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n\in S_n$ 避免模式 $p=p_1p_2\cdots p_k\in S_k$。例如，排列 123465 避免模式 321。在本文中，我们使用 ε 表示空排列。对于排列 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$，其逆序是排列$r(\pi)=\pi_n\pi_{n-1}\cdots\pi_1$，其补是排列 $c(\pi)=c(\pi_1)c(\pi_2)\cdots c(\pi_n)$，其中$c(x)=n+1-x$。此外，排列 π的长度（记作 $|\pi|$）是 π中元素的数量。例如，对于 $\pi=423165$，$|\pi|=6$，$r(\pi)=561324$，以及 $c(\pi)=354612$。在全文中，我们经常使用生成函数的缩写“g.f.”。

将长度为 k 的偏序模式（POP） P 定义为由 $\{1,2,\ldots,k\}$中的元素标记的一个 k元偏序集（poset）。排列中的 P的一次出现

$\pi_1 \cdots \pi_n \in S_n$ 是一个子序列 $\pi_{i_1} \cdots \pi_{i_k}$，其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$，满足当且仅当 $j < m$ 在 P中时，$\pi_{i_j} < \pi_{i_m}$。因此，长度为 k 的经典模式对应于一个 k元1-链。例如，POP $p =$ 在排列34152中出现六次，即子序列341、342、312、352、412和452。显然，避免POP P等同于同时避免模式312、321和231。我们用 S_n（P_1，.....，P_m）表示 S_n 中同时避免给定模式 P_1，.....，P_m的排列集合。许多作者研究了避免偏序模式的排列；例如，参见 [6, 8, 9, 11, 13, 18, 19]。

~在本文中，我们令 P_j 和 P_ℓ 为图 1所示形式的部分有序模式，称为 平坦偏序模式。我们假设 $j \ge 2$ 和 $\ell \ge 2$。



~图1：部分有序模式 P_j（左侧）和 P_ℓ（右侧）。

~ ~注意，对于任意 $n \ge 0$，$|S_n(P_j, P_\ell)| = |S_n(P_\ell, P_j)|$；这一点可以通过逆序与补操作的复合双射地证明。

回忆一下，斐波那契数 $\{F_n\}_{n\ge 0}$ 定义为 $F_0 = 0$、$F_1 = 1$，且对于 $n \ge 2$，

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

更一般地，对于 $k \ge 2$，k-斐波那契数 $\{F_{(k)n}\}_{n\ge 0}$定义为 $F_1^{(k)} = 1$；对于$n \ge 2$，采用约定：对于 $r \le 0$，$F_r^{(k)} = 0$

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)}. \tag{1}$$

在第 2 节中，我们建立了 k-斐波那契数与排列~同时避开 P_j 和 P_ℓ之间的联系。

设 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n \in S_n$，并设 a，b为两个整数。若 π 对所有满足 $1 \le i \le n$的 i 均满足 $-a < \pi_i - i < b$，则称其为一个受限排列。用 $N(n,\ a,\ b)$ 表示这类排列的数量。

2009 年，Kløve [14] 提出了一种在特殊情形 $N(n,\ a,\ b)$ 下求 $a = b$ 的生成函数的方法。2010 年，Balti´c [4] 提出了一种通过求解方程组来得到 $N(n,\ a,\ b)$ 在 $a \le b$ 时的生成函数的方法。我们在第 ~3 节中建立了 P_j 受限排列与同时避开 P_ℓ 和 3的排列之间的联系。

设 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_m \in S_m$ 和 $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n \in S_n$。直和 $\oplus$ 和 斜和 $\ominus$ 的定义如下：构造排列 $\pi \oplus \sigma$ 和 $\pi \ominus \sigma$：

$$(\pi \oplus \sigma)_i = \begin{cases} \pi_i, & \text{if } 1 \le i \le m, \\ \sigma_{i-m} + m, & \text{if } m+1 \le i \le m+n, \end{cases}$$

$$(\pi \ominus \sigma)_i = \begin{cases} \pi_i + n, & \text{if } 1 \le i \le m, \\ \sigma_{i-m}, & \text{if } m+1 \le i \le m+n. \end{cases}$$

例如， $231 \oplus 312 = 231645$ 和 $231 \ominus 312 = 564312$。

所谓 可分排列 ，是指能够从排列 1 出发，反复应用 $\oplus$ 和 $\ominus$这两种操作构造出来的排列。我们假设空排列 ε 是可分的，尽管有些论文采取相反的假设。Bose、Buss 和 Lubiw [5] 于 1998年 引入了可分排列这一概念，并且众所周知 [12] ，所有长度为 $n \geq 1$ 的可分排列的集合恰好是 $S_n(2413$、3142) 的补类。注意，可分排列的集合在逆序与补操作下均封闭。

可分排列出现在文献的各种语境中（例如参见 [1, 2,3, 7, 10]）。众所周知，也很容易看出，每个排列 $\pi \in S_n(2413$、3142) 都存在一种分解，可以如图 2所示以示意图表示，其中 π 由其排列图表示，并且对于每个 i，在（i、 π_i）处放置一个点。因此，

$$\pi = L_1 L_2 \cdots L_m \, n \, R_m R_{m-1} \cdots R_1.$$

这里，

(i) 对于 $1 \leq i \leq m$， L_i 和 R_i 都必须非空，但 L_m 和 R_1 除外；

(ii) 每个 L_i 和每个 R_i 都由连续的数值组成；

(iii) $R_1 < L_1 < R_2 < L_2 < \cdots < R_m < L_m$，其中对于两个置换块 A 和 B，关系 $A < B$ 表示 A 中的每个元素都小于 B 中的每个元素。特别地，如果 R_1 非空，则它包含 1。

例如，若 $\pi = 32176854$，则 $L_1 = 321$、 $L_2 = 76$、 $R_1 = \varepsilon$ 和 $R_2 = 54$。

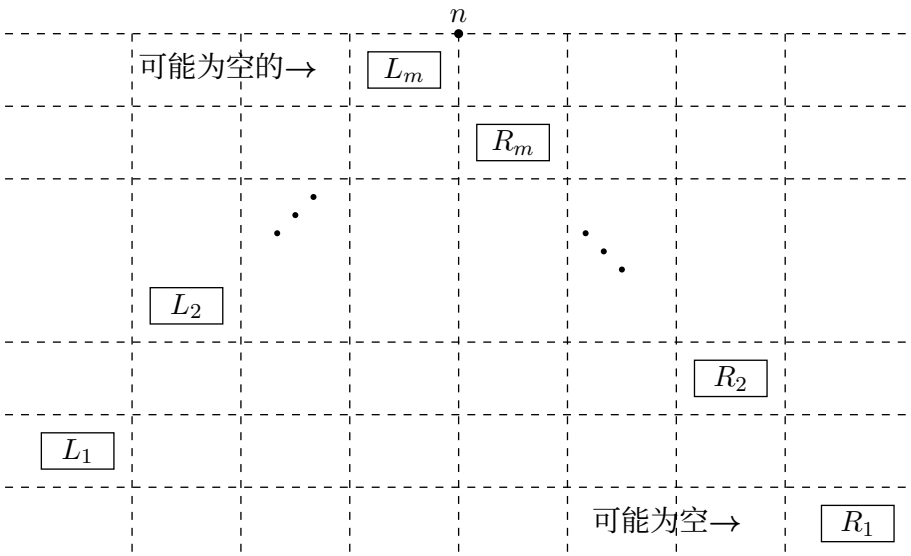


图2：可分排列 [17] 的 Stankova 分解。每个 L_i 和 R_j 都是可分排列。

设 $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \in S_n$。对于每个 $1 \leq i \leq n-1$，如果 $\pi_i < \pi_{i+1}$，我们称 i 为 π 的上升；如果 $\pi_i > \pi_{i+1}$，则称为下降。 π 的上升数和下降数分别记为 asc(π) 和

des(π)。若一个元素 π_i 大于（分别小于）其右侧的每个元素，则称其为从右到左最大值（分别为从右到左最小值）。我们分别用 rmax(π) 和 rmin(π) 表示 π 中从右到左最大值和最小值的个数。与此对偶，若一个元素 π_i 大于（分别小于）其左侧的每个元素，则称其为从左到右最大值（分别为从左到右最小值）。相应的个数分别记为 lmax(π) 和 lmin(π)。例如，若 $\pi = 31452$，则

$$\mathrm{lrmax}(\pi) = 3, \quad \mathrm{lrmin}(\pi) = \mathrm{rlmin}(\pi) = \mathrm{rlmax}(\pi) = \mathrm{asc}(\pi) = \mathrm{des}(\pi) = 2.$$

Gao、Kitaev、Li 和 Ruan [9] 研究了避开单个部分有序模式的可分排列，并推导了统计量 lrmax、lrmin、rlmax、rlmin、下降和上升的联合分布生成函数。我们通过研究 [9] 的生成函数来扩展 [9]

$$F_{j,\ell}(x,p,q,u,v,s,t) := \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{\sigma\in S_n(2413,3142,P_j,\widetilde{P}_\ell)} p^{\mathrm{asc}(\sigma)} q^{\mathrm{des}(\sigma)} u^{\mathrm{lmax}(\sigma)} v^{\mathrm{rmax}(\sigma)} s^{\mathrm{lmin}(\sigma)} t^{\mathrm{rmin}(\sigma)},$$

它给出了同时避开 P_j 和 P_ℓ 的可分排列上这六个统计量的联合分布，其中~。注意，在逆序和补的复合运算下，统计量 lmax 与 rmin（分别地，lmin 与 rmax）互换。因此，

$$F_{j,\ell}(x,p,q,u,v,s,t) = F_{\ell,j}(x,p,q,t,s,v,u). \tag{2}$$

因此，在我们的推导中可以假设 $j \leq \ell$。

~如果 $j = 2$ 或 $\ell = 2$，则只有递增排列 $12\cdots n$ 属于 S_n(2413、3142、P_2、P_2)，所以对于 $j \geq 2$ 和 $\ell \geq 2$,

$$F_{2,\ell}(x,p,q,u,v,s,t) = F_{j,2}(x,p,q,u,v,s,t) = 1 + \sum_{n\geq 1} p^{n-1}u^n vst^n x^n = 1 + \frac{uvstx}{1-putx}. \tag{3}$$

第4节中的函数方程组确定了 $F_{j、\ell}(x、p、q、u、v、s、t)$ 对所有 $3 \leq j、\ell \leq 5$ 的值；我们还计算了这些生成函数的显式形式，如下所示。情形 $j = \ell = 3$、$j = 3$、$\ell = 4$ 以及 $j = 3$、$\ell = 5$ 分别由定理 5.1、5.3 和 5.5 给出。情形 $j = \ell = 4$ 和 $j = 4$、$\ell = 5$ 分别由定理5.7 和 5.9 涵盖。最后，情形 $j = \ell = 5$ 由定理 5.11 给出。值得注意的是，我们关于$F_{4、}$4($x、p、q、u、v、s、t$)的公式是一个有理函数，其分子（分别为分母）中的求和包含 49（分别为 7）个单项式；我们关于 $F_{4、}$5($x、p、q、u、v、s、t$) 的公式是一个有理函数，其分子（分别为分母）中的求和包含 93（分别为 10）个单项式；我们关于 $F_{5、}$5($x、p、q、u、v、s、t$) 的公式是一个有理函数，其分子（分别为分母）中的求和包含 293（分别为 17）个单项式。

~2 k-斐波那契数与避开 P_j 和 P_ℓ的排列

本节中，我们介绍 k-斐波那契数与同时避开模式 P_j 和 P_ℓ的排列之间的一种关系。

~ ~在下面的定理中，回顾一下，$|S_n(P_j,P_3)| = |S_n(P_3,P_j)|$ 由逆序与补操作的复合得到。还要注意，在 $j = \ell = 3$的情况下，避免这些部分有序模式

等价于同时避免经典模式 231、312 和 321。因此，这种情况可由一项已知结果推出，该结果最早发表于 [15]。

定理 2.1。对于 $j \geq 3$ 和 $n \geq 0$，$a_n := |S_n(P_j, \widetilde{P}_3)| = |S_n(P_3, \widetilde{P}_j)| = F_{n+1}^{(j-1)}$。

证明。只需考虑 $S_n(P_j, P_3)$。设 $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n \in S_n(P_j, P_3)$。我们必须有 $\pi_1 = 1$ 或 $\pi_2 = 1$；否则，$\pi_1\pi_2 1$ 会构成 P_3的一次出现。

情形 1： $\pi_1 = 1$。在这种情况下，π_1 不能成为 π中 P_j 或 P_3 的一次出现的一部分，因此我们只需确保 $\pi_2\pi_3\cdots\pi_n$避免 P_j和 P_3。这样的排列有 a_{n-1}个。

情形 2： $\pi_2 = 1$。在这种情况下，$\pi_1 \in \{2, 3, \ldots, j-1\}$；否则，集合$\{1, 2, \ldots, j-1, \pi_1\}$中的元素将构成 π中 P_j的一次出现，这是不可能的。

如果 $\pi_1 = 2$，那么 $\pi_1\pi_2 = 21$ 不可能参与 π中 P_j 或 P_3 的任何一次出现，而剩余的排列 $\pi_3\pi_4\cdots\pi_n$有 a_{n-2}种选法。

如果 $\pi_1 = 3$，我们必须有 $\pi_3 = 2$，否则集合 $\{2, 3, \pi_3\}$中的元素将构成 P_3的一次出现，这是不可能的。于是，$\pi_1\pi_2\pi_3 = 312$ π 312 不会影响其余部分（无法参与 P_j或 P_3的任何一次出现），而 $\pi_4\pi_5\cdots\pi_n$有 a_{n-3}种选法。

一般来说，如果 $\pi_1 = s$满足 $s \leq j-1$，我们有 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_s = s123\cdots(s-1)$，并且有 a_{n-s}种方法来选择 $\pi_{s+1}\pi_{s+2}\cdots\pi_n$。

上述情形给出了递推关系

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_{n-j+1}.$$

现在，通过将所需结果与式（1）进行比较，并注意到初始条件成立（空排列 ε 避免了这些模式），即可得出所需结果。 □

3 受限排列与同时避免 P_j 和 P_ℓ的排列

以下定理给出了受限排列与同时避免 P_j 和 P_ℓ的排列之间的关系。

定理 3.1. 当且仅当 $-\ell + 2 \leq \pi_i - i \leq j - 2$时，我们有 $\pi = \pi_1\cdots\pi_n \in S_n(P_j, P_\ell)$.

证明。首先，我们证明 $\pi_i - i \leq j-2$ 当且仅当 π 避免 P_j。假设存在$i_0 \in [n]$ 使得 $\pi_{i_0} = i_0 + j - 1$。令

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, i_0 + j - 2\} \quad \text{and} \quad B_1 = \{\pi_{i_0+1}, \pi_{i_0+2}, \ldots, \pi_n\}.$$

为了避免部分有序模式 P_j，B_1 中小于 π_{i_0}的元素个数不得超过 $j-2$。也就是说，$|A_1 \cap B_1| \leq j-2$。令 $C_1 = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{i_0-1}\}$。那么

$$|A_1 \cap C_1| \geq (i_0 + j - 2) - (j - 2) = i_0,$$

这就导致了矛盾。

反过来，假设存在一个 $i_0 \in [n]$，它参与了部分有序模式 POPP_j 的一次出现。那么，对于 $i > i_0$，至少有 $j-1$ 个元素小于 π_{i_0}。令

$$A_2 = \{1, 2, \ldots, i_0 + j - 2\}, \quad B_2 = \{\pi_{i_0}, \pi_{i_0+2}, \ldots, \pi_n\}, \quad \text{and} \quad C_2 = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{i_0-1}\}.$$

我们有 $|A_2 \cap B_2| \geq j$。因此，

$$|A_2 \cap C_2| \leq (i_0 + j - 2) - j = i_0 - 2.$$

因此， C_2 中至少有一个元素大于 $i_0 + j - 2$，这就导致矛盾。

~类似地，我们证明 $-\ell + 2 \leq \pi_i - i$ 当且仅当 π 避免 P_ℓ。假设存在 $k_0 \in [n]$ 使得 $\pi_{k_0} = k_0 - \ell + 1$。令

$$A_1' = \{k_0 - \ell + 2, \ldots, n\}, \quad B_1' = \{\pi_1, \ldots, \pi_{k_0-1}\}, \quad \text{and} \quad C_1' = \{\pi_{k_0+1}, \ldots, \pi_n\}.$$

~为了避免部分有序模式 P_ℓ， A_1' 中小于 π_{k_0} 的元素个数不得超过 $\ell - 2$。也就是说，$|A_1' \cap B_1'| \leq \ell - 2$。因此，

$$|A_1' \cap C_1'| \geq |A_1'| - (\ell - 2) = n - (k_0 - \ell + 2) - (\ell - 2) = n - k_0,$$

这是不可能的。反向的证明与第一部分类似，因此略去。定理得证。

□

^令 $N(n, \ell, j)$ 表示 S_n 中满足 $-\ell+2 \leq \pi_i - i \leq j-2$ 的受限排列数。^ Balti´c [4] 给出了一种方法，可在 $\ell \leq j$ 的情形下求出 $N(n, \ell, j)$ 的生成函数；根据定理 3.1 以及 $|S_n(P_j, \widetilde{P}_\ell)| = |S_n(P_\ell, \widetilde{P}_j)|$ 这一事实，它也是 ^$N(n, j, \ell)$ 的生成函数。因此，这种方法~可用于计算 $|S_n(P_j, P_\ell)|$。最后，我们指出，Balti´c [4] 所建立的受限排列与 k-斐波那契数之间的联系，与定理 3.1 以及我们在第 2 节中的发现相一致。

4 任意 $3 \leq j, \ell \leq 5$ 时的生成函数 $F_{j,\ell}(x, p, q, u, v, s, t)$

~由于部分有序模式 P_3 和 P_3 出现在定义可分排列的模式 2413 和 3142 中，我们得到以下命题。

命题 4.1。对于任意 $j \geq 3$ 和 $\ell \geq 3$，我们有

$$S_n(2413, 3142, P_j, \widetilde{P}_3) = S_n(P_j, \widetilde{P}_3),$$
$$S_n(2413, 3142, P_3, \widetilde{P}_\ell) = S_n(P_3, \widetilde{P}_\ell).$$

命题 4.1使我们能够使用 [4]中提出的方法来计算生成函数。然而，Balti´c [4] 并未考虑任何统计量。本节中，我们为任意 $3 \leq j, \ell \leq 5$推导关于 $F_{j,\ell}(x, p, q, u, v, s, t)$ 的函数方程组。为此，对于任意$3 \leq j, \ell \leq 5$ 和 $0 \leq i \leq j-2$，我们定义

$$f_{j,\ell,i}(x, p, q, u, v, s, t) := \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{\pi} p^{\mathrm{asc}(\pi)} q^{\mathrm{des}(\pi)} u^{\mathrm{lmax}(\pi)} v^{\mathrm{rmax}(\pi)} s^{\mathrm{lmin}(\pi)} t^{\mathrm{rmin}(\pi)},$$
$$g_{j,\ell,i}(x, p, q, u, v, s, t) := \sum_{n \geq 2} x^n \sum_{\sigma} p^{\mathrm{asc}(\sigma)} q^{\mathrm{des}(\sigma)} u^{\mathrm{lmax}(\sigma)} v^{\mathrm{rmax}(\sigma)} s^{\mathrm{lmin}(\sigma)} t^{\mathrm{rmin}(\sigma)},$$

~其中，求和遍及 $S_n(2413, 3142, P_j, P_\ell)$中所有的 π（分别为 σ），它们有 i 个元素位于n 右侧，且元素 $n-1$（若 $n-1$ 存在）位于 n左侧（分别为右侧）。我们用 $f_{j,\ell,i}$（分别用 $g_{j,\ell,i}$）表示 $f_{j,\ell,i}(x,p,q,u,v,s,t)$（分别表示 $g_{j,\ell,i}(x,p,q,u,v,s,t)$）。

我们还定义

$$G_j(x,p,q,u,v,s,t) := \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{\sigma\in S_n(2413,3142,P_j)} p^{\mathrm{asc}(\sigma)} q^{\mathrm{des}(\sigma)} u^{\mathrm{lmax}(\sigma)} v^{\mathrm{rmax}(\sigma)} s^{\mathrm{lmin}(\sigma)} t^{\mathrm{rmin}(\sigma)},$$

$$\widetilde{G_\ell}(x,p,q,u,v,s,t) := \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{\sigma\in S_n(2413,3142,\widetilde{P}_\ell)} p^{\mathrm{asc}(\sigma)} q^{\mathrm{des}(\sigma)} u^{\mathrm{lmax}(\sigma)} v^{\mathrm{rmax}(\sigma)} s^{\mathrm{lmin}(\sigma)} t^{\mathrm{rmin}(\sigma)}.$$

~ ~我们将用 G_j（分别用 G_ℓ）表示 $G_j(x,p,q,u,v,s,t)$（分别表示 $G_\ell(x,p,q,u,v,s,t)$）。

定理 4.2. 对于任意 $3\leq j,\ell\leq 5$，生成函数 $F_{j,\ell} := F_{j,\ell}(x,p,q,u,v,s,t)$ 由以下方程组给出

$$F_{j,\ell} = 1 + \sum_{i=0}^{j-2} \Big(f_{j,\ell,i} + g_{j,\ell,i} \Big), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f_{j,\ell,i} = {} & pquvx \left(\sum_{a=1}^{\ell-3} U_a(p,q,u,1,s,1) x^a V_i(p,q,1,v,s,t) x^i \right) \\ & + p^2 quvx \left(\sum_{a=1}^{\ell-3} U_a(p,q,u,1,1,1) x^a V_i(p,q,1,v,1,t) x^i \right) \big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t) - 1 \big), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} g_{j,\ell,i} = {} & quvsx W_i(p,q,1,v,s,t) x^i + pquvx W_i(p,q,1,v,1,t) x^i \big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t) - 1 \big) \\ & + \sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}} pq^2 uvx X_h(p,q,1,v,1,1) x^h \\ & \cdot \sum_{m=1}^{\ell-h-3} \big(Z_m(p,q,u,1,s,1) x^m Y_{i-h}(p,q,1,v,s,t) x^{i-h} \big) \\ & + \sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}} p^2 q^2 uvx X_h(p,q,1,v,1,1) x^h \\ & \cdot \sum_{m=1}^{\ell-h-3} \big(Z_m(p,q,u,1,1,1) x^m Y_{i-h}(p,q,1,v,1,t) x^{i-h} \big) \big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t) - 1 \big), \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$1\leq i\leq j-2$，$X_n := X_n(p,q,u,v,s,t)$ 是长度为 n 的可分排列关于六种统计量：上升、下降、左极大值、右极大值、左极小值和右极小值的生成函数中 x^n 的系数；$U_n := U_n(p,q,u,v,s,t)$（分别地，$V_n := V_n(p,q,u,v,s,t)$、$W_n := W_n(p,q,u,v,s,t)$、$Y_n := Y_n(p,q,u,v,s,t)$ 和 $Z_n := Z_n(p,q,u,v,s,t)$）是 G_{j-i}（分别地，~ ~ ~$G_{\ell-a-1}$、$G_{\ell-1}$、$G_{\ell-m-h-1}$ 和 $G_{j-(i-h)}$）中 x^n 的系数。初始条件为

$$\begin{cases} f_{j,\ell,0} &= uvstx + puvtx \left(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t) - 1 \right), \\ g_{j,\ell,0} &= 0, \\ f_{2,2,0} &= \frac{uvstx}{1-putx}. \end{cases} \tag{7}$$

证明。我们利用 Stankova 对可分置换的分解 [17], , 如图2所示。

当 $j = \ell = 2$ 时， S_n(2413、3142、P_2、P_2) 中唯一的排列是 $\pi = 12\cdots(n-1)n$。显然，在 π 中， n 的右侧不存在任何元素，因此 i 的唯一取值为 0。因此，

$$g_{2,2,0} = 0, \text{ and } f_{2,2,0} = \sum_{n\geq 1} p^{n-1}u^n vst^n x^n = \frac{uvstx}{1-putx}.$$

此外，我们有

$$F_{2,2} = 1 + f_{2,2,0} + g_{2,2,0} = 1 + \frac{uvstx}{1-putx},$$

这与（4）–（6）以及初始条件（7）一致。

当 $3 \leq j$， $\ell \leq 5$ 时，显然有

$$F_{j,\ell} = 1 + \sum_{i=0}^{j-2} f_{j,\ell,i} + \sum_{i=0}^{j-2} g_{j,\ell,i}.$$

若 $1 \leq i \leq j-2$，令 π 为 S_n(2413、3142、P_j、P_ℓ) 中一个排列，其右侧有 i 个元素。由于 $i \geq 1$，显然 π 中存在 $n \geq 2$ 和 $n-1$。根据元素 $n-1$ 在 π 中位于 n 的右侧还是左侧，我们分两种情况讨论。

情形 1. $n-1$ 位于 n 的左侧，处于 π中，如图 3所示。注意， A 非空，因为$n-1$ 属于 A。由 $i \geq 1$可得， B 也非空。需要考虑两种子情况。

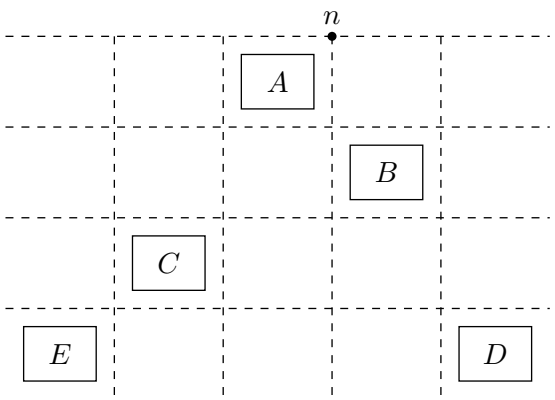


图3：示意图 情形中排列的排列图 1.

(a) B 包含 i 个元素，这意味着 D 为空，因而 E 也为空。若 C 为空，则 A 至多包含 $\ell-3$ 个元素；否则， $\ell-2$ 个 A 中的元素连同与 n 以及 B 中的一个元素将构成模式 P_ℓ的一次出现。假设 A包含 a 个元素 $1 \leq a \leq \ell-3$，并回顾 U_n 与 V_n 分别是 x^n在 G_{j-i} 与 $G_{\ell-a-1}$中的系数。由于 A 对统计量右极大值和

右极小值于 π中没有贡献，且它可以是任意长度为 a 、避免 P_{j-i}的非空可分排列，$\ell-3$我们有生成函数 $\sum U_a(p,q,u,1,s,1)x^a$。此外， B对统计量$a=1$~左极大值于 π 中没有贡献，且它可以是任意长度为 i、避免 $P_{\ell-a-1}$的非空可分排列。于是生成函数为 $V_i(p,q,1,v,s,t)$ x^i。注意 n额外贡献一次上升、一次下降、一个从左到右最大值以及一个从右到左最大值。因此，在此子情形中，我们有项

$$pquvx\sum_{a=1}^{\ell-3}U_a(p,q,u,1,s,1)x^aV_i(p,q,1,v,s,t)x^i. \tag{8}$$

~若 C 非空，则它是一个可分排列，且避免 P_j 和 P_ℓ ，并且它不会对 π中的统计量 rmax 作出贡献。因此，生成函数为$F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1$。注意，子排列 AnB 不会对 π 中的统计量 lmin 作出贡献，并且在 AnB 和 C之间形成一个额外的上升。因此，根据式（8），在这个子情形中，我们有如下项:

$$p^2quvx\sum_{a=1}^{\ell-3}U_a(p,q,u,1,1,1)x^aV_i(p,q,1,v,1,t)x^i(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1). \tag{9}$$

(b) B 包含 h 个元素，其中 $1\le h\le i-1$ 且 $i\ge 2$。这意味着 C 和 D 都非空；当 $3\le j,$ $\ell\le 5$时，它们会导致模式~P_ℓ的出现，这与假设矛盾。

结合式（8）和式（9），得到式（5）。

情形 2。 $n-1$ 在 n 的右侧，位于 π中，如图4所示。注意， A 非空，因为$n-1$ 属于 A。需要考虑两种子情形。

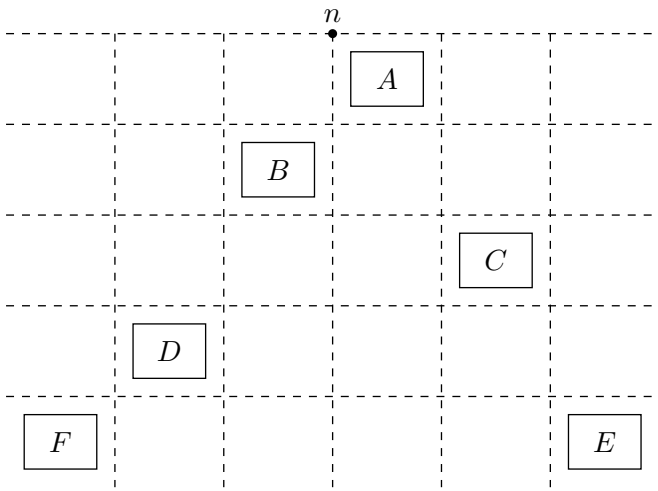


图 4：一个示 例图，展示了情形中的排列所对应的排列图 2.

(a) A 包含 i 个元素，这意味着 $E\cup C$ 从而 $D\cup F$ 均为空。若 B 为空，则生成函数为

$$quvsxW_i(p,q,1,v,s,t)x^i, \tag{10}$$

~其中回顾 W_n 是 $G_{\ell-1}$中 x^n 的系数。这是因为 A对 π 中的统计量左极大值不贡献~，并且可以是长度为 i 且避开 $P_{\ell-1}$的任意可分排列，而 n 额外贡献一次下降、一个额外的从左到右最大值、一个额外的从右到左最大值，以及一个额外的从左到右最小值。

如果 B 非空，那么 B 可以是任意一个同时避免 P_j~和 P_ℓ的可分排列。 B不会对 π中的右极大值产生贡献，因此其生成函数为 $F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1$。注意，子排列 nA 不会对 π 中的左极小值统计量产生贡献，并且 nA 和 B之间会形成一个额外的上升。因此，由（10）可知，在此子情况下有

$$pquvxW_i(p,q,1,v,1,t)x^i\left(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right). \tag{11}$$

（b） A 包含 h 个元素，其中 $1\le h\le i-1$ 和 $i\ge 2$。这意味着 B 和 C 都非空。如果 D 为空，那么 E 和 F 也为空。注意， A 和 B 至多包含 $\ell-3$ 个元素；否则， A 中的 n 个元素、 B以及 C中的一个元素将构成~一个 P_ℓ的出现，这与假设矛盾。因此， B 至多包含 $\ell-3-h$个元素。由于 B 非空， $h\le\ell-4$。 A 不会对 π 中的左极大值、右极小值和左极小值统计量产生贡献，并且它可以是长度为 h的任意非空可分排列。

g.f. is then $\sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}} X_h(p,q,1,v,1,1)x^h$.

假设 B 包含 m 个元素， $1\le m\le\ell-3-h$，并回忆一下， Y_n （分别为 Z_n）~是 x^n 在 $G_{\ell-m-h-1}$ （分别为 $G_{j-(i-h)}$）中的系数。由于 B 不会对 π中的右极大值和右极小值统计量产生贡献，且它可以是任意一个长度为 m、避免 $P_{j-(i-h)}$的非空可分排列$_{\ell-h-3}$，因此生成函数为 $\sum_{m=1} Z_m(p,q,u,1,s,1)x^m$。由于 C不会对 π中的右极大值统计量产生贡献，且它可以是任意一个长度为 $i-h$、避免 $\widetilde{P}_{\ell-m-h-1}$的非空可分排列，因此生成函数为 $Y_{i-h}(p,q,1,v,s,t)$ x^{i-h}。此外， A 与 C之间形成一个额外的下降，而 n 贡献一个额外的上升、一个额外的下降、一个额外的从左到右最大值和一个额外的从右到左最大值。因此，在此子情形下，我们得到这一项

$$q\sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}} pquvxX_h(p,q,1,v,1,1)x^h\sum_{m=1}^{\ell-h-3}\left(Z_m(p,q,u,1,s,1)x^mY_{i-h}(p,q,1,v,s,t)x^{i-h}\right). \tag{12}$$

如果 D 非空，那么 B 和 C 也都非空。对于任意 $3\le j$， $\ell\le 5$、 E 必须为空，否则会导致出现 P_ℓ，因此 F 为空。于是，生成函数为

$$\begin{aligned} pq\sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}} pquvxX_h(p,q,1,v,1,1)x^h\sum_{m=1}^{\ell-h-3}\big(Z_m(p,q,u,1,1,1)x^m \\ \cdot Y_{i-h}(p,q,1,v,1,t)x^{i-h}\big)\big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big) \end{aligned} \tag{13}$$

因为

- D 是一个非空的可分排列，避免出现 P_j 和 P_ℓ ，且不会对~ π中的统计量 rmax 作出贡献。因此，相应的生成函数为 $F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1$；
- 在 B 和 D之间形成了一个额外的上升，并且

- 因为子排列 $BnAC$ 对 π中的左极小值统计量没有贡献，将其与（12）结合后，相应的生成函数为

$$pq\sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}} pquvxX_h(p,q,1,v,1,1)x^h\sum_{m=1}^{\ell-h-3}\big(Z_m(p,q,u,1,1,1)x^m \cdot Y_{i-h}(p,q,1,v,1,t)x^{i-h}\big)\big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big).$$

结合（10）–（13），可得（6）。

若 $i=0$，令 $\pi=\pi_1\cdots\pi_n$ 为任意一个同时避免 $\sim P_j$ 和 P_ℓ 且满足 $\pi_n=n$ 的非空可分排列。注意，若 $n-1$ 存在，则它位于 n 的左侧。我们有 $g_{j,\ell,0}=0$ 并且

$$f_{j,\ell,0}=uvstx+puvtx\left(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right) \tag{14}$$

因为若 $n\geq 2$，子排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1}$ 对统计量 rmax 没有贡献，而 $\sim$ 可以是 S_{n-1} 中的任意排列（2413，3142，P_j，P_ℓ），而 n 会在 π 中贡献一个上升、一个额外的从左到右最大值、一个额外的从右到左最大值以及一个额外的从右到左最小值。

固定整数 $3\leq j$，$\ell\leq 5$，并在 $v=1$（4）–（6）中令其取值，可得，对于 $1\leq i\leq j-2$,

$$F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)=1+\sum_{i=0}^{j-2}\Big(f_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)+g_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)\Big), \tag{15}$$

$$f_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)=pqux\left(\sum_{a=1}^{\ell-3}U_a(p,q,u,1,s,1)x^aV_i(p,q,1,1,s,t)x^i\right)$$
$$+p^2qux\left(\sum_{a=1}^{\ell-3}U_a(p,q,u,1,1,1)x^aV_i(p,q,1,1,1,t)x^i\right)\big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big), \tag{16}$$

$$g_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)=qusxW_i(p,q,1,1,s,t)x^i$$
$$+pquxW_i(p,q,1,1,1,t)x^i\big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)$$
$$+\sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}}pq^2uxX_h(p,q,1,1,1,1)x^h\sum_{m=1}^{\ell-h-3}\big(Z_m(p,q,u,1,s,1)x^mY_{i-h}(p,q,1,1,s,t)x^{i-h}\big)$$
$$+\sum_{h=1}^{\min\{i-1,\ell-4\}}p^2q^2uxX_h(p,q,1,1,1,1)x^h\sum_{m=1}^{\ell-h-3}\big(Z_m(p,q,u,1,1,1)x^mY_{i-h}(p,q,1,1,1,t)x^{i-h}\big)$$
$$\cdot\big(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big), \tag{17}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} f_{j,\ell,0}(x,p,q,u,1,s,t) &= ustx+putx\left(F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right),\\ g_{j,\ell,0}(x,p,q,u,1,s,t) &= 0,\\ f_{2,2,0}(x,p,q,u,1,s,t) &= \frac{ustx}{1-putx}. \end{cases} \tag{18}$$

容易看出，函数 $f_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)$ 和 $g_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)$ 可以逐步计算，其中 i 从 0 到 $j-2$，每一步都表示为一个已计算因子乘以

$F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)$，并加上其他已计算项。将这些表达式代入 (15) 中的 $f_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)$ 和 $g_{j,\ell,i}(x,p,q,u,1,s,t)$，即可得到 $F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)$ 的表达式。接着将 $F_{j,\ell}(x,p,q,u,1,s,t)$ 代入 (4)–(6)，得到 $F_{j,\ell}$ 的表达式，从而完成证明。 □

注记4.3. 由于

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_2 &= 1+uvstx+pu^2vst^2x^2+\dots,\\
\widetilde{G}_3 &= 1+uvstx+(pu^2vst^2+quv^2s^2t)x^2\\
&\quad +(pquv^2s^2t^2+pqu^2vs^2t^2+pqu^2v^2st^2+p^2u^3vst^3)x^3+\dots,\\
\widetilde{G}_4 &= 1+uvstx+(pu^2vst^2+quv^2s^2t)x^2\\
&\quad +(p^2u^3vst^3+pqu^2v^2st^2+pqu^2vs^2t^2+pqu^2v^2s^2t+pquv^2s^2t^2+q^2uv^3s^3t)x^3+\dots,\\
F_2 &= 1+uvstx+pu^2vst^2x^2+\dots,\\
F_3 &= 1+uvstx+(pu^2vst^2+quv^2s^2t)x^2+\dots,\\
F_4 &= 1+uvstx+(pu^2vst^2+quv^2s^2t)x^2+\dots,
\end{aligned}$$

在推导任意 $3\le j,\ell\le 5$ 的生成函数 $F_{j,\ell}$ 时，我们可以得到 U_n, V_n, W_n, Y_n 和 Z_n。

5 $F_{j,\ell}(x,p,q,u,v,s,t)$ 的显式形式（$3\le j,\ell\le 5$）

在本 节中，我们使用定理 4.2 为所有 $3\le j,\ell\le 5$ 显式推导生成函数 $F_{j,\ell}$.

5.1 $S_n(2413,3142,P_3,P_3)$的生成函数

定理 5.1. $S_n(2413、3142、P_3$ 和 $P_3)$ 的生成函数为

$$F_{3,3}(x,p,q,u,v,s,t)=\frac{F_a}{F_b},$$

其中 $F_b=pqutx^2+putx-1$ 和

$$\begin{aligned}
F_a &= pq\,u^2v^2s^2t^2x^3-pq\,u^2v^2s\,t^2x^3-pq\,u^2v\,s^2t^2x^3+pq\,u^2vs\,t^2x^3\\
&\quad +pqut\,x^2+putx-qu\,v^2s^2t\,x^2-uvstx-1.
\end{aligned}$$

证明。令 $j=\ell=3$ 在定理 4.2中。由于 $G_2=1+uvstx+\dots$，我们有 $W_1=uvst$ 和

$$F_{3,3}=1+f_{3,3,0}+g_{3,3,0}+f_{3,3,1}+g_{3,3,1} \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}
f_{3,3,0} &= uvstx+puvtx\left(F_{3,3}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right), && (20)\\
g_{3,3,0} &= f_{3,3,1}=0, && (21)\\
g_{3,3,1} &= quvsxW_1(p,q,1,v,s,t)x\\
&\quad +pquvxW_1(p,q,1,v,1,t)x\left(F_{3,3}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right)\\
&= quv^2s^2tx^2+pquv^2tx^2\left(F_{3,3}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right). && (22)
\end{aligned}$$

将（20）–（22）代入（19）可得

$$F_{3,3} = 1 + uvstx + quv^2s^2tx^2 + \left(puvtx + pquv^2tx^2\right)\left(F_{3,3}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right). \tag{23}$$

令 v=1 属于（23），并求解 $F_{3,\ 3}(x,\ p,\ q,\ u,\ 1,\ s,\ t)$，可得

$$F_{3,3}(x,p,q,u,1,s,t) = \frac{pqutx^2 + putx - qu\,s^2t\,x^2 - ustx - 1}{pqutx^2 + putx - 1}. \tag{24}$$

将（24）代入（23）的右侧，即得所需结果。 □

推论 5.2。 在 $S_n(2413、3142、\ P_3、\ P_3)$(等价地，由命题可得 *4.1*，在 $S_n(P_3、\ P_3)$中的排列数由生成函数给出。

$$F_{3,3}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + O(x^8).$$

证明。 在定理 $p = q = u = v = s = t = 1$ 中令 5.1，即可得到所需结果。 □

5.2 S_n（2413、3142、P_3、P_4）的生成函数

定理 5.3。 $S_n(2413、3142、\ P_3、\ P_4)$ 的生成函数为

$$F_{3,4}(x,p,q,u,v,s,t) = \frac{F_c}{F_d},$$

其中 $F_d = p^2qu^2tx^3 + pqutx^2 + putx - 1$ 和

$$F_c = p^2qu^3v^2s^2t^2x^4 - p^2qu^3vs^2t^2x^4 - p^2qu^3v^2st^2x^4 + p^2qu^3vst^2x^4 + pqu^2v^2s^2t^2x^3 - pqu^2vs^2t^2x^3 - pqu^2v^2s^2tx^3 - pqu^2v^2st^2x^3 + pqu^2vst^2x^3 + p^2qu^2tx^3 - quv^2s^2tx^2 + pqutx^2 - uvstx + putx - 1.$$

证明。 令 $j = 3$和 $\ell = 4$属于定理 4.2。由于 $G_2 = 1 + uvstx + \ldots$，我们有 $U_1 = uvst$。由于 $G_2 = 1 + uvstx + \ldots$，我们有 $W_1 = uvst$。因此，

$$F_{3,4} = 1 + f_{3,4,0} + g_{3,4,0} + f_{3,4,1} + g_{3,4,1} \tag{25}$$

其中

$$f_{3,4,0} = uvstx + puvtx\left(F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right), \tag{26}$$

$$g_{3,4,0} = 0, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} f_{3,4,1} &= pquvx\left(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_1(p,q,1,v,s,t)x\right) \\ &\quad + p^2quvx\left(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_1(p,q,1,v,1,t)x\right)\left(F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right) \\ &= pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^2v^2tx^3\left(F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} g_{3,4,1} &= quvsxW_1(p,q,1,v,s,t)x \\ &\quad + pquvxW_1(p,q,1,v,1,t)x\left(F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right) \\ &= quv^2s^2tx^2 + pquv^2tx^2\left(F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right), \end{aligned} \tag{29}$$

将（26）–（29）代入（25）得到

$$\begin{aligned} F_{3,4} &= 1 + uvstx + pqu^2v^2s^2tx^3 + quv^2s^2tx^2 \\ &\quad + \left(puvtx + p^2qu^2v^2tx^3 + pquv^2tx^2\right)\left(F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right). \end{aligned} \tag{30}$$

令 v=1 属于 (30)，并求解 $F_{3,4}(x,p,q,u,\mathbf{1},s,t)$，得到

$$F_{3,4}(x,p,q,u,1,s,t) = \frac{p^2qutx^3 - pqustx^3 + pqutx^2 + putx - qustx^2 - ustx - 1}{p^2qutx^3 + pqutx^2 + putx - 1}. \tag{31}$$

将 (31) 代入 (30) 的右侧，即得所需结果。 □

推论 5.4. 排列 $S_n(2413, 3142, P_3, P_4)$ (等价地，根据命题 4.1，$S_n(P_3, P_4)$的数量由生成函数给出。

$$F_{3,4}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3} = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + 44x^7 + O(x^8).$$

*Pro*的。 在定理 $p = q = u = v = s = t = 1$ 中令 5.3，即可得到所需结果 . □

5.3 $S_n(2413, 3142, P_3, P_5)$的生成函数

定理 5.5. S_n(2413、3142、 P_3、 P_5) 的生成函数为

$$F_{3,5}(x,p,q,u,v,s,t) = \frac{F_e}{F_f},$$

其中 $F_f = p^3qu^3tx^4 + p^2qu^2tx^3 + pqutx^2 + putx - 1$ 和

$$\begin{aligned} F_e = {} & p^3qu^4v^2s^2t^2x^5 - p^3qu^4v^2st^2x^5 - p^3qu^4vs^2t^2x^5 + p^3qu^4vst^2x^5 + p^3qu^3tx^4 \\ & + p^2qu^3v^2s^2t^2x^4 - p^2qu^3v^2s^2tx^4 - p^2qu^3v^2st^2x^4 - p^2qu^3vs^2t^2x^4 + p^2qu^3vst^2x^4 \\ & + p^2qu^2tx^3 + pqu^2v^2s^2t^2x^3 - pqu^2v^2s^2tx^3 - pqu^2v^2st^2x^3 - pqu^2vs^2t^2x^3 \\ & + pqu^2vst^2x^3 + pqutx^2 + putx - quv^2s^2tx^2 - uvstx - 1. \end{aligned}$$

证明。 令 $j = 3$, $\ell = 5$ 在定理 4.2中。当 $i = 1$, $U_1 = uvst$, $U_2 = pu^2vst^2$, $V_1 = uvst$, $W_1 = uvst$, 且

$$F_{3,5} = 1 + f_{3,5,0} + g_{3,5,0} + f_{3,5,1} + g_{3,5,1} \tag{32}$$

其中

$$f_{3,5,0} = uvstx + puvtx\left(F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right), \tag{33}$$

$$g_{3,5,0} = 0, \tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
f_{3,5,1} &= pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_1(p,q,1,v,s,t)x \\
&\quad + U_2(p,q,u,1,s,1)x^2V_1(p,q,1,v,s,t)x\Big) \\
&\quad + p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_1(p,q,1,v,1,t)x \\
&\quad + U_2(p,q,u,1,1,1)x^2V_1(p,q,1,v,s,t)x\Big)\left(F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right) \\
&= pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^3v^2s^2tx^4 \\
&\quad + \left(p^2qu^2v^2tx^3 + p^3qu^3v^2tx^4\right)\left(F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right), \qquad (35) \\
g_{3,5,1} &= quvsxW_1(p,q,1,v,s,t)x \\
&\quad + pquvxW_1(p,q,1,v,1,t)x\left(F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right) \\
&= quv^2s^2tx^2 + pquv^2tx^2\left(F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right), \qquad (36)
\end{aligned}
$$

将（33）–（36）代入（32）可得

$$
\begin{aligned}
F_{3,5} &= 1 + uvstx + pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^3v^2s^2tx^4 + quv^2s^2tx^2 \\
&\quad + \left(puvtx + p^2qu^2v^2tx^3 + p^3qu^3v^2tx^4 + pquv^2tx^2\right)\left(F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right). \qquad (37)
\end{aligned}
$$

令 v=1 属于 (37)，并解出 $F_{3,\ 5}(x,\ p,\ q,\ u,\ 1,\ s,\ t)$，可得

$$
F_{3,5}(x,p,q,u,1,s,t) = \frac{M_1}{M_2}, \qquad (38)
$$

其中 $M_2 = p^3qu^3tx^4 + p^2qu^2tx^3 + pqutx^2 + putx - 1$ 且

$$
M_1 = p^3qu^3tx^4 - p^2qu^3s^2tx^4 + p^2qu^2tx^3 - pqu^2s^2tx^3 + pqutx^2 + putx - qus^2tx^2 - ustx - 1.
$$

将 (38) 代入 (37) 的右端，得到关于$F_{3,\ 5}$的所需公式。 □

推论 5.6。 属于 $S_n(2413,\ 3142,\ P_3,\ P_5)$ 中的排列数（等价地，根据命题 4.1，在 $S_n(P_3, P_5)$中）由生成函数给出。

$$
F_{3,5}(x) = \frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4} = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + 15x^5 + 29x^6 + 56x^7 + O(x^8).
$$

证明。 将 $p = q = u = v = s = t = 1$ 代入定理 5.5，即可得到所需结果。 □

5.4 $S_n(2413,\ 3142,\ P_4,\ P_4)$的生成函数

定理 5.7. $S_n(2413,\ 3142,\ P_4,\ P_4)$ 的生成函数为

$$
F_{4,4}(x,p,q,u,v,s,t) = \frac{F_g}{F_h},
$$

其中 $F_h = p^3qu^2t^2x^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 + pqutx^2 + putx - 1$ 和

$$
\begin{aligned}
F_g = {} & p^3q^3u^3v^3s^3t^3x^7 - p^3q^3u^3v^3s^2t^3x^7 - p^3q^3u^3v^2s^3t^3x^7 + p^3q^3u^3v^2s^2t^3x^7 + p^2q^3u^3v^3s^3t^2x^6 \\
& + p^2q^3u^2v^3s^3t^3x^6 - p^2q^3u^3v^3s^2t^2x^6 - p^2q^3u^3v^2s^3t^2x^6 - p^2q^3u^2v^3s^2t^3x^6 - p^2q^3u^2v^2s^3t^3x^6 \\
& + p^2q^3u^3v^2s^2t^2x^6 + p^2q^3u^2v^2s^2t^3x^6 + p^3qu^3v^2s^2t^3x^5 + pq^3u^2v^3s^3t^2x^5 - p^3qu^3v^2st^3x^5 \\
& - p^3qu^3vs^2t^3x^5 - pq^3u^2v^3s^2t^2x^5 - pq^3u^2v^2s^3t^2x^5 + p^3qu^3vst^3x^5 + pq^3u^2v^2s^2t^2x^5 \\
& + pq^2u^2v^3s^3t^2x^4 + p^2qu^3v^2s^2t^2x^4 + p^2qu^2v^2s^2t^3x^4 - p^2qu^3v^2st^2x^4 - p^2qu^3vs^2t^2x^4 \\
& - p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 - p^2qu^2v^2st^3x^4 - p^2qu^2vs^2t^3x^4 - pq^2u^2v^3st^2x^4 - pq^2u^2vs^3t^2x^4 \\
& + p^2qu^3vst^2x^4 + p^2qu^2vst^3x^4 + pq^2u^2vst^2x^4 + pqu^2v^2s^2t^2x^3 - q^2uv^3s^3tx^3 + p^3qu^2t^2x^4 \\
& - pqu^2v^2s^2tx^3 - pqu^2v^2st^2x^3 - pqu^2vs^2t^2x^3 - pquv^2s^2t^2x^3 + pqu^2vst^2x^3 + p^2qu^2tx^3 \\
& + p^2qut^2x^3 - quv^2s^2tx^2 + pq^2utx^3 + pqutx^2 - uvstx + putx - 1
\end{aligned}
$$

证明。设 $j = \ell = 4$ 属于定理 4.2。当 $i = 1$, $U_1 = uvst$, $V_1 = uvst$, 且 $W_1 = uvst$。当 $i = 2$, $U_1 = uvst$, $V_2 = pu^2vst^2$, 且 $W_2 = pu^2vst^2 + quv^2s^2t$。那么,

$$
F_{4,4} = 1 + f_{4,4,0} + g_{4,4,0} + f_{4,4,1} + g_{4,4,1} + f_{4,4,2} + g_{4,4,2} \tag{39}
$$

其中

$$
f_{4,4,0} = uvstx + puvtx\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right), \tag{40}
$$

$$
g_{4,4,0} = 0, \tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{4,4,1} = {} & pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_1(p,q,1,v,s,t)x\Big) \\
& + p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_1(p,q,1,v,1,t)x\Big)\Big(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\Big) \\
= {} & pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^2v^2tx^3\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right),
\end{aligned} \tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{4,4,1} = {} & quvsxW_1(p,q,1,v,s,t)x + pquvxW_1(p,q,1,v,1,t)x\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right) \\
= {} & quv^2s^2tx^2 + pquv^2tx^2\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right),
\end{aligned} \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{4,4,2} = {} & pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_2(p,q,1,v,s,t)x^2\Big) \\
& + p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_2(p,q,1,v,1,t)x^2\Big)\Big(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\Big) \\
= {} & p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 + p^3qu^2v^2t^2x^4\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right),
\end{aligned} \tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{4,4,2} = {} & quvsxW_2(p,q,1,v,s,t)x^2 + pquvxW_2(p,q,1,v,1,t)x^2\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right) \\
= {} & q^2uv^3s^3tx^3 + pquv^2t^2s^2x^3 + \left(pq^2uv^3tx^3 + p^2quv^2t^2x^3\right)\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right).
\end{aligned} \tag{45}
$$

将 (40)–(45) 代入 (39) 得到

$$
\begin{aligned}
F_{4,4} = {} & 1 + uvstx + pqu^2v^2s^2tx^3 + quv^2s^2tx^2 + p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 + q^2uv^3s^3tx^3 \\
& + pquv^2t^2s^2x^3 + \left(puvtx + p^2qu^2v^2tx^3 + pquv^2tx^2 + p^3qu^2v^2t^2x^4 + pq^2uv^3tx^3\right. \\
& \left. + p^2quv^2t^2x^3\right)\left(F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\right).
\end{aligned} \tag{46}
$$

令 v=1 代入（46），并求解 $F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t)$，可得

$$
F_{4,4}(x,p,q,u,1,s,t) = \frac{G_1}{G_2}, \tag{47}
$$

w这里有 $G_2 = p^3qu^2t^2x^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 + pqutx^2 + putx - 1$ 和

$$\begin{aligned} G_1 = & -p^2qu^2s^2t^2x^4 + p^3qu^2t^2x^4 - pqu^2s^2tx^3 - pqus^2t^2x^3 - q^2us^3tx^3 + p^2qu^2tx^3 \\ & + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 - qus^2tx^2 + pqutx^2 + putx - ustx - 1. \end{aligned}$$

将（47）代入（46）的右端，即得所需结果。 □

~**推论 5.8.** 集合 $S_n(2413, 3142, P_4, P_4)$，对于 $n \geq 0$，由生成函数计数，

$$F_{4,4}(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - 3x^3 - x^4} = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 12x^4 + 25x^5 + 57x^6 + 124x^7 + O(x^8).$$

*Pro*的。 令 $p = q = u = v = s = t = 1$ 于定理 5.7 中，即得所需结果 . □

~5.5 $S_n(2413, 3142, P_4, P_5)$ 的生成函数

~**定理 5.9.** $S_n(2413, 3142, P_4, P_5)$ 的生成函数为

$$F_{4,5}(x, p, q, u, v, s, t) = \frac{F_i}{F_j},$$

其中 $F_j = p^4qu^3t^2x^5 + p^3qu^3tx^4 + p^3qu^2t^2x^4 + 3p^2q^2u^2tx^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 + pqutx^2 + putx - 1$ 且

$$\begin{aligned} F_i = & p^5q^3u^5v^3s^3t^3x^9 - p^5q^3u^5v^3s^2t^3x^9 - p^5q^3u^5v^2s^3t^3x^9 + p^5q^3u^5v^2s^2t^3x^9 + p^4q^3u^5v^3s^3t^2x^8 \\ & + 2p^4q^3u^4v^3s^3t^3x^8 - p^4q^3u^5v^3s^2t^2x^8 - p^4q^3u^5v^2s^3t^2x^8 - 2p^4q^3u^4v^3s^2t^3x^8 - 2p^4q^3u^4v^2s^3t^3x^8 \\ & - p^3q^4u^4v^3s^3t^2x^8 + p^4q^3u^5v^2s^2t^2x^8 + 2p^4q^3u^4v^2s^2t^3x^8 + p^3q^4u^4v^3s^2t^2x^8 + p^3q^4u^4v^2s^3t^2x^8 \\ & - p^3q^4u^4v^2s^2t^2x^8 + 2p^3q^3u^4v^3s^3t^2x^7 + 2p^3q^3u^3v^3s^3t^3x^7 - 2p^3q^3u^4v^3s^2t^2x^7 - 2p^3q^3u^4v^2s^3t^2x^7 \\ & - 2p^3q^3u^3v^3s^2t^3x^7 - 2p^3q^3u^3v^2s^3t^3x^7 + 2p^3q^3u^4v^2s^2t^2x^7 + 2p^3q^3u^3v^2s^2t^3x^7 + p^4qu^4v^2s^2t^3x^6 \\ & + 2p^2q^3u^3v^3s^3t^2x^6 + p^2q^3u^2v^3s^3t^3x^6 - p^4qu^4v^2st^3x^6 - p^4qu^4vs^2t^3x^6 - 2p^2q^3u^3v^3s^2t^2x^6 \\ & - 2p^2q^3u^3v^2s^3t^2x^6 - p^2q^3u^2v^3s^2t^3x^6 - p^2q^3u^2v^2s^3t^3x^6 + p^4qu^4vst^3x^6 + 2p^2q^3u^3v^2s^2t^2x^6 \\ & + p^2q^3u^2v^2s^2t^3x^6 + p^2q^2u^3v^3s^3t^2x^5 + p^3qu^4v^2s^2t^2x^5 + p^3qu^3v^2s^2t^3x^5 + p^2q^2u^3v^3s^2t^2x^5 \\ & + p^2q^2u^3v^2s^3t^2x^5 + pq^3u^2v^3s^3t^2x^5 - p^3qu^4v^2st^2x^5 - p^3qu^4vs^2t^2x^5 - p^3qu^3v^2s^2t^2x^5 \\ & - p^3qu^3v^2st^3x^5 - p^3qu^3vs^2t^3x^5 - 2p^2q^2u^3v^3st^2x^5 - 2p^2q^2u^3vs^3t^2x^5 - pq^3u^2v^3s^2t^2x^5 \\ & - pq^3u^2v^2s^3t^2x^5 + p^3qu^4vst^2x^5 + p^3qu^3vst^3x^5 - p^2q^2u^3v^2st^2x^5 - p^2q^2u^3vs^2t^2x^5 \\ & + pq^3u^2v^2s^2t^2x^5 + pq^2u^2v^3s^3t^2x^4 + 3p^2q^2u^3vst^2x^5 + p^2qu^3v^2s^2t^2x^4 + p^2qu^2v^2s^2t^3x^4 \\ & - pq^2u^2v^3s^3tx^4 + p^4qu^3t^2x^5 - p^2qu^3v^2s^2tx^4 - p^2qu^3v^2st^2x^4 - p^2qu^3vs^2t^2x^4 - p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 \\ & - p^2qu^2v^2st^3x^4 - p^2qu^2vs^2t^3x^4 - pq^2u^2v^3s^2tx^4 - pq^2u^2v^3st^2x^4 - pq^2u^2v^2s^3tx^4 - pq^2u^2vs^3t^2x^4 \\ & + p^2qu^3vst^2x^4 + p^2qu^2vst^3x^4 + pq^2u^2vst^2x^4 + pqu^2v^2s^2t^2x^3 - q^2uv^3s^3tx^3 + p^3qu^3tx^4 \\ & + p^3qu^2t^2x^4 - pqu^2v^2s^2tx^3 - pqu^2v^2st^2x^3 - pqu^2vs^2t^2x^3 - pquv^2s^2t^2x^3 + 3p^2q^2u^2tx^4 \\ & + pqu^2vst^2x^3 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 - quv^2s^2tx^2 + pq^2utx^3 + pqutx^2 - uvstx + putx - 1. \end{aligned}$$

证明。 设 $j = 4$, $\ell = 5$ 在定理 4.2中。当 $i = 1$, $U_1 = uvst$, $U_2 = pu^2vst^2 + quv^2s^2t$, $V_1 = uvst$, 以及 $W_1 = uvst$时。当 $i = 2$, $U_1 = uvst$, $U_2 = pu^2vst^2$, 以及 $W_2 = pu^2vst^2 + quv^2s^2t$时，

对于 the 情形 $a=1,\ V_2=pu^2vst^2+quv^2s^2t,$ 对应情形 $a=2,\ V_2=pu^2vst^2$。于是,

$$F_{4,5}=1+f_{4,5,0}+g_{4,5,0}+f_{4,5,1}+g_{4,5,1}+f_{4,5,2}+g_{4,5,2} \tag{48}$$

其中

$$f_{4,5,0}=uvstx+puvtx\left(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right), \tag{49}$$

$$g_{4,5,0}=0, \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
f_{4,5,1}&=pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_1(p,q,1,v,s,t)x\\
&\quad+U_2(p,q,u,1,s,1)x^2V_1(p,q,1,v,s,t)x\Big)\\
&\quad+p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_1(p,q,1,v,1,t)x\\
&\quad+U_2(p,q,u,1,1,1)x^2V_1(p,q,1,v,1,t)x\Big)\\
&\quad\cdot\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&=pqu^2v^2s^2tx^3+p^2qu^3v^2s^2tx^4+pq^2u^2v^2s^3tx^4\\
&\quad+\big(p^2qu^2v^2tx^3+p^3qu^3v^2tx^4+p^2q^2u^2v^2tx^4\big)\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big),
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
g_{4,5,1}&=quvsxW_1(p,q,1,v,s,t)x\\
&\quad+pquvxW_1(p,q,1,v,1,t)x\left(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right)\\
&=quv^2s^2tx^2+pquv^2tx^2\left(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right),
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
f_{4,5,2}&=pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_2(p,q,1,v,s,t)x^2\\
&\quad+U_2(p,q,u,1,s,1)x^2V_2(p,q,1,v,s,t)x^2\Big)\\
&\quad+p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_2(p,q,1,v,1,t)x^2\\
&\quad+U_2(p,q,u,1,1,1)x^2V_2(p,q,1,v,1,t)x^2\Big)\\
&\quad\cdot\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&=p^2qu^2v^2s^2t^2x^4+pq^2u^2v^3s^3tx^4+p^3qu^3v^2s^2t^2x^5\\
&\quad+(p^3qu^2v^2t^2x^4+p^2q^2u^2v^3tx^4+p^4qu^3v^2t^2x^5)\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big),
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
g_{4,5,2}&=quvsxW_2(p,q,1,v,s,t)x^2\\
&\quad+pquvxW_2(p,q,1,v,1,t)x^2\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&\quad+pq^2uvxX_1(p,q,1,v,1,1)xZ_1(p,q,u,1,s,1)xY_1(p,q,1,v,s,t)x\\
&\quad+p^2q^2uvxX_1(p,q,1,v,1,1)xZ_1(p,q,u,1,1,1)x\\
&\quad\cdot Y_1(p,q,1,v,1,t)x\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&=q^2uv^3s^3tx^3+pquv^2t^2s^2x^3+pq^2u^2v^3s^2tx^4\\
&\quad+(pq^2uv^3tx^3+p^2quv^2t^2x^3+p^2q^2u^2v^3tx^4)\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big).
\end{aligned} \tag{54}$$

将（49）–（54）代入（48）可得

$$\begin{aligned}F_{4,5} &= 1 + uvstx + puvtx\big(F_{4,5}(x,p,q,1,v,s,t) - 1\big)\\ &\quad + pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^3v^2s^2tx^4 + pq^2u^2v^2s^3tx^4\\ &\quad + (p^2qu^2v^2tx^3 + p^3qu^3v^2tx^4 + p^2q^2u^2v^2tx^4)\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\ &\quad + quv^2s^2tx^2 + pquv^2tx^2\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\ &\quad + p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 + pq^2u^2v^3s^3tx^4 + p^3qu^3v^2s^2t^2x^5\\ &\quad + (p^3qu^2v^2t^2x^4 + p^2q^2u^2v^3tx^4 + p^4qu^3v^2t^2x^5)\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\ &\quad + q^2uv^3s^3tx^3 + pquv^2t^2s^2x^3 + pq^2u^2v^3s^2tx^4\\ &\quad + (pq^2uv^3tx^3 + p^2quv^2t^2x^3 + p^2q^2u^2v^3tx^4)\big(F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big). \qquad (55)\end{aligned}$$

令 v=1 属于 (55)，并解出 $F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t)$，得到

$$F_{4,5}(x,p,q,u,1,s,t) = \frac{Q_1}{Q_2}, \qquad (56)$$

其中

$$\begin{aligned}Q_2 &= p^4qu^3t^2x^5 + p^3qu^3tx^4 + p^3qu^2t^2x^4 + 3p^2q^2u^2tx^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3\\ &\quad + pq^2utx^3 + pqutx^2 + putx - 1,\\ Q_1 &= -p^3qu^3s^2t^2x^5 + p^4qu^3t^2x^5 - p^2qu^3s^2tx^4 - p^2qu^2s^2t^2x^4 - 2pq^2u^2s^3tx^4 + p^3qu^3tx^4\\ &\quad + p^3qu^2t^2x^4 - pq^2u^2s^2tx^4 + 3p^2q^2u^2tx^4 - pqu^2s^2tx^3 - pqus^2t^2x^3 - q^2us^3tx^3\\ &\quad + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 - qus^2tx^2 + pqutx^2 + putx - ustx - 1.\end{aligned}$$

将 (56) 代入 (55) 右侧，得到所需的 $F_{4,5}$ 公式。 □

推论 5.10。 $F_{4,5}(x)$ 的生成函数为

$$\frac{1}{1 - x - x^2 - 3x^3 - 5x^4 - x^5} = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 16x^4 + 34x^5 + 79x^6 + 193x^7 + O(x^8).$$

证明。 令 $p = q = u = v = s = t = 1$ 为定理 5.9中的值，即得所需结果。 □

~5.6 $S_n(2413, 3142, P_5, P_5)$的生成函数

~定理 5.11. $S_n(2413, 3142, P_5, P_5)$ 的生成函数是

$$F_{5,5}(x,p,q,u,v,s,t) = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5}{F_m},$$

其中

$$\begin{aligned}F_m &= p^5qu^3t^3x^6 + p^4qu^3t^2x^5 + p^4qu^2t^3x^5 + 5p^3q^2u^2t^2x^5 + p^3qu^3tx^4\\ &\quad + p^3qu^2t^2x^4 + p^3qut^3x^4 + 3p^2q^2u^2tx^4 + 3p^2q^2ut^2x^4 + p^2q^2utx^4\\ &\quad + pq^3utx^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 + pqutx^2 + putx - 1,\end{aligned}$$

$$F_1 = p^7q^3u^5v^3s^3t^5x^{11} - p^7q^3u^5v^3s^2t^5x^{11} - p^7q^3u^5v^2s^3t^5x^{11} + p^7q^3u^5v^2s^2t^5x^{11} + p^5q^4u^4v^4s^4t^4x^{10}$$
$$+ 2p^6q^3u^5v^3s^3t^4x^{10} + 2p^6q^3u^4v^3s^3t^5x^{10} - 2p^6q^3u^5v^3s^2t^4x^{10} - 2p^6q^3u^5v^2s^3t^4x^{10} + p^6q^3u^4v^3s^3t^4x^{10}$$
$$- 2p^6q^3u^4v^3s^2t^5x^{10} - 2p^6q^3u^4v^2s^3t^5x^{10} - p^5q^4u^4v^4s^2t^4x^{10} - 4p^5q^4u^4v^3s^3t^4x^{10} - p^5q^4u^4v^2s^4t^4x^{10}$$
$$+ 2p^6q^3u^5v^2s^2t^4x^{10} - p^6q^3u^4v^3s^2t^4x^{10} - p^6q^3u^4v^2s^3t^4x^{10} + 2p^6q^3u^4v^2s^2t^5x^{10} + 4p^5q^4u^4v^3s^2t^4x^{10}$$
$$+ 4p^5q^4u^4v^2s^3t^4x^{10} + p^4q^4u^4v^4s^4t^3x^9 + p^4q^4u^3v^4s^4t^4x^9 + p^6q^3u^4v^2s^2t^4x^{10} - 3p^5q^4u^4v^2s^2t^4x^{10}$$
$$+ 2p^5q^3u^5v^3s^3t^3x^9 + 4p^5q^3u^4v^3s^3t^4x^9 + 2p^5q^3u^3v^3s^3t^5x^9 + 5p^3q^5u^3v^4s^4t^3x^9 - 2p^5q^3u^5v^3s^2t^3x^9$$
$$- 2p^5q^3u^5v^2s^3t^3x^9 + p^5q^3u^4v^3s^3t^3x^9,$$

$$F_2 = -4p^5q^3u^4v^3s^2t^4x^9 - 4p^5q^3u^4v^2s^3t^4x^9 + p^5q^3u^3v^3s^3t^4x^9 - 2p^5q^3u^3v^3s^2t^5x^9 - 2p^5q^3u^3v^2s^3t^5x^9$$
$$- p^4q^4u^4v^4s^2t^3x^9 - 4p^4q^4u^4v^3s^3t^3x^9 - p^4q^4u^4v^2s^4t^3x^9 - p^4q^4u^3v^4s^2t^4x^9 - 4p^4q^4u^3v^3s^3t^4x^9$$
$$- p^4q^4u^3v^2s^4t^4x^9 - 3p^3q^5u^3v^4s^3t^3x^9 - 3p^3q^5u^3v^3s^4t^3x^9 + 2p^5q^3u^5v^2s^2t^3x^9 - p^5q^3u^4v^3s^2t^3x^9$$
$$- p^5q^3u^4v^2s^3t^3x^9 + 4p^5q^3u^4v^2s^2t^4x^9 - p^5q^3u^3v^3s^2t^4x^9 - p^5q^3u^3v^2s^3t^4x^9 + 2p^5q^3u^3v^2s^2t^5x^9$$
$$+ 4p^4q^4u^4v^3s^2t^3x^9 + 4p^4q^4u^4v^2s^3t^3x^9 + 4p^4q^4u^3v^3s^2t^4x^9 + 4p^4q^4u^3v^2s^3t^4x^9 - 2p^3q^5u^3v^4s^2t^3x^9$$
$$+ p^3q^5u^3v^3s^3t^3x^9 - 2p^3q^5u^3v^2s^4t^3x^9,$$

$$F_3 = p^3q^4u^4v^4s^4t^2x^8 + p^3q^4u^3v^4s^4t^3x^8 + p^3q^4u^2v^4s^4t^4x^8 + p^5q^3u^4v^2s^2t^3x^9 + p^5q^3u^3v^2s^2t^4x^9$$
$$- 3p^4q^4u^4v^2s^2t^3x^9 - 3p^4q^4u^3v^2s^2t^4x^9 + p^4q^3u^5v^3s^3t^2x^8 + 4p^4q^3u^4v^3s^3t^3x^8 + 4p^4q^3u^3v^3s^3t^4x^8$$
$$+ p^4q^3u^2v^3s^3t^5x^8 + 2p^3q^5u^3v^3s^2t^3x^9 + 2p^3q^5u^3v^2s^3t^3x^9 + 3p^2q^5u^3v^4s^4t^2x^8 + 3p^2q^5u^2v^4s^4t^3x^8$$
$$- p^4q^3u^5v^3s^2t^2x^8 - p^4q^3u^5v^2s^3t^2x^8 + p^4q^3u^4v^3s^3t^2x^8 - 4p^4q^3u^4v^3s^2t^3x^8 - 4p^4q^3u^4v^2s^3t^3x^8$$
$$+ p^4q^3u^3v^3s^3t^3x^8 - 4p^4q^3u^3v^3s^2t^4x^8 - 4p^4q^3u^3v^2s^3t^4x^8 + p^4q^3u^2v^3s^3t^4x^8 - p^4q^3u^2v^3s^2t^5x^8$$
$$- p^4q^3u^2v^2s^3t^5x^8 - p^3q^4u^4v^4s^2t^2x^8 - p^3q^4u^4v^3s^3t^2x^8 - p^3q^4u^4v^2s^4t^2x^8 - p^3q^4u^3v^4s^2t^3x^8$$
$$- 2p^3q^4u^3v^3s^3t^3x^8 - p^3q^4u^3v^2s^4t^3x^8 - p^3q^4u^2v^4s^2t^4x^8 - p^3q^4u^2v^3s^3t^4x^8 - p^3q^4u^2v^2s^4t^4x^8$$
$$- 2p^2q^5u^3v^4s^3t^2x^8 - 2p^2q^5u^3v^3s^4t^2x^8 + p^2q^5u^2v^4s^4t^2x^8 - 2p^2q^5u^2v^4s^3t^3x^8 - 2p^2q^5u^2v^3s^4t^3x^8$$
$$+ p^4q^3u^5v^2s^2t^2x^8 - p^4q^3u^4v^3s^2t^2x^8 - p^4q^3u^4v^2s^3t^2x^8 + 4p^4q^3u^4v^2s^2t^3x^8 - p^4q^3u^3v^3s^2t^3x^8$$
$$- p^4q^3u^3v^2s^3t^3x^8 + 4p^4q^3u^3v^2s^2t^4x^8 - p^4q^3u^2v^3s^2t^4x^8 - p^4q^3u^2v^2s^3t^4x^8 + p^4q^3u^2v^2s^2t^5x^8$$
$$+ p^3q^4u^4v^3s^2t^2x^8 + p^3q^4u^4v^2s^3t^2x^8 + 2p^3q^4u^3v^3s^2t^3x^8,$$

$$\begin{aligned} F_4 = {} & 2p^3q^4u^3v^2s^3t^3x^8 + p^3q^4u^2v^3s^2t^4x^8 + p^3q^4u^2v^2s^3t^4x^8 - p^2q^5u^3v^4s^2t^2x^8 + p^2q^5u^3v^3s^3t^2x^8 \\ & - p^2q^5u^3v^2s^4t^2x^8 - p^2q^5u^2v^4s^3t^2x^8 - p^2q^5u^2v^4s^2t^3x^8 - p^2q^5u^2v^3s^4t^2x^8 + p^2q^5u^2v^3s^3t^3x^8 \\ & - p^2q^5u^2v^2s^4t^3x^8 + p^2q^4u^3v^4s^4t^2x^7 + p^2q^4u^2v^4s^4t^3x^7 + p^5qu^4v^2s^2t^4x^7 + p^4q^3u^4v^2s^2t^2x^8 \\ & + p^4q^3u^3v^2s^2t^3x^8 + p^4q^3u^2v^2s^2t^4x^8 - p^3q^4u^3v^2s^2t^3x^8 + 2p^3q^3u^4v^3s^3t^2x^7 + 4p^3q^3u^3v^3s^3t^3x^7 \\ & + 2p^3q^3u^2v^3s^3t^4x^7 + p^2q^5u^3v^3s^2t^2x^8 + p^2q^5u^3v^2s^3t^2x^8 + p^2q^5u^2v^3s^3t^2x^8 + p^2q^5u^2v^3s^2t^3x^8 \\ & + p^2q^5u^2v^2s^3t^3x^8 + pq^5u^2v^4s^4t^2x^7 - p^5qu^4v^2st^4x^7 - 2p^3q^3u^4v^3s^2t^2x^7 \\ & - 2p^3q^3u^4v^2s^3t^2x^7 + p^3q^3u^3v^3s^3t^2x^7 - 4p^3q^3u^3v^3s^2t^3x^7 - 4p^3q^3u^3v^2s^3t^3x^7 + p^3q^3u^2v^3s^3t^3x^7 \\ & - 2p^3q^3u^2v^3s^2t^4x^7 - 2p^3q^3u^2v^2s^3t^4x^7 - p^2q^4u^3v^4s^2t^2x^7 - p^2q^4u^3v^2s^4t^2x^7 - p^2q^4u^2v^4s^2t^3x^7 \\ & - p^2q^4u^2v^2s^4t^3x^7 - pq^5u^2v^4s^3t^2x^7 - pq^5u^2v^3s^4t^2x^7 + p^5qu^4vst^4x^7 + 2p^3q^3u^4v^2s^2t^2x^7 \\ & - p^3q^3u^3v^3s^2t^2x^7 - p^3q^3u^3v^2s^3t^2x^7 + 4p^3q^3u^3v^2s^2t^3x^7 - p^3q^3u^2v^3s^2t^3x^7 - p^3q^3u^2v^2s^3t^3x^7 \\ & + p^3qu^4v^2s^2t^2x^5 + p^3qu^3v^2s^2t^3x^5 + p^3qu^2v^2s^2t^4x^5 + pqutx^2 - uvstx + putx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_5 = {} & 2p^3q^3u^2v^2s^2t^4x^7 + p^3q^2u^3v^3s^3t^3x^6 + pq^5u^2v^3s^3t^2x^7 + pq^4u^2v^4s^4t^2x^6 + p^4qu^4v^2s^2t^3x^6 \\
& + p^4qu^3v^2s^2t^4x^6 + p^3q^3u^3v^2s^2t^2x^7 + p^3q^3u^2v^2s^2t^3x^7 + 2p^3q^2u^3v^3s^2t^3x^6 + 2p^3q^2u^3v^2s^3t^3x^6 \\
& + p^2q^4u^3v^2s^2t^2x^7 + p^2q^4u^2v^2s^2t^3x^7 + 2p^2q^3u^3v^3s^3t^2x^6 + 2p^2q^3u^2v^3s^3t^3x^6 - p^4qu^4v^2st^3x^6 \\
& - p^4qu^4vs^2t^3x^6 - p^4qu^3v^2s^2t^3x^6 - p^4qu^3v^2st^4x^6 - p^4qu^3vs^2t^4x^6 - 3p^3q^2u^3v^3st^3x^6 \\
& - 3p^3q^2u^3vs^3t^3x^6 - 2p^2q^3u^3v^3s^2t^2x^6 - 2p^2q^3u^3v^2s^3t^2x^6 + p^2q^3u^2v^3s^3t^2x^6 - 2p^2q^3u^2v^3s^2t^3x^6 \\
& - 2p^2q^3u^2v^2s^3t^3x^6 - pq^4u^2v^4s^2t^2x^6 - pq^4u^2v^2s^4t^2x^6 + pq^3u^2v^4s^4t^2x^5 + p^4qu^4vst^3x^6 \\
& + p^4qu^3vst^4x^6 - 2p^3q^2u^3v^2st^3x^6 - 2p^3q^2u^3vs^2t^3x^6 + 2p^2q^3u^3v^2s^2t^2x^6 - p^2q^3u^2v^3s^2t^2x^6 \\
& - p^2q^3u^2v^2s^3t^2x^6 + 2p^2q^3u^2v^2s^2t^3x^6 + p^2q^2u^3v^3s^3t^2x^5 + p^2q^2u^2v^3s^3t^3x^5 + 5p^3q^2u^3vst^3x^6 \\
& + p^2q^3u^2v^2s^2t^2x^6 + p^2q^2u^3v^3s^2t^2x^5 + p^2q^2u^3v^2s^3t^2x^5 + p^2q^2u^2v^3s^2t^3x^5 + p^2q^2u^2v^2s^3t^3x^5 \\
& + pq^4u^2v^2s^2t^2x^6 + pq^3u^2v^3s^3t^2x^5 + p^5qu^3t^3x^6 - p^3qu^4v^2st^2x^5 - p^3qu^4vs^2t^2x^5 \\
& - p^3qu^3v^2s^2t^2x^5 - p^3qu^3v^2st^3x^5 - p^3qu^3vs^2t^3x^5 - p^3qu^2v^2s^2t^3x^5 - p^3qu^2v^2st^4x^5 \\
& - p^3qu^2vs^2t^4x^5 - 2p^2q^2u^3v^3st^2x^5 - 2p^2q^2u^3vs^3t^2x^5 - 2p^2q^2u^2v^3s^2t^2x^5 - 2p^2q^2u^2v^3st^3x^5 \\
& - 2p^2q^2u^2v^2s^3t^2x^5 - 2p^2q^2u^2vs^3t^3x^5 - pq^3u^2v^4st^2x^5 - pq^3u^2v^3s^2t^2x^5 - pq^3u^2v^2s^3t^2x^5 \\
& - pq^3u^2vs^4t^2x^5 + p^3qu^4vst^2x^5 + p^3qu^3vst^3x^5 + p^3qu^2vst^4x^5 - p^2q^2u^3v^2st^2x^5 \\
& - p^2q^2u^3vs^2t^2x^5 - p^2q^2u^2v^3st^2x^5 - p^2q^2u^2v^2st^3x^5 - p^2q^2u^2vs^3t^2x^5 - p^2q^2u^2vs^2t^3x^5 \\
& + pq^3u^2v^2s^2t^2x^5 + pq^2u^2v^3s^3t^2x^4 - q^3uv^4s^4tx^4 + 3p^2q^2u^3vst^2x^5 + 3p^2q^2u^2vst^3x^5 \\
& + p^2qu^3v^2s^2t^2x^4 + p^2qu^2v^2s^2t^3x^4 - pq^2u^2v^3s^3tx^4 - pq^2uv^3s^3t^2x^4 + p^4qu^3t^2x^5 \\
& + p^4qu^2t^3x^5 + p^2q^2u^2vst^2x^5 - p^2qu^3v^2s^2tx^4 - p^2qu^3v^2st^2x^4 - p^2qu^3vs^2t^2x^4 \\
& - p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 - p^2qu^2v^2st^3x^4 - p^2qu^2vs^2t^3x^4 - p^2quv^2s^2t^3x^4 + pq^3u^2vst^2x^5 \\
& - pq^2u^2v^3s^2tx^4 - pq^2u^2v^3st^2x^4 - pq^2u^2v^2s^3tx^4 - pq^2u^2vs^3t^2x^4 - pq^2uv^3s^3tx^4 \\
& - pq^2uv^3s^2t^2x^4 - pq^2uv^2s^3t^2x^4 + 5p^3q^2u^2t^2x^5 + p^2qu^3vst^2x^4 + p^2qu^2vst^3x^4 \\
& + pq^2u^2vst^2x^4 + pqu^2v^2s^2t^2x^3 - q^2uv^3s^3tx^3 + p^3qu^3tx^4 + p^3qu^2t^2x^4 + p^3qut^3x^4 \\
& - pqu^2v^2s^2tx^3 - pqu^2v^2st^2x^3 - pqu^2vs^2t^2x^3 - pquv^2s^2t^2x^3 + 3p^2q^2u^2tx^4 + 3p^2q^2ut^2x^4 \\
& + pqu^2vst^2x^3 + p^2q^2utx^4 + pq^3utx^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 - quv^2s^2tx^2 + pq^2utx^3 - 1.
\end{aligned}
$$

证明。设 $j=\ell=5$ 属于定理 4.2。当 $i=1$、$U_1=uvst$、$U_2=pu^2vst^2+quv^2s^2t$、$V_1=uvst$ 和 $W_1=uvst$ 时。当 $i=2$、$U_1=uvst$、$U_2=pu^2vst^2+quv^2s^2t$ 和 $W_2=pu^2vst^2+quv^2s^2t$ 时，对于情形 $a=1$，$V_2=pu^2vst^2+quv^2s^2t$，对于情形 $a=2$，$V_2=pu^2vst^2$。当 $i=3$、$U_1=uvst$、$U_2=pu^2vst^2$ 和 $W_3=p^2u^3vst^3+pqu^2v^2st^2+pqu^2vs^2t^2+pqu^2v^2s^2t+pquv^2s^2t^2+q^2uv^3s^3t$ 时，对于情形 $a=1$，$V_3=pquv^2s^2t^2+pqu^2vs^2t^2+pqu^2v^2st^2+p^2u^3vst^3$，对于情形 $a=2$，$V_3=p^2u^3vst^3$。于是，

$$
F_{5,5}=1+f_{5,5,0}+g_{5,5,0}+f_{5,5,1}+g_{5,5,1}+f_{5,5,2}+g_{5,5,2}+f_{5,5,3}+g_{5,5,3} \tag{57}
$$

其中

$$
f_{5,5,0}=uvstx+puvtx\left(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\right), \tag{58}
$$

$$
g_{5,5,0}=0, \tag{59}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{5,5,1} &= pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_1(p,q,1,v,s,t)x + U_2(p,q,u,1,s,1)x^2V_1(p,q,1,v,s,t)x\Big)\\
&\quad + \ p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_1(p,q,1,v,1,t)x\\
&\quad + U_2(p,q,u,1,1,1)x^2V_1(p,q,1,v,1,t)x\Big)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&= pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^3v^2s^2tx^4 + pq^2u^2v^2s^3tx^4\\
&\quad + (p^2qu^2v^2tx^3 + p^3qu^3v^2tx^4 + p^2q^2u^2v^2tx^4)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big), \qquad (60)\\
g_{5,5,1} &= quvsxW_1(p,q,1,v,s,t)x + pquvxW_1(p,q,1,v,1,t)x\,(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1)\\
&= quv^2s^2tx^2 + pquv^2tx^2\,(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1)\,, \qquad (61)\\
f_{5,5,2} &= pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_2(p,q,1,v,s,t)x^2 + U_2(p,q,u,1,s,1)x^2V_2(x,p,q,1,v,s,t)x^2\Big)\\
&\quad + p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_2(p,q,1,v,1,t)x^2\\
&\quad + U_2(p,q,u,1,1,1)x^2V_2(p,q,1,v,1,t)x^2\Big)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&= p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 + pq^2u^2v^3s^3tx^4 + p^3qu^3v^2s^2t^2x^5\\
&\quad + p^2q^2u^2v^2s^3t^2x^5 + p^3qu^2v^2t^2x^4\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&\quad + (p^2q^2u^2v^3tx^4 + p^4qu^3v^2t^2x^5 + p^3q^2u^2v^2t^2x^5)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big), \qquad (62)\\
g_{5,5,2} &= quvsxW_2(p,q,1,v,s,t)x^2 + pquvxW_2(p,q,1,v,1,t)x^2\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&\quad + pq^2uvxX_1(p,q,1,v,1,1)xZ_1(p,q,u,1,s,1)xY_1(p,q,1,v,s,t)x\\
&\quad + p^2q^2uvxX_1(p,q,1,v,1,1)xZ_1(p,q,u,1,1,1)xY_1(p,q,1,v,1,t)x\\
&\quad \cdot\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&= q^2uv^3s^3tx^3 + pquv^2t^2s^2x^3 + pq^2u^2v^3s^2tx^4\\
&\quad + (pq^2uv^3tx^3 + p^2quv^2t^2x^3 + p^2q^2u^2v^3tx^4)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big). \qquad (63)\\
f_{5,5,3} &= pquvx\Big(U_1(p,q,u,1,s,1)xV_3(p,q,1,v,s,t)x^3 + U_2(p,q,u,1,s,1)x^2V_3(p,q,1,v,s,t)x^3\Big)\\
&\quad + p^2quvx\Big(U_1(p,q,u,1,1,1)xV_3(p,q,1,v,1,t)x^3 + U_2(p,q,u,1,1,1)x^2V_3(p,q,1,v,1,t)x^3\Big)\\
&\quad \cdot\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&= p^2q^2u^2v^3s^3t^2x^5 + p^2q^2u^2v^2s^3t^2x^5 + p^2q^2u^2v^3s^2t^2x^5 + p^3qu^2v^2s^2t^3x^5\\
&\quad + p^4qu^3v^2s^2t^3x^6 + \big(p^3q^2u^2v^3t^2x^5 + p^3q^2u^2v^2t^2x^5\\
&\quad + p^3q^2u^2v^3t^2x^5 + p^4qu^2v^2t^3x^5 + p^5qu^3v^2t^3x^6\big)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big), \qquad (64)\\
g_{5,5,3} &= quvsxW_3(p,q,1,v,s,t)x^3 + pquvxW_3(p,q,1,v,1,t)x^3\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&\quad + pq^2uvxX_1(p,q,1,v,1,1)xZ_1(p,q,u,1,s,1)xY_2(p,q,1,v,s,t)x^2\\
&\quad + p^2q^2uvxX_1(p,q,1,v,1,1)xZ_1(p,q,u,1,1,1)xY_2(p,q,1,v,1,t)x^2\\
&\quad \cdot\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big)\\
&= p^2qu^4v^2s^2t^3x^4 + pq^2u^3v^3s^2t^2x^4 + pq^2u^3v^2s^3t^2x^4\\
&\quad + pq^2u^3v^3s^3tx^4 + pq^2u^2v^3s^3t^2x^4 + q^3u^2v^4s^4tx^4 + p^2q^2u^2v^3s^2t^2x^5\\
&\quad + \big(p^3qu^4v^2t^3x^4 + p^2q^2u^3v^3t^2x^4 + p^2q^2u^3v^2t^2x^4 + p^2q^2u^3v^3tx^4\\
&\quad + p^2q^2u^2v^3t^2x^4 + pq^3u^2v^4tx^4 + p^3q^2u^2v^3t^2x^5\big)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t)-1\big), \qquad (65)
\end{aligned}
$$

将 (58)–(65) 代入 (57) 可得

$$\begin{aligned}
F_{5,5} &= 1 + uvstx + puvtx\,(F_{5,5}(x,p,q,1,v,s,t) - 1)\\
&\quad + pqu^2v^2s^2tx^3 + p^2qu^3v^2s^2tx^4 + pq^2u^2v^2s^3tx^4\\
&\quad + (p^2qu^2v^2tx^3 + p^3qu^3v^2tx^4 + p^2q^2u^2v^2tx^4)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\
&\quad + quv^2s^2tx^2 + pquv^2tx^2\,(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1)\\
&\quad + p^2qu^2v^2s^2t^2x^4 + pq^2u^2v^3s^3tx^4 + p^3qu^3v^2s^2t^2x^5\\
&\quad + p^2q^2u^2v^2s^3t^2x^5 + p^3qu^2v^2t^2x^4\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\
&\quad + (p^2q^2u^2v^3tx^4 + p^4qu^3v^2t^2x^5 + p^3q^2u^2v^2t^2x^5)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\
&\quad + q^2uv^3s^3tx^3 + pquv^2t^2s^2x^3 + pq^2u^2v^3s^2tx^4\\
&\quad + (pq^2uv^3tx^3 + p^2quv^2t^2x^3 + p^2q^2u^2v^3tx^4)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\
&\quad + p^2q^2u^2v^3s^3t^2x^5 + p^2q^2u^2v^2s^3t^2x^5 + p^2q^2u^2v^3s^2t^2x^5 + p^3qu^2v^2s^2t^3x^5\\
&\quad + p^4qu^3v^2s^2t^3x^6 + \big(p^3q^2u^2v^3t^2x^5 + p^3q^2u^2v^2t^2x^5\\
&\quad + p^3q^2u^2v^3t^2x^5 + p^4qu^2v^2t^3x^5 + p^5qu^3v^2t^3x^6\big)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big)\\
&\quad + p^2qu^4v^2s^2t^3x^4 + pq^2u^3v^3s^2t^2x^4 + pq^2u^3v^2s^3t^2x^4\\
&\quad + pq^2u^3v^3s^3tx^4 + pq^2u^2v^3s^3t^2x^4 + q^3u^2v^4s^4tx^4 + p^2q^2u^2v^3s^2t^2x^5\\
&\quad + \big(p^3qu^4v^2t^3x^4 + p^2q^2u^3v^3t^2x^4 + p^2q^2u^3v^2t^2x^4 + p^2q^2u^3v^3tx^4\\
&\quad + p^2q^2u^2v^3t^2x^4 + pq^3u^2v^4tx^4 + p^3q^2u^2v^3t^2x^5\big)\big(F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) - 1\big) \qquad (66)
\end{aligned}$$

将 v=1 代入 (66)，并解出 $F_{5,5}(x,p,q,u,\mathbf{1},s,t)$，可得

$$F_{5,5}(x,p,q,u,1,s,t) = \frac{E_1}{E_2}, \qquad (67)$$

其中

$$\begin{aligned}
E_2 &= p^5qu^3t^3x^6 + p^4qu^3t^2x^5 + p^4qu^2t^3x^5 + 5p^3q^2u^2t^2x^5 + p^3qu^3tx^4\\
&\quad + p^3qu^2t^2x^4 + p^3qut^3x^4 + 3p^2q^2u^2tx^4 + 3p^2q^2ut^2x^4 + p^2q^2utx^4\\
&\quad + pq^3utx^4 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 + pqutx^2 + putx - 1,\\
E_1 &= -p^4qu^3s^2t^3x^6 + p^5qu^3t^3x^6 - p^3qu^3s^2t^2x^5 - p^3qu^2s^2t^3x^5 - 3p^2q^2u^2s^3t^2x^5\\
&\quad + p^4qu^3t^2x^5 + p^4qu^2t^3x^5 - 2p^2q^2u^2s^2t^2x^5 + 5p^3q^2u^2t^2x^5 - p^2qu^3s^2tx^4\\
&\quad - p^2qu^2s^2t^2x^4 - p^2qus^2t^3x^4 - 2pq^2u^2s^3tx^4 - 2pq^2us^3t^2x^4 - q^3us^4tx^4\\
&\quad + p^3qu^3tx^4 + p^3qu^2t^2x^4 + p^3qut^3x^4 - pq^2u^2s^2tx^4 - pq^2us^3tx^4 - pq^2us^2t^2x^4\\
&\quad + 3p^2q^2u^2tx^4 + 3p^2q^2ut^2x^4 + p^2q^2utx^4 + pq^3utx^4 - pqu^2s^2tx^3 - pqus^2t^2x^3\\
&\quad q^2us^3tx^3 + p^2qu^2tx^3 + p^2qut^2x^3 + pq^2utx^3 - qus^2tx^2 + pqutx^2 + putx - ustx - 1.
\end{aligned}$$

将 (67) 代入 (66) 的右侧，可得所需的$F_{5,5}$公式。 □

推论 5.12. 生成函数$F_{4,5}(x)$ 为

$$\frac{1}{1 - x - x^2 - 3x^3 - 11x^4 - 7x^5 - x^6} = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 22x^4 + 58x^5 + 137x^6 + 385x^7 + O(x^8).$$

*Pro*的。将 $p = q = u = v = s = t = 1$ 代入定理5.11，即可得到所需结果 lt. □

6 结束语

本文开启了同时研究避免多个偏序模式的排列这一课题，从而扩展了 [8], [9], 及其他几项相关工作的结果。虽然我们得到了若干明确的计数结果，但未能推广 [9], 中最全面的结果，即给出一个方程组，用于推导避免任意部分有序模式（POP）的可分排列的生成函数 P_j。

~事实上，额外施加对 P_ℓ 的避免并不会显著简化该计数问题。尽管避免更多模式通常会使相关排列的结构描述更为严格，但在我们的设定中，需要分析的情形数量大幅增加，所得的生成函数也变得复杂得多。这种复杂性的增加例如体现在：我们导出的有理生成函数的分子和分母中都出现了大量单项式。

一个有趣的未决问题是，能否建立一个一般的方程组~，用以确定同时避免 P_j 与 P_ℓ 的可分排列数目，其中$j,\ \ell \geq 4$ （若 j 或 ℓ 等于 3，则根据命题4.1，对可分排列的限制是多余的）。若存在这样的方程组，则自然可以研究对任意 j 与 ℓ的取值导出相应生成函数的计算复杂度。

致谢。

第一、第二和第四作者的工作得到了中央高校基本科研业务费的资助。

参考文献

[1] M. Albert、M. Atkinson、V. Vatter。可分排列的子类。伦敦数学会通报**43** (5) (2011), 859–870。[2] M. Albert、C. Homberger、J.Pantone。可分排列中的等流行类。电子组合学杂志 **22** (2) (2015), #P2.2。[3] M. Albert 与 V. Jel´ınek。可分排列的不可分裂类。电子组合学杂志**23** (2) (2016), #P2.49。[4] V. Balti´c。关于某些类型强受限排列的数目。应用分析与离散数学**4** (2010), 119–135。[5] P. Bose、J. F. Buss、A. Lubiw。排列的模式匹配。信息处理快报**65**(5) (1998年), 277–283。[6] A. Burstein 与 S. Kitaev。偏序模式及其组合解释。纯粹数学与应用 **19**(2–3) (2008), 27–38。[7] S. Fu、Z. Lin、J. Zeng。关于两个新的单峰下降多项式。离散数学**341** (2018), 2616–2626。

[8] A. L.L. Gao 与 S. Kitaev。关于排列中长度为4和5的偏序模式。电子组合学杂志 26 (3) (2019)，论文 #P3.26，31页。[9] A. L. L. Gao、S. Kitaev、Y.-X. Li、X. Ruan。受平坦偏序模式限制的可分排列上统计量的分布。离散应用数学 380 (2026)，155–174。[10] Y. Gao 与 S. Liu。可分排列上的树枚举多项式。枚举组合应用 4 (1) (2024)，文章 #S2R6。[11] T. Han、S. Kitaev、P.B. Zhang。交错排列上极大值与极小值统计量的分布、施普林格数以及平坦偏序模式的避免。组合理论杂志 A 辑 213 (2025)，论文第106034号，24页。[12] S. Kitaev。《排列与词中的模式》。施普林格，2011。[13] S. Kitaev。偏序模式导论。离散应用数学 155 (2007)，929–944。[14] T. Kløve。有限位移排列数目的生成函数。电子组合学杂志 16 (1) # R104 (2009)。[15] R. Simion 与 F. W. Schmidt。受限排列。欧洲组合学杂志 6(4) (1985) 383–406。[16] N. Sloane。在线整数数列百科全书。电子出版于 http: //oeis.org。[17] Z. Stankova。禁用子序列。离散数学 132 (1-3) (1994)，291–316。[18] L. Wang 与 S.H.F. Yan。关于偏序模式形状 Wilf 等价的一个猜想的证明。欧洲组合学杂志 130 (2025)，论文第 104222号，14页。[19] K. T. K. Yap、D. Wehlau、I. Zaguia。避免某些偏序模式的排列。电子组合学杂志 28 (3) (2021)，论文 #P3.18，41页。