arXiv:2603.03488v1 [cs.CC] 3 Mar 2026

平面图定向框架，应用于 KPlumber 和多格骨牌铺砌

MIT Hardness Group* Zachary Abel† Erik D. Demaine‡
Jenny Diomidova§ Jeffery Li† Zixiang Zhou†

摘要

给定一个图，何时可以为边定向，使其满足顶点处的局部约束？每个顶点会指定其关联边允许采用哪些局部定向。这一类图定向问题是一种特殊的可满足性问题，其中每个变量（边的定向）恰好出现在两个子句（顶点约束）中——一次为正，一次为负。我们分析了许多自然顶点类型（允许的顶点邻域模式）的复杂度，尤其是所有仅取决于入边数量的对称顶点类型集合。在许多情形下，包括带常数的平面和非平面对称图定向，我们给出了完整的二分定理，刻画了 P 类与 NP 完全问题类。我们将这些结果应用于获得新的多项式时间算法，解决了一个关于 KPlumber 的 20 年未解决问题；简化了已有的三格骨牌铺砌 NP 困难性证明；并证明了新的四格骨牌铺砌 NP 完全性结果。

1 引言

证明 NP 困难性的主要方法是从已知的 NP 困难问题进行归约 。原则上，我们可以从任意 NP 困难问题进行归约，例如 Cook 最初提出的布尔可满足性问题（SAT） [Coo71]。但实际上，根据目标问题的不同，有些问题比其他问题更容易作为归约起点。尽管如此，SAT 或其众多变体仍是证明 NP 困难性时最常见的起点；参见综述 [DGH26, FAF19]。值得注意的是，Schaefer 二分定理 [Sch78] 对由子句类型集合 Γ 参数化的 SAT 问题族的复杂度进行了分类，其中， *j*元子句类型 列出了其 j 变量允许的赋值：如果所有子句类型都满足某种共同的简化条件（例如，所有变量都为真时子句即得到满足），那么该 SAT 问题可在多项式时间内求解；否则，它是 NP 完全的。实际上，该定理为归约提供了若干实用的 SAT 变体，例如正1-必三可满足性问题和正非全等可满足性问题（NAE） [Sch78]。一项更复杂且较新的二分定理 [KKR18] 刻画了这些问题的平面版本的复杂度，其中假定变量与子句之间关联的二分图是平面图。当目标问题是平面问题时（包括 FUN 分析的许多二维游戏和谜题），平面3-SAT和平面正1-必三可满足性问题 [HIMRS98] 是常见的归约起点。

*人工署名的第一作者，用以说明其他作者（按字母顺序排列）作为一个平等团队开展了工作。请在参考文献中列出所有作者（包括这位作者），并将作者称为“MIT Hardness Group”（不要加“et al.”）。†电气工程与计算机科学系，麻省理工学院，32 Vassar St., Cambridge, MA 02139, 美国，zabel@mit.edu ‡计算机科学与人工智能实验室，麻省理工学院，32 Vassar St., Cambridge, MA 02139, 美国，{edemaine,jeli,zpeter}@mit.edu§阿图瓦大学，法国国家科学研究中心，UMR 8188 信息学与语言研究中心，法国朗斯；计算机科学与人工智能实验室，麻省理工学院，32 Vassar St., Cambridge, MA 02139, 美国，diomidova@mit.edu

本文旨在为一类“图定向”问题证明类似的非平面与平面二分定理。我们的起点是 Horiyama、Ito、Nakatsuka、Suzuki 和 Uehara 在 2012 [HIN+17]中提出的一个问题，该问题作为 NP 困难性归约的中间问题，用于将多连方铺砌成三格骨牌。具体而言，他们证明了以下问题是 NP 完全的：给定一个无向三正则图，其中每个顶点 v 都标有一个集合 S_v，该集合只能是 {0，3}、{1} 或 {2}，我们能否给边定向（指定方向），使得每个顶点 v 的入度属于集合 S_v? [1]

在本文中，我们针对更广泛的一类图定向问题讨论两个自然的问题：

1. 如果将每个顶点集合 S_v 限制为其他可能的集合，会怎样？对于哪些集合，该问题是 NP 完全的？例如，我们证明，集合 $\{0,3\},\{1\}$ 或集合 $\{0,3\},\{2\}$（但单个集合并不够）就足以得到三正则图上的 NP完全性，从而加强 [HIN+17]。因此， [HIN+17] 中的 2-in-3 或一入三器件不再都是证明三格骨牌铺砌的 NP 困难性所必需的。我们还证明，集合 $\{0,4\},\{1\}$、集合 $\{0,4\},\{2\}$，或任意一个集合 $\{0,3\},\{1,4\},\{0,3,4\},\{0,1,4\}$ 就足以得到四正则图上的 NP完全性。更一般地，我们还考虑其他能够区分（标记）关联边的顶点约束。

2. 如果假设图是平面的，会怎样？在什么情况下该问题仍然是 NP 完全的？与平面3-SAT 类似，这一约束对许多二维问题都很有用，例如最初促使 Horiyama 等人研究该问题的二维铺砖问题 [HIN+17]。具体而言，我们证明，当图为平面图时，上述所有 3-正则和 4-正则问题仍然是 NP 完全的。因此，证明三格骨牌铺砌的 NP 困难性时，不再需要使用 [HIN+17] 中的交叉构件。

1.1 问题

图定向（***GO***）问题 由一组 Γ 顶点类型参数化，其中，度为 j 的顶点类型 规定了 j 带标签的关联边所允许的方向模式。因此，顶点类型可视为 $\{0,1\}^j$ 的一个子集，其中 0 表示出边，1 表示入边。给定一个无向图，其中每个度为 j 的顶点都标记有 Γ 中一个度为 j 的顶点类型，并且关联边都有局部编号；问题是判定能否对图的边进行定向，使每个顶点都满足相应要求。例如，非确定性约束逻辑中的约束图可满足性问题[HD09, MBD+24] 是一个 NP 完全问题，可以在此框架下表述，其中 Γ 由两种顶点类型组成：$\{(a,b,c) \mid a+b+c \geq 1\}$（或顶点）和 $\{(a,b,c) \mid a=b=1 \text{ 或 } c=1\}$（与顶点）。

在对称图定向中，所有顶点类型都是对称的，这意味着它们对所有关联边一视同仁（仿佛这些边没有标签），因此只取决于入边的数量 。因此，度为 j 的对称顶点类型可以视为 S 的一个子集，其中包含 {0、1、.....、 j}，用于指定允许的入边数量；我们将这种顶点类型称为 ***S*-入-*j***。在对称图定向问题中，给定一个无向图，并为每个度为 j 的顶点 v 指定一个集合 S_v，其中 S_v-入-$j \in \Gamma$；问题是如何为边定向，使得每个顶点 v 的入度都属于 S_v。例如， [HIN+17] 图定向问题使用 Γ = {{0、3}-入-3、{1}-入-3、{2}-入-3}。

在平面图定向中，我们假设给定的图是平面图。如上所述，这一约束源于对平面/二维问题进行归约的需要，因为这通常意味着归约可以避免实现交叉器 构件（即图的平面嵌入中两条边相交的区域）。

图定向问题与一种称为 ***SAT-E2*** [DGH26, FAF19], 的特殊可满足性问题有关：每个变量恰好出现在 2 个子句中。两者的联系如下：边对应变量，顶点约束可以编码为子句。边定向表示变量赋值，而边

[1]他们将这个问题称为“1-in-3图定向（GO）”，但更准确的名称应为“{0，3}-in-3、1-in-3 和 2-in-3 图定向”。

连接恰好两个顶点的边对应于每个变量恰好出现在两个子句中的情况。图定向还有一项额外约束：每个变量在一个子句中以否定形式出现，在另一个子句中以肯定形式出现，因为有向边在其两个端点处的方向相反。

1.2 结果：框架

我们的目标是刻画对于哪些顶点类型集合 Γ，(平面) Γ-GO 属于 P 类，以及对于哪些 Γ，它是 NP 完全的。本文主要关注对称图定向，同时也分析一些重要的非对称顶点类型。我们的结果共同构成了一个基于图定向进行 NP 困难性归约的框架，提供了一份足以证明困难性的顶点类型目录（以及许多不足以证明困难性的类型）；无论是否限制为平面图，这一框架都适用。

我们的二分结果详见表 1，几乎完整地分类了对称图定向问题，涵盖平面情形和不一定是平面的情形（我们通常简称为非平面情形）。如果假设存在度为 1 且能强制一条边具有特定定向的“常量顶点”，那么表 1 的第一行就给出了 P 类与 NP 完全之间的完整刻画。第二行将结果推广到较弱形式的常量，即对于某个 $k \geq 1$，存在一种 0-in-k 或 k-in-k 顶点类型。后续各行则针对仅有一种有效入边数的对称顶点类型进行细分，但将所需的常量替换为若干特定的顶点类型族（有时是非对称的），称为“复制器”、“同步器”和“交替器”；定义见第 3.1 节。

在平面情形下，我们的困难性结果主要源于对哪些顶点类型能够构造交叉构件的分析。借助构造交叉构件的能力，我们可以在平面嵌入中每两条边相交之处插入交叉构件，从而将相应的一般图定向问题归约到其平面变体。这样，即使相关 SAT 变体的结果并非针对平面变体，我们也能将其困难性结果转移到图定向问题上 [Ist97, KKR18] 。

在此过程中，我们还发现了五类令人意外的（平面）图定向问题，它们都可以在多项式时间内求解。以下是这些结果的略微简化表述（实际引理的适用范围稍广）：

1. 在引理 3.15 中，我们证明，对于所有 $k \geq 5$，具有 1-in-j 和 $\{0, k\}$-in-k 顶点的平面图定向问题属于 P 类。同样，具有 $(j-1)$-in-j 和 $\{0, k\}$-in-k 顶点的情形也成立。2. 在引理 3.20 中，我们证明，如果 $\forall i > j/2, i \in S \implies i-1 \in S$，那么具有 S-in-j 顶点的图定向问题属于 P 类。若 $\forall i < j/2, i \in S \implies i+1 \in S$，结论同样成立。3. 在定理 3.26 中，我们证明，具有 i-in-j 顶点和交替器的平面图定向问题属于 P 类（交替器是一种偶数度顶点，它会强制其边的方向交替指向顶点和背离顶点）。

1.3 结果：应用

为了说明我们的图定向框架的实用性，我们展示从图定向进行归约的若干应用：

1. 在第 4 节中，我们分析电子游戏 ***KPlumber***。这款游戏要求在网格中旋转拼块，使对应的边彼此匹配。KPlumber 由 Kr´al 等人 [KMS+04]研究，他们针对输入限制为某些方块类型子集的情况给出了复杂度分类。他们的论文留下了一类尚未解决的情况，并证明该情况等价于包含除“曲线”方块外所有方块类型的情况。我们以肯定的结果解决了这一开放问题：令人意外的是，这些实例存在多项式时间算法，从而完成了 KPlumber 的复杂度分类。

顶点类型	二分定理	
	一般	平面
{S-in-j}, 0-in-1, 1-in-1	定理 3.12：属于 P 类当且仅当 • 全部为双子句 • 全部为仿射 • $\max \Delta\Gamma \le 2$ 否则，NP 完全	定理 3.16：当且仅当属于 P 类 • 所有双子句 • 所有仿射 • 最大值 $\Delta\Gamma \le 2$ • 最大公约数 $\Delta\Gamma \ge 5$ 以及所有 $S \subseteq \{0, j\}$ 或 $S = \{1\}$ • 最大公约数 $\Delta\Gamma \ge 5$ 以及全部 $S \subseteq \{0, j\}$ 或 $S = \{j-1\}$ 否则，NP 完全
{S-属于-j}, 0-属于-k 或 k-属于-k	定理 3.22：当且仅当属于 P 类 • 以上任意一项 • 全部自底向上封闭 • 全部自上而下封闭 否则，NP 完全	
{i-in-j}, 复制器（$f \ne 0$）	定理 3.23：当且仅当属于 P 类 • 所有双子句 否则，NP 完全	定理 3.23：当且仅当属于 P 类 • 所有双子句 • $f \ge 5$；所有 $i \in \{0, 1, j\}$ • $f \ge 5$；所有 $i \in \{0, j-1, j\}$ 否则，NP 完全
{i-in-j}, 同步器	定理 3.24：属于 P 类当且仅当 • 所有双子句 • 全部 $i < j/2$ 或 1-in-2 • 全部 $i > j/2$ 或 1-in-2 • 全部 $i \in \{0, 1, j\}$ • 全部 $i \in \{0, j-1, j\}$ 否则，NP 完全	
{i-in-j}, 交替器	不适用	定理 3.26：始终属于 P 类

表 1： 总结了我们关于刻画（平面）图定向复杂度的二分结果。对于每一行所描述的情形，我们都给出了一般图和平面图的完整二分定理。“{S-in-j}”表示任意一组对称顶点类型。“{i-in-j}”表示任意一组对称顶点类型，其中每种类型恰好有一种有效的入边数。复制器、同步器和交替顶点类型定义于第 3.1 节。

2. 在第5.1节中，我们为已知的 [HIN+17、MR01] NP 困难性的三格骨牌铺砌给出了更简单的证明；该问题允许使用单一种类的三格骨牌（ 或 ），也允许使用两种三格骨牌（ 和 ）。（关于其他简明证明参见 [M+25] 。）

3. 在第5.2节中，我们研究四格骨牌铺砌的复杂度，拓展了此前关于三格骨牌铺砌的研究 [HIN+17, MR01]。我们确定了使用给定子集 S 中的四格骨牌的平移和／或旋转副本铺砌直线多边形的复杂度。对于子集 S 仅包含一种四格骨牌类型 ($|S| = 1$) 的情形，无论是否允许

反射；以及子集 S 为所有四格骨牌组成的集合的情形，我们都给出了完整的刻画。见表 2.

四格骨牌	复杂度	参考文献
	P	定理 5.3
	P	定理 5.4
	P	定理 5.4
	NP 完全	[HIN+17，第 2.3 节。3]
	NP 完全	定理 5.5
	NP 完全	定理 5.6
	NP 完全	定理 5.6
	NP 完全	定理 5.6
	NP 完全	定理 5.7
all: 	NP 完全	定理 5.5

表 2： 使用单一四格骨牌集合（允许或不允许反射）以及所有四格骨牌进行铺砌的复杂度 s.

1.4 概述

本文其余部分的结构如下。第 2 节介绍与本文结果相关的可满足性问题变体的 Schaefer 二分定理（包括平面可满足性问题和 SAT-E2）。第 3 节将更详细地介绍我们的图定向框架，并刻画多个图定向问题的复杂度。第 4 节运用我们的图定向结果，解决 KPlumber 复杂度方面最后一个未解决问题。第 5 节运用我们的图定向结果，分析三格骨牌和四格骨牌铺砌问题的复杂度。

2 Schaefer 型二分定理

本节将介绍 Schaefer 关于可满足性问题及其扩展——平面可满足性问题和 SAT-E2（其中每个变量恰好出现在两个子句中）的二分定理背景。这些结果将构成我们第 3 节框架的基础。

一个可满足性问题由一组 Γ 关系参数化，其中 j 元关系规定了其 j 变量允许的赋值。除非另有说明，每个变量都必须在每个关系中以正文字出现（不允许出现否定文字）。我们将此问题称为 Γ-可满足性问题。

定义 2.1。 如果将所有变量都设为假即可满足某个关系，则称该关系为**0-有效** 。如果将所有变量都设为真即可满足某个关系，则称该关系为**1-有效** 。

如果任意两个满足赋值的按位与也是满足赋值，则称该关系为 ***Horn*** 关系。如果任意两个满足赋值的按位或也是满足赋值，则称该关系为对偶 ***Horn*** 关系。

如果任意三个满足赋值的按位异或（异或运算）也是一个满足赋值，那么该关系就是仿射的。如果任意三个满足赋值的按位多数（多数运算）也是一个满足赋值，那么该关系就是双子句的。

如果对于任意满足赋值，其按位取反后也仍是满足赋值，那么该关系就是自补的。

定理 2.1(Schaefer 二分定理 [Sch78])。 Γ-可满足性问题是 *NP* 完全的，以下 *6* 种情况除外，它们属于 *P* 类：

1. Γ 中的每个关系都是0-有效的；*2.* Γ 中的每个关系都是1-有效的；*3.* Γ 中的每个关系都是 *Horn*；*4.* Γ 中的每个关系都是对偶 *Horn*；*5.* Γ 中的每个关系都是双子句；*6.* Γ 中的每个关系都是仿射的。

对于平面 Γ-可满足性问题，变量与子句之间的连接所构成的二分图必须是平面图，此外还有一个容易处理的情形。

定理 2.2 （平面 Schaefer 二分定理 [KKR18]）。 平面 Γ-可满足性问题是 *NP* 完全的，以下 *7* 种情形除外；这些情形属于 *P* 类：

- 定理 *2.1* 中的情形 *1–6*；
- 每个关系 $R \in \Gamma$ 都是自补的，且 dR 是一个偶数 Δ-拟阵（详情请参阅 *[KKR18]*）。

通常，集合 Γ 包含常量（一元关系，它们会强制变量取真或取假）。在这种情况下，我们可以排除一些容易处理的情形，因为真常量不是 0-有效的，假常量不是 1-有效的，而且两个常量都不是自补的。

推论 2.3 (带常量的 Schaefer 二分定理)。 如果 Γ 同时包含两个常量，那么 Γ-*SAT* 和 *Planar*Γ-*SAT* 都是 *NP* 完全问题，但以下 *4* 种情况除外；在这些情况下，问题属于 *P* 类：

1. Γ 中的每个关系都是 *Horn*；

2. Γ 中的每个关系都是对偶 *Horn*；

3. Γ 中的每个关系都是双子句；

4. Γ 中的每个关系都是仿射。

我们将重点讨论对称子句类型，它们只取决于相关变量中被赋值为真的变量数量。对于集合 $S \subseteq \{0, 1, \ldots\ldots, j\}$，一个 S-in-j子句是一种 j 元关系，当且仅当其参数中为真的变量数量属于 S 时，该关系才被满足。

定义 2.2。 S-in-j 子句的位串 是一个长度为 $j+1$ 的字符串：若 $i \in S$，则在（从 0 开始计数的）第i位为1；若 $i \notin S$，则为0（例如，{0,1,4}-in-5 的位串为 110010）。
我们称该子句存在大小为 k 的间隔，若位串中恰好有 k 个连续的零，且两侧被 1 包围。

最后，考虑 Γ-SAT-E2，其中每个变量恰好出现在两个子句中。它比 Γ-SAT 限制更多，因此包含更多多项式时间情形。若 Γ 同时包含两个常量，则以下定理 [Ist97, 推论 5.1]给出了完整的对称二分定理：

定理 2.4 （对称 Γ-SAT-E2 二分定理 [Ist97]）。 设 Γ 是一个对称关系集合（即每个关系都具有 S-in-j 的形式），且包含两个常量。若 Γ 中没有关系具有大小至少为 2 的间隔，则 Γ-*SAT-E*2 属于 *P*；否则，它等价于 Γ-*SAT*。

3 图定向框架

在图定向问题中，给定一个图 $G=(V,\ E)$，其中 V 中的每个顶点都有指定的顶点类型；我们必须判断是否存在一种对 G（为 E 中的每条边指定方向）的定向，使 V 中的每个顶点都满足约束。每个顶点都会根据其顶点类型，对相邻边施加一些约束。更形式化地说，度为 d 的顶点类型是一个 d元二元关系，即 $\{0,\ 1\}^d$ 的一个子集。若 Γ 是一个有限的顶点类型集合，我们用 **Γ-图定向**，或 **Γ-*GO***，表示所有顶点类型均属于 Γ 的图上的图定向问题。我们允许自环和重边。我们用平面 **Γ-图定向**，或平面 **Γ-*GO***，表示保证 G 为平面图的图定向问题。

对于整数 $j\geq 1$ 和 $S\subseteq\{0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ j\}$，$S$-in-$j$ 顶点类型的度为 j，当且仅当向内定向的相邻边数量属于 S 时，该顶点类型才满足条件。我们将 $\{i\}$-in-j 简写为 i-in-j。

注意，S-in-j 顶点类型（在图定向中）与 S-in-j 子句类型（在可满足性问题中）非常相似。我们按照定义 2.2 类似地定义 S-in-j 顶点类型的位串和间隔。

从 Γ-GO 到 Γ′-SAT-E2 存在一种自然归约，其中 $\Gamma':=\Gamma\cup\{1\text{-in-}2\}$（每个顶点变成一个来自 Γ 的子句，每条边变成一个 1-in-2 子句）。我们可以利用这种归约，将可满足性问题和 SAT-E2 中的一些易解性结果转移到图定向中：

引理 3.1。以下几种 Γ-*GO* 情形属于 *P* 类：

1. Γ 中的所有顶点类型均为双子句；*2.* Γ 中的所有顶点类型均为仿射；

3. Γ 中的所有顶点类型均为对称，且不存在大小为2 或更大的间隙。

证明。 前两种情形由定理 2.1 得出。最后一种情形由定理 2.4 得出。关键在于，这利用了如下事实：1-in-2 是双子句的、仿射的、对称的，且不存在大小为 2 或更大的间隙。□

请注意，Horn 或对偶 Horn 的易解性并不会以这种方式沿用，因为 1-in-2 不是 Horn 或对偶 Horn。

用定义来检验一个关系是否为双子句或仿射可能有些繁琐。由于我们主要关注对称关系，我们给出如下辅助引理，以便更容易应用我们的主要结果。它同时适用于可满足性问题子句和图定向顶点。

引理 3.2。 *1.* 一个 S-*in*-j 关系是双子句的，当且仅当 $S=\{0,\ldots,j\}$，$S\subseteq\{0,j\}$，$S=\{0,1\}$，$S=\{j-1,j\}$, *or* $j\leq 2$.

2. 一个 S-*in*-j 关系是仿射的，当且仅当 $S=\{0,\ldots,j\}$、$S\subseteq\{0,j\}$、$S=\{0,2,4,\ldots\}$ 或 $S=\{1,3,5,\ldots\}$。

3. 一个 i-*in*-j 关系是双子句的，当且仅当它是0-*in*-j、j-*in*-j 或1-*in*-2。

4. 一个 i-*in*-j 关系是仿射的，当且仅当它是0-*in*-j、j-*in*-j 或1-*in*-2。

证明概要。 1. 假设 S-in-j 是双子句的，这意味着对于任意三个满足赋值，它们的按位多数也满足。假设 $i\in S$ 和 $0<i<j-1$。选取三个位串001、010和100，并给它们添加相同的填充，使其各有 i 个 1 和 $j-i$ 个 0。它们的按位多数少一个 1，因此 $i-1\in S$。类似地，若 $i\in S$ 和 $1<i<j$，则 $i+1\in S$。这样，S 只剩下有限种可能，可以轻松检验。

2. 假设 S-in-j 是仿射的，也就是说，对于任意三个满足赋值，它们的按位异或结果也是满足赋值。假设 $i\in S$ 和 $0<i<j-1$。选择三个适当补齐位数的位串 001、010和100 。它们的按位异或结果多出两个 1，因此 $i+2\in S$。同样，如果 $i\in S$ 和$1<i<j$，那么 $i-2\in S$。这样一来，S 只剩有限种可能，可以轻松逐一检查。

3. 这直接由 1 得出。4. 这直
接由 2 得出。

□

定义 3.1。 常量 顶点类型是 0-in-1 或 1-in-1。终止器 顶点类型是 0-in-j 或j-in-j，其中某个 $j \geq 1$（可以将其视为一组常量）。

定义 3.2。 在给定的满足边定向中，顶点的净流量 等于其入度减去出度。

在给定的满足边定向中，一组顶点的净流量 等于各个顶点净流量之和。

在归约过程中，我们常通过连接顶点来构造更大的构件，使所得结构表现得像一个具有另一种类型的单一顶点。例如，用一条边连接两个 1-in-3 顶点，就会构成一个具有 4 条外部边的构件，其局部满足赋值恰好与一个 1取4 顶点的局部满足赋值相同。因此，对于包含 1取4 顶点的 GO 实例，我们可以将每个 1取4 顶点替换为这个构件，从而得到一个等价的、仅包含 1-in-3 顶点的 GO 实例。我们称 1-in-3 顶点模拟1取4 顶点。

更一般地，构件构造 是一种 GO 图 G，其中一些度为 1 的顶点被标记为外部，这意味着它们不受任何约束。考虑 G的所有满足定向，并将其限制为仅考察外部边（即与外部顶点关联的边）的定向，再设想这些外部边都与同一个“顶点”关联，由此得到一种顶点类型 T；我们称 G是对 T的模拟。如果 G使用来自集合 Γ的顶点类型，那么我们称 Γ模拟 T。模拟构成了一种局部归约概念（其灵感来自运动规划构件中的类似概念 [ACD+22]）。具体而言，如果 $(\Gamma \cup \{T\})$-GO 是 NP困难的，且 Γ'模拟 T，那么 $(\Gamma \cup \Gamma')$-GO 就是 NP困难的。我们主要考虑平面构件构造：其图可绘制在平面上，且所有外部顶点都位于外面，因此替换后仍能保持平面性。因此，如果 Planar $(\Gamma \cup \{T\})$-GO 是 NP 困难的，且 Γ' 以平面方式模拟 T，那么 Planar $(\Gamma \cup \Gamma')$-GO 就是 NP 困难的。

本节其余部分安排如下。在第 3.1 节中，我们研究一类称为“复制器”的非对称顶点类型，它们可用于在归约中复制变量，并对它们能够模拟的对象进行完整刻画。在第 3.2 节中，我们证明了在允许两种常量顶点类型的情况下，S-in-j 顶点类型的二分定理。第 3.3 节将这些结果推广到终止器。最后，在第 3.4 节中，我们研究不含常量的 i-in-j 顶点类型，并证明更多二分定理。

3.1 复制器

在归约中，我们常常需要一种复制变量的方法，并且可能需要对某些副本取反。本小节研究这类顶点类型，并对它们进行完整分类。

一个复制器 是一个恰有两个满足赋值的顶点，且这两个赋值互为反向。若复制器的度至多为 2，则称其为平凡的 。这种平凡复制器只有三种（恰好全都是对称的）：{0，1}-in-1、1-in-2 和 {0，2}-in-2。其他所有复制器都是非平凡的。若一组复制器中至少有一个成员是非平凡的，我们就称这组复制器非平凡 。

复制器的两个满足赋值的净流量分别为 $+f$和 $-f$，对于某个 $f \geq 0$。我们称该复制器的净流量 为 $\pm f$。

以下三种复制器尤为有用：

- 一个 ***k*-均衡器** 是度为 k 的复制器，其两个满足赋值分别使所有边都指向内，或所有边都指向外。

- 同步器是一个度为 4 的复制器，具有两个满足赋值，如图1左侧所示。可以将其看作一对必须指向同一方向的边。

• 交替器是一种偶数度复制器，其两个满足赋值沿顶点周围交替呈现向内和向外（见图1右侧）。

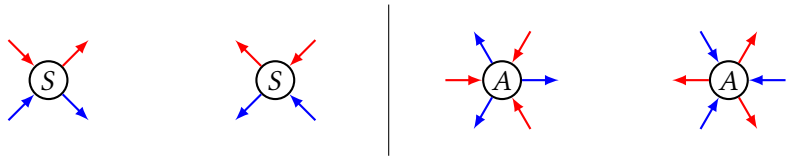


图1： 左：同步器顶点的两个满足赋值。右：6-交替器顶点的两个满足赋值。

现在我们陈述本小节的主定理，它通过说明哪些复制器集合能够模拟哪些其他复制器，对复制器给出了完整的刻画。

定理 3.3。 设 Γ 是一个有限的非空复制器集合，其净流量为 $\pm f_1, \ldots, \pm f_k$.

1. 如果 Γ 只有平凡复制器，那么它们只能模拟自身和 1-2。

2. 否则，如果 Γ 只有交替器，那么 Γ 可以模拟所有其他交替器，且只能模拟它们。

3. 否则，Γ 能够模拟净流量为 $\pm f$ 的复制器，当且仅当 f 是 最大公约数$(f_1, \ldots, f_k)$ 的倍数（包括净流量为 0 的同步器和交替器）。

如果不考虑平面性，就只有情况 *1* 和 *3*。

注意，任何复制器网络都有 0 个或 2^k 个解，其中 k 是连通分量的数量。因此，若要用其他复制器模拟一个复制器，该图必须是连通的。

首先，我们证明所有非平凡交替器都彼此等价，事实上它们也是最弱的非平凡复制器类型：

引理 3.4. 非平凡交替器可以模拟任何其他交替器，但不能模拟其他任何东西。

证明。 将两个度为 $2d$ 的交替器副本连接起来，会得到一个度为 $4d-2 > 2d$ 的更大交替器。重复这一过程，就能得到任意高的度。然后添加自环，即可得到所需度数的交替器。

注意，任何对连通结构的模拟，都可以看作是一系列操作：连接两个构件，并在两条相邻边之间添加一个自环。这两种操作都会保持交替器的性质。□

接下来,我们证明，同步器是非平凡复制器中能力倒数第二弱的一类 ：

Le引理 3.5。 除了交替器之外，所有非平凡复制器都能模拟同步器。

证明。 假设我们的复制器净流量为 $\pm f$。我们对 f 进行分类讨论 ：

• 如果 $f \geq 3$，任选一对相邻的反向边，用自环将它们连接起来并消去。重复此操作，直至所有边都指向同一方向，这样便得到 f 均衡器。用 $f-2$ 条边将其中两个均衡器连接起来（见图 2 左图），即可得到一个同步器。

• 如果 $f = 2$ 或 $f = 1$，我们应用相同的过程，但当度变为 3 或 4 时停止。将其中两个复制器连接在一起（见图 2 右侧），即可得到一个同步器。

• 如果 $f = 0$，我们应用相同的过程，但只有在消去边不会导致交替器出现时，才消去这些边。我们持续进行，直到无法再消去任何边。令 $d = 2k$ 为当前度数。我们有 $d \geq 4$，因为 $d = 2$ 对应于一个平凡交替器。不失一般性，前两条边的方向相反：↑↓。由于当前没有交替器，但消去前两条边会导致交替器出现，因此必有 ↑↓（↓↑）$^{k-1}$。但是，我们可以消去第三条和第四条边，得到 ↑↓（↓↑）$^{k-2}$，而这无论如何都必须是一个交替器。只有当 $k = 2$时，它才是交替器。因此，这一过程要终止，唯一的可能是 $d = 4$，此时我们得到一个同步器。□

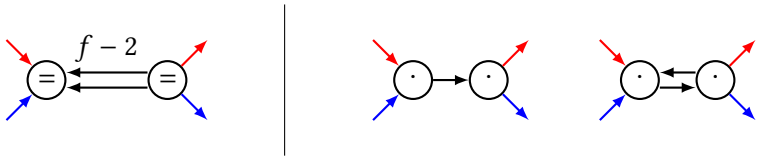


图 2： 左： f 均衡器可模拟同步器。右：净流量为 ± 1 或 ± 2 的 3 度或 4 度复制器也可模拟同步器。

引理 3.6。 净流量分别为 $\pm f_1, \ldots, \pm f_k$ 的复制器与一个同步器配合，可以模拟净流量为 $\pm f$ 的复制器，当且仅当对于某些整数系数 a_i， $f = \sum a_i f_i$。

证明。 首先注意，在任何满足赋值中，被模拟复制器的净流量等于各个顶点净流量之和。因此， f 必须是 f_i 的整数线性组合。

现在我们证明这是充分的。取 $|a_i|$ 个净流量为 $\pm f_i$ 的复制器实例。对于每个复制器，选择净流量为 $+f_i$（若 $a_i \geq 0$），否则为 $-f_i$ 的赋值。用同步器将这些复制器连接起来（图 3，左），得到一个某个 净流量为 $\pm f$ 的复制器。

要模拟净流量为 $\pm f$ 的目标复制器，将当前构件放入目标构件内部（图 3，右）。将边两两配对，使其定向一致。用路径连接每一对匹配的边，确保整个结构连通。最后，在每个交点处放置一个同步器。□

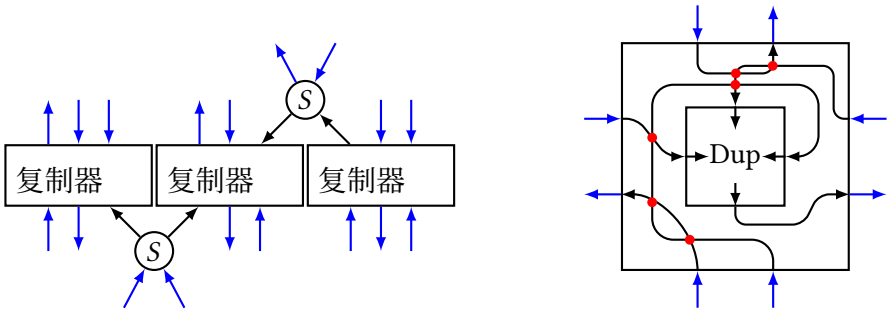


图 3： 左：用同步器连接复制器的副本。右：模拟任意净流量为 $\pm f$ 的复制器。在每个红点处放置一个同步器。

结合前两个引理，可得如下结论：

推论 3.7。 净流量为 $\pm f_1$、……、$\pm f_k$ 的非平凡复制器集合，当且仅当 f 是 最大公约数(f_1、……、f_k) 的整数倍时，才能模拟净流量为 $\pm f$ 的复制器。

我们终于可以证明主定理了：

定理 *3.3* 的证明。 令 Γ 为一个由复制器组成的有限集合，其净流量为 $\pm f_1, \ldots, \pm f_k$.

1. 如果 Γ 只有平凡复制器，那么在保持连通的前提下，将它们组合起来的方式非常有限，而且很容易验证。此外，总是可以平凡地模拟 1-in-2，因为它就是一条边。

2. 如果 Γ 只有交替器，根据引理 3.4，它们可以模拟其他交替器，而无法模拟其他任何东西 e. 那么

3. 如果 Γ 至少有一个非平凡非交替器，那么根据引理 3.7，它们可以模拟净流量为 gcd(f_1、……、 f_k) 任意倍数的复制器，而无法模拟其他任何东西。还有一种可能： Γ 有一个非平凡交替器和一个平凡非交替器（即 {0、1}-in-1 或 {0、2}-in-2）。在这种情况下，我们可以将它们组合起来，得到一个非平凡非交替器，然后继续证明。□

这一刻画有一个有用的推论：

推论 3.8. 任何非平凡的复制器集合都等价于单个复制器。也就是说，对于任意非平凡的复制器集合 Γ_d，都存在一个复制器 D，使得 Γ_d 合起来能够模拟 D，且 D 能够模拟其中的每一个 Γ_d。

证明。 如果所有复制器都是交替器，那么它们等价于一个交替器。否则，它们等价于一个净流量为 $\pm \gcd(f_1, \ldots, f_k)$ 的非交替复制器。□

事实证明，NP 困难性通常要求能够模拟同步器，而同步器通常足以实现这一点。另一方面，交替器往往过于弱小。

3.2 *S*-in-*j* 带常数的图定向

现在我们考虑具有常数（包括 0-in-1 和 1-in-1）的（平面） Γ-图定向，并将其记作（平面） Γ-GO$_c$。在本小节中，我们给出 Γ-GO$_c$ 和平面 Γ-GO$_c$ 的完整二分定理。

将一个常数连接到一个顶点，会删去其位串的第一位或最后一位。例如，{0,1,4}-in-5 的位串为 `110010`。如果强制其中一条边指向向内，就得到 {0,3}-in-4（`10010`）。再强制另一条边指向外，就得到 {0,3}-in-3（`1001`）。我们可以利用这一事实提取位串的任意子串：

观察 3.9. 如果 *S′-in-j′* 的位串是 *S-in-j* 的位串的子串，那么 *S-in-j* 与常数一起可以模拟 *S′-in-j′*。

特别地，我们可以利用间隙构造均衡器：

引理 3.10. 如果 S 有大小为 $k-1$ 的间隙（即 a、 $a+k \in S$，但 $a+1$、……、 $a+k-1 \notin S$），那么 *S-in-j* 与常数可以模拟一个 *k*-均衡器。

证明。附加 ng a 向内边和 $j-(a+k)$ 向外边到 *S*-in-*j* 可模拟一个 *k*-均衡器。□

令 ΔS 为 S 相邻元素之间的差集（例如， $\Delta\{0, 1, 4\} = \{1, 3\}$）。换句话说，当且仅当 S 的间隔大小为 $k-1$ 时， $k \in \Delta S$。对于由 *S*-in-*j* 顶点类型构成的集合 Γ，定义 $\Delta\Gamma = \bigcup_{S\text{-in-}j \in \Gamma} \Delta S$。

引理 3。 11. 如果 最大值 $\Delta\Gamma > 2$, Γ 可以模拟净流量为最大公约数 $\Delta\Gamma$ 的倍数的任意复制器 .

证明。对于每个 $k \in \Delta\Gamma$，根据引理 3.10，我们可以模拟一个 *k*-均衡器。由于 $\max \Delta\Gamma > 2$，这些复制器中至少有一个是非平凡的，因此根据定理 3.3，我们可以模拟任何净流量为 $\gcd \Delta\Gamma$ 的倍数的复制器。□

另一方面，如果 $\max \Delta\Gamma \leq 2$，我们就没有大小为 2 或更大的间隙，因此根据引理 3.1， Γ-GO_c 属于 P 类。

我们现在可以陈述并证明带常数的图定向的二分定理：

定理 3.12。 设 Γ 为 *S-in-j* 顶点类型的集合。则 Γ-GO_c 是 *NP*困难的，以下属于 *P* 类的情形除外：

1. Γ 中所有顶点类型均为双子句；

2. Γ 中所有顶点类型均为仿射；

3. 最大 $\Delta\Gamma \leq 2$。

证明。 根据引理 3.1，这 3 种情形属于 P 类。假设我们不具有其中任何一种。

根据引理 3.11，我们可以模拟任何净流量为 $k :=$ 最大公约数 $\Delta\Gamma$ 的倍数的复制器。

设 $\Gamma' = \Gamma \cup \{R' \mid R \in \Gamma\}$，其中 R' 是从 R 通过对所有输入取否定而得到的关系。

我们从平面 Γ'-可满足性问题$_c$进行归约。 Γ' 中的关系并非全都是仿射的，也并非全都是双子句的。如果 Γ' 中的所有关系都是 Horn 的，那么 Γ 中的每个关系将同时既是 Horn 又是对偶 Horn。然而，同时为 Horn 和对偶 Horn 的关系也是双子句的（因为按位多数可以用按位与和按位或来表示）。因此， Γ' 中的关系并非全都是 Horn 的，类似地，也并非全都是对偶 Horn 的。根据定理 2.3，我们所归约自的问题实际上是 NP困难的。

将每个子句复制 k 次。现在，每个变量被正使用的次数是 k 的倍数，被负使用的次数是 k 的倍数。取通常的子句-变量二部图，用 Γ 中相应的顶点类型表示每个子句，并用净流量为 k 的倍数的复制器表示每个变量（如前所述，我们可以模拟这样的复制器）。在满足定向中，从变量顶点指向子句顶点的边编码真文字，相反方向编码假文字。 □

对于平面二分定理，我们需要构造一个交叉器。下面描述几种可以构造交叉器的情形：

引理 3.13。 以下顶点类型集合可以模拟交叉器：

1. 2-*in*-4 和同步器； *2.* 1-*in*-3、2-*in*-3和同步器； *3.* {1, *j*}-*in*-*j* 和常数（对于 $j \geq 4$）； *4.* 1-*in*-3 和3-均衡器； *5.* 1-*in*-3 和4-均衡器。

证明。 见图4。

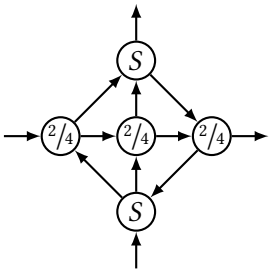
1. 我们可以构造图4(a)所示的交叉器。

2. 我们可以使用 1-in-3 和 2-in-3 构造一个 2-in-4，如图 4(b) 所示，从而归约到情况 1。

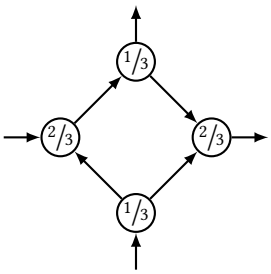
3. 如图4(c)所示，用 $j - 2$ 条边连接两个 {1, *j*}-入-*j* 度顶点。固定其中一条边，使其从一个常量指向内。每个顶点的入度都是 1（模 $j - 1$），因此整个构件的入度是 2（模 $j - 1$）。但其入度至多为 3，所以恰好为 2。不难验证，任意一对边都可以指向内，因此这是一个 2-in-3 构件。将常量输入一个 {1, *j*}-入-*j* 度构件，可得到 1-in-3 构件和（$j - 1$）均衡器；它们可构成一个同步器，进而归约到情况 2。

4. 我们可以构造图 4(d) 所示的交叉器。中间的 1取4 由两个 1-in-3 构件组成。它唯一的入边会迫使所有其他边朝向，并确保该构件处于四种交叉状态之一。

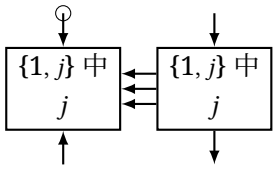
5. 我们可以构造一个 2-in-3，如图4(e)所示。4-均衡器可以模拟一个同步器，从而归约为情况 2。□



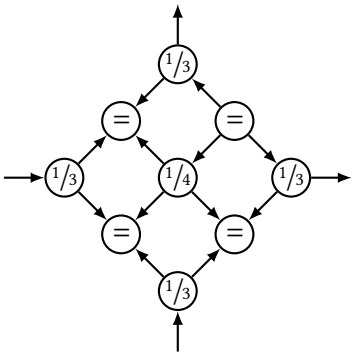
(a) 由 2-in-4 和同步器构成的交叉器
nizer



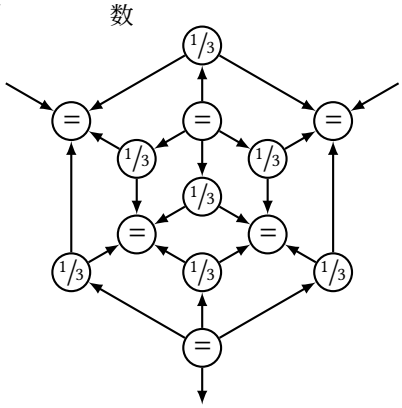
(b)由 1-in-3 和 2-in-3 构成的 2-in-4



(c) 由 $\{1, j\}$-in-j 构造 2-in-3，常数



(d) 由 1-in-3 和 3-均衡器构造交叉器



(e) 由 1-in-3 和 4-均衡器构造 2-in-3

图4： 引理 3.13 中使用的构造。标记为 S 的顶点表示同步器，a/b 表示 a-in-b，$=$ 表示均衡器。

事实证明，所有这些情况也都是 NP困难：

引理3.14。 平面图定向在以下顶点类型集合下是*NP*困难的：

1. 2-入-4 和同步器；*2.* 1-入-3、2-入-3和同步器；*3.* {1、 j}-入-j 和常数（对于 $j \geq 4$）；*4.* 1-入-3 和3-均衡器；*5.* 1-入-3 和4-均衡器。

证明。 见图4。

1. 从2进4可满足性问题归约。复制每个子句，并在副本中对所有文字取反（这不会改变该子句的含义）。现在，对于某个 k，每个变量以正形式出现 k 次、以负形式出现 k 次，因此我们可以用度为 $2k$ 且净流量为0的复制器来表示它。最后，我们有来自引理 3.13的交叉器。

2. 从情况 1归约，如图 4(b)所示。

3. 如图 4(c) 所示，从情况 2 进行归约。

4. 从 1-in-3SAT 进行归约。为每个子句创建三个副本。现在每个变量都被使用 $3k$ 次，其中 k，因此我们可以用一个 $3k$-均衡器来表示它。最后，根据引理 3.13，我们得到了交叉器。

5. 如图4(e) 所示，从情况 2 进行归约。 □

我们证明了，带有 1-in-3 和一个 3-均衡器或一个 4-均衡器的平面图定向是 NP困难的。自然会有人问，如果我们改为使用 5 等化器，会发生什么。令人惊讶的是，这里存在一个相变，并且该问题变为多项式时间可解！

引理 3.15。 对于每个固定的 $k \geq 5$，如果平面图定向中的所有顶点均为不可满足、终止器、 k-均衡器，或对于某个 j 为 1-in-j，则该问题属于 P 类。

我们将在第 3.2.1 节证明这一引理，但现在我们可以陈述并证明带常数的图定向的二分定理：

定理 3.16. 设 Γ 是一个由 S-in-j 顶点组成的集合。那么，平面 Γ-GO_c 是 NP困难，但定理 *3.12* 中的三个多项式情形以及两个新的多项式情形除外：

4. $\gcd \Delta\Gamma \geq 5$, *and all* S-*in*-j *in* Γ *have* $S \subseteq \{0, j\}$ *or* $S = \{1\}$;

5. 最大公约数 $\Delta\Gamma \geq 5$，且 Γ 中所有 S-in-j 都满足 $S \subseteq \{0, j\}$ 或 $S = \{j - 1\}$。

证明。 根据引理 3.1，前 3 种情形很容易处理。

假设 $\gcd\ \Delta\Gamma \geq 5$，且所有 S-in-j 顶点都满足 $S \subseteq \{0, j\}$ 或 $S = \{1\}$。如果存在不可满足顶点，则该问题显然不可满足。对于每个 f-均衡器顶点，根据定义， f 是 $\gcd \Delta\Gamma$ 的倍数（因为 f 是 GCD 的参数之一），因此我们可以用 $\gcd \Delta\Gamma$-均衡器来模拟它。根据引理 3.15，该问题属于 P 类。

类似地，如果最大公约数 $\Delta\Gamma \geq 5$，且所有 S-in-j顶点都具有 $S \subseteq \{0, j\}$或 $S = \{j - 1\}$，则我们可以在应用引理 3.15 之前反转所有边。

假设我们不处于这 5 种简单情形中的任何一种。

定理 3.12 的证明中唯一不保持平面性的步骤是复制。如果最大公约数 $\Delta\Gamma = 1$，则该步骤为空操作，因此我们已完成。否则，只需构造一个交叉器即可。

假设 $2 \leq$最大公约数 $\Delta\Gamma \leq 4$。我们可以构造一个 3-均衡器（如果最大公约数 $\Delta\Gamma = 3$）或一个 4-均衡器（如果最大公约数 $\Delta\Gamma \in \{2, 4\}$）。如果某个 S的位串包含0100或0010，则我们有 1-in-3 或 2-in-3，它可以模拟交叉器（引理 3.13，情形 4 或 5）。我们还知道，我们的位串不能包含11，否则最大公约数 $\Delta\Gamma$ 将为 1。如果存在不在任一端的 1，则为了避免这三种模式，所有位必须在0 与1之间交替，因此它是仿射的。如果1仅出现在两端，则它也是仿射的。因此所有顶点类型都是仿射的，这与我们不处于任何简单谢弗情形的假设相矛盾。

现在假设 $5 \leq$ 最大公约数 $\Delta\Gamma$。如果某个位串中有一个 1 远离两端，那么它两侧必定各至少有两个 0，因此我们得到一个 2-in-4，它可以模拟交叉器（引理 3.13，情况 1）。剩下的情况如下：

- 000..000——不可满足
- 000..001——终止器
- 100..000——终止器
- 100..001— 均衡器

- `000`..010 — j中的$(j-1)$
- `010..000`— 1-in-j
- `100..010` — 根据引理 3.13 情形 3 模拟交叉器（反转所有边）
- `010..001` — 根据引理 3.13 情形 3 模拟交叉器
- `010..010` — 根据引理 3.13 情况 2 模拟交叉器

这三项各自都能单独模拟交叉器，因此假设我们不具备其中任何一项。为避免简单的平面情形，我们必须至少有一个 $(j-1)$-in-j以及至少一个 1-in-j。但前者模拟 2-in-3，后者模拟 1-in-3，因此二者共同根据引理 3.13 情况 2 模拟交叉器。□

3.2.1 APlanarEasiness 结果

现在我们通过给出一个算法来证明引理 3.15。核心思路是：k-均衡器的高度数结合平面性，迫使图中存在局部的简化结构。具体而言，该算法的关键是以下引理，其中我们约定自环有两种可能的定向。

引理 3.17。 设 $k \geq 5$，并设 G 是一个平面图定向实例，其中所有顶点均为终止器、 k-均衡器，或对于某个 j 而言为 1-入-j 。只要至少存在一个满足 $j \geq 3$ 的 1-入-j 顶点，就存在一条在所有解中定向都固定的边。此外，这条边及其定向可以在多项式时间内找到。

如果我们找到这样一条边，就可以将其删除，并相应地调整与之关联的顶点。例如，如果它指向一个 1-入-j 顶点，该顶点就会变成 0-入-$(j-1)$，也就是一个终止器。不难看出，这样做总会得到一个允许的顶点类型（终止器、 k-均衡器或 1-入-j），或者一个不可满足的顶点。

我们重复此过程，直到得到矛盾，或者没有更多带有 $j \geq 3$ 的 1-in-j 顶点；此后问题变为仿射问题，可在多项式时间内完成。

Proof. 请按顺序考虑以下归约规则，并应用第一个适用的规则 :

1. 如果存在终止顶点，它会固定其关联边的定向。2. 如果存在 1-in-2顶点，则将其收缩为一条连接其邻接顶点的边，并对所得图递归处理。3. 如果一个 k-均衡器顶点上有自环，则可判定该实例不可满足。4. 如果一个 1-in-j 顶点 ($j \geq 3$) 上有自环，则该顶点的其他关联边必须指向外侧。至少还存在一条其他边，因为 $j \geq 3$。5. 如果一条边连接一个 1-in-j_1 顶点和一个 1-in-j_2 顶点，则将它们合并为一个 1-in-$(j_1 + j_2 - 2)$ 顶点，并对所得图递归处理。6. 如果一个 k-均衡器顶点与一个 1-in-j 顶点之间至少有两条边，则两条边都必须从 1-in-j 顶点向外定向。

7. 如果两个不同的 k-均衡器顶点之间至少有一条边（也可能有多条边），设这两个顶点为 u 和 v，取其中一条边 uv。从这条边开始，设 v 、 u_1 、 ..... 、 $u_{k'}$ 按顺时针顺序排列，是 u 除 v 之外的邻居；同理，设 u、 v_1、.....、 $v_{k'}$ 按逆时针顺序排列，是v 除 u 之外的邻居 $(0 \le k' < k)$。构造一张新图：删除 u 和 v，并将每个 u_i 与 v_i 相连，这样可以保持平面性。

注意，原实例的每一个解在新实例中都有一个对应的解。例如，若该解具有 $u_i \to u \leftarrow v \to v_i$，则对应的解具有 $u_i \to v_i$。

我们在这个新图上递归，以找出一条边 e，其定向在新实例的所有解中都相同。若 e 是 u_iv_i 之一，则 uv 的定向是固定的。否则， e 在原实例的所有解中必须具有相同的定向。

若上述规则均不适用，则 G 是简单、非空、平面且二分的，其中 1-in-j 顶点与k-均衡器顶点构成一个二部划分，并且所有 1-in-j 顶点都具有 $j \ge 3$。

若 $k \ge 6$，我们断言这是不可能的。 k-均衡器顶点的度全都恰好为 k，而 1-in-j 顶点的度全都至少为 3。设有 x k-均衡器顶点和 y个 1-in-j 顶点。则共有 kx 条边，因此 $kx = \sum_v$ 为 1-in-j $\deg(v) \ge 3y \implies y \le \frac{kx}{3}$。由于 $y > 0$，二部平面图的欧拉公式的一个推论是 $|E| \le 2|V| - 4$。但当 $k \ge 6$时，$kx \le 2(x+y) - 4 \le 2(x + \frac{kx}{3}) - 4 \implies \frac{kx}{3} \le 2x - 4$ 构成矛盾。因此，这种情况是不可能的。

否则， $k = 5$。我们再添加一条归约规则：

8. 假设一个 5 等化器顶点的相邻面度数均为 4，且两个不连续的邻顶点度数为 3（见图 5）。

如果图 5 中的蓝色顶点有向外（如图所示），那么其他蓝色边的方向便会被确定，并且会在红色顶点处产生矛盾。因此，蓝色顶点必须有向内。返回其一条关联边。

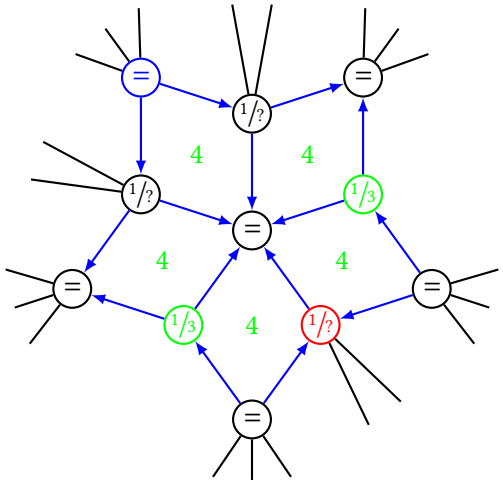


图 5： 归约规则 8 中的结构。绿色顶点/面表示度约束。

我们证明这种结构必定会出现。

假设存在 x 5 个等化器顶点和 y 1 个度为 j 的顶点。我们有 $|V| = x + y$、 $|E| = 5x$，以及欧拉公式 $|V| - |E| + |F| = 2$。由此可得 $(x + y) - 5x + |F| = 2$，因此 $y + |F| = 4x + 2$。

我们采用放电法 [CW17]。初始时，为每个面 f 分配电荷 $6 - \frac{3}{2}\deg(f)$，-为每个 1-in-j 顶点 v 分配电荷 $6 - 2\deg(v)$，并为每个 5-均衡器顶点分配电荷 1。所有

电荷之和为

$$\begin{aligned} & x+\sum_{f\in F} 6-\frac{3}{2}\deg(f)+\sum_{v \text{ is 1-in-}j} 6-2\deg(v) \\ &= x+6|F|-\frac{3}{2}(2|E|)+6y-2(|E|)=x+6(y+|F|)-5|E| \\ &= x+6(4x+2)-5(5x)=12>0. \end{aligned}$$

现在，应用以下放电规则：

1. 每个面 f（其度数为 $\deg(f) \geq 6$）从每个度数为 1 2 $\deg(f)$ 的5-均衡器邻居处取走 1 个电荷。

2. 每个 1-in-j 顶点 v（其度数为 $\deg(v) \geq 4$）从每个相邻的 5-均衡器顶点处取走 1 3 个电荷。

每个面 f的最终电荷，要么在 $\deg(f) = 4$ 时为 0，要么在 $\deg(f)_- + \frac{1}{2}\deg(f)_- \leq 0$ 时为 $6-\frac{3}{2}$；若 $\deg(f) \geq 6$，则其最终电荷为正。每个 1-in-j 顶点 v的最终电荷，要么在 $\deg(v) = 3$ 时为 $0,_-$ 要么在 $\deg(v) + \frac{1}{3}\deg(v) < 0$ 时为 $6-2$；若 $\deg(v) \geq 4$，则其最终电荷为正。由于总电荷为正，某个顶点 v 的最终电荷为正，而它必定是一个 5-均衡器顶点。该顶点不可能与度数为 ≥ 6 的面相邻，也不可能与 3 个或更多度数为 ≥ 4 的 1-in-j 顶点相邻。因此， v 的某两个非相邻邻居的度数均为 3，所以 v 是图 5 中该结构的中心顶点。

因此，上述规则中总有一条适用。 □

带有 1-in-j and k-均衡器的平面图定向，与按大小为 k 的集合进行平面精确覆盖（平面 XkC）密切相关。 k-均衡器顶点对应集合，而 1-in-j 顶点对应元素。众所周知，平面 X3C 是 NP 完全的 [DF86], , 但据我们所知，其他 k 值尚未得到研究。我们给出以下推论。

推论 **3.18.** 按大小为 k 的集合进行平面精确覆盖是 *NP*困难的，当 $k = 3,4$ 时；而对于所有其他 k，该问题属于 P 类 .

3.3 移除常数

现在假设我们拥有的不是单个常量，而是 0-in-f和 f-in-f，因此常量只以大小为 f的组出现。我们声称这不会改变二分定理。

定义 3.3。 f<style id='4'}-终止器是一种度为 $|f|$ 的顶点类型，只能由 f 条入边（若 $f > 0$）或 $-f$ 条出边（若 $f < 0$）满足。

正终止器是某个 $f > 0$ 对应的 f-终止器，而负终止器是某个 $f < 0$ 对应的 f-终止器。

注意， $k \geq 1$ 个互不连通的 f-终止器可以模拟一个 kf-终止器。现在我们通过证明带有 f-终止器的平面 Γ-GO 与平面 Γ-GO$_c$ 等价，来说明同时具有正终止器和负终止器几乎与具有常量一样好。

引理 3.19。设 Γ 是一组 *S-in-j* 和复制器顶点类型，使得 Γ 可以模拟正终止器和负终止器。那么（平面） Γ-*GO* 等价于（平面） Γ-*GO*$_c$。

证明。假设我们可以模拟一个 $-f_1$-终止器和一个 $+f_2$-终止器。那么，对于 $f := f_1 f_2$，我们就可以模拟一个 f-终止器和一个 $-f$-终止器。

设 G 是一个（平面） Γ-GO$_c$ 实例。我们对其进行一系列变换，直到最后一步可以用 $\pm f$-终止器替换所有常量。首先，制作 G 的 f 个副本，使所有常量产生的净流量总和为 f 的倍数。在非平面情形下，至此便已完成。证明的其余部分讨论平面情形。

如果所有顶点类型都是双子句的，那么根据引理 3.1，平面 Γ-GO 和平面 Γ-GO$_c$ 都属于 P 类。类似地，如果没有任何 S-in-j 的间隙大小达到 2 或更大，且不存在非平凡复制器，那么根据引理 3.1，这两个问题都属于 P 类（所有平凡复制器都是对称的，且其间隙大小都小于 2）。我们将假设这两种简单情形都不成立。

1. 我们首先考虑某种 S 的位串包含形如 $10^k1 (k \geq 1)$ 的严格子串的情形。我们将 S-in-j 的两个副本用 k 条边连接，并至少添加一个常量来模拟 1-in-2。

   用该 1-in-2 的 f 个副本细分复制图的每条（非常量）边（图 6(a)）。关键在于，每条原始边现在至少有 f 个常数悬挂其上。我们可以自由选择这些常数中哪些位于边的上侧、哪些位于下侧。我们将利用这一自由度，确保图中每个面内的常数之和为 f 的倍数。

   设 T 为对偶图的一棵生成树。我们现在“修正”每个面（T 中的顶点），使该面内所有常数的总净流量为 0（模 f）。按 T 的后序遍历处理这些面（从任意根开始）。对于每个面 u，考虑与其在 T 中的父节点 p 相邻的边。通过将该边上悬挂的（至少 f 个）常数中的一部分移到对面，我们可以使 u 的净流量为 0（模 f），且除 p 外不扰动任何其他面的净流量。对所有非根面重复此过程后，根面自动具有 0（模 f）的净流量，因为复制图最初来自常数的总净流量为 0（模 f）。
   现在，每个面内都悬挂着一些正向和负向的常量。对所有指向面内的常量连接一个 f-终止器，将它们拆分成 $f-1$ 个向外指向的常量。现在只剩下（数量为 f 的倍数的）向外指向的常量，因此我们可以使用 $-f$-终止器，每 f 个一组来模拟它们。

2. 如果某个 S 的位串包含一个严格子串010，就向其中输入常量来模拟一个 1-in-2。用 f 个这样的结构细分每条图的边。面固定过程仍然有效。

3. 如果我们有一个交替器，并且某个 S 的位串包含一个严格子串110，就可以向其中输入常量来模拟一个 {0,1}-in-2，并改用图 6(b)中的构造替换每条图的边。这会引入两个新面，它们也会包含在对偶生成树中。

4. 如果我们有一个交替器，并且某个 S 的位串包含一个严格子串011，就可以进行对称构造。

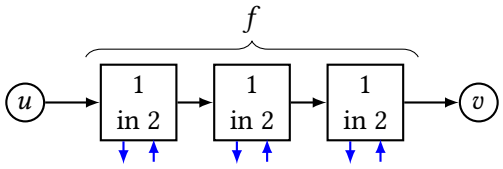
我们声称，这些分类讨论已穷尽所有情况。若要排除第一种情况，我们的每种顶点类型都必须是区间 $[a,b]$-in-j、复制器或不可满足。根据假设，并非所有顶点类型都是双子句，因此必定存在某个 $[a,b]$-in-j with $j \geq 3$ （所以该位串至少有 4 位）。同样，我们必须有一个非平凡复制器，因为区间没有大小为 2 或更大的间隙。根据定理 3.3，每个非平凡复制器都能模拟一个交替器。

若要排除情况 2-4，我们的区间的位串不能包含 010、110或011。只有当它是 10..00、00..01或 11..11时才有可能。然而，这些也都是双子句。□

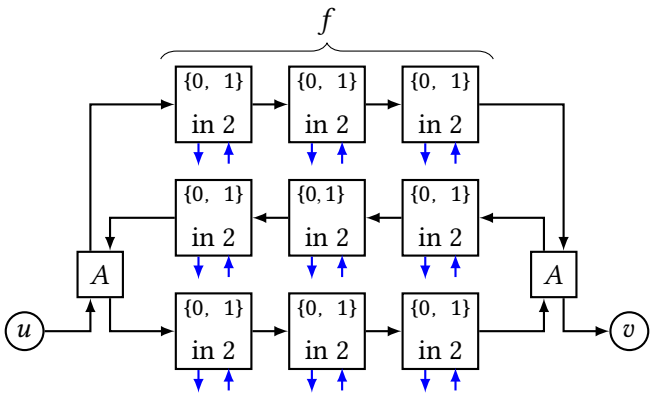
现在我们考虑只有正终止器或负终止器的情况。由此得到两个新的多项式时间情形。

定义 3.4. 一个 S-in-j 顶点类型是**自上而下封闭** 的，如果 $\forall i > j/2, i \in S \implies i-1 \in S$，也就是说，“上半部分是向下封闭的。”

如果 $\forall i < j/2, i \in S \implies i+1 \in S$，则 S-in-j 顶点类型是**自底向上封闭** 的，也就是说，“下半部分是向上封闭的。”



(a) 用1-in-2顶点细分边（u, v）。



(b) 细分一条边（u，v），加入 {0，1}-入-2 顶点和两个交替器（A）。这两个环确保每个 {0，1}-入-2 顶点恰好有一条入边。

图6： 将每条边 (u, v) 替换为图示构件。蓝色箭头表示输入到 S-in-j 中的常量，使其分别模拟 1-in-2 或 {0,1}-in-2。

引理 3.20。 仅含自上而下封闭顶点或仅含自下而上封闭顶点的图定向（平面或非平面）属于 P 类。

证明。 我们证明自上而下的情形；自下而上的情形是对称的。我们暂时允许边为无向边（不向其任一端点贡献流入度）或双向边（向其两个端点都贡献流入度）。首先，对每个 S-in-j 顶点周围的边进行任意定向，使得恰好有 $\max S$ 条边指向内部。然后，我们修正无向边和双向边。

我们首先迭代地修正无向边。假设存在一条无向边。在由当前定向的反向所构成的图中，从所有无向边出发进行广度优先搜索，直到到达一条双向边或搜索终止。在第一种情形中，我们找到一条路径 $u_1 - u_2 \leftarrow \cdots \leftarrow u_{k-1} \leftrightarrow u_k$。将该路径反转为 $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow u_k$。这不会改变任何入度，并修正一条无向边和一条双向边。

若搜索反而终止，我们找到一个割 $V = A \sqcup B$，其中 A内只有无向边和单向边，且 A 与 B 之间的所有边都单向指向 B。由此可知该实例不可满足，因为 A 内的总流入度已经达到可能的最大值，但并未用尽所有边。

重复上述过程，直到该实例被判定为不可满足，或不再有无向边。接下来，我们声称该实例必定可满足。我们可以逐一处理双向边。取一条双向边 $u_1 \leftrightarrow u_2$，并从它出发取一条不重复经过任何边的极大游走 $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_k$。最后一个顶点$u_k$的入度必定严格大于出度。令 $u_t \leftrightarrow u_{t+1}$ 为这条游走上的最后一条双向边，因此我们有一个子游走 $u_t \leftrightarrow u_{t+1} \rightarrow \cdots \rightarrow u_k$。将这段游走反向，得到 $u_t \leftarrow u_{t+1} \leftarrow \cdots \leftarrow u_k$。这样便处理了一条双向边。它还会使 u_k 的入度减少 1，但由于 u_k 是自上而下封闭的，新的入度仍然有效。□

引理 3.21。 设 Γ 是一组 S-入-j 顶点类型，它们可以模拟正终止器。那么，要么 Γ 中的所有顶点类型都是自底向上封闭的（且 Γ-GO 属于 P 类），要么 Γ （平面地）模拟负终止器。

证明。 如果所有顶点都是自底向上封闭的，根据引理 3.20， Γ-GO 属于 P 类。否则， Γ 有一个不是自底向上封闭的 S-入-j （$\exists i < j/2 : i \in S,\ i+1 \notin S$）。在这个顶点上添加 i 个自环，使得不失一般性地， $0 \in S,\ 1 \notin S$。

设我们已有的正终止器是一个 f-终止器（$f > 0$）。取 f 个这样的 S-in-j，并将每个的 $j-1$ 条边连接到一个（$j-1$）f-终止器。现在，每个 S-in-j 都有 $j-1$ 条出边，因此最后一条边也必须指向外部，从而得到一个 $-f$-终止器。□

综上，我们得到以下定理：

定理 3.22。设 Γ 是一组 S-*in*-j 顶点类型，它们能够模拟正终止器或负终止器。那么以下情况之一成立：

1. Γ 中的所有顶点类型都是自下而上封闭的，并且 Γ-*GO* 属于 *P* 类；或
2. Γ 中的所有顶点类型都是自上而下封闭的，并且 Γ-*GO* 属于 *P* 类；或
3. （平面） Γ-*GO* 等价于（平面） Γ-GO_c，并且可以应用定理 *3.16*（平面情形）或定理 *3.12*（非平面情形）中的二分定理。

证明。 在前两种情况下，根据引理 3.20， Γ-图定向属于 P 类。否则，根据引理 3.21，我们可以模拟相反类型的终止器，并应用引理 3.19。□

能够模拟某种终止器是一个相当弱的条件。如果对于某个 S-入-j 顶点类型， S到 $j/2$ 的最近元素是唯一的（而不是在 $j/2-a$与 $j/2+a$之间存在并列），那么我们只需添加自环，就可以模拟一个终止器。

遗憾的是，仍有一些情况下我们无法模拟任何终止器，因此问题尚未解决。例如，我们不知道带有 {1,4}-入-8 和 {0,2}-入- 2 的图定向（这等价于 {1,4}-入-8 SAT-E2）属于 P 类还是 NP困难。对称图定向的完整二分定理将意味着对称 Γ-SAT-E2（不含常数）也存在完整二分定理，而目前我们尚未得到该定理。

3.4 *i*-进-*j*二分定理

有一种情况可以在不使用常数的前提下得到完整的二分定理：当集合 S 为单元素集合时，也就是说， Γ 是一个由 i-进-j 顶点类型构成的集合。根据引理 3.1，仅包含 Γ 的图定向属于 P 类；因此，为了使问题不至于平凡，我们还允许使用复制器。根据推论 3.8，不失一般性，我们只需考虑一个非平凡复制器 D。我们希望刻画 (Γ∪{D})-GO 和平面 (Γ∪{D})-GO 的复杂度。

这种情况对铺砖问题尤其有用；参见第 5 节。任何需要用 k方骨牌铺设的子区域，其面积都必须是 k的倍数。这自然引出了净流量模 k为常量的图定向顶点，例如 i-进-k、 k-均衡器和同步器。

在接下来的小节中，我们将分别考虑 D 为交替器、同步器或其他情况（即净流量非零），并证明每种情况下都存在完整的二分定理（定理 3.23、3.24、3.26）。令人惊讶的是，如果 D 是交替器，那么平面图定向总是属于 P 类。这些结果共同完整刻画了对于任意 i-进-j 顶点类型集合和非平凡复制器，图定向和平面图定向的复杂度。

3.4.1 *i*-在-*j* 和非零净流量复制器

我们首先考虑 D 既不是同步器也不是交替器的情况，也就是说，它具有非零净流量。主要思路是，除非 $i = j/2$，否则我们可以添加自环来获得一个终止器，然后应用定理 3.22。反之，如果 $i = j/2$，我们可以构造一个 2 入 4 顶点。

定理 3.23。 设 Γ 是一组 i 入 j 顶点类型， D 是一个净流量为 $\pm f$（$f > 0$）的非平凡复制器。（平面）图定向在具有 Γ 和 D 的情况下是 *NP* 完全的，但以下情况除外；这些情况属于 *P* 类：

1. Γ 中的所有顶点类型都是双子句型（0-*in*-j、 j-*in*-j 或 1-*in*-2）；*2.*（仅限平面情形）对于 Γ 中所有 i-*in*-j， $f \geq 5$ 和 $i \in \{0, 1, j\}$；*3.*（仅限平面情形）对于 Γ 中所有 i-*in*-j， $f \geq 5$ 和 $i \in \{0, j-1, j\}$。

证明。 根据引理 3.1，第一种情形属于 P 类（复制器都是双子句型）。

假设有一种 i-in-j 顶点类型，它既不是 0-in-j，也不是 j-in-j 或 1-in-2。如果 $i = j/2$，就给它添加自环，使其变为 2-in-4；根据引理3.14，这种情形是困难的（注意， j 必须至少为 4，因为如果它是 2，这种顶点类型就会是双子句型）。否则，不失一般性，设 $i > j/2$，并且可以给它添加自环，使其变为正终止器。

为了应用定理 3.22，我们希望所有顶点类型都是对称的，但 D 可能不是。我们可以尝试用一个 f均衡器替换 D，它是对称的。然而，这对 $f = 1$ 和 $f = 2$行不通，因为 f均衡器会是平凡的，而 D 不是。相反，我们用一对 $2f$均衡器和 $3f$均衡器替换 D。令 $\Gamma' := \Gamma \cup \{2f$均衡器 $3f$均衡器$\}$。根据定理 3.3，这对顶点类型等价于 D，因此我们的问题等价于（平面） Γ'-GO。另请注意，$\max \Delta\Gamma' = \max\{2f, 3f\} \geq 3$，且 $\gcd \Delta\Gamma' = \gcd\{2f, 3f\} = f$。

现在所有顶点类型都是对称的，我们可以应用定理 3.22。由于 $3f$均衡器既非自上而下封闭，也非自底向上封闭，因此我们可以应用定理 3.12（非平面情形）或定理3.16（平面情形）。

并非所有关系都是双子句，也并非所有关系都是仿射（注意，当且仅当一个 i-in-j 关系是双子句时，它才是仿射），并且 $\max \Delta\Gamma' \geq 3$。因此，在非平面情形下，我们无条件得到 NP 困难性。在平面情形下，定理 3.16 中剩下的两个容易情形恰好对应于本定理的容易情形 2 和 3。□

3.4.2 i-in-j 与同步器

接下来，我们考虑 D 是同步器的情形。与前一种情形不同，我们不能用对称顶点类型替换 D，再应用定理 3.12，因为同步器从根本上说并不对称。

定理 3.24。 设 Γ 是一组 i-*in*-j 顶点类型。（平面）图定向在包含 Γ 和一个同步器的情形下是 *NP* 完全的，以下情形除外；这些情形属于 *P* 类：

1. Γ 中的所有顶点类型都是双子句（0-*in*-j、 j-*in*-j或 1-*in*-2）；*2.* 对于 Γ 中的所有 i-*in*-j， $i < j/2$ 或 $i = 1$, $j = 2$；*3.* 对于 Γ 中的所有 i-*in*-j， $i > j/2$ 或 $i = 1$, $j = 2$；*4.* 对于 Γ 中的所有 i-*in*-j， $i \in \{0, 1, j\}$；*5.* 对于 Γ 中的所有 i-*in*-j， $i \in \{0, j-1, j\}$。

证明。 第一种情况根据引理 3.1 属于 P 类。在第二种情况下，每个顶点的入度必须小于或等于出度（只有复制器的入度和出度相等）。如果存在任何用于 $j > 2$ 的 i-in-j 顶点，则该实例不可满足。否则，所有顶点都是双子句，我们可以在多项式时间内解决该问题。第三种情况也类似。在第四和第五种情况下，我们可以先消去所有常量，然后归约到第二或第三种情况。现在假设我们不属于任何容易处理的情况。

考虑某个 i-in-j，使得 $i \geq j/2$ 且 $(i,\ j) \neq (1,\ 2)$。添加自环，直到得到 2-in-4 或正终止器。类似地，我们也可以得到 2-in-4 或负终止器。

如果我们有 2-in-4，根据引理3.14，该问题是困难的。否则，我们同时拥有正终止器和负终止器。此外，我们还有一种非二合取对称顶点类型和一个同步器。于是，根据引理 3.19，我们可以假设自己也拥有常数。

考虑某种 i-in-j 顶点类型，其中 $i \notin \{0, 1, j\}$。那么它的位串包含 `0010`，我们可以模拟 2-in-3。同样，我们可以模拟 1-in-3，因此根据引理 3.14，该问题是 NP 困难的。□

3.4.3 i-in-j 和交替器

最后，我们考虑 D 是交替器的情况。这只有在平面情形下才有意义，因为在非平面情形下，交替器与同步器相同。

我们证明，带有 i-in-j 和交替器的平面图定向问题总是属于 P 类，这与前面几个小节形成了鲜明反差。我们先证明一个引理，其构造将在证明中用到。

引理 3.2 5.仅含交替器和 (j/2)-入-j的平面图定向总是可满足的 .

证明。 每个顶点的度都是偶数，因此对偶图是二分图。对面进行二着色，例如将面染成黑色和白色，并将每条边定向，使黑色面位于其左侧。顶点周围的边因此按要求交替。□

定理 3.26。 设 Γ 为一组 i-入-j 顶点类型。含有 Γ 和交替器的平面图定向属于 P 类。

证明。 **算法**。 我们使用线性规划。对于每个顶点 u 及其邻居 v，创建一个变量 x_{uv}。该变量的含义是：在满足定向中，若 u 朝向 v 定向，则 $x_{uv} = 1$；若 v 朝向u 定向，则 $x_{uv} = -1$。约束如下：

- 对于每条边 $(u,\ v)$，$x_{uv} = -x_{vu}$ 和 $-1 \leq x_{uv} \leq 1$。
- 对于一个 i-in-j顶点 u，其邻接顶点为 v_1、……、 v_j, $x_{uv_1} + x_{uv_2} + \cdots + x_{uv_j} = (j - i) - i.$
- 对于一个 $2k$-交替器顶点 u，其邻接顶点按循环顺序为 v_1、……、 v_{2k}，$x_{uv_1} = -x_{uv_2} = x_{uv_3} = \cdots = -x_{uv_{2k}}$。

关键结论是，当且仅当存在满足条件的图定向时，这个线性规划才有可行解。该线性规划的可行性可以在多项式时间内检验。

正确性证明。 任意满足定向都对应一个解，其中所有边 (u, v) 都有 $x_{uv} \in \{-1, 1\}$；因此，如果线性规划不可行，就不存在满足定向。否则，我们必须证明：如果存在可行解，那么就存在一个解，使所有边 (u, v) 都有 $x_{uv} \in \{-1, 1\}$。若边 (u, v) 满足 $-1 < x_{uv} < 1$，则称其为松弛边。

设 $\{x_{uv}\}$ 是一个至少有一条松弛边的解。我们给出一种修改该解以减少松弛边数量的过程。重复此过程即可保证正确性。

考虑对偶图 G^*。对于一条边 $(u,\ v)$，令面 u^* 位于 $\overrightarrow{uv}$的左侧，面 v^* 位于 $\overrightarrow{uv}$ 的右侧（严格来说，这种记法有歧义，但结合上下文便能理解）。对于每条边 $(u,\ v)$，在 G^* 中从 u^* 向 v^* 画一条边，并以 x_{uv}为权重。关键观察如下：

观察。 G^* 中的每个环的权重之和都等于 0（模 1）。

观察的证明。 只需考虑 G^* 的各个面，因为面构成一个环基。 G^* 中一个面的边权之和对应于流入原图某个顶点的净流量，而该净流量是整数，符合要求。

这意味着存在一个势函数 π，将面映射到 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的元素，使得对于每条边 (u, v)，$\pi_{v^*} - \pi_{u^*} \equiv x_{uv}$(模 1)。根据构造，若 $f_1, \ldots, f_{2k}$ 是交替顶点周围按循环顺序排列的面，那么我们还有 $\pi_{f_1} = \pi_{f_3} = \ldots = \pi_{f_{2k-1}}$ 和 $\pi_{f_2} = \pi_{f_4} = \ldots = \pi_{f_{2k}}$。

由于 $\{x_{uv}\}$ 有一条松弛边，因此 π 的值域中至少有两个不同的值，或者对于所有边 (u,v)，$x_{uv} \in \{-1,0,1\}$。在后一种情况下，考虑由满足 $x_{uv}=0$ 的边 (u,v) 构成的子图。将这些值替换为引理 3.25 给出的满足定向。

否则，令 π_0 为 π 的值域中的任意值。定义一个非零向量 $\{y_{uv}\}$：$y_{uv} = [\pi_{v^*} = \pi_0] - [\pi_{u^*} = \pi_0]$ 其中 $[\cdot]$ 是艾弗森括号。对于所有 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，注意到 $x + \varepsilon y$ 在每个顶点处都满足流约束。选取 ε，使得 $x + \varepsilon y$ 触及其中一个 $-1 \le x_{uv} + \varepsilon y_{uv} \le 1$ 约束的边界。注意，对于所有非松弛边（u，v），$y_{uv} = 0$，因此用 $x + \varepsilon y$ 替换 x 会按要求严格减少松弛边的数量。□

4 KPlumber

KPlumber 是一款单人电脑游戏，包含在某些标准 Linux 发行版中。游戏在由单元格组成的矩形网格上进行，每个单元格中都有一个可旋转方块，上面绘有若干管道段。图7展示了所有可能的方块。方块的四条边各自要么为空，要么有一个未连接管道端。游戏目标是旋转这些方块，使所有未连接的管道端都沿内部边两两配对，从而形成一个闭合管道系统。该系统可以包含一个或多个管道连通分量。从复杂度的角度来看，自然的判定问题是：给定一个方块类型网格，是否存在旋转这些方块以解开谜题的方法。

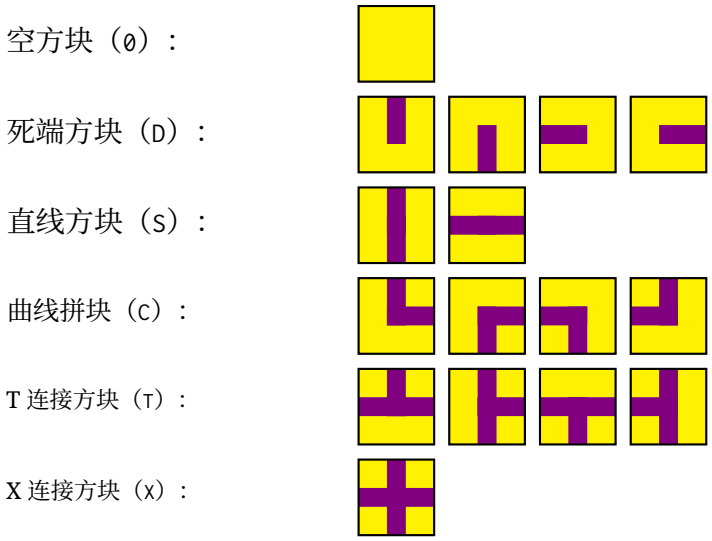


图7： KPlumber 中六种可能的方块类型及其所有旋转形式。改编自 [KMS+04，图 1]。

2004年，Kr´al 等人 [KMS+04] 研究了当输入限制为图7中各种拼块子集时 KPlumber 的复杂度。他们对大多数拼块子集给出了复杂度分类（属于 P 类或 NP 完全），但有一类情况尚未解决。研究表明，这一类中的所有情况都与使用 0、D、S、T 和X 拼块的 KPlumber 多项式等价（也就是说，仅排除了曲线拼块C ）。本文通过证明这一类问题（或许出人意料地）属于 P 类，解决了这一未决问题，并完成了分类。

定义 4.1。 平面二分可满足性问题-*E2* 是一类 SAT问题，其中每个变量恰好出现在两个子句中；由子句作为顶点、变量作为边（连接每个变量所出现的两个子句）构成的图是平面二分图。

在平面二分 SAT-E2 中，当且仅当其中恰有 i 个 j变量为真时，***i-in-j*** 子句 才满足。交替子句 当且仅当其变量在平面嵌入中交替为真和

假时才满足。

推论 4.1。 带有 *i-in-j* 子句和交替器的平面二分 *SAT-E2* 属于 *P* 类。

证明。 将子句二着色为黑色和白色。将每条真边从黑色指向白色，将每条假边从白色指向黑色。白色 *i*-in-*j* SAT 子句变为 *i*-in-*j* GO 顶点，黑色 *i*-in-*j* SAT 子句变为 (*j* – *i*)-in-*j* GO 顶点，而交替器子句变为交替器 GO 顶点，因此该问题等价于定理 3.26。 □

推论 4.2。 不含曲线拼块 C 的 *KPlumber* 属于 *P* 类。

证明。 为网格中的每个单元格创建一个 SAT-E2 子句，并为每对边相邻单元格创建一个变量，表示管道是否沿该边匹配。O、D、T、X 拼块分别对应针对 $i = 0$，1，3，4 的 *i*-in-4 子句，而 S 拼块是交替器子句。所得网格图既是平面的又是二分的，因此推论 4.1 适用。 □

5 铺砖

在本节中，我们将通用方法应用于铺砖问题。铺砖问题由一组可用拼块 *S* 和一个网格指定，其中网格的每个单元格均为已填充或未填充。目标是将可用拼块的副本放置在 *S* 中，使未填充单元格不被覆盖，且每个已填充单元格恰好被一个拼块覆盖。拼块可以旋转，但不能反射（允许反射的铺砖问题可通过在 *S*中加入拼块的镜像来表示）。Horiyama 等人 [HIN+17] 此前已证明，仅使用三格骨牌、仅使用三格骨牌，或同时使用三格骨牌和三格骨牌的铺砖问题均为 NP 完全。

5.1 三格骨牌铺砖

作为通用方法的示例，我们首先重新证明 Horiyama 等人 [HIN+17]关于使用三格骨牌进行铺砖为 NP 完全的结论。Horiyama 等人最初的归约需要六 种构件，分别称为直线、拐角、交叉、复制器、子句和否定子句 构件。前两种构件用于模拟平面图定向实例中的边；而后四种构件，按我们的术语，分别等价于交叉器、同步器、*1-in-3*和*2-in-3* 。应用我们的通用方法后，归约只需两种顶点构件，因此更加简单。

定理5.1. 三格骨牌铺砖问题是 *NP* 完全的。

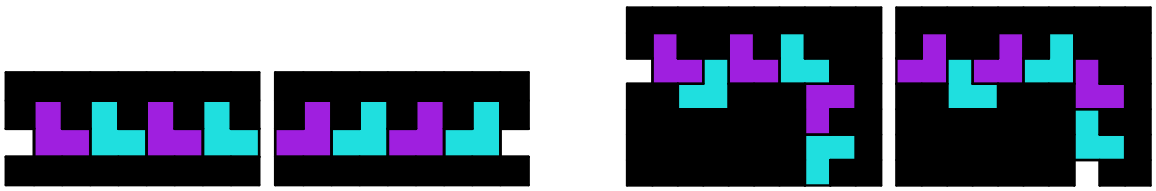


图 8： 左：三格骨牌导线构件。右：三格骨牌移位/转向构件。

证明。 从平面 {1-in-3，3-均衡器}-GO 归约；根据定理 3.23，该问题是 NP困难的。取一个图定向实例，并将其顶点嵌入网格，使所有顶点之间的距离足够远（多项式间距即可）。

如图 8 所示，我们用一系列导线 和平移 构件表示图的一条边。不同导线和平移构件中的白色单元格在构件之间共享，并传播布尔信号

信号通过这些构件内部的两种可能铺砌方式从一个面积传播到另一个面积。我们称这条边朝向能够“覆盖”边界处未连接白色单元格的方向。

导线构件可在中间使用任意数量的三格骨牌 使白色单元格水平移动任意个 2 单位。按照平移构件所示的方式转弯，白色单元格便可沿任意方向移动任意个 2 单位。平移构件最左侧的蓝色三格骨牌使我们能够将导线平移 1 个单位。因此，可以用由导线构件和平移构件组成的边，连接网格中任意两个（相距足够远的）单元格。

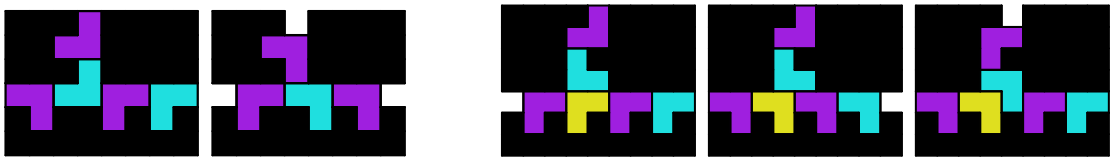


图 9： 左：三格骨牌的 3-均衡器构件 右：三格骨牌的 1-in-3 构件 s.

现在我们来介绍顶点构件，如图 9 所示。左侧展示了一个 3-均衡器构件，以及两种铺法，均不会在其内部留下空洞。类似地，右侧展示了一个 1-in-3 构件及其三种铺法。两个构件都包含 3 个构件端口，每个端口既可以由构件覆盖，也可以由一条入边覆盖，从而将入边的可能状态恰好限制为 3-均衡器或 1-in-3 所要求的状态。验证不存在不希望出现的部分铺砖（即相邻边的其他赋值）的一种简单方法是注意到，任何部分铺砖都必须覆盖 3 的倍数个单元格。

因此，通过将每个顶点替换为 3-均衡器构件或 1-in-3 构件，并连接图中的边，我们可以将一个平面 {1-in-3，3-均衡器}-GO 实例嵌入三格骨牌铺砌问题中，因此三格骨牌铺砌是 NP难。□

注释 5.2。定理 *5.1* 中的归约对于同时使用三格骨牌和三格骨牌进行铺砌仍然成立（从而重新证明了 *[HIN+17]* 中的另一个定理），因为在任何构件中放入三格骨牌都会产生孤立单元格。

对于三格骨牌铺砌，无法轻易用同样的方法从平面 {1-in-3，3-均衡器}-GO 归约而来。原因是这个问题存在一个“模 3”问题：如果我们按照 $(x + y)$ 模 3 对网格的单元格（x，y）着色，那么每块三格骨牌都会覆盖每种颜色各一个单元格。因此，任何导线构件（传递单格宽信号的构件）都只能连接颜色相同的单元格。另一方面，任何 3-均衡器构件只能产生三个颜色各不相同的构件端口。因此，无法用导线连接任意顶点。

相反，Horiyama 等人的归约 [HIN+17]在我们的框架中重新表述后，使用了交叉器、同步器、*1-in-3*和*2-in-3* 构件，并注意确保所有构件端口具有相同的（x 模 3, y 模 3）（以便它们可以通过导线连接），其中包括一个高度非平凡的交叉器构造。Horiyama 等人使用的构件如图 10、11、12、13、14、15 所示。根据定理 3.23，交叉器对于确立 NP完全性并非必要。

5.2 四格骨牌铺砌

我们现在应用我们的框架，以确立关于四格骨牌铺砌困难性的若干新结果。我们解决了所有单一四格骨牌集合（无论是否允许反射）以及全部四格骨牌集合的铺砌复杂度。我们的结果汇总于表 2。

首先，我们讨论多项式时间情形：

定理 5.3。 四格骨牌铺砖问题属于 P 类。

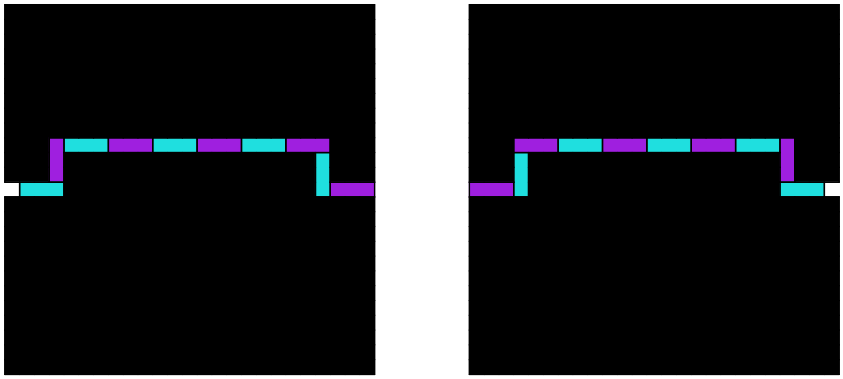


图10： [HIN+17]使用的三连骨牌铺砌导线构件。

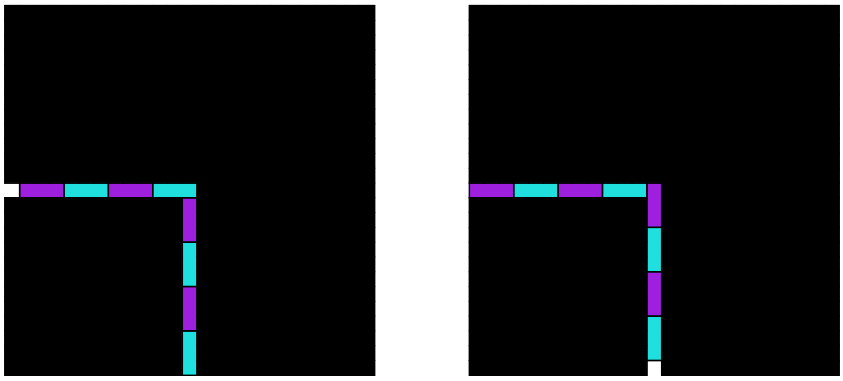


图11： [HIN+17]使用的三连骨牌铺砌转向组件。

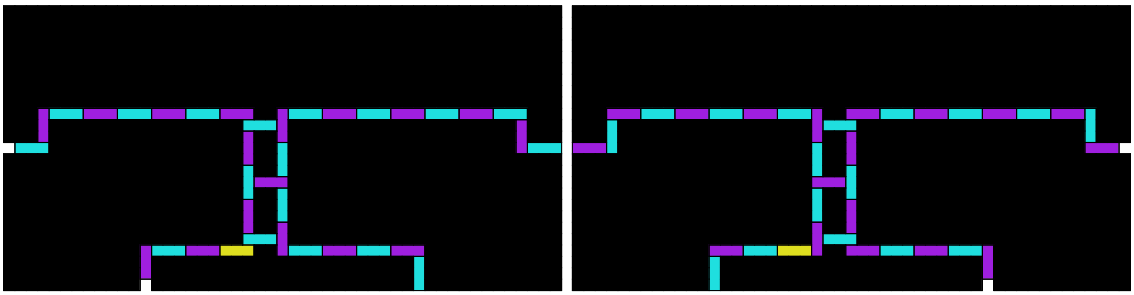


图12： [HIN+17]使用的三连骨牌铺砌同步器构件。

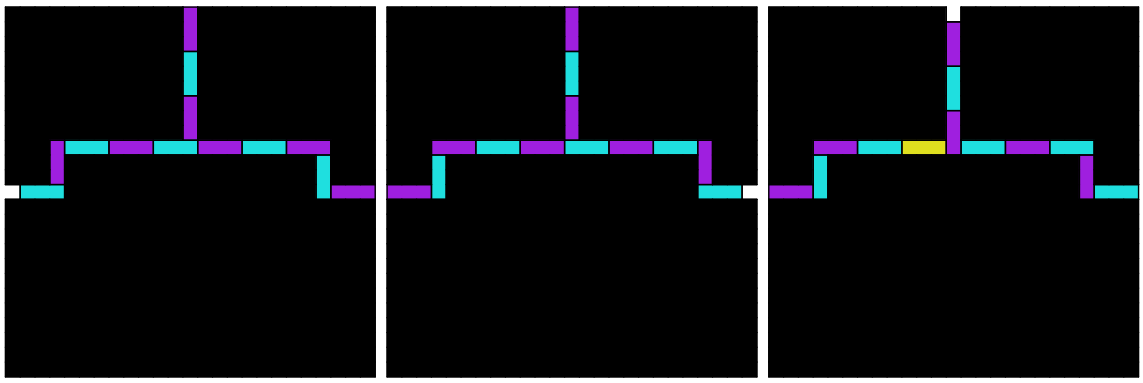


图13： [HIN+17]使用的三连骨牌铺砌1-in-3（子句）构件。

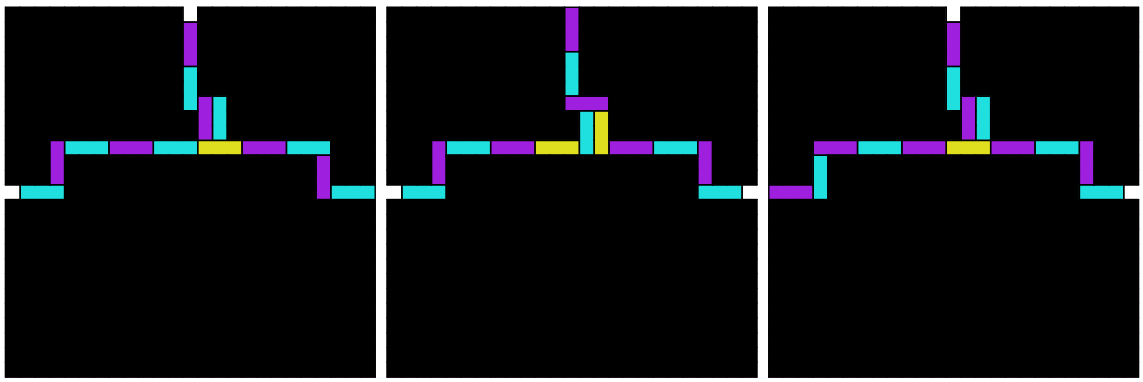


图14： [HIN+17]使用的三连骨牌铺砌中的 2-3（否定子句）构件。

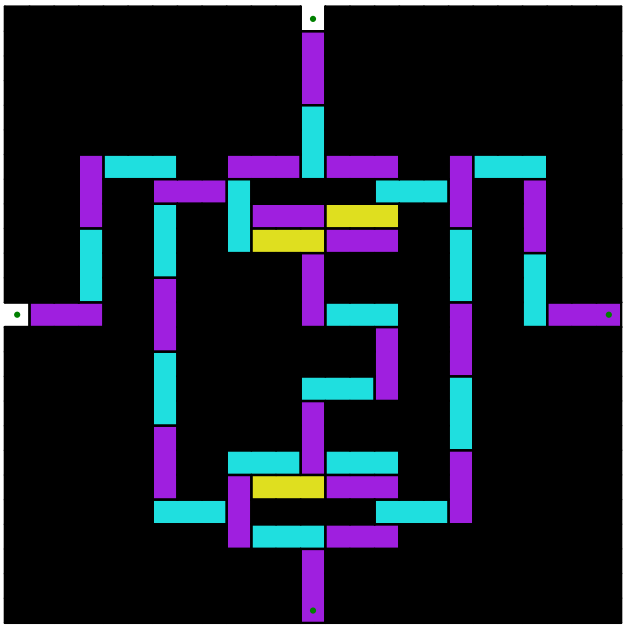


图15： [HIN+17]使用的三格骨牌铺砌交叉构件的一种铺法。这个非常复杂的构件实际上并非通过定理 3.23 证明 NP 困难性所必需。

证明。按行优先顺序遍历网格的单元格。对于每个尚未覆盖的单元格，至多只有一种用四格骨牌覆盖它的方法。贪心地在该处放置一块四格骨牌，然后继续。□

定理 5.4. 用四格骨牌进行铺砌属于 P 类。对称地，用四格骨牌进行铺砌属于 P 类。

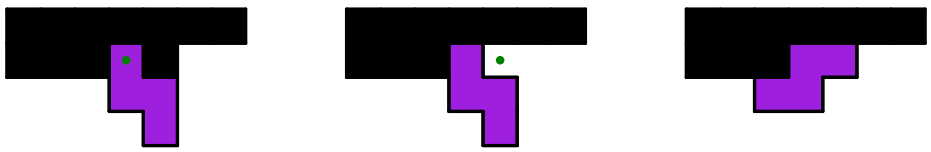


图 16： 对于四格骨牌铺砌，至多总有一种选择不会立即导致矛盾。

证明。 按行优先顺序遍历网格中的单元格。考虑一个未覆盖的单元格 c，使得在行优先顺序中位于它之前的所有单元格都已被覆盖，如图 16 所示。如果 c 右侧的单元格已被覆盖或超出网格，则覆盖 c 的唯一方法是竖直放置一块（图 16，左）。如果 c 右侧的单元格未被覆盖，那么若我们竖直放置一块来覆盖 c，则该单元格将无法被覆盖（图 16，中）。因此，我们必须水平放置一块（图 16，右）。覆盖 c 时，始终至多只有一种不会立即导致矛盾的方式，因此我们可以在那里贪心地放置一块四格骨牌并继续。□

现在，我们将框架应用于剩余四格骨牌的铺砖问题，以证明其 NP 困难性。

定理 5.5. 使用四格骨牌（及任意子集的剩余四格骨牌）进行铺砖是 *NP* 困难的。证明。从平面 {1取4、3取4、同步器}-GO 归约而来；根据定理 3.24，该问题是 NP 困难的。

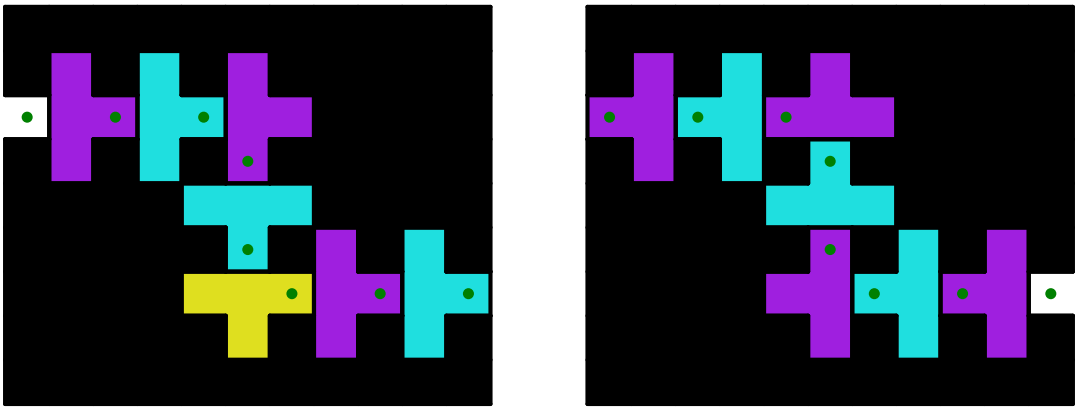


图 17： 四格骨牌的导线构件。

我们用导线表示边，如图 17 所示。采用图 17 中间所示的转弯方式，可以将导线平移任意距离，只要 $(x + y)$ 模 2 不变。不幸的是，由于在网格的棋盘格着色中，四格骨牌总是覆盖一种颜色的 1 个方格和另一种颜色的 3 个方格，因此无法构造平移奇数距离的导线。因此，我们确保所有构件端口的颜色相同，以便用导线将它们连接起来。

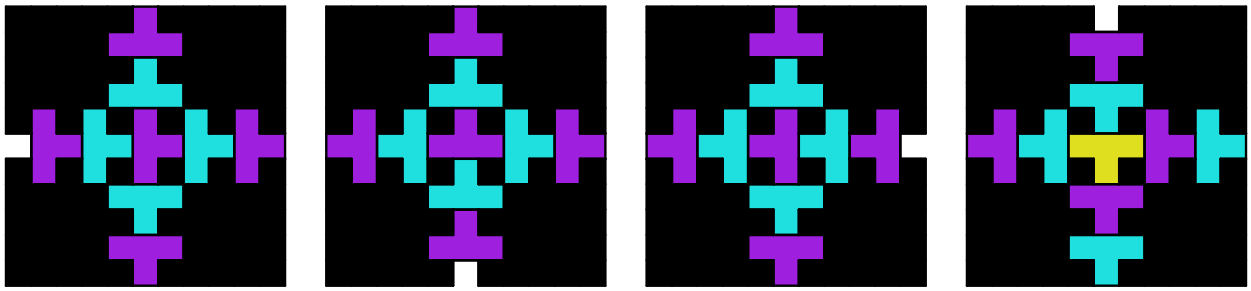


图 18： 四格骨牌的 1取4构件的四种可能铺砌。

1取4和3取4构件分别如图 18和图 19所示。注意，所有构件端口（x，y）的（$x + y$）模2值都相同。其他部分覆盖是不可能的，因为覆盖的单元格数量必须是4的倍数。

同步器如图 20 所示。它由两个通过两根导线相连的“4-均衡器”构件构成。仅构造一个 4-均衡器是行不通的，因为其中一根导线最终会处于错误的奇偶性。因此，我们将两个 4-均衡器连接起来，构建一个所有构件端口具有相同奇偶性的同步器。

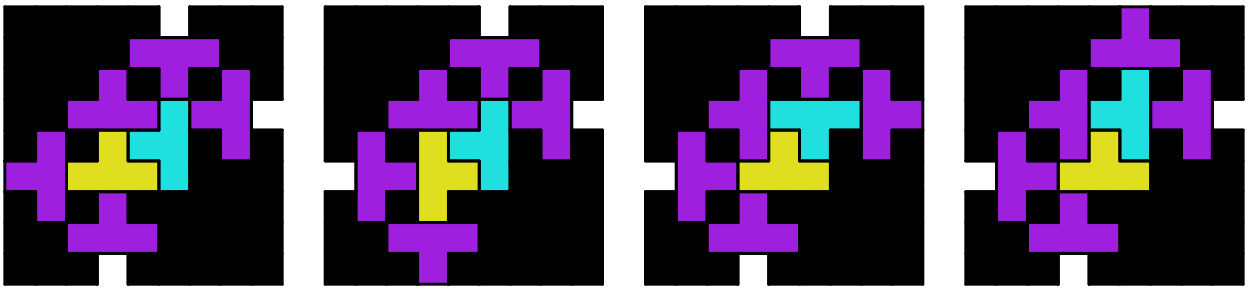


图 19: 四格骨牌 3-in-4 构件的四种可能铺砌。

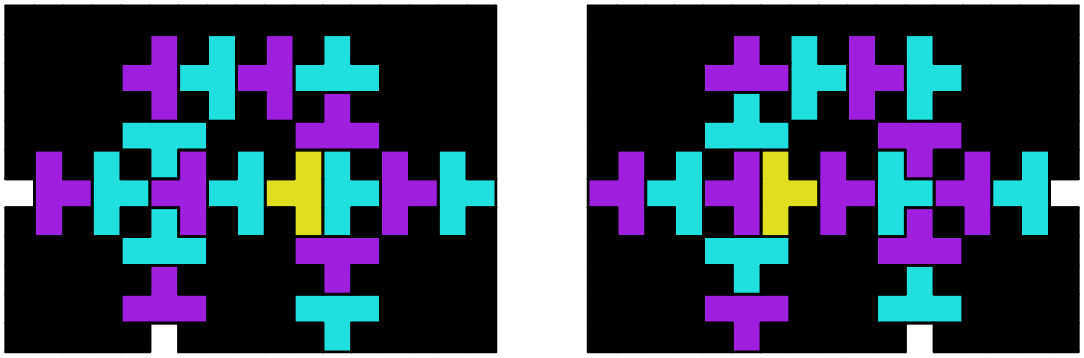


图 20: 四格骨牌同步器构件。

这些构件足以证明用四格骨牌进行铺砌是 困难 的。最后，请注意，在全部七种四格骨牌中，只有四格骨牌可以放入导线内部而不会立即产生孤立单元格。因此，在任何铺砌中，导线都必须仅使用四格骨牌来铺砌。即使允许使用其他四格骨牌，每个构件内部也不会出现不希望的部分覆盖，因为被覆盖单元格的总数是 4 的倍数（同步器由两个4等化器构成，因此这一推理同样适用于它）。因此，该证明适用于任何包含 。□ 的四格骨牌子集。

定理 5.6. 铺砌问题 四格骨牌是 *NP*困难。类似地，使用 四格骨牌进行铺砌也是 *NP*困难。使用两种 四格骨牌和 四格骨牌（即 带反射的四格骨牌）也是 *NP*困难·

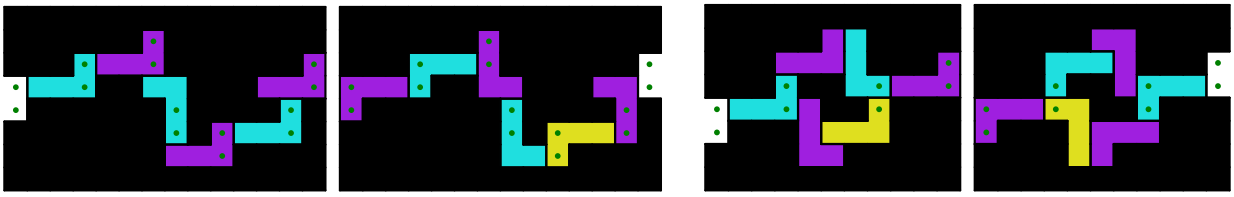


图 21: 左：导线／转弯构件，用于 四格骨牌。右：平移构件，用于 四格骨牌。

证明。从平面 {3-in-4，4-均衡器}-GO 归约；根据定理 3.23，该问题是 NP困难。

我们使用图 21 所示的导线构件和移位组件来表示边。与先前的证明不同，一条边的定向使用一个 2×1 单元格矩形来表示。导线构件可以在由 (−2,1) 和 (1,2) 生成的正方晶格中将信号平移任意量（使用（行,列）坐标），

遗憾的是，这并非所有可能的平移。为了弥补这一点，平移构件允许平移 (0,4)，因此现在可以获得任意平移。

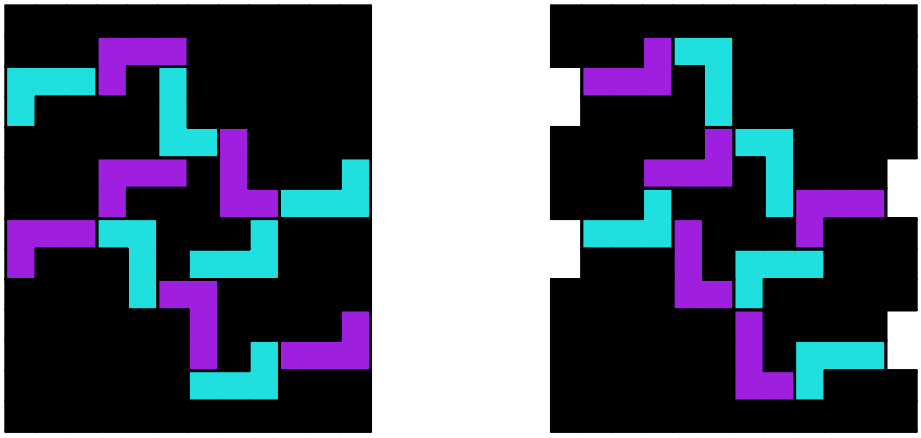


图 22： 四格骨牌的 4-等值构件的两种可能铺砌。

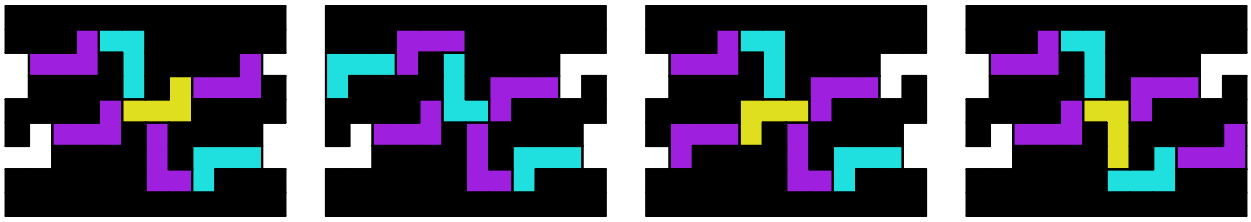


图 23： 四格骨牌的 3取4构件的四种可能铺砌。

4-等值构件如图 22 所示。覆盖内环的两种方式决定了相邻边是全部朝内还是全部朝外。

3取4构件如图 23 所示。覆盖构件中心的 1×2 矩形有四种方式，每种方式都决定哪条相邻边朝外。

这些构件足以证明四格骨牌铺砌是 NP困难的，即使额外允许四格骨牌（即允许拼块反射），证明仍然成立：注意，任何四格骨牌都无法放入任何导线构件而不产生孤立单元格。因此，导线构件只能用四格骨牌铺砌，从而使所有 4-等值构件和 3取4构件中的 2×1 矩形构件端口保持未覆盖或完全覆盖。可以验证，即使允许使用四格骨牌，一个构件内部能够覆盖的构件端口子集也只有图 22 和图 23 所示的预期排列。□

尽管仅使用四格骨牌或仅使用四格骨牌进行铺砖很容易，但允许同时使用这两种拼块（即允许反射）会使该问题变为NP困难。

定理 5.7。 同时使用两种 四格骨牌和 四格骨牌进行铺砖是*NP*困难的。

证明。 归约自平面 {1取4、 3取4、同步器}-GO；根据定理 3.24，该问题是NP困难的。

如图 24 所示，我们用导线表示边。边的定向用一个 2×1 单元格矩形表示。按照图 24 所示转弯后，导线可以垂直或水平移动任意个 2 单位。我们将确保所有构件端口具有相同的（x 模 2，y 模 2）。

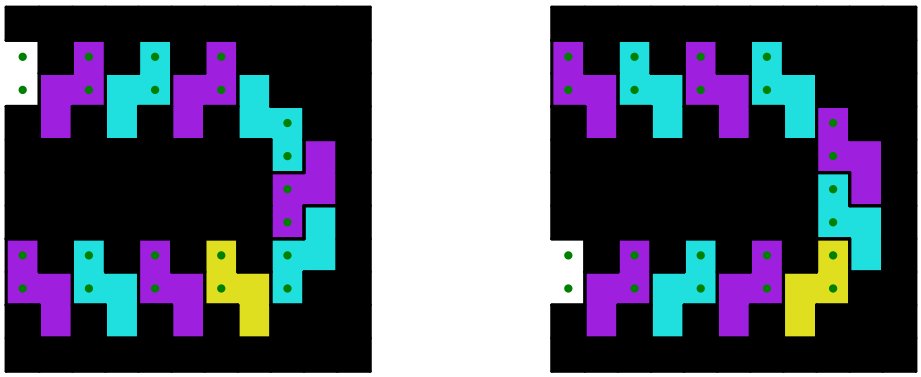


图 24： 带反射的四格骨牌导线构件。

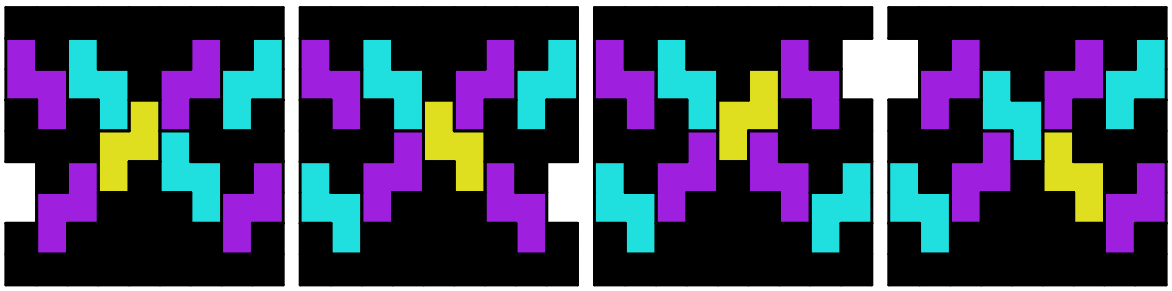


图 25： 带反射的四格骨牌 1取4 构件的四种可能铺砌 n.

1取4 构件如图 25 所示。构件中心的 2×1 矩形有四种覆盖方式，分别对应相邻边的四种有效定向方式。所有构件端口都具有相同的（x 模 2，y 模 2），因此可以使用导线构件将它们连接起来。

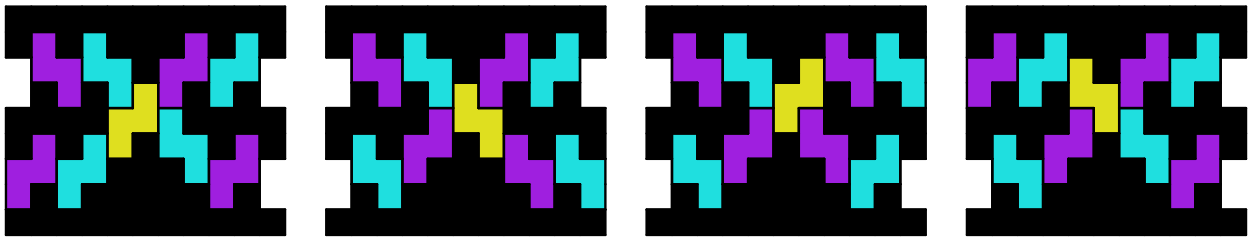


图 26： 带反射的四格骨牌 3取4构件的四种可能铺砌。该构件以与 1-in-4 构件相同的方式构建。

3取4构件以与 1-in-4 构件相同的方式构建，不同之处在于，我们将导线延长了“半个”四格骨牌，如图 26 所示。

同步器如图 27 所示。它本质上是将宽 2 个单元格的线缆信号分成宽 1 个单元格的导线（在绿色圆点处相连），再将它们重新接合。在构件的中心，两条宽 1 个单元格的导线短暂合并成一条宽 2 个单元格的导线，随后再次分开。这样便使这些导线的指向保持一致。因此，这个构件只有图 27 所示的两种部分覆盖方式。□



图 27： 带反射的四格骨牌同步器构件。该构件通过拆分和重新组合导线来实现功能。

致谢

本文起源于 2023 年秋季，麻省理工学院由 Erik Demaine 授课的课程《算法下界：与困难性证明共趣》（6.5440）中的未解决问题研讨。我们感谢该课程的其他参与者——特别是 Evgeniya Artemova、Krit Boonsiriseth、Josh Brunner、Lily Chung、Della Hendrickson、Hayashi Layers、Jayson Lynch、Richard Qi、Mark Saengrungkongka、Nathan Sheffield、Andy Tockman、Anthony Wang、William Wang 和 Alek Westover——感谢他们展开的有益讨论，并营造了启发性的氛围。本文最初的构想源自 2012 年与 Martin Demaine、Takahasi Horiyama 和 Ryuhei Uehara 的早期讨论，感谢他们帮助开创了这一问题领域。

参考文献

[ACD+22] Hayashi Ani、Lily Chung、Erik D. Demaine、Jenny Diomidova、Della Hendrickson 和 Jayson Lynch。通过可验证构件推动方块：Push-1F 和 Block/Box Dude 的 PSPACE 完全性。载于第*11*届算法趣味国际会议论文集（*FUN 2022*），第2:1–2:30页，意大利法维尼亚纳，2022年5月至6月。[Coo71] Stephen A. Cook。定理证明程序的复杂度。载于第*3*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，第151–158页，俄亥俄州谢克高地，1971年。[CW17] Daniel W. Cranston 和 Douglas B. West。通过图着色介绍放电法。《离散数学》，340(4):766–793，2017年。[DF86] M. E. Dyer 和 A. M. Frieze。平面3DM是 NP 完全问题。《算法杂志》，7(2):174–184，1986年。[DGH26] Erik D. Demaine、William Gasarch 和 Mohammad Hajiaghayi。《计算不可解性：算法下界指南》。麻省理工学院出版社，2026年。[FAF19] Ivan Tadeu Ferreira Antunes Filho。布尔可满足性变体的刻画。硕士论文，麻省理工学院，2019年。[HD09] Robert A. Hearn 和 Erik D. Demaine。《游戏、谜题与计算》。A K Peters，2009年。

[HIMRS98] Harry B. Hunt III、Madhav V. Marathe、Venkatesh Radhakrishnan 和 Richard E. Stearns。平面计数问题的复杂度。*SIAM*计算杂志，27(4):1142–1167，1998年。[HIN+17] Takashi Horiyama、Takehiro Ito、Keita Nakatsuka、Akira Suzuki 和 Ryuhei Uehara。用三格骨牌或条形骨牌铺砌多边形的复杂度。离散与计算几何，58(3):686–704，2017年10月。最初发表于CCCG 2012。[Ist97] Gabriel I. Istrate。探寻一种 Schaefer 二分定理的变体：每个变量最多出现两次。技术报告 UR CSD TR652，罗切斯特大学计算机科学系，美国，1997年。[KKR18] Alexandr Kazda、Vladimir Kolmogorov 和 Michal Rol´ınek。偶 Delta-拟阵与平面布尔约束满足问题的复杂度。*ACM*算法汇刊，15(2)，2018年12月。[KMS+04] Daniel Kr´al、Vladan Majerech、Ji˘r´ı Sgall、Tom´a˘s Tich´y 和 Gerhard Woeginger。当水管工可不容易。理论计算机科学，313(3):473–484，2004年。[MAA+25] MIT-ULB计算几何组、Zachary Abel、Hugo Akitaya、Lily Chung、Erik D. Demaine、Jenny Diomidova、Della Hendrickson、Stefan Langerman 和 Jayson Lynch。用三格骨牌铺砌的不可判定性，2025年。[MBD+24] MIT Hardness Group、Josh Brunner、Erik D. Demaine、Jenny Diomidova、Timothy Gomez、Markus Hecher、Frederick Stock 和 Zixiang Zhou。证明计数问题困难性的更简便方法：广义#SAT的二分定理及其在约束图中的应用。载于第*35*届国际算法与计算研讨会论文集（*ISAAC 2024*），第322卷*LIPIcs*，第51:1–51:14页，澳大利亚悉尼，2024年12月。[MR01] C. Moore 和 J. M. Robson。使用简单拼片的困难铺砌问题。离散与计算几何，26(4):573–590，2001年1月。[Sch78] Thomas J. Schaefer。可满足性问题的复杂度。载于第*10*届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，STOC ’78，第216–226页，美国圣迭戈，1978年。