arXiv:2603.03513v1 [cond-mat.dis-nn] 3 Mar 2026

q高斯分布交叉：重叠谱趋向三维埃德华兹–安德森临界性

Yaprak ¨Onder,[1,2] Abbas Ali Saberi,[3,1,*] 和 Roderich Moessner[1]
[1] *Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, 01187 Dresden, Germany*
[2] *Department of Physics, Harvard University, Cambridge MA, USA, 02139*
[3] *School of Science, Constructor University, Campus Ring 1, 28759 Bremen, Germany*
（日期：2026年3月5日）

我们提出一种谱方法，用于表征三维埃德华兹–安德森自旋玻璃。通过分析由二维截面构造的重叠矩阵的本征值统计，我们发现高温下的维格纳半圆定律向高斯分布交叉，而在自旋玻璃临界点附近则稳定呈现高斯分布。对于不同的随机耦合分布，这一现象均清晰可见，因此高斯分布有望成为稳健的临界性谱指标。值得注意的是，谱密度可由 Tsallis 统计很好地描述，其熵指数 q 从 $q = -1$ （半圆分布， $T = \infty$）演化至 $q = 1$（高斯分布），对应于 T_c，揭示了顺磁相内部的统计结构。我们发现，在数值精度范围内 $q \leq 1$。虽然局域能级统计仍符合 GOE 统计，反映出标准的能级排斥，但温度依赖性主要体现在全局谱密度上。我们的结果表明，谱统计可作为多副本关联函数方法的计算高效补充，并为无序系统中的协同与临界现象提供了新的视角。

引言。—自旋玻璃是具有受挫特征的典型无序系统，其相变受到复杂能量景观和非遍历动力学的支配 [1, 2]。在三维中，Edwards-Anderson（EA）自旋玻璃 [3] 是一个研究充分的模型。尽管人们在刻画其平衡性质和临界指数方面已取得显著进展[4], ，但其临界行为的本质仍未得到充分理解。副本对称性破缺（RSB） [5] 和液滴图像 [6],等相互竞争的理论为冻结相变提供了不同描述，但要使这些理论的预测与数值及实验特征相吻合，仍面临挑战 [7]。

理解自旋玻璃临界性的一种可能途径，是超越传统序参量来刻画其性质。谱方法，尤其是基于随机矩阵理论（RMT）的方法，已成为揭示复杂系统中普适统计性质的有力工具，应用范围涵盖从量子混沌到高维无序材料 [8–10]。在统计物理学中，RMT 已捕捉到安德森金属-绝缘体转变 [11]和渗流模型[12, 13], 等系统中的临界特征；近期研究还表明，具有局域与非局域相互作用的二维伊辛模型在临界性处呈现出鲜明的谱特征 [14]。然而，RMT 揭示自旋玻璃性质的潜力仍未得到充分探索。不同于早期基于自旋/场构造的矩阵 [14], ，我们对三维EA自旋玻璃采用基于重叠的矩阵系综，从而能够追踪体谱在临界区域内的变化。鉴于支配自旋玻璃相的关联错综复杂，这种方法有望成为探测无序存在时临界性与涨落的有效手段。

三维临界性的特征能够在低维子系统上留下稳健的印记。例如，在有序磁体中，三维伊辛模型的二维截面会在体相居里温度 [16, 17], 处呈现渗流转变，而界面粗糙度在临界性下会随系统尺寸发散 [18, 19]。将系统降至二维颇具吸引力，因为这样可以运用大量强大的分析和计算工具，包括随机矩阵理论、共形场论（CFT）以及随机罗纳演化（SLE） [16]。

在此，我们利用这种维度约化来探索自旋玻璃的物理：从三维EA自旋玻璃的二维切片构造重叠矩阵，并分析其谱统计。随着关联逐渐形成、临界性开始显现，我们识别并刻画其温度依赖性，从而无需直接计算多副本关联函数，便能获得一种以随机矩阵理论为基础的自旋玻璃转变特征 [20]。具体而言，我们探究从高温区一直到临界温度以下的谱统计；对于较小的系统，还会略微低于临界温度 $T_c = 1/\beta_c$。虽然在无限温度下，谱性质预计遵循标准随机矩阵理论，但我们研究无序和受挫性如何随着温度变化而塑造谱。需要强调的是，下文分析的重叠矩阵并非量子哈密顿量，其特征值也不是能级；它是一个由截面上的副本间重叠构造的经典对象，而谱分析则被用作关联和临界涨落的统计指纹。

我们发现，谱密度从极高温下的维格纳半圆定律，逐渐过渡到接近临界性时的近高斯形式。值得注意的是，中间温度下的体谱密度可以很好地用 q-高斯分布描述，其中 Tsallis参数 q 从 $q \to -1$ （半圆

分布）演变为临界时的 $q = 1$ （高斯分布）。对于不同的无序分布（高斯分布或双峰分布），我们的发现都相似，这表明在到达临界点及临界点处，不同谱行为之间存在稳健且与细节无关的演变。这些发现确立了谱统计作为一种计算高效的框架，可用于研究自旋玻璃性质和临界性 [21]。将其作为无序系统中临界行为的通用指标，仍是未来值得探索的方向。

模型。——我们研究三维 Edwards-Anderson 伊辛自旋玻璃（EA），其由如下哈密顿量描述：

$$H = -\sum_{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle} J_{\mathbf{xy}} s_{\mathbf{x}} s_{\mathbf{y}} \tag{1}$$

其中 $s_{\mathbf{x}} = \pm 1$ 表示立方晶格上格点 $\mathbf{x} = (i, j, k)$ 处的伊辛自旋，而 $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ 表示最近邻对。耦合常数 $J_{\mathbf{xy}}$ 取自零均值、单位方差的高斯分布，或以相等概率取自双峰分布 $J_{\mathbf{xy}} = \pm J$ 。所有空间方向均采用周期性边界条件。

为分析谱性质，我们由三维 EA 模型的两个独立副本构造重叠矩阵。这些副本针对相同 无序实现和温度生成，但来自独立的蒙特卡罗运行。我们考虑各自自旋构型 $s_{ij}^{(1)}$ 与 $s_{ij}^{(2)}$ 在$k = L/2$ 处的二维截面，平面内格点为 (i, j)。在周期性边界条件与独立同分布的耦合常数下，无序分布（因而无序平均系综）是平移不变的，因此任意固定k 平面在统计上等价；选择 $k = L/2$ 因而只是一种约定。我们将重叠矩阵定义为 $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{M}' + \mathcal{M}'^{T}\right)$，其中局域自旋重叠由下式给出

$$\mathcal{M}'_{ij} = s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(2)}, \tag{2}$$

其中，$(\cdot)^T$ 表示矩阵转置。对矩阵 $\mathcal{M}$进行对称化，以确保其具有实谱。其非对角元素取值为 $\{\pm 1, 0\}$，而对角元素为± 1。为确保在极限 $T \to \infty$下与标准随机矩阵理论（RMT）一致，我们将 $\mathcal{M}$ 缩放$1/\sqrt{L}$ ，使体特征值落在区间$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$内。

为生成达到平衡的自旋玻璃构型，我们结合使用蒙特卡罗扫描、Houdayer 簇更新和并行回火（交换蒙特卡罗）移动，遵循 [22] 中详述的算法方法。我们使用针对具有高斯无序的短程模型所建立的能量–重叠一致性关系来验证平衡化，$[\langle e\rangle]_J = \beta([\langle q_l\rangle]_J - 1)$ [23]，其中 e 是每键能量，q_l 是定义为 $q_l = \frac{1}{N_b}\sum_{\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle} s_{\mathbf{x}}^{(1)} s_{\mathbf{y}}^{(1)} \cdot s_{\mathbf{x}}^{(2)} s_{\mathbf{y}}^{(2)}$ 的链路重叠，N_b 表示键总数。这里，$[\langle\cdot\rangle]_J$ 同时表示热平均和对无序实现的平均。平衡化的判据是：一致性关系两侧在统计不确定性范围内一致。我们的温度范围涵盖从 $\beta = 0.1$ （即 $T \gg T_c$）降至 $\beta \approx \beta_c$ 的区间。由于临界性附近存在严重的动力学减速 [24**?**], , 模拟在临界性附近仅限于较小的系统尺寸。对于不超过 $L = 22$ 的系统尺寸，我们将样本平衡化至临界温度；对于更大的系统尺寸，数据集会截取至达到平衡化信号时的最低温度。

体特征值的谱交叉。— 我们研究的核心对象是由不同温度下构造的重叠矩阵 $\mathcal{M}$ 系综所产生的特征值谱密度。在极高温下，矩阵元素近似相互独立且具有零均值，因此谱密度遵循维格纳半圆分布。随着 T 降低，关联开始显现，导致均值不再为零，从而使一个特征值脱离体区 [25]。由于我们关注的是体态特征值统计，因此在分析中排除了这一异常值。

图 1 展示了重叠矩阵 $\mathcal{M}$ 的归一化谱密度，该矩阵由三维 EA 模型在一系列温度下热平衡后的构型得到，并以 $\beta = 1/T$ （颜色标度）为参数。在高温（低 β）下，谱与维格纳半圆定律（绿色虚线）高度吻合，与标准随机矩阵理论一致。随着 β 增大，谱逐渐偏离半圆分布并趋近高斯形状，在临界点 $\beta_c \simeq 1.05$ （即 $T_c \simeq 0.952$；品红色虚线）处达到近乎完全吻合。插图重点展示了 T_c 处的吻合情况，证实了临界性处高斯统计的出现。

双峰随机耦合下也观察到类似的谱演化（见图 A1），进一步支持了这一现象的稳健性。两种无序类型中，高斯形式均与临界温度重合，这表明这种谱交叉是自旋玻璃临界性的稳健且对细节不敏感的指标。

为量化三维 EA 模型二维截面中的谱密度从维格纳半圆定律向高斯分布的交叉，我们计算了各温度下的经验谱密度 $P(\lambda)$ 与参考高斯分布 $P_{\mathrm{G}}(\lambda)$ 之间的库尔贝克–莱布勒（KL）散度（见图 2）：

$$D_{\mathrm{KL}}(P \,\|\, P_{\mathrm{G}}) = \int P(\lambda) \ln \frac{P(\lambda)}{P_{\mathrm{G}}(\lambda)}\, d\lambda. \tag{3}$$

由于 T_c 附近的谱密度呈现对称的钟形轮廓，关键差异体现在尾部的行为上。 D_{KL}中的对数加权会放大这些偏差，因此特别适合用于探测交叉。为避免过度依赖

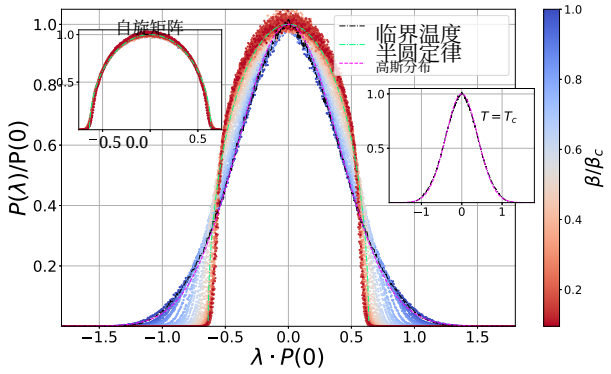

图 1. 重叠矩阵 $\mathcal{M}$ 的体区特征值的标度谱密度 $P(\lambda)/P(0)$，展示了系统尺寸 $L = 22$ 下不同温度的情况。沿两个坐标轴均按 $P(0)$ 重新缩放谱，以校正峰值高度和温度依赖的谱宽，从而能够直接比较不同温度下的形状。可以观察到，谱形从高温下的 Wigner 半圆律（绿色虚线）平滑交叉至临界点附近的高斯形式（洋红色虚线），临界点为 $\beta_c \simeq 1.05$（即 $T_c \simeq 0.952$；黑色虚线）。右侧插图显示，在 $\beta = \beta_c$ 时，谱形与高斯分布高度吻合。左侧插图：由单一副本构建的矩阵 $\mathcal{M}'^{s}_{ij} = s_{ij}$ 在所有 T 下均呈现半圆分布。

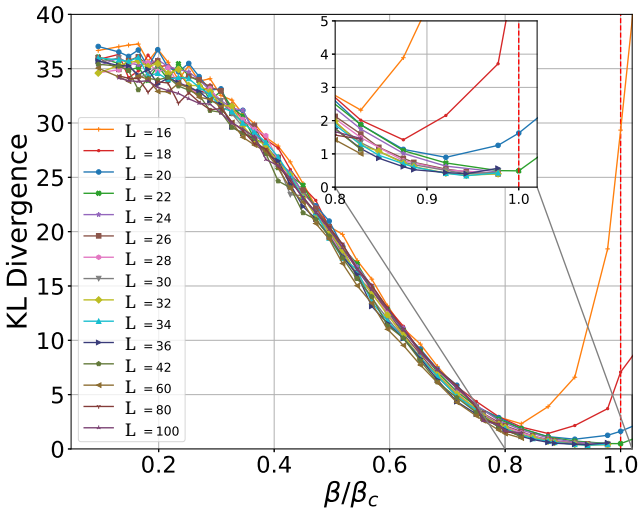

图 2. 对于系统尺寸从 $L = 16$ 到 $L = 100$（对于较大的 L，数据仅展示有限温度范围），数值获得的体谱与方差匹配高斯分布之间的 D_{KL} 的温度依赖性。当 $\beta/\beta_c \gtrsim 1$（红色竖直虚线）时，D_{KL} 随 L 减小并趋向于零，表明体谱密度收敛至高斯分布。

KL 敏感性对尾部的影响，我们还通过与方差匹配高斯分布的积分平方差 T_c 附近的高斯性，并考察超额峰度的变化趋势。 $D_{L^2} = \int [P(\lambda) - P_G(\lambda)]^2 \, d\lambda$

如图 2 所示， D_{KL} 在高温时最高，（$\beta \lesssim 0.3$），此时谱密度遵循维格纳半圆定律，并随 β 增大而逐渐降低。在临界点 $\beta_c \simeq 1.05$附近， D_{KL} 趋近于零，表明其为高斯分布，即P（λ） $\approx P_{\mathrm{G}}$（λ）。对于 $\beta > \beta_c$，有限尺寸效应变得更加显著： D_{KL} 随系统尺寸增大而系统性降低，表明体谱密度在 $\beta \gtrsim \beta_c$ 时仍接近高斯分布，并随 L 增大而愈发与高斯分布一致。我们注意到，双峰无序分布的行为大体相似（见图 A2）。

q-顺磁相中的高斯分布交叉。— 除了通过D_{KL}量化趋近高斯性的过程之外，我们还发现了一个能够定量刻画谱交叉的单参数分布族：我们观察到，体特征值分布可以由 q-高斯分布良好描述。这一分布族源于非广延统计力学框架 [26, 27]。 q-高斯形式已被广泛应用于涉及相关性、非马尔可夫性和约束系统的多种情境。对于 $q < 1$ （包括 $q = -1$处的半圆分布），它在紧支撑形状与 $q = 1$处的普通高斯分布之间进行插值；只有在 $q > 1$ [26, 27]时才会出现幂律（重）尾部。在我们的数据中，对于所研究的所有温度和尺寸，拟合值均满足 $q \leq 1$ ，即我们没有观察到幂律（重）尾部。

代表性温度下的体特征值分布通过经验拟合为 q-高斯形式（图 3 中的红色曲线）：

$$P(\lambda) = \frac{C_q}{\lambda_0} \left[1 - (1-q) \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}}, \qquad (4)$$

其中， C_q 是归一化常数， λ_0 是尺度参数。

通过最小化谱密度与 q-高斯分布之间的 KL散度，可获得各温度下最优的 q 值。图 4 展示了不同系统尺寸 L 下 q 对温度的依赖性。

因此，函数 $q(T)$ 有效地参数化了从高温下的半圆定律（$q = -1$）到临界性附近的高斯行为（$q = 1$）的交叉，以及这种行为在低于 T_c 时的持续性。图 4 的插图突出显示了 T_c 附近的区域，表明 q 在数值精度范围内达到 1。

讨论与结论。 我们的研究表明，由三维EA自旋玻璃模型的二维截面构造的重叠矩阵，其谱统计随温度降低而发生非平凡演化。远高于 T_c便出现 q-高斯分布谱统计，这表明即便顺磁相也可能蕴含内部结构。有必要区分系统中的两种无序来源：耦合常数的淬火随机性，以及热涨-

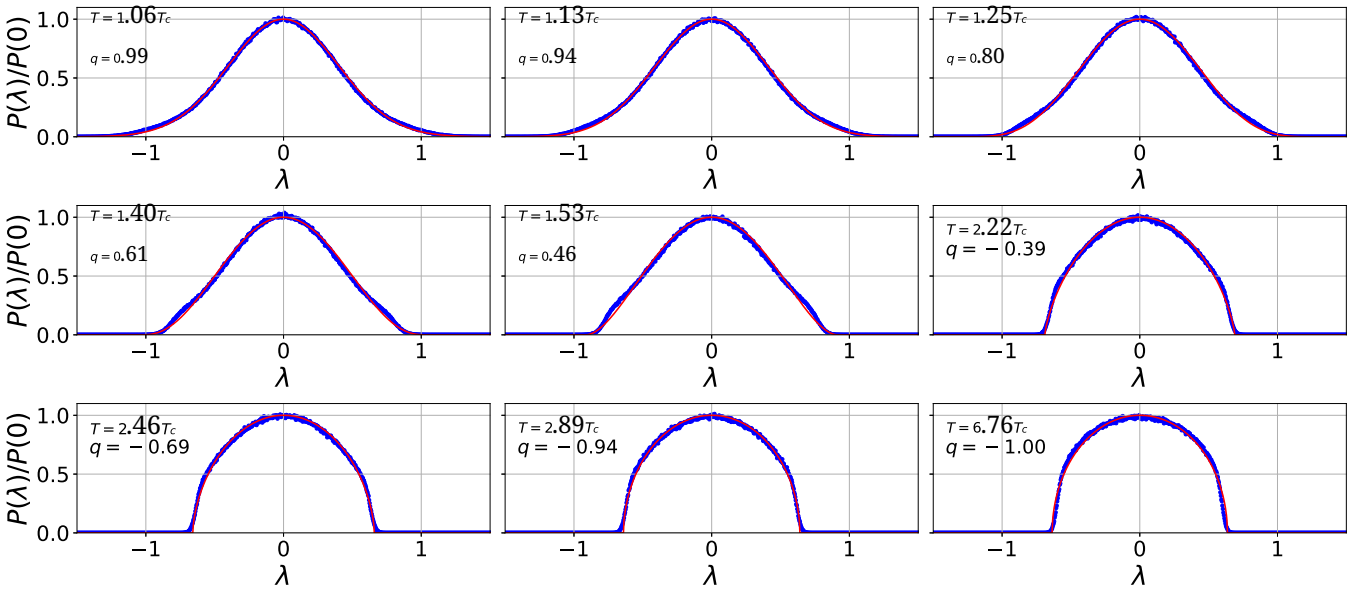

图 3. 系统尺寸为 $L = 36$ 时，在选定温度下的体特征值分布 $P(\lambda)$，并以 q-高斯形式 (4) 进行经验拟合（红色曲线）。高温下，谱密度接近维格纳半圆定律（$q = -1$），并在临界性 $T \approx T_c$（即 $\beta \approx \beta_c$）处平滑地交叉转变为高斯分布（$q = 1$）。

单一副本内自旋构型的涨落。我们的数值测试证实，直接由单一副本的自旋构型构造的矩阵，通过指定

$$\mathcal{M}'^{s}_{ij} = s_{ij} \ , \tag{5}$$

并按上述方式进行对称化和重新缩放后，得到的谱密度在所有温度下都遵循半圆定律

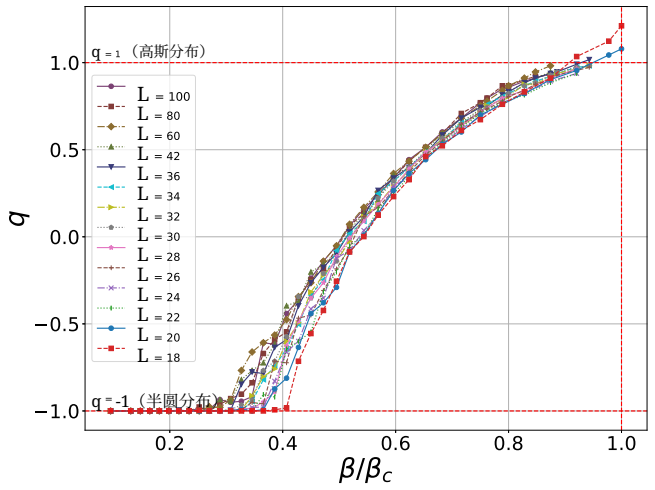

图 4. Tsallis熵指数q的温度依赖性：通过最小化经验谱密度与 q-高斯拟合（公式 4）之间的 KL散度得出，系统尺寸从 $L = 18$ 到 $L = 100$。对于较大的系统，曲线开始偏离半圆分布值 $q = -1$ 时对应的温度 β 逐渐降低。

（见图 1 左侧插图）。相比之下，谱形变具体出现在两个副本之间的重叠中，这表明相关结构并非编码在单个构型中，而是存在于它们的副本间关联中。

在各种复杂系统中，q-高斯分布与长程关联、记忆效应以及相空间中的层级结构 [26, 28]相关联。在此背景下，观测到的谱交叉可能反映了关联涨落的逐步累积，甚至可能发生在热力学临界性出现之前。

需要强调的是，与随机矩阵理论中受普适定律支配的能级间距分布等微观本征值统计不同，全局谱密度 [29]是非普适量，因此对底层关联的细节十分敏感。尤其是，即便矩阵元之间的两点关联相对较弱，也可能显著改变全局谱的形状，同时基本不影响局域本征值统计。

我们通过计算相邻间隙比 $r = \langle \min(\Delta_i,\ \Delta_{i+1})/\max(\Delta_i,\ \Delta_{i+1}) \rangle$对此进行了明确检验，其中 $\Delta_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ 表示体区内连续的本征值间隙：在统计精度范围内，它显示出明显的能级排斥；在所研究的温度范围内没有系统性的温度依赖性；并且随着 L增大，逐渐趋近于 GOE 的参考值（见附录 B 和图 B1）。这种未发生变化的类 GOE 局部关联与强烈依赖温度的全局态密度之间的分离，使我们的现象区别于 Rosenzweig–Porter 型情形 [30]，，后者强调的是局部谱统计和特征向量结构的

交叉，而不是全局体态密度的变形。

因此，观察到的谱密度变形，自然伴随着重叠场 $\mathcal{M}'_{ij}$（式 2）中两点关联的出现。经验上，整体谱呈现出一种简单规律，与无序分布的具体细节无关（高斯分布或双峰），其形式为单参数 q-高斯插值，其中 q 在临界性附近从 -1 （半圆）演化至 1（高斯分布）。

从更广泛的背景来看，我们的发现与近期关于无序多体系统谱行为的研究见解相符。文献 [31] 表明，在“低熵”区域——即自由参数的有效数量相对于希尔伯特空间维数较小时——集体涨落可能占据主导，使谱边缘相较于完全混沌（“高熵”）情形更为平缓。我们的机制虽有所不同，但理念相近：在非自平均窗口 $\beta \gtrsim \beta_c$ 中，系综谱 $P(\lambda) = \mathbb{E}_J[P(\lambda|J)]$ 对许多无序样本取平均；这些样本各自的谱相对狭窄，但其质心和宽度在无序实现之间剧烈涨落 J，这反映了临界性附近切片上空间重叠场在不同样本间存在较大差异。当样本间的位移主导样本内（热）展宽时，无序平均实际上相当于将许多略有偏移的窄谱叠加起来；在广泛且标准的混合条件下，这会使最终的体区趋于平滑的高斯分布——但这并不意味着任何单个样本具有“低熵”。从这个意义上说，T_c 处体区趋近高斯分布，被视为混合／平均在系综层面上的经验结果，并不预设低温自旋玻璃相的任何特定情景（例如液滴理论或复制对称性破缺）。单副本自旋矩阵没有出现类似的变形，这进一步表明该效应源于重叠中的副本间关联。

我们的结果直接表明，即使在顺磁相中，复杂的构型组织及关联的演化也会体现在全局谱观测量层面。因此，EA自旋玻璃理论面临的一项重要挑战，是定量解释结构丰富的副本重叠谱及其温度依赖性。原则上，这种方法也可应用于其他经典自旋模型（例如三维伊辛模型和波茨模型）。通过利用等时 关联函数构造类似的矩阵，该方法也可推广至量子临界系统（此时关注的是关联指纹，而非能级谱）。

致谢—本研究由德国研究联合会（DFG）资助，项目编号 557852701（A.A.S.）。我们感谢 Alex Altland、John Chalker 和 Shivaji Sondhi 的有益讨论。本研究还部分获得了德国研究联合会通过研究组 FOR 5522（项目编号 499180199）和卓越集群 ct.qmat（EXC 2147，项目编号 390858490）的资助。

数据可用性——支持本文研究结果的数据可公开获取 [32]。

* 通讯作者：asaberi@constructor.university

[1] M. M´ezard、G. Parisi 和 M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*（World Scientific, 1987）。[2] K. H. Fischer 和 J. A. Hertz, *Spin Glasses*（剑桥大学出版社，1993）。[3] S. F. Edwards 和 P. W. Anderson, 《J. Phys. F: Met. Phys.》5，965（1975）。[4] H. G. Katzgraber、M. K¨orner 和 A. P. Young, 《物理评论B》73，224432（2006）。[5] G. Parisi, 《物理评论快报》50，1946（1983）。[6] D. S. Fisher 和 D. A. Huse, 《物理评论快报》56，1601（1986）。[7] M. A. Moore, 《物理评论E》103，062111（2021）。[8] M. L. Mehta, *Random Matrices*，第2版（Academic Press，1991）。[9] T. Guhr、A. M¨uller-Groeling 和 H. A. Weidenm¨uller, 《Phys. Rep.》299，189（1998）。[10] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*（普林斯顿大学出版社，2010）。[11] F. Evers 和 A. D. Mirlin, 《Rev. Mod. Phys.》80，1355（2008）。[12] S. Saber 和 A. A. Saberi, 《物理评论E》105，L022102（2022）。[13] A. Malekan、S. Saber 和 A. A. Saberi, 《Chaos》32，023112（2022）。[14] A. A. Saberi、S. Saber 和 R. Moessner, 《物理评论B》110，L180102（2024）。[15] H. Dashti-Naserabadi 和 M. N. Najafi, 《物理评论E》91，052145（2015）。[16] A. A. Saberi 和 H. Dashti-Naserabadi, 《EPL (Europhys. Lett.)》92，67005（2010）。[17] J. J. Arenzon、L. F. Cugliandolo 和 M. Picco, 《物理评论E》91，032142（2015）。[18] H. Dashti-Naserabadi、A. A. Saberi、S. H. E. Rahbari 和 H. Park, 《物理评论E》100，060101（2019）。[19] E. Rodr´ıguez-Fern´andez、S. N. Santalla、M. Castro 和 R. Cuerno, 《J. Stat. Mech.: Theory Exp.》2025 (1)，013215。[20] C. W. J. Beenakker, 《Rev. Mod. Phys.》69，731（1997）。[21]“计算高效”具体指平衡化之后在两个方面的效率：（i）每个样本的成本和内存——对一个 $L \times L$实对称矩阵进行一次稠密特征值分解（采用标准稠密三对角化/QR 分解或分而治之算法时需要$O(L^3)$次浮点运算）；（ii）每个样本可得到 L 个体区特征值，因此在分箱固定时，谱直方图（以及 DKL 或 q-拟合）的均方根误差按$[L\,N\text{samp}]^{-1/2}$缩放，即达到精度 ε需要 $N\text{samp} = O(1/(L\varepsilon^2))$。与标准方法一样，平衡化是主要成本，并且需要 $L \to \infty$ 有限尺寸标度。[22] Z. Zhu、A. J. Ochoa 和 H. G. Katzgraber, 《物理评论快报》115，077201（2015）。[23] H. G. Katzgraber、M. Palassini 和 A. P. Young, 《物理评论B》63，184422（2001）。

[24] T. Nakamura, 《物理评论E》**99**，023301（2019）。[25] 对于均值为 μ/L、方差为 σ^2/L的大型 $L \times L$ 实对称随机矩阵，当均值超过无序尺度时，一个特征值会脱离 Wigner 半圆律，即 $|\mu| > \sigma$ [**?**]。在此情形下，最大特征值收敛到 $\lambda_{\max} \approx |\mu| + \sigma^2/|\mu|$。这一结果已推广到具有绝对可求和（即相关范围足够短）相关性的矩阵，其中离群特征值呈现高斯分布涨落 [**?**]。

[26] C . Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World* 2009 （施普林格，）。

[27] C. Tsallis, 《巴西物理学杂志》**39**，337（2009）。[28] G. Wilk 和 Z. W-lodarczyk, 《物理评论快报》**84**，2770（2000）。[29] 这指的是通过汇集不同无序实现中的体特征值以及蒙特卡洛样本，所获得的经无序和热系综平均的体区密度。[30] N. Rosenzweig 和 C. E. Porter, 《物理评论》**120**，1698（1960）。[31] A. Altland、K. W. Kim、T. Micklitz、M. Rezaei、J. Sonner 和 J. J. M. Verbaarschot, 《物理评论研究》**6**，033286（2024）。[32] Y. Onder, 10.5281/zenodo.18391567（2026）。

补充材料

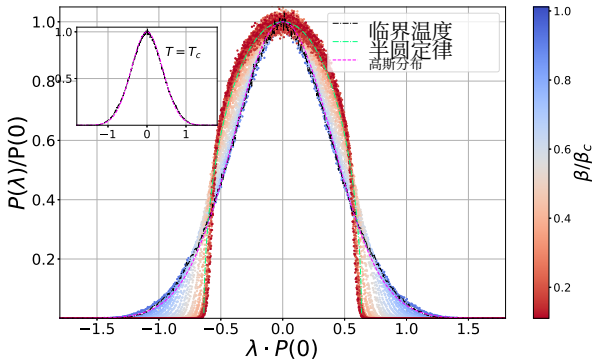

图 A1. 三维 EA 模型的重叠矩阵 $\mathcal{M}$在耦合常数为$\pm J$ 、系统尺寸为 $L = 24$ 时，不同温度 $\beta = 1/T$下体区特征值的标度谱密度 $P(\lambda)/P(0)$。可以观察到，该谱密度从高温 T下的 Wigner 半圆律（绿色虚线）平滑交叉为临界点 $\beta_c \approx 0.9075$（即 $T_c \approx 1.102$）附近的高斯形式（洋红色虚线）。插图：在 $\beta = \beta_c$时，体区谱密度在统计不确定性范围内与高斯分布吻合。

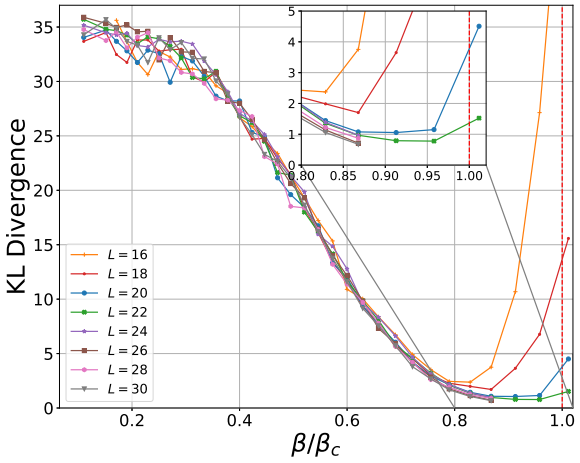

图 A2. 对于 $\pm J$ 模型，展示系统尺寸为 $L = 16$–30 时，经验体谱密度 $P(\lambda)$ 与方差匹配高斯分布 $P_G(\lambda)$ 之间的 Kullback–Leibler 散度 $D_{KL}(P \parallel P_G)$ 的温度依赖性。对于 $\beta \gtrsim \beta_c \approx 0.9075$ （红色竖直虚线）， D_{KL} 随着 L 系统性地减小并趋近于零，这表明在热力学极限下，体谱密度收敛至高斯分布。插图：临界性附近的放大图突显了 D_{KL} 随着 $\beta/\beta_c \to 1$ 趋近于零。

附录 A：双峰无序（$\pm J$）。为检验结果对无序类型选择的稳健性，我们针对三维 Edwards–Anderson 模型（ $J_{\mathbf{xy}} = \pm 1$，等概率）重复了分析，采用与正文相同的模拟和谱分析流程。附录图 A1 展示了随温度变化的缩放体谱密度 $P(\lambda)/P(0)$，对应$L = 24$： 与高斯无序情形一样，谱从高 T 时的 Wigner 半圆律平滑交叉为临界点附近的高斯分布。定量而言，在 $\beta = \beta_c \approx 0.9075$ （即 $T_c \approx 1.102$）时与高斯分布的吻合度最高，此时体密度在统计不确定性范围内与高斯分布一致。附录图 A2 给出了 L的经验体谱与方差匹配高斯分布之间的 Kullback–Leibler 散度 $D_{KL}($ $P \parallel P_G)$

$= 16$–30. 对于 $\beta \gtrsim \beta_c$， D_{KL} 随着 L 系统性地减小并趋近于零，这表明在热力学极限下，体谱密度收敛于高斯分布。

综上，图 A1–A2 表明，从半圆分布到高斯分布的交叉，以及临界性处与高斯分布的吻合，均不受耦合常数服从高斯分布还是双峰分布的影响，这凸显了所观察到的谱学现象不依赖于无序的具体形式。

附录 B：相邻间隙比。为补充正文中的全局密度分析，我们还通过相邻间隙比考察了局部谱相关性

$$r = \left\langle \frac{\min(\Delta_i, \Delta_{i+1})}{\max(\Delta_i, \Delta_{i+1})} \right\rangle, \tag{B1}$$

其中， $\{\lambda_i\}$ 是按升序排列的体特征值， $\Delta_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ 是连续间隙（在体区计算，不包括异常值）。附录图 B1

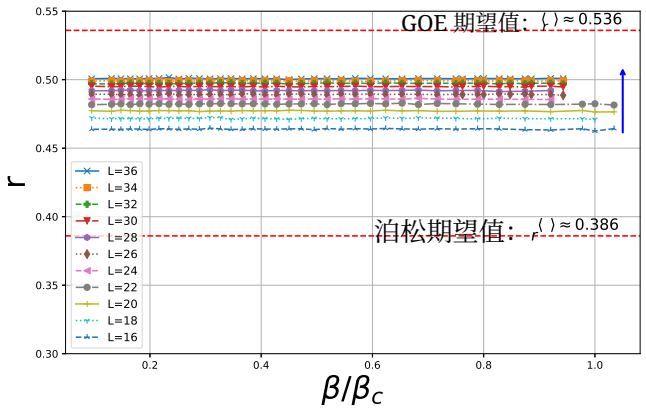

图 B1. 体区中的平均相邻能级间隙比随 β/β_c 变化的关系，展示了若干种系统尺寸 L。在图示范围内，这些数值基本不受温度影响。箭头表示 L 增大：随着 L 增长，该比值逐渐上升至 GOE 基准值（上方虚线），同时仍与泊松极限（下方虚线）明显区分。

展示了多个系统尺寸下的 r 与 β/β_c 关系。在统计精度范围内， r 在所研究的温度范围内没有显示出系统性的温度依赖性。随着L增加， r 向上漂移，预计将收敛于 GOE 基准值 $\langle r\rangle \simeq 0.536$，并始终与泊松值 $\langle r\rangle \simeq 0.386$ 保持明显分离。这支持这样一种观点：温度主要重塑全局谱密度，而局域能级排斥仍保持 GOE 式特征。