arXiv:2603.03516v1 [math.CA] 3 Mar 2026

非凸函数的凸截断与拟凸截断

CORNEL PINTEA

摘要。我们研究一类非凸实值函数，其截断从某一层级开始为拟凸函数，甚至是凸函数。例如，C^2-光滑函数中，从某一层级开始，其所有水平集都完全包含在海森矩阵的正定区域内的函数，便是这类函数的典型例子。对于这类函数，我们证明，其限制梯度在海森矩阵正定区域的一个大子集上具有单射性。

1. 引言

受平方距离函数乘积这一例子的启发，我们在此研究一类非凸函数：其下水平集从某一层级开始变为凸集，并评估它们偏离（拟）凸性的程度。对于C^2-光滑函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，其海森矩阵为正定的区域 $\mathrm{Hess}^+(f)$在我们的研究中发挥着重要作用。事实上，对于补集有界的函数，其水平集从某一层级开始全部包含于 $\mathrm{Hess}^+(f)$，这使得相应的下水平集均为凸集，尽管函数f 甚至可能不是拟凸的。在这方面，我们定义并研究可能非（拟）凸函数f的最小拟凸性水平$\mathrm{sql}(f)$与最小凸性水平$\mathrm{scl}(f)$之间的关系；对于该函数，从某个q值开始，其截断$T_q(f)=\max\{q,f\}$均为（拟）凸函数。这些值不无道理地体现了函数偏离（拟）凸性的程度。其值

$$h_{\max}(f):=\max\left(f|_{\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{Hess}^+(f)}\right)\ \text{and}\ \nu_{\max}:=\max\left(f|_{C(f)}\right)$$

只要临界集 $C(f)$ 和 $\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{Hess}^+(f)$ 有界，它们就在这些关系中发挥重要作用。

本文的组织结构如下：第二节定义函数的截断，以及截断（拟）凸函数。对于后两类函数，我们分别定义截断凸函数的最小凸性水平和截断拟凸函数的最小拟凸性水平。我们还在此观察截断凸函数的这两个量之间的首批关系。第三节首先观察包含关系 $f^{-1}(h_{\max}(f)+\infty)\subseteq\mathrm{Hess}^+(f)$，以及不等式 $h_{\max}(f)\geq\nu_{\max}(f)$；这里的函数 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 C^2光滑的，且 $\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{Hess}^+(f)$ 有界。若 f 的临界集也有界，则本节还证明截断凸性，并给出不等式 $\mathrm{sql}(f)\leq\mathrm{scl}(f)\leq\max\{\mathrm{sql}(f),h_{\max}(f)\}$。本节最后给出两个推论，并举例说明两个平方函数的乘积，其最小凸性水平等于其最小拟凸性水平，而这两个水平又都等于相应的 $h_{\max}$-值。第四节还证明了受限梯度 ∇f 在集合 $f^{-1}(\mathrm{scl}(f)+\infty)$ 上的单射性，其中 f 是 C^2光滑的截断凸函数，且

作者感谢欧盟通过罗马尼亚国家复苏与韧性计划及下一代欧盟资助的项目“奇点及其应用” - CF132/31.07.2023 提供支持，并感谢 CNRS-INSMI-IEA-329 资助。

$f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty) \subseteq \mathrm{Hess}^{+}(f)$。最后一节探讨若干开放问题，并给出一些观察和评论。

2. 凸截断与拟凸截断

在聚焦于本文的主要结果之前，我们先对引言中提及的值作几点说明。我们还将陈述并证明一些预备结果，其中一些将在后文中用到。

定义 2.1. 函数 $\mathrm{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 的截断是一个形如 $\mathrm{T}_q(\mathrm{f}): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数，$\mathrm{T}_q(\mathrm{f})(\mathrm{x}) = \max\{\mathrm{q}, \mathrm{f}(\mathrm{x})\}$，其中 $\mathrm{q} \in \mathbb{R}$。若且唯若次水平集 $\mathrm{f}^{-1}((-\infty, \mathrm{r}]), \mathrm{r} \geq \mathrm{q}$ 均为凸集，截断 $\mathrm{T}_q(\mathrm{f})$ 才是拟凸的。如果存在这样的水平 $\mathrm{q} \geq \inf \mathrm{f}$，则称 f 为截断拟凸。这样的最小水平 $\mathrm{q} \geq \inf \mathrm{f}$ 称为 f 的最小拟凸性水平，记作 $\mathrm{sql}(\mathrm{f})$。若存在一个水平 $\mathrm{q} \geq \inf \mathrm{f}$，使得当 $\mathrm{r} \geq \mathrm{q}$ 时，截断 $\mathrm{T}_r(\mathrm{f})$ 均为凸函数，则称 f 为截断凸。这样的最小水平 $\mathrm{q} \geq \inf \mathrm{f}$ 称为 f 的最小凸性水平，记作 $\mathrm{scl}(\mathrm{f})$。尽管名称如此，最小（拟）凸性水平只有在附加某些假设时才可能取得。其精确的形式化定义如下：

$\mathrm{sql}(f) = \inf\{q \mid q \geq \inf f$和 $T_r(f)$ 对于 $r \geq q\}$ 是拟凸的，当且仅当 f 是截断拟凸 nvex
$\mathrm{scl}(f) = \inf\{q \mid q \geq \inf f$和 $T_r(f)$ 对于 $r \geq q\}$ 是凸的，当且仅当 f 是截断凸

注意，截断凸性蕴含截断拟凸性。

例 2.1. 凸函数 f 的最小凸性和（拟）凸性水平为：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is $\mathrm{scl}(f) = \mathrm{sql}(f) = \inf(f)$，但这个下确界可能无法达到。例如，非恒定线性泛函 f 的最小（拟）凸性水平为：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is $\mathrm{scl}(f) = \mathrm{sql}(f) = -\infty$，而函数 $E(x) = e^{x_1+\cdots+x^n}$ 的最小（拟）凸性水平为 $\mathrm{scl}(E)=\mathrm{sql}(E)=0$，但 f 和 E 均未达到相应水平。

注 2.1. (1) 每一个有上界的函数 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 都是截断凸的，并且 $\mathrm{scl}(f) \leq \sup(f)$，因为对每一个 $q \geq \sup(f)$，截断 $T_q(f)$ 都是常值函数 q，显然是凸的。因此，有意义的截断凸函数f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是那些满足 $\sup(f) = +\infty$ 的函数。

(2) 由于凸性蕴含拟凸性，因此可得

$$\mathrm{scl}(f) \geq \mathrm{sql}(f) \geq \inf(f).$$

或者，我们注意到不等式 $\mathrm{scl}(f) < \mathrm{sql}(f)$ 不成立，因为对 $q > \mathrm{scl}(f)$，$f^{-1}(-\infty,q]$ 是凸的，并且存在某个 $q' < \mathrm{sql}(f)$ 使得 $f^{-1}(-\infty,q']$ 不是凸的。

(3) 若 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是有下界的凸函数，则 $\mathrm{scl}(f) = \mathrm{sql}(f) = \inf f$。

(4) 若$f, g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$是截断拟凸函数，则 $\max\{f,g\}$ 也是截断拟凸函数，并且 $\mathrm{sql}(\max\{f,g\}) \leq \max\{\mathrm{sql}(f),\mathrm{sql}(g)\}$。事实上，对于

$$r \geq \max\{\mathrm{sql}(f), \mathrm{sql}(g)\}$$

我们有

$$\begin{aligned}\max\{f,g\}^{-1}((-\infty,r]) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max\{f(x),g(x)\} \leq r\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r \text{ and } g(x) \leq r\}\\ &= f^{-1}((-\infty,r]) \cap g^{-1}((-\infty,r]),\end{aligned}$$

它是两个凸集的交集，因此是凸的。

(5) 截断凸下半连续函数 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 的最小拟凸性水平在 f 范数强制时达到，即

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

若f此外还是凸的，则 $\mathrm{scl}(f) = \min f$，而 $\min f < \mathrm{scl}(f) < +\infty$ 否则。(6) 若f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个C^2-光滑函数，使得 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 有界，则 $\sup(f) = +\infty$ 是f上方无界，且$f^{-1}(h_{\max}(f)\ +\infty) \subseteq \mathrm{Hess}^+(f)$，其中

$$\mathrm{Hess}^+(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid H_f(x) \text{ is positive definite }\}$$

and

$$h_{\max}(f) := \max\left(f\big|_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{Hess}^+(f)}\right).$$

事实上，否则$f^{-1}(q) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)\right) \neq \emptyset$ 对某个$q > h_{\max}(f)$。若$x \in f^{-1}(q) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)\right)$，即$f(x) = q$ 且$x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$，则

$$q = f(x) \le h_{\max}(f) = \max\left(f\big|_{\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{Hess}^+(f)}\right) < q,$$

这是荒谬的。

(7) 若f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个C^2-光滑截断凸函数，则

$$f^{-1}(\mathrm{scl}(f), +\infty) \subseteq \mathrm{Hess}_0^+(f), \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{Hess}_0^+(f)$ 表示集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid H_f(x) \text{ is positive semi-definite }\}$$

并且 $\mathrm{H}f(\mathrm{x})$ 是 f 在 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ 处的海森矩阵。事实上，对于每个 $\mathrm{x} \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f}) +\infty)$，都存在一个开球 $\mathrm{B}_x \subseteq \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f}) +\infty)$，使得限制 $\mathrm{f}\big|_{B_x}$ 是凸的，因为 $\mathrm{f}\big|_{B_x} = \mathrm{T}_{\mathrm{scl}(\mathrm{f})}(\mathrm{f})\big|_{B_x}$ 且 $\mathrm{T}_{\mathrm{scl}(\mathrm{f})}(\mathrm{f})$ 是凸的。因此，海森矩阵 $\mathrm{H}f(\mathrm{y})$ 在每个点 $\mathrm{y} \in \mathrm{B}_x$ 处都是半正定的。所以，对于每个 $\mathrm{x} \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f}) +\infty)$，都有 $\mathrm{B}_x \subseteq \mathrm{Hess}_0^+(\mathrm{f})$，包含关系 (2.1) 易得。

(8) 若f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 不是拟凸函数，而是截断拟凸的，那么 $\mathrm{sql}(f)$ 在某种程度上衡量了函数偏离拟凸性的程度。事实上，对于每个$\varepsilon > 0$，都存在$y_\varepsilon \in (\mathrm{sql}(f) - \varepsilon, \mathrm{sql}(f))$，使得次水平集$f^{-1}(-\infty, y_\varepsilon]$不是凸集，而 $\mathrm{sql}(f)$ 是满足这一性质的最小值。

(9) 若 $\mathrm{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 不是凸函数，而是截断凸的 C^2-光滑函数，那么 $\mathrm{scl}(\mathrm{f})$ 在某种程度上衡量了函数偏离凸性的程度。事实上，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 $\mathrm{z}_\varepsilon \in (\mathrm{scl}(\mathrm{f}), \mathrm{scl}(\mathrm{f}) + \varepsilon)$，使得 f 在（凸）次水平集 $\mathrm{f}^{-1}(-\infty, \mathrm{z}_\varepsilon]$ 上的限制不是凸的，而 $\mathrm{scl}(\mathrm{f})$ 是满足这一性质的 f 的最小值。当然，f 在某个次水平集 $\mathrm{f}^{-1}(-\infty, \mathrm{scl}(\mathrm{f}) + \varepsilon)$ 上的限制具有凸性，由 [6, 定理 4.3.1(i)], 可知，这意味着 f 的海森矩阵 $\mathrm{H}f$ 在该开次水平集上处处半正定。根据第 (7) 项，f 的海森矩阵在集合 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f}) +\infty)$上正定。因此，$\mathrm{H}f$处处半正半定；由 [6, 定理 4.3.1(i)] 再次可知，f 全局凸，这与初始假设矛盾。

命题 2.1。 如果 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是截断凸且下半连续的，那么 $T_{\mathrm{scl}}(f)$ 是凸的。

引理 2.1。 如果 (r_n) 是一个序列，使得 $r_n \searrow \mathrm{scl}(f)$ 当 $n \longrightarrow \infty$ 时，则

$$\mathrm{cl}\left(\mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f))\right) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f))\right). \tag{2.2}$$

证明。 我们首先观察到

$$\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f)) \subseteq \mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f)),$$

如 $Tr_1(f) \geq Tr_2(f) \geq \cdots \geq Tr_n(f) \geq \cdots \geq T_{\mathrm{scl}(f)}(f)$，因此

$$\mathrm{epi}(T_{r_1}(f)) \subseteq \mathrm{epi}(T_{r_2}(f)) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{epi}(T_{r_n}(f)) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f)). \tag{2.3}$$

Thus

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f))\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f))\right). \tag{2.4}$$

由于 $\mathrm{epi}(Tr_1(f)), \mathrm{epi}(Tr_2(f)) \ldots, \mathrm{epi}(Tr_n(f)) \ldots$ 均为凸集，且

$$\mathrm{epi}(T_{r_1}(f)) \subseteq \mathrm{epi}(T_{r_2}(f)) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{epi}(T_{r_n}(f)) \subseteq \cdots \subseteq,$$

由此可知

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f))\right)$$

也为凸集。对于反向包含关系，我们首先证明

$$\mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f)) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f))\right), \tag{2.5}$$

这证明了相反的包含关系。为此，我们考虑 $(x, y) \in$ 上图$(\mathrm{T_{scl(}f)(\,f\,))}$, 即 $y \geq \mathrm{T_{scl(}f)(\,f\,)(x)} = \max\{\mathrm{f\,(x)}, \mathrm{scl(\,f\,)}\}$。如果 $\mathrm{T_{scl(}f)(\,f\,)(x)} = \mathrm{f\,(x)} > \mathrm{scl(\,f\,)}$ 或 $y > \mathrm{T_{scl(}f)(\,f\,)(x)} = \mathrm{scl(\,f\,)} \geq \mathrm{f\,(x)}$, 那么存在 $\mathrm{n_0} \geq 1$，使得对于每个 $\mathrm{n} \geq \mathrm{n_0},$，都有 $y \geq r_n$，其中 $r_n \searrow \mathrm{scl(\,f\,)} \leq \mathrm{T_{scl(}f)(\,f\,))(x)}$。因此，对于每个 $\mathrm{n} \geq \mathrm{n_0},$，都有 $y \geq \max\{\mathrm{f\,(x)}, r_n\} = \mathrm{T}_{r_n}\mathrm{(\,f\,)(x)}$，即 $(x, y) \in$ 上图$(\mathrm{T}_{r_n}\mathrm{(\,f\,))}$，这表明

$$(x,y) \in \bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f)) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f))\right).$$

如果 $y = T_{\mathrm{scl}(f)}(f)(x) = \mathrm{scl}(f) \geq f(x)$，那么

$$(x, r_n) \in \mathrm{epi}(T_{r_n}(f)) \subseteq \bigcup \mathrm{epi}(T_{r_n}(f)),\ \forall n \geq 1,$$

这表明（x，y）$=$极限$_{n\to\infty}$（x，r_n）$\in \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}^{n\geq 1}$上图（$T_{r_n}$（$f$））$\right)$。 □

命题的证明 *2.1*。 我们只需利用其下半连续性

$$T_{\mathrm{scl}(f)}(f) = \max\{f, \mathrm{scl}(f)\}$$

即 char 征由上图($T_{\mathrm{scl}(f)}(f)$) 的闭性刻画。因此，$T_{\mathrm{scl}(f)}(f)$ 是凸的，因为

$$\mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f)) = \mathrm{cl}\left(\mathrm{epi}(T_{\mathrm{scl}(f)}(f))\right) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\geq 1}\mathrm{epi}(T_{r_n}(f))\right).$$

是凸的。 □

命题 2.2. 若 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^1 光滑的截断凸函数，使得 $\mathrm{scl}(f) \in \mathrm{Im}(f)$ 是 f 的正则值，则 $\mathrm{scl}(f)$ 被达到，并且

$$\partial T_{\mathrm{scl}(f)}(f)(x) = \{(\nabla f)_x\},\ \forall x \in f^{-1}(\mathrm{scl(f)}, +\infty) \tag{2.6}$$

$$\partial T_{\mathrm{scl(f)}}(x) = \{t(\nabla f)_x \mid t \in [0,1]\},\ \forall x \in f^{-1}(\mathrm{scl}(f)), \tag{2.7}$$

其中 $\partial T_{\mathrm{scl}(f)}(f)(x) := \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid T_{\mathrm{scl}(f)}(f)(y) \geq T_{\mathrm{scl}(f)}(f)(x) + \langle y - x, x^*\rangle,\ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ 是 f 在 x 处的次微分。

证明。 最小凸性水平 $\mathrm{scl}(f)$ 确实可经由命题 2.1达到。等式 (2.6)、(2.7) 可由有限族函数最大值的次微分这一熟知结果得出（参见例如 [5,推论 4.3.2，第 266]页）

$$\partial T_{\mathrm{scl(f)}}(x) = \partial \max\{f, \mathrm{scl}(f)\}(x) = \mathrm{conv}\{(\partial f)(x), (\partial T_{\mathrm{scl(f))(x)}}\} = \mathrm{conv}\{(\nabla f)(x), 0\},$$

对于所有满足 $\in$ 的 f，都有 $T_{\mathrm{scl}(f)}(f)(x) = f(x)^{-1}(\mathrm{scl(f)} + \infty)$。 □

3. 截断凸性所需的 Hess^+ 区域

承接引言中的讨论，我们现在将给出涉及值集 sql、scl 以及 $h_{\max}$ 和 $\nu_{\max}$ 的若干关系。对拟凸函数附加假设，要求其临界集和 Hess^+ 区域的补集均有界，这可以确保该函数具有截断凸性。

命题 3.1. 若 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是范数强制的 C^2-光滑函数，且 $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{Hess}^+(f)$ 和 $C(f)$ 有界，则 $h_{\max}(f) \geq \nu_{\max}(f)$，其中

$$\nu_{\max}(f) = \max\left(f|_{C(f)}\right).$$

证明。 由于 f 的临界集 $C(f)$ 也是闭集，结合其有界性可知，$C(f)$ 是紧集。此外，$\mathrm{Hess}^+(f)$ 是一个开集，这可由 Sylvester 判据得出。由于

$$C(f) = [\mathrm{Hess}^+(f) \cap C(f)] \cup [(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)) \cap C(f)],$$

只需证明，不等式成立时，$h_{\max}(f) \geq \sup f|_{\mathrm{Hess}^+(f)\cap C(f)}$

$$h_{\max}(f) \geq \max f|_{[(\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{Hess}^+(f)) \cap C(f)]}$$

显然。对此，我们首先注意到，$\mathrm{Hess}^+(f) \cap C(f)$由零指标的莫尔斯临界点组成，也就是说，这些临界点全都是局部极小值，且每个都是孤立局部极小临界点。根据莫尔斯引理，f 在每个莫尔斯临界点附近的局部行为由外围空间的平方范数给出。包含这些点的相应下水平集的连通分支与外围空间中的微分同胚球同胚，而相应水平集的连通分支则与微分同胚球面同胚。现在我们假设

$$\sup f|_{\mathrm{Hess}^+(f)\cap C(f)} > h_{\max}(f) = \max\left(f|_{\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{Hess}^+(f)}\right) \tag{3.1}$$

并考虑满足 f (p) $=\max f|_{C(f)}$ 的 p $\in$C。注意到 p $\in$Hess^{+}(f) $\cap$C(f)，因为在假设 (3.1) 下，$\max f|_{C(f)}$ 不可能在 $[\mathbb{R}^n \setminus \text{Hess}^{+}(f)] \cap C(f)$ 上取得，因此

$$f(p) = \sup f|_{\text{Hess}^{+}(f)\cap C(f)} = \max f|_{\text{Hess}^{+}(f)\cap C(f)}.$$

考虑包含 p 的适当次水平集 f $^{-1}(-\infty, q]$, 的一个连通分支 B。当 q $>$f (p) 足够接近 f (p) 时，B 是一个微分同胚球，其边界 S 是 f^{-1}(q) 的一个连通分支，也是一个微分同胚球面。由于 cl B 的补集连通，且 f 具有范数强制性，只需考虑一条路径 γ: $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \text{cl B}$，使得 f ($\gamma$(0)) $<$f (p) 且 f (γ(1)) $>$q，即可证明水平集 f^{-1}(q) 不连通。由于 (f (p) $+\infty$) 是一个由正则值构成的区间，根据非临界颈原理 [8,p.194], , f 中所有大于 f (q) 的水平集都不连通，这与定理 3.7] 矛盾。□

定理 3.1。 设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2-光滑的截断拟凸函数。若 $C(f)$ 和$\mathbb{R}^n \setminus \text{Hess}^{+}(f)$ 均有界，则 f 是截断凸的，并且满足以下不等式$\text{sql}(f) \leq \text{scl}(f) \leq \max\{\text{sql}(f), h_{\max}(f)\}$。

证明。 左侧不等式由注释 2.1(2) 得到证明。我们将证明，当 $T_q(f)$ 在 $q > \max\{\text{sql}(f), h_{\max}(f)\}$ 时为凸函数，这就保证了不等式

$$\text{scl}(f) \leq \max\{\text{sql}(f), h_{\max}(f)\}.$$

对此，我们首先回顾一下，对于每个 $r \geq q$，$f^{-1}((-\infty, r])$ 都是凸的，因为 f 是截断拟凸函数，且 $q > \text{sql}(f)$，并证明其限制

$$T_q^{x,y}(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ T_q^{x,y}(f)(t) = T_q(f)((1-t)x+ty) = \max\{q, f((1-t)x+ty)\}$$

是一个凸函数，其中 $q > \max\{\text{sql}(f),\ h_{\max}(f)\}$ 且对每个 $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ 均成立。事实上，若整条线段 $[xy] = \{(1-t)x+ty\}$ 包含于 $f^{-1}(q\ +\infty)$，则

$$T_q(f)((1-t)x+ty) = f((1-t)x+ty)$$

对每个$t \in [0,1]$。因此$T_{x\ y}{}_q(f)$是二阶可微的，并且

$$\frac{d^2}{dt^2} T_q(f)((1-t)x+ty) = (y-x)H_f((1-t)x+ty)(y-x)^T > 0,\ \forall t \in [0,1],$$

由于 [xy] $\subset$Hess^{+}(f)，并且Hf((1 $-$ t)x $+$ ty)对每个t $\in$ [0,1]都是正定的。因此，在这种情况下，Tq(f)((1 $-$ t)x $+$ ty) $\leq$(1 $-$ t)Tq(f)(x) $+$ tTq(f)(y)。现在我们考虑 [xy] $\cap$ f $^{-1}(-\infty, q] \neq$/0的情形，并注意到这些凸集的交集是一条线段，记为[xy] $\cap$ f $^{-1}(-\infty, q] \neq \emptyset =$ [ab]。若a $=$x且b $=$y，则 x,y $\in$f $^{-1}(-\infty, q]$ 且q $=$Tq(f)(a) $=$Tq(f)(b) $=$Tq(f)((1 $-$ t)a $+$ tb) $=$(1 $-$ t)Tq(f)(a) $+$ tTq(f)(b)对所有q $\in$ [0,1]成立。若x $=$a $\in$f $^{-1}(-\infty, q]$ 且y $\in$f $^{-1}$(q $+\infty$)，则

$$T_q^{x,y}(f)(t) = \begin{cases} q & \text{if } t \in [0, t_b] \\ f((1-t)x+ty) & \text{if } t \in [t_b, 1], \end{cases}$$

其中 $t_b \in$(0,1) 满足 $b =(1-t_b)x + t_b y$，则 $T_{x\ y}{}_q(f)$ 是凸的，因为 $T_{x\ y}{}_q(f)$ 是常值（凸）函数 q 与凸函数 $C_q^{x\ y},(f)$ 的最大值：$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$C_q^{x,y}(f)(s) = \begin{cases} q + \langle(\nabla f)_b, y-x\rangle(s-t_b) & \text{if } s \in [0, t_b] \\ f((1-s)x+sy) & \text{if } s \in [t_b, 1]. \end{cases}$$

表示式 $\mathrm{T\,x\ yq\,(f)} = \max\{\mathrm{q}, C_q^{x,y}, (\mathrm{f})\}$ 成立，因为 $\langle(\nabla \mathrm{f})_b, \mathrm{y} - \mathrm{x}\rangle \geq 0$。事实上，梯度向量 $(\nabla \mathrm{f})_b$ 是凸集的法向量，即次水平集 $\mathrm{S\,f\,(b)} = \mathrm{f}^{-1}(-\infty, \mathrm{f\,(b)}]$，它经过点 $\mathrm{b} = (1-\mathrm{t}_b)\mathrm{x} + \mathrm{t}_b\mathrm{y}$；实际上，该向量生成了 $\mathrm{S\,f\,(b)}$ 在点 $\mathrm{b} = (1-\mathrm{t}_b)\mathrm{x} + \mathrm{t}_b\mathrm{y}$ 处的法锥（参见 [6, 定理 1.3.5，第 245] 页）。换言之，我们有

$$\begin{aligned}\langle(\nabla f)_b, x-b\rangle \leq 0 &\Leftrightarrow \langle(\nabla f)_{(1-t_b)x+t_by}, x-(1-t_b)x-t_by\rangle \leq 0\\ &\Leftrightarrow \langle(\nabla f)_{(1-t_b)x+t_by}, t_b(x-y)\rangle \leq 0\\ &\Leftrightarrow \langle(\nabla f)_{(1-t_b)x+t_by}, y-x\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

如果 $x, y \in f^{-1}(q + \infty)$，但仍有 $[xy] \cap f^{-1}(-\infty, q] \neq \emptyset = [ab],$，那么

$$T_q^{x,y}(f)(t) = \begin{cases} f((1-t)x+ty) & \text{if } t \in [0, t_a] \\ q & \text{if } t \in [t_a, t_b] \\ f((1-t)x+ty) & \text{if } t \in [t_b, 1], \end{cases}$$

其中 $t_a, t_b \in [0,1]$, $t_a \leq t_b$ 满足条件：$a = (1-t_a)x + t_a y$，且 $b = (1-t_b)x + t_b y$。注意，在特例 $a = b \Leftrightarrow t_a = t_b$ 中

$$T_q^{x,y}(f)(t) = T_q^{x,y}(f)(t) = \begin{cases} f((1-t)x+ty) & \text{if } t \in [0, t_a] \\ q & \text{if } t = t_a = t_b \\ f((1-t)x+ty) & \text{if } t \in [t_b, 1], \end{cases} = f((1-t)x+ty),\ \forall t \in [0,1].$$

因此，$T_{x\ yq}(f)$ 在此特例下是二阶可微且凸的，因为 $[0, t_a) \cup (t_a, 1] \subset \mathrm{Hess}^+(f)$，因此

$$\frac{d^2}{dt^2} T_q(f)((1-t)x+ty) = (y-x) H_f((1-t)x+ty)(y-x)^T \geq 0,\ \forall t \in [0,1].$$

如果 $t_a < t_b$，那么 $T_{x\ yq}(f)$ 仍然是凸的，因为 $T_q^{x\,y,}(f)$ 是常数（凸）函数 q 与凸函数 $K_q^{x\,y,}(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 的最大值；$C_q^{x\,y,}(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$K_q^{x,y}(f)(s) = \begin{cases} f((1-s)x+sy) & \text{if } s \in [0, t_a] \\ q + \langle(\nabla f)_a, y-x\rangle(s-t_a) & \text{if } s \in [t_a, 1] \end{cases}$$

$$C_q^{x,y}(f)(s) = \begin{cases} q + \langle(\nabla f)_b, y-x\rangle(s-t_b) & \text{if } s \in [0, t_b] \\ f((1-s)x+sy) & \text{if } s \in [t_b, 1]. \end{cases}$$

表示式 $\mathrm{T\,x\ yq\,(f)} = \max\{\mathrm{K}_q^{x\,y,}(\mathrm{f}), \mathrm{q}, \mathrm{C}_q^{x\,y,}(\mathrm{f})\}$ 成立，因为 $\langle(\nabla \mathrm{f})_a, \mathrm{y} - \mathrm{x}\rangle \leq 0$ 且 $\langle(\nabla \mathrm{f})_b, \mathrm{y} - \mathrm{x}\rangle \geq 0$。虽然最后一个不等式此前已得到证明，但对于第一个不等式，我们注意到梯度向量 $(\nabla \mathrm{f})_a$ 是凸集次水平集 $\mathrm{S\,f\,(a)} = \mathrm{f}^{-1}(-\infty, \mathrm{f\,(a)}] = \mathrm{f}^{-1}(-\infty, \mathrm{q}]$ 在点 $\mathrm{a} = (1-\mathrm{t}_a)\mathrm{x} + \mathrm{t}_a\mathrm{y}$ 处的法向量，因为它实际上生成了 $\mathrm{S\,f\,(a)}$ 在点 $\mathrm{a} = (1-\mathrm{t}_a)\mathrm{x} + \mathrm{t}_a\mathrm{y}$ 处的法锥（例如参见 [6, 定理 1.3.5，第 245] 页）。换句话说，我们有

$$\begin{aligned}\left\langle (\nabla f)_a, \left(1 - \frac{t_a+t_b}{2}\right)x + \frac{t_a+t_b}{2}y - a \right\rangle \leq 0 &\Leftrightarrow \left\langle (\nabla f)_a, \frac{t_a-t_b}{2}x + \frac{t_b-t_a}{2}y \right\rangle \leq 0.\\ &\Leftrightarrow \frac{t_b-t_a}{2}\langle(\nabla f)_a, y-x\rangle \leq 0\\ &\Leftrightarrow \langle(\nabla f)_a, y-x\rangle \leq 0.\end{aligned}$$

□

推论 3.1. 设 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2-光滑的截断凸函数，且 $\sup(f) = +\infty$。若 $\mathrm{sql}(f) \geq h_{\max}(f)$，则 $\mathrm{sql}(f) = \mathrm{scl}(f) = h_{\max}(f)$。

然而，当次水平集的凸性受其对应水平集的曲率控制时，起作用的是相反的不等式 $\mathrm{sql}(f) \leq h_{\max}(f)$。事实上，我们有如下结论：

推论 3.2. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是范数强制的 C^2-光滑函数，其中 $n \in \{2,3\}$。若 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 和 $C(f)$ 有界，则 f 是截断凸的，且 $\mathrm{scl}(f) \leq h_{\max}(f)$。

证明。由 [1, 定理 3.7] 可知，在 $n = 2$ 的情况下，f 是截断拟凸的；在 $n = 3$的情况下，则由 [10, 定理 3.4] 的证明可知。事实上，这些证明表明，当 $q > \max\left(f|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)}\right) = h_{\max}(f)$ 时，$f^{-1}(q)$ 是一条规则的凸曲线/曲面，即 $\mathrm{sql}(f) \leq h_{\max}(f)$。不等式 $\mathrm{scl}(f) \leq h_{\max}(f)$ 可由命题 3.1 得出，因为 $\mathrm{scl}(f) \leq \max\{h_{\max}(f), \mathrm{sql}(f)\} = h_{\max}(f)$ follows from. □

例 3.1. $\mathrm{sql}(f_a) = \mathrm{scl}(f_a) = h_{\max}(f_a) = 3a^4$, 其中

$$f_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f_a(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2).$$

注意，$f_a = d^2_{(a,0)} \cdot d^2_{(-a,0)} - a^4$, f_a 的临界集为 $C(f_a) = \{(-a,0), (0,0), (a,0)\}$，且 f_a 的临界零水平集是伯努利双纽线，其中 $d_{(\alpha,\beta)}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 由 $d_{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ 定义。其余非空水平集即所谓的卡西尼卵形线。此外，$(-a,0), (a,0)$ 是 f_a 的全局极小值，且 $\min f_a = f_a(\pm a, 0) = -a^4$。事实上，$f_a$ 是莫尔斯函数，$(-a,0), (a,0)$ 是零指标临界点，而 $(0,0)$ 是唯一的指标一临界点。初等计算 [11] 表明

$$\mathrm{Hess}^+(f_a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3(x^2+y^2)^2 + 2a^2(x^2-y^2) > a^4\} = g^{-1}_{\frac{a}{\sqrt{3}}}\left(\frac{a^4}{3}, +\infty\right),$$

其中

$$g_b : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f_a(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 2b^2(x^2-y^2).$$

$\mathrm{Hess}^+(f_a)$ 的边界是紧致连通光滑正则曲线

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3(x^2+y^2)^2 + 2a^2(x^2-y^2) = a^4\} = g^{-1}_{\frac{a}{\sqrt{3}}}\left(\frac{a^4}{3}\right)$$

且开集 $\mathrm{Hess}^+(f_a)$ 是以下集合的无界连通分支

$$\mathbb{R}^2 \setminus \partial \mathrm{Hess}^+(f_a) = \mathbb{R}^2 \setminus g^{-1}_{\frac{a}{\sqrt{3}}}\left(\frac{a^4}{3}\right),$$

因此它是非凸的。利用拉格朗日乘子法，可以很容易看出

$$\max(f|_{\partial \mathrm{Hess}^+(f_a)}) = 3a^4.$$

因此 $\max(f|_{\partial \mathrm{Hess}^+(f_a)}) > 0 = v_{\max}(f_a) = \max(f_a|_{C(f_a)})$，这表明 t

$$h_{\max}(f_a) = \max\{f_a(x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Hess}^+(f_a)\} = \max\left\{f_a(x) \mid x \in g^{-1}_{\frac{a}{\sqrt{3}}}\left(-\infty, \frac{a^4}{3}\right]\right\} = 3a^4.$$

由于具有正则边界（即对应的正则水平集）的连通次水平集的凸性由对应正则水平集的曲率符号决定，

也就是

$$\begin{vmatrix} (f_a)_{xx} & (f_a)_{xy} & (f_a)_x \\ (f_a)_{yx} & (f_a)_{yy} & (f_a)_y \\ (f_a)_x & (f_a)_y & 0 \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

它等于 $3(x^2+y^2)^2-c$，二者仅相差一个乘性常数。为了选取凸次水平集，可以对函数 $(x^2+y^2)^2$在约束 $f_a^{-1}(c)$ 下应用拉格朗日乘子法。初等计算表明，水平集 $f^{-1}a(c)$（卡西尼卵形线）是正则且非空的，并且其曲率不改变符号，当且仅当 $c \in (-a^4,0) \cup [3a^4,+\infty)$。我们需要排除次水平集 $f^{-1}a(-\infty, c]$ 及其边界 $f^{-1}a(c)$，其中 $c \in (-a^4,0)$，因为它们不连通。另一方面，f_a的正则值 $3a^4$ 是使次水平集 $f^{-1}a(-\infty, 3a^4]$ 成为紧致凸集的第一个值；该集合的边界是连通的卡西尼卵形线 $f_a^{-1}(3a^4)$，它是一条连通的凸正则曲线。因此，根据推论 3.1，$sql(f_a) = 3a^4$ 且 $sql(f_a) = scl(f_a) = h_{max}(f_a) = 3a^4$,。

4. 梯度在大型上水平集上的单射性

本节采用 Gale-Nikaidˆo 的全局单射性准则 [3]，该准则保证 $F: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 的全局单射性，其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸开集，且其 Frˆechet 微分 $(dF)_x$ 在 $x \in D$处正定，即

$$\langle (dF)_x(y), y\rangle > 0,\ \forall x \in D,\ y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{4.1}$$

对于光滑函数 $F := \nabla f$ 的梯度，其中 C^2-光滑函数 f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$，条件（4.1）就是海森矩阵正定 H^f，其中 f。

注 4.1。设 f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2-光滑函数，满足 $\mathbb{R}^n = \mathrm{Hess}^+(f)$，即 $H^f(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$均为正定。则 f 是严格凸函数，且其梯度 ∇f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射。

虽然 Gale-Nikaidô 判据的证明使用了函数 D 的定义域F的凸性，但 $\mathrm{Hess}^+(f)$ 区域可能是非凸的，因此 ∇f在 $\mathrm{Hess}^+(f)$ 上的限制可能不是单射。梯度 ∇f在稍小集合上的限制是单射的。

定理 4.1. 设 f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2-光滑的截断凸函数，使得 $\mathrm{scl}(f) \in \mathrm{Im}(f)$ 是 f 的正则值，且 $f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty) \subseteq \mathrm{Hess}^+(f)$。那么其限制

$$\nabla f\big|_{f^{-1}(\mathrm{scl}(f),+\infty)} : f^{-1}(\mathrm{scl}(f),+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

是单射。

Proof. 我们首先注意到 $T_{\mathrm{scl}(f)}(f)$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续凸函数，且 d

$$T_{\mathrm{scl}(f)}(f)\big|_{f^{-1}[\mathrm{scl}(f),+\infty)} = f\big|_{f^{-1}[\mathrm{scl}(f),+\infty)},$$

这表明，对每个 $x \in \mathrm{dom}\, f$（即 scl(f)），都有 $T(f)(x) \subseteq \partial f(x)$。根据 Rockafellar 的定理 A，次微分算子 T(f) : ..... 是极大单调的。等价地，其逆算子 $T(f)^{-1}$ 也是极大单调的，且其原像 $T(f)^{-1}(y)$（$y \in$ .....）都是凸集（参见第.....页）。由于对每个 $x \in \mathrm{dom}\, f$（即 scl(f)），H(x) 都是正定的，因此 f 在 dom f（即 scl(f)）上是 CIP 函数，也就是说，对于 f 的定义域 dom f（即 scl(f)）中的每个凸子集 C，f 都是单射。事实上，海森矩阵 H(x) 的正定性等价于 Gale-Nikaido 条件

$$\langle (d\nabla f)_x(y), y\rangle > 0,\ \text{for all } y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

对梯度 ∇f 而言，该条件保证 ∇f 在每个凸集 $C \subseteq \operatorname{dom} f$（即 scl(f)）上都具有单射性。假设对于某个 x、$x' \in \operatorname{dom} f$（即 scl(f)），有 $\nabla f(x) = \nabla f(x')$，并注意到 $x \in (T(f))^{-1}(u)$，其中 u 表示 $\nabla f(x')$；这是因为对每个 $x \in \operatorname{dom} f$（即 scl(f)），都有 $T(f)(x) \subseteq \partial f(x)$。由于 f 在 $\operatorname{dom} f$（即 scl(f)）上是 CIP 函数，结合 $(T(f))^{-1}(u)$ 的凸性以及对每个 $x \in \operatorname{dom} f$（即 scl(f)），$T(f)(x) \subseteq \partial f(x)$，我们推得

$$[x_1x_2] \cap f^{-1}(-\infty, \operatorname{scl}(f)] \neq \emptyset \text{ and } [x_1x_2] \subseteq (\partial T_{\operatorname{scl}}(f))^{-1}(u), \tag{4.2}$$

其中 $[x_1x_2] := \{u_t := (1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\}$。我们还考虑闭开线段$[x_1x_2) := \{u_t := (1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1)\}$，以及 $[x_2x_1) := \{v_t := (1-t)x_2 + tx_1 \mid t \in [0,1)\}$，并观察到存在 $0 < \varepsilon < 1$ 使得

$$[x_1u_s),\ [x_2v_s) \subset f^{-1}(\operatorname{scl}(f), +\infty),\ \forall s \in [0, \varepsilon)$$

当$x_1, x_2 \in f^{-1}(\operatorname{scl}(f) + \infty)$ 和$f^{-1}(\operatorname{scl}(f) + \infty)$为开集时。这表明

$$(\partial T_{\operatorname{scl}}(f))(u_s) = \{(\nabla f)_{u_s}\},\ \forall s \in [0, \varepsilon)$$

$$(\partial T_{\operatorname{scl}}(f))(v_s) = \{(\nabla f)_{v_s}\},\ \forall s \in [0, \varepsilon).$$

利用4.2) 的第二个包含关系可得 $[x_1u_s), [x_2v_s) \subseteq [x_1x_2] \subseteq (\partial T_{\operatorname{scl}}(f))^{-1}(u)$，对所有$s \in [0, \varepsilon)$。这表明

$$u = (\nabla f)_{x_1} \in (\partial T_{\operatorname{scl}}(f))(u_s) = \{(\nabla f)_{u_s}\},\ \forall s \in [0, \varepsilon)$$

$$u = (\nabla f)_{x_2} \in (\partial T_{\operatorname{scl}}(f))(v_s) = \{(\nabla f)_{v_s}\},\ \forall s \in [0, \varepsilon)$$

并与 ∇f 在 x_1 和 x_2处的局部单射性相矛盾。 □

注 4.2。 设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2光滑截断凸函数。若 $\operatorname{sql}(f) \geq h_{\max}(f)$，则 $\operatorname{sql}(f) = \operatorname{scl}(f) = h_{\max}(f)$，根据推论 3.1，并且以下关系成立

$$f^{-1}(\operatorname{scl}(f), +\infty) = f^{-1}(h_{\max}(f), +\infty) \subseteq \operatorname{Hess}^+(f)$$

只要 $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Hess}^+(f)$ 有界。特别地，$f^{-1}(\operatorname{scl}(f_a) + \infty) \subseteq \operatorname{Hess}^+(f_a)$。因此可以进一步探讨，此类函数的单射域能否从 $f^{-1}(\operatorname{scl}(f) + \infty)$ 扩展到 $\operatorname{Hess}^+(f)$。显然，对于那些同时也是具有多个局部极小点（零指标临界点）的莫尔斯函数，此事并不成立，因为这些点都包含在 $\operatorname{Hess}^+(f)$ 中，且梯度在所有这些局部极小点处均为零。

注 4.3。设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^2光滑截断凸函数。那么，限制 $\nabla f \big| f^{-1}[\operatorname{scl}(f) + \infty) : f^{-1}[\operatorname{scl}(f) + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$是单调的，并且 $\langle (\nabla f)_x, x - y \rangle \geq 0$ 对每个 $x \in f^{-1}[\operatorname{scl}(f) + \infty)$ 以及每个 $y \in f^{-1}(-\infty, \operatorname{scl}(f))$ 都成立。事实上，根据命题 2.2，对于每个 $x \in f^{-1}[\operatorname{scl}(f) + \infty)$，都有 $(\nabla f)_x \in \partial T_{\operatorname{scl}}(f)$；显然，对于每个 $y \in f^{-1}(-\infty, \operatorname{scl}(f))$，都有 $\partial T_{\operatorname{scl}}(f) = \{0\}$。第一条结论可由凸函数 $T_{\operatorname{scl}}(f)$ 的次微分算子 $\partial T_{\operatorname{scl}}(f)$ 在 $f^{-1}[\operatorname{scl}(f) + \infty)$ 上的单调性得出；第二条则利用同一单调性，并取 $x \in f^{-1}[\operatorname{scl}(f) + \infty)$ 和 $y \in f^{-1}(-\infty, \operatorname{scl}(f))$ 得出。

例 4.1。 对于特定函数 $f_a\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$，$f_a(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$，上水平集 $f^{-1}{}_a(\operatorname{scl}(f_a) + \infty) = f^{-1}{}_a(3a^4, +\infty)$ 是满足限制为一一映射这一性质的最大集合

$$\nabla f_a \big|_{f_a^{-1}(3a^4, +\infty)} : f_a^{-1}(3a^4, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

。确实 f_a 满足定理 4.1 的假设，且 $\mathrm{scl}(f_a) = 3a^4$ 以及 $\min(f_a) = -a^4$。此外，对于 k, $c \in [-a^4, 3a^4)$，$k < c$很容易看出

$$\nabla f_a\left(\pm\frac{\sqrt{3a^4-c}}{2a}, \frac{\sqrt{c+a^4}}{2a}\right) = 4a(0, \sqrt{c+a^4}),$$

这表明，梯度 ∇f_a到更大上水平集$f^{-1}{}_a(k\ +\infty)$的限制，对于$k\ \in [-a^4, 3a^4)$不再是单射的，因为

$$f_a\left(\pm\frac{\sqrt{3a^4-c}}{2a}, \frac{\sqrt{c+a^4}}{2a}\right) = c > k, \text{ i.e. } \left(\pm\frac{\sqrt{3a^4-c}}{2a}, \frac{\sqrt{c+a^4}}{2a}\right) \in f_a^{-1}(k, +\infty).$$

注 4.4. 一个非凸 C^2-光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ，若具有多个满足定理 4.1 要求的临界点，则其全局单射性不成立，因为其梯度的重数至少为临界集 $C(f)$ （属于 f）的基数。事实上，梯度 ∇f在 $C(f)$ 上为零。回顾重数 $\mathrm{Val}(F)$ （对应于 $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ），如 [7], 中所定义，为

$$\mathrm{Val}(F) := \sup\{\mathrm{card}\ F^{-1}(y) : y \in \mathbb{R}^n\}.$$

5. 最后评述与开放问题

本节致力于与本工作相关的开放问题，其目的在于改进某些陈述，或去掉某些可能多余的假设。

我们只针对2.1(9) 为C^2-光滑函数论证了这一点。问题是，对于正则性较低的函数，例如C^1-光滑函数，甚至连续函数，这条评注是否仍然成立。

问题 5.1. $\mathrm{sql}(f)$ 是否按照评注 2.1(9) 的含义，衡量函数偏离拟凸性的程度？对于正则性较低的函数，例如C^1-光滑函数，甚至连续函数，情况是否也如此?

尽管我们在推论 $(f) \leq h_{\max}(f)$ 的证明中，针对满足3.2 的C^2-光滑函数 f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$ 且满足 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 和 $C(f)$ 有界的情形，证明了该不等式，但我们仍然关心反向不等式；这是推论 3.1对C^2-光滑截断凸函数提出的假设。

问题 5.2. 若 f : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 C^2-光滑的截断拟凸函数，且 C(f) 和$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 有界，那么研究不等式 sql(f) $\geq h_{\max}$(f) 将很有意义。根据定理 3.1，这个不等式将导出另一个等式，即 sql(f) $=$scl(f) $=h_{\max}$(f)。

在若干结论中，我们将与一个范数强制的 C^2 光滑函数 f相关的临界集 $C(f)$ 和$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 的有界性假设结合起来： $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$。然而，我们想知道，这些结论中的临界集有界性，甚至f 的范数强制性，是否都是多余的假设。

问题 5.3。 值得研究的是，对于与范数强制的C^2-光滑函数f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$相关联的$f$的补集$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+$有界，是否意味着$f$的临界集$C(f)$有界。能否也从假设中去掉范数强制性，仅凭补集 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$有界，就推出$C(f)$有界?

一方面，定理4.1 给出了函数的一个上水平集，作为其梯度的单射域；另一方面，例4.1表明，特定函数 f_a 的相应上水平集是其梯度具有单射性 ∇f_a的最大集合。

问题 5.4。 若要得出$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$满足定理 4.1的假设时，要使得 $f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty)$ 成为其梯度 ∇f 为单射的最大上水平集，确定函数所需的额外性质将很有意义。

如果从 $\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})$ 中去掉 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f})\ +\infty)$，那么从 $\nabla \mathrm{f}$ 的单射性角度来看，剩余部分仍可加以研究；但目前我们只能指出，$\nabla \mathrm{f}$ 在该部分上的限制，在 $\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})\setminus \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f})\ +\infty)$ 的每个凸子集上都是单射的。正如我们在定理 4.1 中所见，梯度 $\nabla \mathrm{f}$ 在 $\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})$ 的一个相当大的子集 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f})\ +\infty)$ 上是单射的。现在的问题是，对于满足定理 4.1 要求的 C^2- 光滑函数 $\mathrm{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$，$\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})$ 的其余部分会发生什么?

问题 5.5。 设$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个非凸C^2-光滑截断凸莫尔斯函数，且$C(f)$、$\mathbb{R}^m\setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 有界，并且 $\mathrm{scl}(f)\in \mathrm{Im}(f)$是$f$的正则值，同时$f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty)\subseteq \mathrm{Hess}^+(f)$。研究梯度 ∇f在 $\mathrm{Hess}^+(f)\setminus f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty)$ 的各个连通分支上的限制是否为单射，将会很有意思。

若问题5.5的答案为肯定，4.1 定理4.4结合注释将给出上界

$$\mathrm{card}\ \pi_0(\mathrm{Hess}^+(f)\setminus f^{-1}(\mathrm{scl}(f),+\infty))+1$$

关于限制梯度的重数 $\nabla f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)}$，其中 $\pi_0(X)$ 表示拓扑空间 X的所有连通分支的集合。换言之，若问题 5.5 的答案为肯定，则可得到下述关于 $\nabla f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)}$重数的上界

$$\mathrm{card}\ C(f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)})\leq \mathrm{Val}(\nabla f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)})\leq \mathrm{card}\ \pi_0(\mathrm{Hess}^+(f)\setminus f^{-1}(\mathrm{scl}(f),+\infty))+1, \quad (5.1)$$

而下界显而易见，且已在注 4.4 中提及。请注意，上述对限制在 $\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})$ 上的梯度重数的上界，基于这样一个观察：$\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})\setminus \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f})\ +\infty)$ 的每个连通分支至多包含 f 的一个临界点。对于 f_a，情况确实如此。然而，若问题 5.2 的答案是肯定的，则可得出结论：$\mathrm{Hess}^+(\mathrm{f})\setminus \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f})\ +\infty)$ 的连通分支 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{scl}(\mathrm{f})\ +\infty)$ 不包含 f 的任何临界点。因此，对问题 5.2 和 5.5 的肯定回答意味着

$$\mathrm{card}\ C(f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)})\leq \mathrm{card}\ \pi_0(\mathrm{Hess}^+(f)\setminus f^{-1}(\mathrm{scl}(f),+\infty)).$$

问题 5.6。设$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个非凸C^2光滑截断凸函数，且 $\mathrm{scl}(f)\in \mathrm{Im}(f)$ 是f的正则值，并且$f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty)\subseteq \mathrm{Hess}^+(f)$。是否有

$$\mathrm{Val}(\nabla f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)})=\mathrm{card}\ C(f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)})=\mathrm{card}\ \pi_0(\mathrm{Hess}^+(f)\setminus f^{-1}(\mathrm{scl}(f),+\infty))? \quad (5.2)$$

注 5.1. 限制 $f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)}$是一个莫尔斯函数，且仅有零指标（局部极小值）临界点。因此，$C(f\big|_{\mathrm{Hess}^+(f)})=C(f)\cap \mathrm{Hess}^+(f)$ 是一个离散集。关于值集 $\mathrm{Val}(\nabla f)$ 和 $\mathrm{card}\ C(f)$ 的类似问题，只有在整个临界集 $C(f)$ 为离散集时才有意义（例如，当 f是莫尔斯函数时）；否则，集合 $C(f)\cap(\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{Hess}^+(f))$ 可能是无限不可数的，因此在这种情况下，$\mathrm{Val}(\nabla f)$ 也无限不可数。

问题 5.7. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个非凸 C^2-光滑截断凸莫尔斯函数，满足 $\mathrm{scl}(f) \in \mathrm{Im}(f)$ 是 f 的正则值，且 $f^{-1}(\mathrm{scl}(f)\ +\infty) \subseteq \mathrm{Hess}^+(f)$。是否有

$$\mathrm{Val}(\nabla f) = \mathrm{card}\, C(f) = \mathrm{card}\, \pi_0(\mathrm{Hess}^+(f) \setminus f^{-1}(\mathrm{scl}(f), +\infty)) + 1? \tag{5.3}$$

对于函数 $f_a\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 的特殊情形，集合 $\mathrm{Hess}^+(f_a)$ 及其补集 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Hess}^+(f_a)$，以及 $f^{-1}a\ (\mathrm{scl}(f_a)\ +\infty)) = f^{-1}a\ (3a^4, +\infty)) = \mathrm{ext}\, f^{-1}a\ (3a^4)$，连同 $\mathrm{Hess}^+(f_a)$ 的分支 C_1，C_2，$\setminus f^{-1}a\ (\mathrm{scl}(f_a)\ +\infty)) = \mathrm{Hess}^+(f_a) \setminus f^{-1}a\ (3a^4, +\infty))$，如下面的图所示。因此，在 f_a 的特殊情形下，不等式 (5.1) 变为 $2 \le \mathrm{Val}(\nabla f|_{\mathrm{Hess}^+(f_a)}) \le 3$，因为 $C(f^a|_{\mathrm{Hess}^+(f_a)}) = \{(-a, 0), (a, 0)\}$。若 $\nabla f^a|_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Hess}^+(f_a)}$ 具有单射性，则还可得到以下界限 $3 \le \mathrm{Val}(\nabla f_a) \le 4$。注意，$\nabla f^a|_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Hess}^+(f_a)}$ 是一个局部微分同胚，因为它的雅可比矩阵，即 $f^a|_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Hess}^+(f_a)}$ 的海森矩阵，处处非奇异。

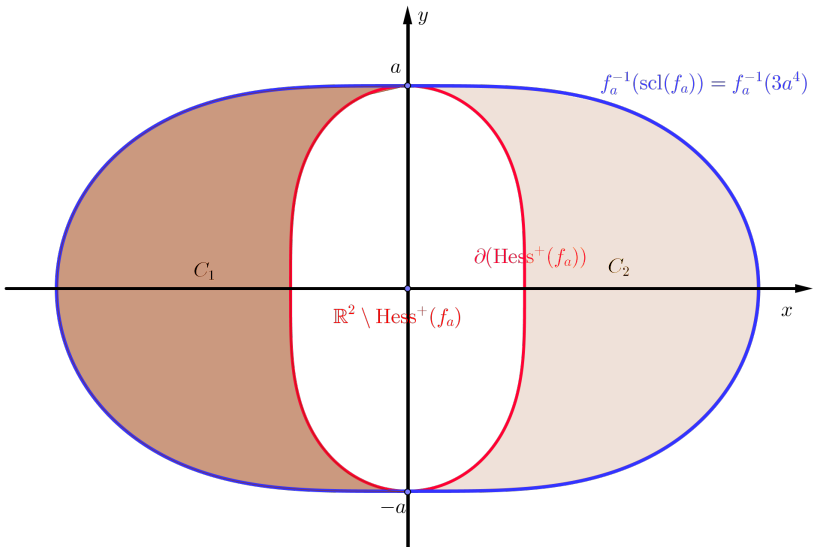


图 1。

另一方面，一旦考虑 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，它与 $\mathrm{Hess}^+(f)$ 及其补集 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f)$ 都有非空交集，那么 ∇f 的单射性失效程度就相当严重，正如我们将在 f_a 的具体情形中看到的那样。

我们考虑与函数 f_a 相关的以下 $\mathbb{R}^2$ 子集：

$$C^- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x < 0 \text{ and } -a^4 \le f_a(x,y) < 0\} \tag{5.4}$$

$$C^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0 \text{ and } -a^4 \le f_a(x,y) < 0\} \tag{5.5}$$

它们与 $\mathrm{Hess}^+(f_a)$ 及其补集 $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Hess}^+(f_a)$ 的交集均非空。

注 5.2。 这些限制 $f_a|_{C^\pm}$ 并非单射，函数 $\|\nabla f_a|_{C^\pm}\|^2(t,\ 0) = 16(t^6 - 2a^2t^4 + a^4t^2)$ 在区间 $[-a,\ 0)$ 和 $(0,\ a]$，上的变化即可说明这一点，其依据是一阶导数

$$\frac{d}{dt}(\|\nabla f_a|_{C^\pm}\|^2)(t,0))(t,0) = 32t(3t^4 - 4a^2t^2 + a^4),$$

因为区间 $\{(t,\ o)\ |\ t \in [-a,\ 0)\}$ 与限制 $f_a|_{C^-}$ 的所有水平集横截，且区间 $\{(t,\ o)\ |\ t \in (0,\ a]\}$ 与 $f_a|_{C^+}$ 的所有水平集横截。由于 ∇f_a 从不为零

在这些等值曲线上，除由单点极小值点 $(\pm a,\ 0)$ 构成的平凡水平集外，归一化梯度向量场

$$\frac{\nabla f_a}{\|\nabla f_a\|}$$

实现了每条非平凡等值曲线与圆S^1, 之间的微分同胚，而此类等值曲线在梯度 ∇f_a 作用下的像是一个包围原点的嵌入圆。固定$f_a\big|_{C^-}$ 的一条非平凡等值曲线 $\Gamma_k=(f_a\big|_{C^-})^{-1}(k)$, 其中 $k\in(-a^4,0)$，我们首先观察到

$$\max\|\nabla f_a\big|_{\Gamma_k}\|^2=16a^4(a^2+\sqrt{a^4+k}).$$

另一方面，$(-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+c}},0),(-\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+c}},0)\in\Gamma_c$并且通过适当选择$k\in(-a^4,0)$, 我们有

$$\|\nabla f_a\|^2(-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+c}},0))>\max\|\nabla f_a\big|_{\Gamma_k}\|^2$$
$$\|\nabla f_a\|^2(-\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+c}},0)<\min\|\nabla f_a\big|_{\Gamma_k}\|^2,$$

as

$$\|\nabla f_a\|^2(-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4+c}},0))=16a^4(a^2+\sqrt{a^4+c})\overset{as\ c\nearrow 0}{\longrightarrow}32a^6$$
$$\|\nabla f_a\|^2(-\sqrt{a^2-\sqrt{a^4+c}},0))=16a^4(a^2-\sqrt{a^4+c})\overset{as\ c\nearrow 0}{\longrightarrow}0.$$

这表明 $\Gamma_c\cap\Gamma_k$ 至少由两个点组成。类似地，可以证明 $\Gamma'_c\cap\Gamma'_k$至少由两个点组成，其中 $\Gamma'_k=(f_a\big|_{C^+})^{-1}(k)$，且 $k\in(-a^4,0)$。这些事实表明f_a 的重数至少为二。

命题 5.1. 集合 $C^\pm$ 是开凸集，且限制函数 $f_a\big|_{C^\pm}$ 是拟凸的。

证明。 利用$C_\pm$ 的如下表示可得其开性:

$$C_-=p_1^{-1}(-\infty,0)\cap f_a^{-1}(-\infty,0)\text{ and }C_+=p_1^{-1}(0,+\infty)\cap f_a^{-1}(-\infty,0),$$

通过连续函数 p_1 和 f_a，其中 $\mathrm{p}_1:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ 是到第一个因子的投影。回顾一下，根据 [11], 正则性，水平集 $\mathrm{f}_a^{-1}(\mathrm{c})$非空，且其曲率不变号当且仅当 $\mathrm{c}\in(-\mathrm{a}^4,0)\cup[3\mathrm{a}^4,+\infty)$。事实上，对于 $\mathrm{c}\in(-\mathrm{a}^4,0)$，每个次水平集 $\mathrm{f}^{-1}\mathrm{a}\ (-\infty,\mathrm{c}]$,都有两个紧连通分支 C_c^-、C_c^+，并由正则水平集 $\mathrm{f}_a^{-1}(\mathrm{c})$ 围成；该水平集是两条卡西尼卵形线的并集，其曲率均不变号。因此，根据 [2, 命题 1，第 397] 页，并结合 [4, 公式 3.7]，这些连通分支 $\mathrm{C}_c^\pm$ 均为凸集。这些凸分支可表示为

$$C_c^-:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x<0\text{ and }-a^4\le f_a(x,y)<c\}=(f_a\big|_{C^-})^{-1}(-\infty,c)$$
$$C_c^+:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x>0\text{ and }-a^4\le f_a(x,y)<c\}=(f_a\big|_{C^+})^{-1}(-\infty,c)$$

显然,

$$C^-:=\bigcup_{n=1}^{\infty}C^-_{-\frac{a^4}{n}},C^+:=\bigcup_{n=1}^{\infty}C^+_{-\frac{a^4}{n}}.\tag{5.6}$$

由于

$$(-a,0)=C^-_{-\frac{a^4}{1}}\subseteq C^-_{-\frac{a^4}{2}}\subseteq\cdots\text{ and }(a,0)=C^+_{-\frac{a^4}{1}}\subseteq C^+_{-\frac{a^4}{2}}\subseteq\cdots$$

根据表示式（5.6），可知$C_{\pm}$是凸集。次水平集$C_c^{\pm} = (f_a|_{C^{\pm}})^{-1}(-\infty, c)$的凸性表明$f_a|_{C^{\pm}}$是拟凸的。□

注 5.3. 限制$f_a|_{C^{\pm}}$不是凸的。事实上，通过研究函数$f_a|_{C^-}(t,0)$与$f_a|_{C^+}(t,0)$在区间$(-\sqrt{2}a,0)$和$(0,\sqrt{2}a)$上的变化，其中

$$f_a|_{C^{\pm}}(t,0) = t^4 - 2a^2t^2,$$

借助二阶导数$\frac{d^2}{dt^2}(f_a|_{C^{\pm}})(t,0)$，可以观察到$f_a|_{C^-}(t,0)$与$f_a|_{C^+}(t,0)$分别在$-a\sqrt{3}$和$a\sqrt{3}$处改变凸性。

参考文献

1. A. Brojbeanu与C. Pintea，具有有界黑塞$^+$补集的函数之积，Optimization（2025）。2. M. do Carmo，曲线与曲面的微分几何，第139卷，Prentice Hall，1976。3. D. Gale与H. Nikaidˆo，雅可比矩阵与映射的全局单值性，Math. Ann. **159**（1965），81–93。4. G. Goldman，隐式曲线与曲面的曲率公式，Comput. Aided Geom. Design **22**（2005），第2期，632–658。5. J.B. Hiriart-Urruty与C. Lemarechal，凸分析与最小化算法*I*：基础，Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag，纽约，1993。6.，凸分析基础，Grundlehren Text Editions，第139卷，Springer-Verlag，纽约，2001。7. G. Neumann，复值平面调和函数的重数，Trans. Amer. Math. Soc. **357**（2004），第8期，3133–3167。8. R.S. Palais与C.-L. Terng，临界点理论与子流形几何，第2版，数学讲义，第1353卷，Springer-Verlag，柏林，1988。9. R.R. Phelps，极大单调算子讲义，arXiv:math/9302209v1（1993）。10. C. Pintea，具有有界临界集与有界黑塞$^+$补集的函数的水平集，Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.**67**（2022），第2期，441–454。11. C. Pintea与A. Tofan，凸分解与某些函数的重数，J. Nonlinear Var. Anal. **4**（2020），第2期，225–239。12. R.T. Rockafellar，论次微分映射的极大，Pacific J. Math. **33**（1970），第1期，209–216。

巴贝什-博尧伊大学，数学与计算机科学学院，数学系，科格尔尼恰努街1号，邮编400084，克卢日-纳波卡，罗马尼亚，