非线性量子光学中的类霍金辐射

Isaac Bernal[1⋆]、Miguel A. Cortés-Ortiz[2†] 和 David Bermudez[2‡]

1 高等物理与数学学院，墨西哥国立理工学院，阿道夫·洛佩斯·马特奥斯专业学院，9号楼，萨卡滕科，07730墨西哥城，墨西哥**2** 物理系，Cinvestav，邮政信箱14-740，07000墨西哥城，墨西哥

⋆ ibernalr1900@alumno.ipn.mx， † miguel.cortes@cinvestav.mx，
‡ david.bermudez@cinvestav.mx

arXiv:2603.03525v1 [gr-qc] 3 Mar 2026

摘要

霍金效应可被理解为一种广泛存在的运动学现象，与视界附近的模态行为有关。天体物理黑洞会产生这种辐射的一种特定形式，而这一视角激发了大量理论与实验研究，旨在各类物理系统中创造事件视界，以观测由此产生的类霍金辐射。最成功的实现方式之一是基于非线性量子光学的光纤类比。在本讲义中，我们将介绍并阐释这一系统，同时概述引力类比背后的理论概念。最后，我们回顾关键实验，并探讨其对这一领域的影响。

版权归属作者。本文投稿至 SciPost 物理学讲义。许可信息将在发表后公布。出版信息将在发表后公布。

收稿日期 接收日期 发表日期

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**
2.1 黑星 2.2 黑洞 2.3 霍金辐射 2.4 最小 4
质量黑洞 2.5 跨普朗克问题 2.6 时空色 5
散玩具模型 2.7 类比引力范式 6
7
7
8
9

3 运动介质中的光 **10**
3.1 运动介质中的波动方程 3.2 场的量子化 3.3 10
光学类比中的霍金辐射 3.4 光纤情形中的霍金 12
辐射 3.5 多普勒效应到实验室参考系 13
15
17

4 光纤中的脉冲传播 **18**

4.1 脉冲动力学 184.2 色散 184.2.1 光纤模式 194.3 非线性 214.4 单向近似 23

5 非线性薛定谔方程的对称性2 4
5.1 非线性光学中的非线性薛定谔方程245.2 非线性薛定谔方程的拉格朗日形式255.3 守恒荷255.3.1 U(1)对称性255.3.2 空间对称性与线动量265.3.3 时间对称性与哈密顿量265.4 非线性薛定谔方程的哈密顿形式275.5 共动参考系中的非线性薛定谔方程285.5.1 共动频率28

6 类比系统霍金辐射的光纤实验时间线 30
6.1 2008年圣安德鲁斯实验306.2 重新审视2003 年帕维亚实验326.3 2012年赫瑞-瓦特与圣安德鲁斯实验336.4 2012年圣安德鲁斯实验346.5 2019 年魏茨曼实验356.6 2022 年墨西哥国立自治大学实验356.7 当前实验36

7 结论 36

参考文献 37

1 引言

20 世纪最成功的两大理论是量子理论 [1]——我们最根本的动力学框架——以及广义相对论 [2]——我们最成功的引力理论。然而，试图将二者统一为一种假想的量子引力理论 [3]仍未成功。尽管面临这一挑战，研究人员仍利用现有工具探索这些领域的交界处。在这种情况下，一种可靠的方法是弯曲时空量子场论（QFTCS） [4–6], 该理论将引力背景视为固定的经典背景——而非量子背景——并在此基础上分析测试量子场或探测量子场的行为。

尽管弯曲时空量子场论仍是一种近似理论，但它预言了若干由正频率和负频率模式混合而产生的新颖且出人意料的现象。例子包括宇宙学粒子产生（帕克效应 [7]）、加速度辐射（乌鲁效应 [8]）以及黑洞辐射（霍金效应 [9]）。本文聚焦于最后一种现象。

1974年，史蒂芬·霍金 [9] 将量子场论曲时空范式应用于黑洞，建立了经典黑洞背景与量子场相互作用的模型。在这些条件下，黑洞会发出热辐射，即现在所称的霍金辐射（HR），其温度为



图 1：声学类比系统的示意图。鱼代表声波。河流流动$v(x)$会随河床坡度的变化而改变。图片摘自 [18]。

定义为

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}, \tag{1}$$

其中，k_B 为玻尔兹曼常数，$\hbar h$ 为约化普朗克常数，c 为光速，G为引力常数，M 为黑洞质量。这一现象或许能为引力量子化提供关键见解 [10]。此外，多种相互独立的推导进一步证实了霍金效应的物理有效性 [11]。然而，所有这些推导都依赖于值得怀疑的假设 [12], ，尤其是采用了极小的指数尺度，而弯曲时空量子场论范式很可能在此失效。虽然理想情况下观测能够解决这一矛盾，但在天体物理环境中，利用现有或可预见的技术，这种效应仍然过于微弱，无法探测 [13]。

这些局限最初使人们认为，天体物理中的霍金效应将无法通过实验得到证实。然而，1981年，William Unruh [14] 证明，同样的效应也会出现在这样一种系统中：运动流体构成经典背景，其上叠加着与之相互作用的声波量子场。这个系统如今称为声学黑洞[1], ，见图 1。这项工作揭示，霍金效应并非源自引力本身，而是源自视界附近模态的运动学 [15]。在其他物理系统中重现这些运动学条件，便能够产生霍金辐射的类比系统。这一领域——即类比引力——在各种类比系统中重现通常与引力相关的现象。关于更多细节，读者可参阅一篇全面综述 [16] 及其更新后的预印本 [17] 。

尽管安鲁的工作意义重大，但在随后几年里仍鲜受关注，这段时期被称为“失落的十年”。20世纪90年代，Ted Jacobson 等人 [19, 20] 重振了这一理论，奠定了类比引力的理论基础，并确定了重现霍金效应所需的条件。到了21世纪初，科学界开始寻找能够测量这种辐射的实验平台。此后提出并成功验证的方案涵盖了多种系统，包括水槽 [21–23], 玻色–爱因斯坦凝聚体 [24, 25], 光流体 [26], 和光纤光学 [27–31]。本文聚焦于最后一种系统。

[1]最初被称为“哑洞”（dumb hole），这里的“dumb”在高雅英语中意为“哑的”。后来，为避免歧义，这个名称被更改了。

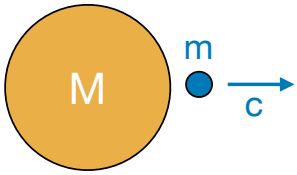


图2：黑星示意图，其中M 为黑星的质量，m 和c 分别为假想光粒子的质量和速度。

2008年，Friedrich König 和 Ulf Leonhardt 的团队报告了对光纤霍金辐射类比的首次理论与实验研究 [27]。在这一背景下，所谓的共振条件取代了普遍使用的相位匹配条件。为了提高共振效应——即诱发类霍金辐射——的效率，研究需要进入极端非线性光学（XNLO）的新领域。这要求使用超短脉冲（短于100 fs），其强度超过基阶孤子的强度值。此后，光纤霍金辐射类比的研究已发展为一个活跃的研究领域，取得了重要的理论和实验成果 [32–34], ，正如我们将在本文中所述。

本讲义其余部分的结构如下。第2 节给出预备知识与动机，探讨引力、色散以及所谓跨普朗克问题的作用。第3 节分析运动介质中的光，并证明相应的运动介质中的波动方程定义了一种有效几何。第4 节考察用于预测和模拟光纤霍金实验的脉冲传播方程。第6 节给出自2008年至今的光纤实验时间线。最后，第7 节对该领域的未来作总结性评述。

2 预备知识

2.1 黑星

1783年，地质学家 John Michell 提出了黑星的概念 [35]。在经典力学框架下，这一概念基于两个假设：光具有有限速度，且光会受到引力作用。在这些条件下，质量足够大的恒星会产生强大的引力，其逃逸速度可达到光速。这样的恒星会困住所有发出的光，使自身成为黑星。

让我们研究一个质量为 m 、正远离恒星运动的粒子的能量。它的动能和势能为

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \qquad U = -\frac{GMm}{r}, \tag{2}$$

其中，G 是引力常数，M 是恒星质量。

我们希望考察这样一种能量平衡：赋予粒子恰到好处的动能，使其克服恒星的引力势能。令 v_e 为逃逸速度，r_e 为逃逸半径。将逃逸速度设为光速 $v_e = c$，并令 $r = r_e$，则能量平衡式 $K = -U$ 变为

$$m\frac{c^2}{2} = \frac{GMm}{r_e}. \tag{3}$$

解 r_e 可得

$$r_e = \frac{2GM}{c^2}, \tag{4}$$

通过求解球对称质量的爱因斯坦场方程得到的引力（或史瓦西）半径 [36]。

然后，我们根据牛顿第二定律计算r_e处的加速度，记为a_e

$$F = ma = \frac{GMm}{r^2}. \tag{5}$$

求解r_e 处的$a = r_e$，可得

$$a_e = \frac{GM}{r_e^2} = \frac{GMc^4}{4G^2M^2} = \frac{c^4}{4GM}. \tag{6}$$

这个表达式也与史瓦西解中视界处的表面引力相同。黑洞视界处的表面引力，是维持在视界处静止所需的加速度。

最后，我们假设乌鲁效应 [8]存在：这是一种纯粹的运动学效应，即加速观察者会感知到产生的粒子具有热谱。乌鲁温度定义为

$$k_B T = \frac{\hbar a}{2\pi c}, \tag{7}$$

其中a 表示加速度。将我们计算得到的a_e 黑星加速度值代入此表达式，可得

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}. \tag{8}$$

这一结果与史蒂芬·霍金在其1974年[9]的开创性论文中提出的著名预言相符。在最初的研究中，霍金将弯曲时空中的量子场论（QFTCS）应用于施瓦西黑洞的坍缩几何。尽管我们的启发式推导采用了技术上不正确的假设，但结果仍引出了一个根本问题：如果霍金效应看起来如此稳健，几乎仅凭牛顿引力就能产生，那么它又如何区分相互竞争的量子引力理论？关于这一主题的讨论，请读者参阅文献 [37]。

2.2 黑洞

黑洞是现代物理学最引人入胜的预言之一，这或许有三个截然不同的原因。

在想象中，黑洞令人深感敬畏。它们的引力极其强大，以至于任何东西——甚至是光——一旦穿越事件视界所界定的边界，就无法逃脱。大众文化常将黑洞描绘成危险的天体，仿佛它们会吞噬沿途的一切；然而，黑洞并没有那么戏剧化。相对于天文距离而言，大多数黑洞的空间尺度都很小，这意味着它们很少与远处物质发生相互作用，因此在宇宙中的存在通常并不显眼。

对物理学家而言，黑洞令人着迷，因为从某种意义上说，它们很简单。一个不旋转、不带电的黑洞可由爱因斯坦场方程的史瓦西解描述，其时空几何可用线元表示。

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega^2. \tag{9}$$

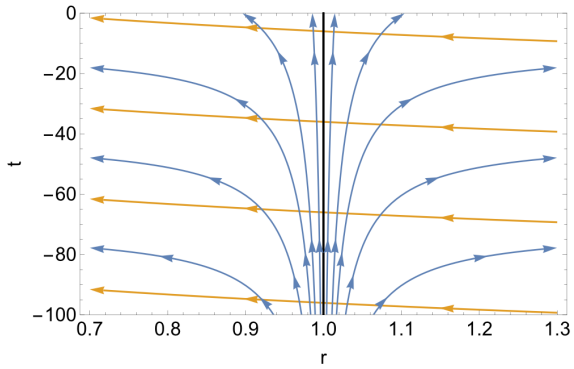


图3：黑洞视界周围的入射模和出射模 $r = r_S$。入射模（黄色）在 r_S 处看不到任何特殊现象。对于 $r \leq r_S$，出射模被困在事件视界内。

这个度规呈现出两个核心特征：位于$r = 0$处的奇点，在那里时空曲率发散，广义相对论失效；以及位于史瓦西半径处的事件视界。

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}. \tag{10}$$

这个半径构成了一道有去无回的边界，将外部宇宙与隐藏的内部区域分隔开来。值得注意的是，自由落体穿过视界的观察者不会经历任何局部异常；然而，视界标志着一条全局边界，越过这条边界的信号永远无法到达零无穷远。

最后，黑洞也是统一引力与量子理论的重要理论实验室。在视界附近，我们必须在弯曲时空量子场论框架下描述量子场，因为视界彻底改变了粒子激发这一概念。场模会发生显著畸变：逃逸至无穷远的出射模会与趋向奇点坠落的伙伴模相互纠缠。这种跨越视界的模态混合促成了霍金辐射，并构成黑洞热力学复杂性及信息悖论的基础 [38]。

2.3 霍金辐射

霍金辐射（HR）是指天体物理黑洞（BH）因量子效应而发出热辐射的预测。科学界认为这是一个可靠的现象，因为多种相互独立的数学推导都始终得出相同结果：一个准静态黑洞会辐射出温度为霍金温度 [9]的热谱

$$k_B T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}. \tag{11}$$

黑体的辐射功率P 由斯忒藩–玻尔兹曼定律给出

$$P = A\sigma T_H^4, \tag{12}$$

whe其中A是黑洞的表面积，而 σ 是斯忒藩–玻尔兹曼常数，定义 d as

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2\hbar^3}. \tag{13}$$

然而，这种效应极其微弱，以我们目前或可预见的技术仍难以探测。为说明HR辐射的量级，我们考虑一个质量以太阳质量计、为

terms of the solar mass $M_\odot \simeq 1$。989×10^{30} kg。根据公式（11），温度为

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M_\odot} \frac{M_\odot}{M} \simeq 6.168 \times 10^{-8}\ \mathrm{K} \cdot \frac{M_\odot}{M}. \tag{14}$$

同样，利用式（12），我们得到功率为

$$P = \frac{\hbar c^6}{15 \cdot 2^{10} \pi G^2 M_0^2} \frac{M_0^2}{M^2} \simeq 9 \times 10^{-29}\ \mathrm{W} \cdot \frac{M_0^2}{M^2}. \tag{15}$$

2.4 最小质量黑洞

式（11）表明，霍金温度与黑洞质量M成反比；因此，质量越大的黑洞，温度越低。观测通常将黑洞区分为两类：（1）超大质量黑洞，其质量可达 $\sim 10^{10}$M⊙，温度低得难以探测霍金辐射；（2）恒星级黑洞，质量通常为 3–20 M⊙，由引力坍缩形成。坍缩成黑洞所需的最小质量取决于恒星状态方程。例如，钱德拉塞卡极限为白矮星规定了约 1.44 $M_\odot$ [39] 的最小质量。对于中子星，托尔曼–奥本海默–沃尔科夫极限给出的最小质量为 2–2.5 M⊙；这类天体的温度甚至会比其白矮星对应物更低。

将钱德拉塞卡极限代入公式（4），可得引力半径的估计值

$$r_S = \frac{2G(1.44\,\mathrm{M}_\odot)}{c^2} \simeq 4.3\ \mathrm{km}. \tag{16}$$

通过公式（8）计算得到的相应霍金温度为

$$T_{\max} \simeq 4.3 \times 10^{-8}\ \mathrm{K}. \tag{17}$$

由于霍金温度与质量成反比，最小坍缩质量决定了恒星黑洞温度的上限。

最大黑洞温度 $T_{\max}$ 比宇宙微波背景（CMB）所决定的外太空低温 ~ 2.725 K[40]低几个数量级。由于质量更大的黑洞温度更低，直接利用天体物理黑洞检验霍金的预言面临巨大挑战，尽管这仍是一个活跃的研究领域 [41,42]。

霍金本人很快意识到，要获得实验验证，就需要第三类黑洞：原初黑洞或微型黑洞 [9],，其质量范围从普朗克质量（$M_P \sim 10^{-5}$ g）到 1 $M_\odot$ [43]。另一种可能性（我们将在第3节中介绍）是利用除引力之外的相互作用，在更易于开展实验的系统中重现事件视界的运动学特征 [14]。

2.5 跨普朗克问题

对霍金效应的严格推导会得到波长为 λ、抵达未来零无穷远的波。然而，将这些模态沿时间反向追溯至视界，会发现它们经历了指数级蓝移。这些波很快就会达到短于普朗克长度 $\ell_P \simeq 1$的波长6×10^{-35} m，进入 $\lambda < \ell_P$的区域。在这个区域，半经典近似不再可靠 [12],，然而标准推导似乎恰恰依赖于这种外推。尽管学界通常认为霍金辐射是弯曲时空量子场论中最可靠的预言之一，但它仍然建立在这些可疑假设之上 [12]。

在天体物理学中，某种尚未知晓的物理机制必须使视界附近的波正则化。相反，在不同介质中重现的类比视界中，正则化

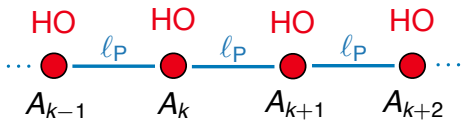


图4：时空色散玩具模型，其中有效谐振子$\hat{A}_k$相距 ℓ_P。

机制是已知的，那就是色散，即波的速度对其频率或波数的依赖关系 $c = c(\omega)$。引入色散后，黑洞视界或白洞视界处的红移或蓝移分别受到限制。

在色散介质中，视界的概念不再唯一；相速度和群速度

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk}, \tag{18}$$

并不重合。由此可以确定相速度视界，其定义条件为$v_p = c$，该条件确定相关的模式频率，以及群速度视界$v_g = c$，它决定波包的运动学阻塞。更进一步，不同频率可能经历不同的有效视界，从而形成所谓的模糊视界，即每个频率对应不同的视界位置 [44]。

2.6 时空色散的玩具模型

如果时空在基本层面上是离散的，那么首先会出现的后果就是色散。为研究这一现象，我们考虑一个玩具模型：由一维链谐振子（HOs）组成，谐振子标记为 k，彼此间距为 ℓ_P，并由电磁（EM）势 $\hat{A}_k$† 描述（见图 4）。

将电磁势展开到最近邻

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_k}{\partial t^2} = \kappa(\hat{A}_{k+1} - \hat{A}_k) + \kappa(\hat{A}_{k-1} - \hat{A}_k) = \hat{A}(x_{k+1}) - 2\hat{A}(x_k) + \hat{A}(x_{k-1}), \tag{19}$$

考虑连续极限 $\hat{A}_k(t) \to \hat{A}(x_k, t)$。对 $\hat{A}(x, t)$ 在x_0 附近进行泰勒展开，保留至四阶，我们得到

$$\begin{aligned}\hat{A}(x,t) =& \hat{A}(x_0,t) + \hat{A}^{(1)}(x_0,t)(x-x_0) + \frac{\hat{A}^{(2)}}{2}(x_0,t)(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{\hat{A}^{(3)}}{6}(x_0,t)(x-x_0)^3 + \frac{\hat{A}^{(4)}}{24}(x_0,t)(x-x_0)^4,\end{aligned} \tag{20}$$

其中，$\hat{A}^{(m)}$ 是关于x的 m 阶导数。

例如，考虑$x_0 = x_k$的情况，上述方程变为

$$\begin{aligned}\hat{A}(x,t) =& \hat{A}(x_k,t) + \hat{A}^{(1)}(x_k,t)(x-x_k) + \frac{\hat{A}^{(2)}}{2}(x_k,t)(x-x_k)^2 \\ &+ \frac{\hat{A}^{(3)}}{6}(x_k,t)(x-x_k)^3 + \frac{\hat{A}^{(4)}}{24}(x_k,t)(x-x_k)^4.\end{aligned} \tag{21}$$

我们需要计算$\hat{A}(x_{k+1})-2\hat{A}(x_k)+\hat{A}(x_{k-1})$。将各次幂分别写为

$$\text{0th-order}: \quad \hat{A}(0)-2\hat{A}(0)+\hat{A}(0)=0, \tag{22}$$

$$\text{1st-order}: \quad \hat{A}'(0)(\ell_{\mathrm{P}}+2\cdot 0-\ell_{\mathrm{P}})=0, \tag{23}$$

$$\text{2nd-order}: \quad \frac{\hat{A}''(0)}{2}(\ell_{\mathrm{P}}^2+0+\ell_{\mathrm{P}}^2)=\ell_{\mathrm{P}}^2\hat{A}''(\ell_{\mathrm{P}}), \tag{24}$$

$$\text{三阶}: \quad \frac{\hat{A}'''(0)}{6}(\ell_{\mathrm{P}}^3+0-\ell_{\mathrm{P}}^3)=0, \tag{25}$$

$$\text{4th-order}: \quad \frac{\hat{A}^{(4)}(0)}{24}(\ell_{\mathrm{P}}^4+0+\ell_{\mathrm{P}}^4)=\frac{\ell_{\mathrm{P}}^4}{12}A^{(4)}(\ell_{\mathrm{P}}). \tag{26}$$

由此得到的方程为

$$\frac{\partial^2\hat{A}}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\hat{A}}{\partial x^2}+\frac{\ell_{\mathrm{P}}^2}{12}\frac{\partial^4\hat{A}}{\partial x^4}\right), \tag{27}$$

其中我们定义 $c^2=k\ell^2$ P。

方程（27）类似于电磁场的波动方程

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}+\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\epsilon_0\frac{\partial^2 A}{dt^2}=0, \tag{28}$$

再加上一个依赖于 $\hat{A}^{(4)}$ 的附加项。

为了求出色散关系，我们采用平面波拟设

$$\hat{A}=\hat{\mathcal{A}}e^{ikx-i\omega t}, \tag{29}$$

then

$$(i\omega)^2\hat{A}=c^2\left[(ik)^2+\frac{\ell_{\mathrm{P}}^2}{12}(ik)^4\right]\hat{A} \tag{30}$$

$$\omega(k)=ck\sqrt{1-\frac{k^2}{k_0^2}}, \tag{31}$$

其中包含 $k_0=\sqrt{12}/\ell_{\mathrm{P}}$。最后一个方程证明，时空离散化表现为色散。事实上，色散会同时改变相速度和群速度。

对于相速度

$$v_p(k)=\frac{\omega(k)}{k}=c\sqrt{1-\frac{k^2}{k_0^2}}, \tag{32}$$

而对于群速度

$$v_g(k)=\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}=\frac{\partial}{\partial k}\left(ck\sqrt{1-\frac{k^2}{k_0^2}}\right)=c\sqrt{1-\frac{k^2}{k_0^2}}\left(1-\frac{k^2}{k_0^2-k^2}\right). \tag{33}$$

2.7 类比系统引力范式

类比引力的核心思想是：在弯曲时空几何上经典或量子激发的运动学，可以在相互作用不同于引力的其他类比系统中得到复现。事实上，类比时空最近被认为是更合适的名称 [17]。为了采用与弯曲时空量子场论相同的范式，我们将决定有效弯曲时空的经典背景场，与量子激发或探测场分离开来

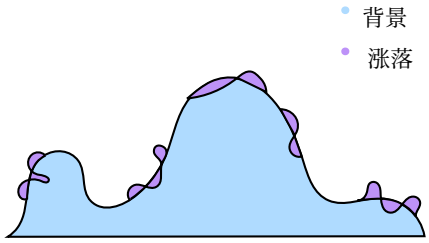


图5：系统示意图，展示了经典或量子涨落叠加在经典背景之上的情形。

该探测场在这个有效弯曲时空上传播，模拟广义相对论中场的运动学 [27]。

类比引力在实验室中取得显著进展的弯曲时空量子场论相关效应包括霍金辐射（HR）、动态卡西米尔效应 [45],超辐射 [46, 47], 宇宙学粒子产生 [48, 49], 哈勃张力 [50]以及假真空衰变 [51]。

以下内容将重点讨论霍金辐射，既将其作为原理验证，也因为在类比引力领域，这种效应得到了最广泛的研究。这涉及多种不同的物理系统，从水波 [21] 到玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs） [24]，再到非线性光学系统 [52]。

3 运动介质中的光

3.1 运动介质中的波动方程

接下来，我们来研究光如何从一个惯性系变换到另一个惯性系，因为这将是获得有效光学度规并在光学中发展类比引力的必要工具。我们知道，在任何惯性系中，因果速度都是c，对应于光在真空中的速度。考虑偏振固定在yz平面内、沿x方向传播的情形，并令A为矢势分量。

在这些条件下（但一般情况下并非如此），实验室参考系中$A\ (x,t)$的值与运动参考系中$A'\ (x',t')$的值相同。我们可以用矢势分量表示电场和磁场算符

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad E=-\frac{\partial A}{\partial t}, \qquad E'=-\frac{\partial A'}{\partial t'} \tag{34}$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}, \qquad B\ =\frac{\partial A}{\partial x}, \qquad B'=\frac{\partial A'}{\partial x'} \tag{35}$$

利用两个参考系之间速度为u 的洛伦兹变换

$$x=\gamma(x'+ut'), \qquad t=\gamma\left(t'+\frac{u}{c^2}x'\right), \tag{36}$$

其中 γ 是洛伦兹因子。我们利用链式法则，将E' 和B' 都表示为实验室系场。对于E'，有

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}=\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\gamma u\frac{\partial}{\partial x}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{37}$$

那么，我们可以将E'表示为

$$E' = -\frac{\partial A}{\partial t'} = -\gamma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \gamma(E - uB). \tag{38}$$

对 $\partial_{x'}$ 进行等效分析后，

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{39}$$

那么，我们可以将 B' 表示为

$$B' = \frac{\partial A}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{u}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \gamma\left(B - \frac{u}{c^2}E\right). \tag{40}$$

根据狭义相对论的第二条公设，物理定律在任何惯性参考系中都相同，电磁学定律也不例外。因此，取波动方程

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \tag{41}$$

在 (1+1)D 中，并将其变换到另一个参考系

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H'}{\partial x'} + \frac{\partial D'}{\partial t'} = 0. \tag{42}$$

利用方程（37）和（39）变换方程（42）中的带撇导数，可得

$$\frac{\partial H'}{\partial x'} + \frac{\partial D'}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial}{\partial x}(H' + uD') + \gamma\frac{\partial}{\partial t}(D' + \frac{u}{c^2}H') = 0. \tag{43}$$

因此，我们得出结论，场 H 和D 应按如下方式变换

$$H = \gamma(H' + uD'); \qquad D = \gamma\left(D' + \frac{u}{c^2}H'\right). \tag{44}$$

现在，我们使用在介质静止系（即实验室参考系）中成立的本构方程，

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}; \qquad \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \tag{45}$$

记住在真空中 $\epsilon = \mu = 1$，我们可以将波动方程改写为用矢势A表示的形式：

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} + \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \epsilon_0\frac{\partial^2 A}{dt^2} = 0, \tag{46}$$

变换后各量A'、x'和t' 所满足的波动方程与上面的方程形式相同。

现在我们来推导有效度规。为此，需要计算速度为u的共动参考系中的场$\mathbf{D}$ 和$\mathbf{H}$ 。通过反解D 的表达式，得到D' 和H'

$$D' = \gamma\left(D - \frac{u}{c^2}H\right), \qquad H' = \gamma(H - uD), \tag{47}$$

将这些场代入本构方程，得到

$$D' + \frac{u}{c^2}H' = \epsilon_0\epsilon(E' + uB'), \qquad H' + uD' = \frac{1}{\mu_0\mu}\left(B' + \frac{u}{c^2}E'\right). \tag{48}$$

解出D'和H'，得到

$$D' = \gamma^2\epsilon_0\left[\epsilon(E'+uB') - \frac{u}{\mu}\left(B' + \frac{u}{c^2}E'\right)\right], \quad H' = \gamma^2\epsilon_0\left[\frac{c^2}{\mu}\left(B' + \frac{u}{c^2}E'\right) - u\epsilon(E'+uB')\right], \tag{49}$$

其中用到了$c^2 = (\mu_0\epsilon_0)^{-1}$这一事实。

方程（49）是共动参考系中的本构方程。由于我们已经在方程（35）中得到了以A表示B'和E'的表达式，因此可以将这些方程改写为

$$D' = \gamma^2\epsilon_0\left[\left(\frac{u^2}{\mu c^2} - \epsilon\right)c\partial_0' + \left(\epsilon - \frac{1}{\mu}\right)u\partial_1'\right]A, \quad H' = \gamma^2\epsilon_0\left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu}\right)uc\partial_0' + \left(\frac{c^2}{\mu} - \epsilon u^2\right)\partial_1'\right]A, \tag{50}$$

其中 $\partial_{\prime t} = c\partial_{\prime 0}$ 且 $\partial_{\prime x} = \partial_1'$。

3.2 场的量子化

我们简要回顾电磁场的量子化，这对于正确理解光学类比至关重要。为了量子化电磁场，我们考虑一个横向于传播方向的线偏振，使得矢势 $\hat{\mathbf{A}}$ 简化为标量场 $\hat{A}$。于是它可以表示为模式叠加

$$\hat{A} = \sum_k \left(A_k(\mathbf{r},t)\hat{a}_k + A_k^*(\mathbf{r},t)\hat{a}_k^\dagger\right), \tag{51}$$

其中 A_k 表示模式函数，k 表示模式指标，$\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 表示模式算符。算符 $\hat{A}$完整描述了光的量子场。关于电磁场量子化的更深入回顾，请参阅参考文献 [37,53,54]。

现在，根据式（D 和 $\hat{H}$51），定义量子算符 $\hat{}$，使得 $H = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ 且 $D = \langle\psi|\hat{D}|\psi\rangle$。于是，式（50）可以写为

$$\hat{D} = -\epsilon_0 c g^{0\beta}\partial_\beta\hat{A}, \qquad \hat{H} = -\epsilon_0 c^2 g^{1\beta}\partial_\beta\hat{A}, \tag{52}$$

使用矩阵

$$g^{\alpha\beta} = \gamma^2\begin{pmatrix} \epsilon - \frac{1}{\mu}\frac{u^2}{c^2} & \frac{u}{c}\left(\epsilon - \frac{1}{\mu}\right) \\ \frac{u}{c}\left(\epsilon - \frac{1}{\mu}\right) & \epsilon\frac{u^2}{c^2} - \frac{1}{\mu}\end{pmatrix}. \tag{53}$$

麦克斯韦方程组在两个参考系中均成立，并且也支配着量子世界。

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{D}}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial\hat{H}'}{\partial x'} + \frac{\partial\hat{D}'}{\partial t'} = 0. \tag{54}$$

最后，利用方程（52）可得

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{D}}{\partial t} = c\partial_0\hat{D} + \partial_1\hat{H} = -\epsilon_0 c^2\partial_0 g^{o\beta}\partial_\beta\hat{A} - \epsilon_0 c^2\partial_1 g^{1\beta}\partial_\beta\hat{A} = \partial_\alpha g^{\alpha\beta}\partial_\beta\hat{A} = 0. \tag{55}$$

最后这个方程就是运动介质中的波动方程。

在所研究的情形中，实验室时空是平直的。我们已经证明，可以用逆有效度规改写波动方程 $g^{\alpha\beta}$，如式（53）所示。场 $\hat{A}$ 在由 $g_{\alpha\beta} = (g^{\alpha\beta})$给出的有效弯曲时空中传播，使得

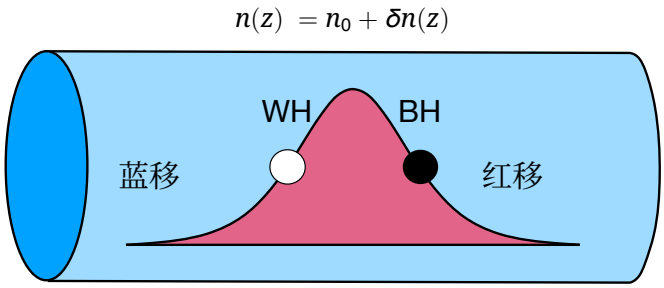


图 6：克尔脉冲沿光纤传播时引起的折射率扰动。该扰动的前沿和后沿充当类比视界：一个与探测模蓝移相关的白洞视界，以及一个与红移相关的黑洞视界。

$$g_{\alpha\beta} = \gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} - \mu\frac{u^2}{c^2} & \left(\mu - \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{u}{c} \\ \left(\mu - \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{u}{c} & \frac{u^2}{c^2}\frac{1}{\epsilon} - \mu \end{pmatrix}. \tag{56}$$

我们可以施加阻抗匹配条件 $\mu = \epsilon = u$并定义 $n^2 = \mu\epsilon$，以简化度规

$$g_{\alpha\beta} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 - n^2\frac{u^2}{c^2} & (n^2-1)\frac{u}{c} \\ (n^2-1)\frac{u}{c} & \frac{u^2}{c^2} - n^2 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

该方程证实，运动介质会诱导出有效弯曲时空几何。

3.3 光学类比系统中的霍金辐射

根据安鲁的说法，一个有效的类比系统要求介质以该介质中波的传播速度运动。在我们关注的情形中，这一速度就是光在光纤（一种电介质）中的速度，也就是约为 2c/3。这就引出了一个问题：实验室中是否能够满足这一条件。事实上，这一条件可以实现，并且在光通信技术中得到了广泛应用 [55]。

这种类比系统的基本原理是：介质中的 $\chi^{(3)}$ 脉冲会通过光学克尔效应改变折射率，从而建立有效弯曲时空（见图 6）。该模型假设光仅沿光纤纵轴传播，因此将视界物理简化为（1+1）D。

我们考虑一个以群速度 $v_g = +u$ 在折射率为 $n_0(\omega)$的光纤中传播的脉冲。在共动参考系中，光纤以速度 $-u$运动（见图 7）。考虑方程（57）中的有效度规，我们施加视界条件$g_{00} = 0$，则

$$1 - n^2\frac{u^2}{c^2} = 0 \rightarrow u = \pm\frac{c}{n} = v_p, \tag{58}$$

其中，v_P 为相速度，而该条件确定了相速度视界。

在视界处对速度分布进行一阶展开$x = x_h$

$$v_+ = \alpha x, \qquad \alpha = \left.\frac{\mathrm{d}v_+}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_h}. \tag{59}$$

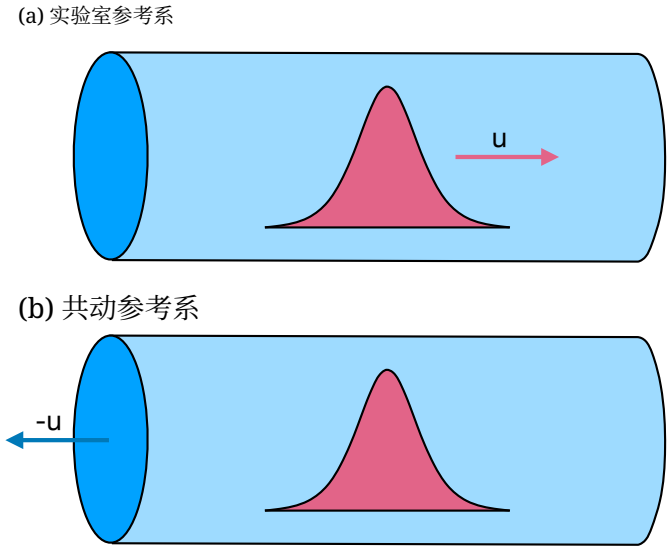


图 7: （a）从实验室参考系观察到的在光纤中传播的光脉冲。（b）在光脉冲的共动参考系中观察到的光纤。

根据相对论速度叠加公式，

$$v_{\pm} = \frac{u \pm \frac{c}{n}}{1 + \frac{u}{cn}} = \frac{\frac{un \pm c}{u}}{\frac{cn+u}{cn}} = \frac{unc \pm c^2}{cn+u}. \tag{60}$$

一般而言，$u = u(x)$、$n = n(x)$，以及c =为常数，则

$$\frac{\mathrm{d}v_+}{\mathrm{d}x} = \frac{(cn+u)c(u'n+un') - c(un+c)(cn'+u')}{(cn+u)^2} = \frac{c[c(n^2-1)u' + (u^2-c^2)n']}{(cn+u)^2}. \tag{61}$$

将视界条件（方程（58）$u = -c/n$ 代入导数中，可得α:

$$\alpha = \left.\frac{\mathrm{d}v_+}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_h} = \frac{c^2(n^2-1)u' + c^2\left(\frac{1}{n^2}-1\right)n']}{\left(cn+\frac{c}{n}\right)^2} = \frac{(n^2-1)u' - \frac{1}{n^2}(n^2-1)}{\frac{1}{n^2}(n^2-1)^2}. \tag{62}$$

最后，

$$\alpha = \frac{1}{1-n^{-2}}\left(u' - \frac{1}{n^2}n'\right) = \frac{1}{1-n^{-2}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x=x_h}. \tag{63}$$

当 $\alpha > 0$ 时，对应黑洞（BH）；当 $\alpha < 0$ 时，对应白洞（WH），即黑洞的时间反演。广义相对论中已知白洞解，但在天体物理学中尚无已知的物理机制能够形成白洞。我们着重讨论黑洞的情况。

在视界附近，速度可线性化为 $v(x) \simeq \alpha x$，这使我们能够定义坐标

$$t_+ = t - \int \frac{dx}{v_+} = t - \int \frac{dx}{\alpha x} = t - \frac{1}{\alpha}\ln|x|. \tag{64}$$

这种对数关系意味着，$x \to 0$中的指数衰减对应于t_+中的线性推进。因此，右行模在视界附近受到越来越强的压缩。

近视界动力学导致左行和右行模发生混合，这可以像乌鲁效应中那样用博戈留波夫变换来描述

$$A_1 = A_R \cosh\zeta + A_L^* \sinh\zeta, \tag{65}$$
$$A_2 = A_L \cosh\zeta + A_R^* \sinh\zeta. \tag{66}$$

相对振幅满足

$$\frac{\beta}{\alpha} = \tanh\zeta = e^{-\nu\pi}, \qquad \nu = \frac{\omega}{\alpha}. \tag{67}$$

结合归一化条件

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \tag{68}$$

这意味着

$$\langle n\rangle = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\alpha} - 1}. \tag{69}$$

最后，通过与热谱比较，我们得到有效温度

$$\langle n\rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \tag{70}$$

我们得到，

$$k_B T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi}. \tag{71}$$

该方程给出了霍金辐射的光学类比系统的有效温度。请注意， α定义于方程（63）中，并取决于$u(x)$ 和$n(x)$的变化率。

黑洞视界会产生双模压缩真空，可将其很好地近似为一个爱因斯坦–波多尔斯基–罗森（EPR）对

$$|\psi\rangle = e^{i\zeta\hat{K}_y}|0,0\rangle, \tag{72}$$

其中

$$\hat{K}_y = \frac{i}{2}(\hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1\dagger\hat{a}_2\dagger). \tag{73}$$

从这个方程可以看出，这一对处于纠缠态。

那么，任一侧的约化态都是热态，其形式为

$$\hat{\rho} = (1 - e^{-\beta})\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\beta}|n\rangle\langle n|. \tag{74}$$

方程（63）可以与其他类比系统中的类似方程进行比较，例如水槽和玻色-爱因斯坦凝聚态。接下来，我们将具体讨论光纤情形。

3.4 光纤情形下的霍金辐射

在光纤光学中，u 源自变换到共动参考系，并且是常数，$u \neq u(x)$；只有折射率随空间变化 $n = n(x)$。那么，方程（63）化简为

$$\alpha = \frac{1}{1-n^{-2}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=x_h} = -\gamma^2\frac{c}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_h} = -\frac{c\gamma^2}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_h} \tag{75}$$

with

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-n^{-2}}}. \tag{76}$$

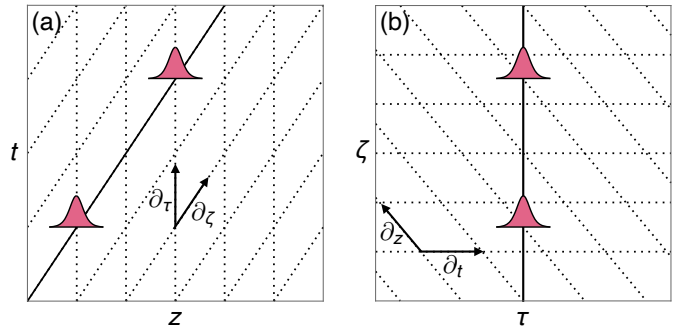


图 8: （a）一个光脉冲沿实验室坐标 $(z,\ t)$传播。（b）一个光脉冲沿共动（迟滞）(ζ,τ)坐标传播。

计算是在共动（洛伦兹推动）参考系中进行的 (x',t')

$$\alpha \to \alpha', \qquad x \to x', \qquad t \to t'. \tag{77}$$

在此参考系中，有效加速度为

$$\alpha' = -\frac{c^2}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x'}. \tag{78}$$

相应的导数变换关系为

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{79}$$

在光纤光学中，人们发现采用迟滞参考系(τ,ζ)更为方便，其定义为

$$\tau = t - \frac{x}{u}, \qquad \zeta = \frac{x}{u}, \tag{80}$$

及其逆关系

$$t = \tau + \frac{\zeta}{u}, \qquad x = u\zeta, \tag{81}$$

参见图 7，比较实验室参考系和迟滞参考系。

利用链式法则，导数变换为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{82}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right). \tag{83}$$

根据光学克尔效应，折射率会发生如下变化：

$$n(x,t) = n_0 + \delta n(x') = n_0 + \delta n(x,t) = n_0 + \delta n(\tau). \tag{84}$$

由于折射率中由克尔效应引起的变化仅取决于迟滞时间，$\delta n = \delta n(\tau)$，因此其在共动参考系中的导数可写为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x'} = \frac{\mathrm{d}\,\delta n}{\mathrm{d}x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta n. \tag{85}$$

将实验室导数表示为推迟坐标 (τ,χ)，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{86}$$

并使用 $\partial_\zeta \delta n = 0$，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x'} = \gamma\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{c^2}\right)\frac{\partial \delta n}{\partial \tau}\frac{\gamma}{u}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial \delta n}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma u}\frac{\partial \delta n}{\partial \tau}. \tag{87}$$

回到式（78）中表面引力的定义，并利用视界条件 $u = -c/n$，我们得到

$$\alpha' = \frac{c^2}{n^2}\frac{n}{\gamma c}\frac{\partial \delta n}{\partial \tau}\bigg|_h = \frac{\gamma}{n}\frac{\partial \delta n}{\partial \tau}\bigg|_h. \tag{88}$$

于是，共动参考系中的表面引力为

$$\alpha' = \frac{\gamma}{n}\frac{\partial \delta n}{\partial \tau}\bigg|_h. \tag{89}$$

3.5 到实验室参考系的多普勒效应

从实验室参考系变换到共动参考系时，频率会受到多普勒效应的影响。为说明这一点，我们首先取普朗克谱

$$\bar{n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta} = -\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{1}{e^\beta - 1}, \tag{90}$$

其中

$$\beta = \frac{\hbar\omega'}{k_B T}, \tag{91}$$

且 ω' 是共动参考系中的频率。频率的变换关系为

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 + \frac{u}{c}n_0\right), \tag{92}$$

u 是脉冲的速度，n_0 是背景的折射率。在视界处，速度满足$u = -c/n$，因此参考系之间的变换为

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) = \gamma\omega\frac{n - n_0}{n}. \tag{93}$$

定义 $\delta n|_h \equiv n - n_0$，，其中$h$是视界。在这种情况下，这是一个特定的$T_h$。我们得到视界附近

$$\omega' = \omega\frac{\gamma}{n}\,\delta n|_h\,. \tag{94}$$

我们已经证明， α' 按相同的因子缩放

$$\alpha' = \alpha\frac{\gamma}{n}\,\delta n|_h\,. \tag{95}$$

然后，执行逆变换

$$\alpha = \frac{n\alpha'}{\gamma\,\delta n|_h} = \frac{n}{\gamma\,\delta n|_h}\frac{\gamma}{n}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_h = \left(\frac{1}{\delta n}\frac{\mathrm{d}\delta n}{\mathrm{d}\tau}\right)\bigg|_h. \tag{96}$$

这一结果表明，实验室参考系中存在霍金辐射，且它取决于 δn 的相对变化。如果 τ 的变化速度极快，即达到单个光学周期的时间尺度，就能产生可测量的霍金温度 T_H 。这解释了为什么我们需要在极端非线性光学（XNLO）状态下开展研究。

4 光纤中的脉冲传播

4.1 脉冲动力学

介电材料中的光由无自由电荷、无电流时的麦克斯韦方程组描述，即

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{97}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{98}$$

结合本构方程

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{99}$$

可以推导出电场 $\mathbf{E}$ 的波动方程，形式如下

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \tag{100}$$

其中$\mathbf{P}$ 是极化矢量。为方便起见，可将其分为线性部分和非线性部分$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathrm{L}} + \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}$，并且

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}} = \epsilon_0 \left(\chi^{(2)} : \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}^3 + \cdots \right). \tag{101}$$

我们可以将电介电常数定义为 $\epsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega)$，其与折射率$n^2(\omega) = \epsilon(\omega)$的关系为。由此，我们最终可以得到波动方程，即前向麦克斯韦方程（FME）

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \beta^2(\omega)\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2}\mathbf{P}_{\mathrm{NL}} = 0, \tag{102}$$

其中 $\beta(\omega) = \omega^2 n^2(\omega)/c^2$。式（102）中的三项分别描述传播、色散和非线性。接下来的两节将重点介绍色散和非线性。

4.2 色散

光纤中的色散源于折射率对频率的依赖性。材料色散由其共振决定，并可用塞尔迈耶方程描述。

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \frac{B_j \omega^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \tag{103}$$

其中，折射率 $n(\omega)$ 在透明窗口内平滑变化，但在共振 j附近会迅速变化，见图 9。这种色散是已知的，适用于光子晶体光纤（PCF）的材料二氧化硅。

频率依赖性转化为传播常数 β，从而得到色散波数函数

$$k(\omega) = \beta(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega). \tag{104}$$

这可以通过围绕中心频率 ω_0 进行泰勒展开来表征

$$\beta(\omega) = \sum_m \frac{\beta_m}{m!}(\omega - \omega_0)^m; \quad \beta_m = \frac{\mathrm{d}^m \beta}{\mathrm{d}\omega^m}. \tag{105}$$

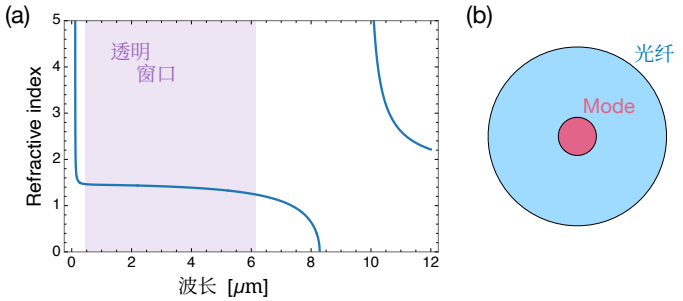


图 9：（a）塞尔迈耶模型描述的折射率频率依赖性。材料色散源于光学共振，在透明窗口内使折射率平滑变化，而在共振频率附近则引起快速变化。阴影区域表示吸收较弱、光能在光纤中高效传播的光谱范围。（b）光纤的横截面及其模式函数。

展开中的每一项都反映了不同的色散行为。一阶项 β_1与群速度的关系为

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\omega n(\omega)}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right). \tag{106}$$

根据上式，我们可以定义群折射率 n_g，其定义如下

$$n_g = n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}. \tag{107}$$

二阶项 β_2 定义了所谓的群速度色散（GVD）

$$\beta_2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\left(\frac{\omega n}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(n + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right) = \frac{1}{c}\left(2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} + \omega\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\right). \tag{108}$$

该项还使我们能够定义两种不同的状态：当 $\beta_2 > 0$ 时为正常群速度色散，此时低频分量比高频分量传播得更快。当$\beta_2 < 0$时为反常群速度色散，此时高频分量的群速度大于低频分量。反常群速度色散能够产生正常状态下不存在的一系列非线性现象。

为了考察色散现象，我们考虑一种由二氧化硅制成的光子晶体光纤（PCF）。其色散取决于材料和几何结构。材料色散由二氧化硅已知的塞尔迈耶共振描述。光纤的几何结构取决于空气孔几何结构。我们将零色散波长（ZDWs）定义为满足以下条件的波长 λ_{ZDW}，其中

$$\beta_2(\lambda_{\mathrm{ZDW}}) = 0. \tag{109}$$

对于与类霍金辐射光纤实验中所用光纤类似的光子晶体光纤 [27, 30–32]：零色散波长 $_1 = 700$ 纳米和零色散波长$_2 = 1300$ 纳米。在图10 中，我们给出折射率n 和群折射率n_g 在可见光和红外范围内的情况。我们也在两个零色散波长之间的反常群速度色散区域中开展研究。特别是，该光纤在此区域支持孤子解 [56]。

4.2.1 光纤模式

让我们考虑一个线偏振电场$\mathbf{E} \Rightarrow E\hat{}e_z$。我们可以将其纵向部分和横向部分分离为

$$\mathbf{E}(x,y,z) = E(z)F(x,y)\hat{e}_z. \tag{110}$$

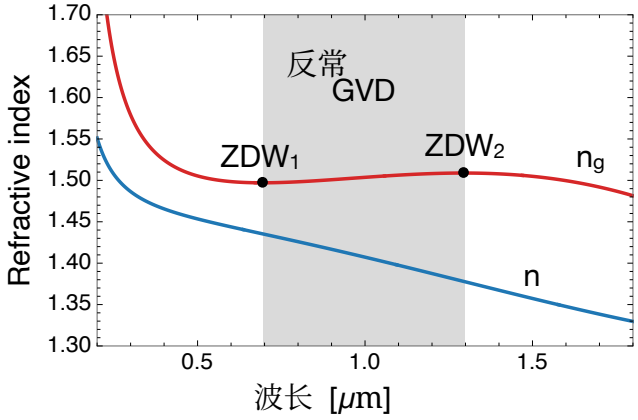


图 10：光子晶体光纤的折射率 n 和群折射率 n_g。两个零色散波长（$\mathrm{ZDW}_1 = 700$ 纳米和 $\mathrm{ZDW}_2 = 1300$ 纳米）界定了反常群速度色散区域（阴影部分），该区域支持孤子传播。

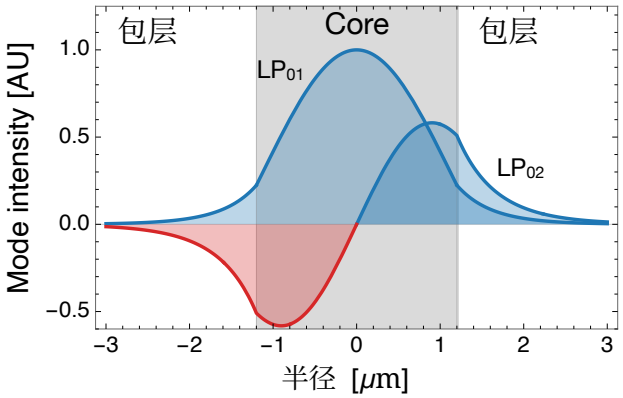


图 11：阶跃折射率光纤的横向模式结构。图中展示了基模（LP01）和第一高阶模（LP02）的模式强度分布随径向坐标的变化。

F 的方程给出有效传播常数 β。

一种标准模型是阶跃折射率光纤，其纤芯内部的折射率为较高的恒定值，而在包层中则突然降低。横向模式方程在纤芯区域的解可用贝塞尔函数表示，并且必须与包层中指数衰减的场连续匹配，见图 11。

在此工作区间，模态通常分类为线偏振（LP）模态，记作 LP_{lm}，其中 l 为方位角阶数，m 为径向指标。尽管这些模式本质上是混合的，LP近似仍能提供准确的描述。

基模 LP_{01} 具有近似高斯形的横向强度分布。LP_{02} 和 LP_{03} 等高阶模式，或具有非零角向结构的模式 LP_{11} 和 LP_{21}，呈现出愈加复杂的径向和方位角分布，见图 12。每种模式都有各自的色散关系 $\beta(\omega)$，这意味着模式结构会影响整体色散动力学。我们可以假设仅激发基模，此时系统可简化为沿 z 轴的一维传播问题。

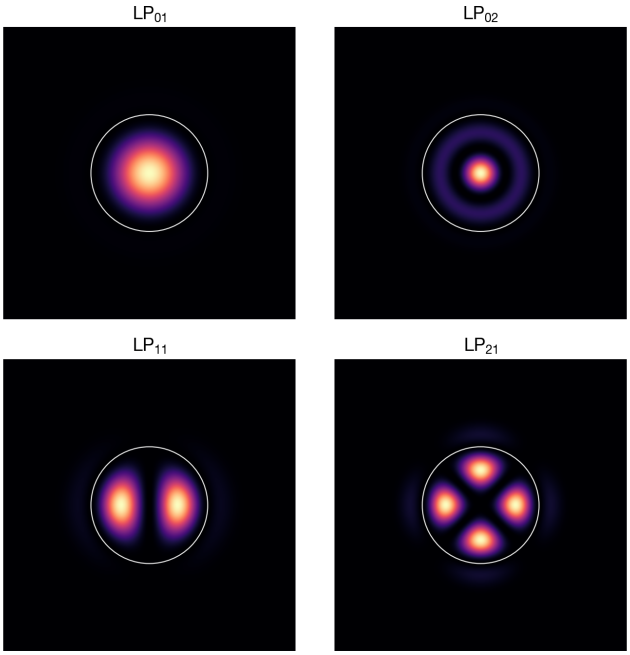


图12：阶跃折射率光纤中具有代表性的线偏振模式的横向强度分布。

4.3 非线性

采用布隆贝根 [57] 所提出的宏观方法，将偏振视为给定量

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\mathbf{P}_{\mathrm{L}}+\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}=\epsilon_0\sum_{j=1}^{\infty}\chi^{(j)}:\mathbf{E}^j=\epsilon_0(\chi^{(1)}\mathbf{E}+\chi^{(2)}:\mathbf{E}^2+\chi^{(3)}\vdots\mathbf{E}^3+\ldots), \tag{111}$$

其中，线性部分就是 $\chi^{(1)}$ 项，其他各项则是非线性贡献。项$\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$ 可通过替换 $\epsilon_0\rightarrow\epsilon_0\epsilon$ 和 $\mu_0\rightarrow\mu_0\mu$来描述。通常只保留$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}$的第一个非零项。例如，二阶非线性 $\chi^{(2)}\neq 0$ 存在于β-硼酸钡（β-BBO）等非线性晶体中，可产生二次谐波产生（SHG）、自发参量下转换（SPDC）和普克尔斯效应等现象。

当 $\chi^{(2)}=0$时，材料分子具有对称性，因此通常$\chi^{(3)}\neq 0$，于是会出现三阶非线性。它存在于光纤中，可产生克尔效应、自相位调制（SPM）、自发四波混频（SFWM）、三次谐波产生（THG）；尤其是，它所产生的相互作用会导致类霍金辐射。

对于在单一方向上共偏振的电场$\mathbf{E}$，在一种 $\chi^{(3)}$ 材料中

$$\mathbf{P}=\epsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{E}^3=\epsilon_0\chi^{(3)}E^3\hat{z}. \tag{112}$$

将电场转换为解析信号 [33]:

$$E\in\mathbb{R},\pm\omega,\qquad \mathcal{E}\in\mathbb{C},+\omega, \tag{113}$$

$$E=E_0\cos\theta=E_0\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{E_0e^{i\theta}+E_0e^{-i\theta}}{2}=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}^*}{2}. \tag{114}$$

解析信号通过希尔伯特变换定义

$$\mathcal{E}(z,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{E}(z,\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{115}$$

回到式（102）中的FME方程及其解析信号，

$$\nabla^2\mathcal{E}+\beta^2(\omega)\mathcal{E}+\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2}\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}=0, \tag{116}$$

考虑到该系统是（1+1）维的，且非线性由负责克尔效应的SPM项给出，我们有

$$\partial_z^2\mathcal{E}+\beta^2(\omega)\mathcal{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{3\chi^{(3)}}{4}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}=0, \tag{117}$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}=\frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}. \tag{118}$$

我们再次考虑将场 $\mathcal{E}$ 分解为 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0+\psi$的QFTCS近似，其中$\mathcal{E}_0$ 为背景， ψ 为涨落。然后，考虑 ψ中的线性项，我们保留相互作用项 $|\mathcal{E}_0|^2\mathcal{E}$，其中有

$$\nabla^2\mathcal{E}+\left(\frac{\omega^2n^2}{c^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{3\chi^{(3)}}{4}|\mathcal{E}_0|^2\right)\mathcal{E}=0, \tag{119}$$

$$\partial_z^2\mathcal{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(n^2+2n_0n_2I\right)\mathcal{E}=\partial_z^2\mathcal{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(n+n_2I\right)^2, \tag{120}$$

$$\partial_z^2\mathcal{E}+\frac{\omega^2n_{\mathrm{eff}}^2(\omega,\tau)}{c^2}\mathcal{E}=0, \tag{121}$$

其中我们定义了$2n_0n_2=3\chi^{(3)}/4$，于是，$n_2=3\chi^{(3)}/8n_0$，并且$n_{\mathrm{eff}}(\omega,\tau)=n(\omega)+n_2I(\tau)$.

如果A满足波动方程，那么它的所有时间导数也都满足该方程。对于纵向分量，

$$\partial_z\tilde{A}+\beta^2(\omega)\tilde{A}+\omega^2\chi(\omega)\tilde{A}=0. \tag{122}$$

代入 $\omega\to i\partial_t$回到时域后，我们得到

$$\partial_z^2\mathcal{E}+\beta^2(i\partial_t)\mathcal{E}-\frac{1}{\epsilon_0}\partial_t(\chi\partial_t)\mathcal{E}=0, \tag{123}$$

其中 $\chi=\chi^{(3)}|\epsilon_0|^2/c^2$。

然后，执行到迟滞参考系的坐标变换，

$$\tau=t-\frac{z}{u},\qquad \zeta=\frac{z}{u},$$

该参考系虽然是非惯性的，但仍是有效的参考系。导数变换如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{124}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{1}{u}(\partial_\zeta-\partial_\tau). \tag{125}$$

然后 $\beta(i\partial_t)\to-\beta_2\partial_\tau^2$，代入式（123）

$$\frac{1}{u^2}(\partial_\zeta-\partial_\tau)^2\mathcal{E}+\beta^2(i\partial_\tau)\mathcal{E}-\partial_\tau\left(\frac{\chi}{\epsilon_0}\partial_\tau\right)\mathcal{E}=0, \tag{126}$$

$$(\partial_\zeta-\partial_\tau)^2\mathcal{E}-\partial_\tau\left(\frac{u^2}{c^2}n^2\partial_\tau\right)\mathcal{E}=0, \tag{127}$$

$$\left[\partial_\zeta^2-\partial_\zeta\partial_\tau-\partial_\tau\partial_\zeta+\partial_\tau\left(1-\frac{u^2}{c^2}n^2\right)\partial_\tau\right]\mathcal{E}=0. \tag{128}$$

让我们将这最后一个方程改写为相对论形式

$$\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu\mathcal{E}=0, \tag{129}$$

其中$g^{\mu\nu}$是逆度规张量，并且

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1-\frac{u^2n^2}{c^2}\end{pmatrix}. \tag{130}$$

为了得到度规张量，我们求出行列式

$$\frac{1}{g}=\det(g^{\mu\nu})=-\frac{u^2n^2}{c^2}, \tag{131}$$

最后

$$g_{\mu\nu}=\frac{c^2}{u^2n^2}\begin{pmatrix}\frac{u^2n^2}{c^2}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}. \tag{132}$$

我们可以根据度规张量将视界定义为 $g_{00}=0$；那么 $(u^2n^2/c^2)-1=0$ 意味着 $v_p=\pm u$。

4.4 单向近似

我们利用因式分解的亥姆霍兹方程，将场的正向和反向传播分量分离开来。

$$(\partial_z+i\beta(\omega))(\partial_z-i\beta(\omega))\tilde{\mathcal{E}}_\omega=-\frac{\omega^2}{\epsilon_0c^2}\tilde{\mathbf{P}}, \tag{133}$$

该方程可表示为正向和反向传播模态叠加形式的一般解

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega,z)=\tilde{\mathcal{E}}_+(\omega)e^{i\beta z}+\tilde{\mathcal{E}}_-(\omega)e^{-i\beta(\omega)z}. \tag{134}$$

如果我们假设反向传播模态可以忽略不计，即 $|\mathcal{E}_-|\ll|\mathcal{E}_+|$，那么我们可以将作用于正向模态的算符化简为

$$\partial_z+i\beta(\omega)\simeq 2i\beta(\omega). \tag{135}$$

于是方程变为

$$i\partial_z\tilde{\mathcal{E}}_\omega+\beta(\omega)\tilde{\mathcal{E}}_\omega=i\frac{\omega^2}{2u^2\beta(\omega)}\frac{\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{NL}}}{\epsilon_0}, \tag{136}$$

其中我们不写下标 $+$。最后，我们得到单向脉冲传播方程（UPPE）

$$i\partial_z\tilde{\mathcal{E}}_\omega+\beta(\omega)\tilde{\mathcal{E}}_\omega+\frac{\omega}{2cn(\omega)}\frac{\tilde{\mathbf{P}}_{\mathrm{NL}}}{\epsilon_0}=0. \tag{137}$$

5 非线性薛定谔方程的对称性

许多复杂的物理现象最适合用非线性偏微分方程（NPDEs）来建模。研究最广泛的非线性偏微分方程之一是非线性薛定谔方程（NLSE）。该方程出现在物理学的多个领域，例如流体力学、流体动力学、等离子体物理学、超导性、凝聚态物理学和非线性光学 [58]。一个重要的例子是玻色–爱因斯坦凝聚体，其中非线性薛定谔方程在形式上等价于 Gross–Pitaevskii 方程 [59]。

在这项工作中，我们聚焦于非线性光学这一领域，其中非线性薛定谔方程被用于研究波导或光纤中的脉冲传播。它是能够描述色散与非线性相互作用的最简单方程，而且重要的是，它支持孤子解。特别是，我们通过诺特定理研究其对称性和守恒量。

5.1 非线性光学中的非线性薛定谔方程

如前文所示，光脉冲的动力学既可以在实验室参考系中分析 (t，也可以在z) 共动参考系中分析 (τ,ζ)。为了在实验室参考系中推导非线性薛定谔方程，我们从方程（137）中的单向脉冲传播方程（UPPE）出发。

对于在单向近似下沿z轴传播的脉冲，并假设脉冲为窄带脉冲，单向脉冲传播方程可简化为

$$\partial_z\tilde{\mathcal{E}}(z,\omega)=i[\beta(\omega)-\beta(\omega_0)]\tilde{\mathcal{E}}(z,\omega)+i\frac{\omega^2}{2c^2\beta(\omega)}\tilde{P}_{\mathrm{NL}}(z,\omega), \tag{138}$$

其中，波数由色散关系定义：$k^2(\omega)=\omega^2\epsilon(\omega)/c^2$ 以及$n^2(\omega)=\epsilon(\omega)$。按照标准方法，[60], 有效介电常数 ϵ 包含介质的非线性克尔响应，

$$\epsilon(\omega)=1+\chi^{(1)}(\omega)+\frac{3}{4}\chi^{(3)}|\mathcal{E}(z,t)|^2. \tag{139}$$

对中心频率ω_0附近的传播常数 $\beta(\omega)$进行泰勒展开：

$$\beta(\omega)\approx\beta_0+\beta_1(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\beta_2(\omega-\omega_0)^2+\ldots, \tag{140}$$

其中 $\beta_n=\partial_\omega^n\beta\big|_{\omega_0}$。将此展开代入传播方程，并通过代换 $i(\omega-\omega_0)\to\partial_t$变换回时域，得到实验室参考系中的非线性薛定谔方程：

$$i\partial_z\mathcal{E}+i\beta_1(\omega_0)\partial_t\mathcal{E}-\frac{1}{2}\beta_2(\omega_0)\partial_t^2\mathcal{E}=0. \tag{141}$$

为简化分析，我们转到共动参考系，其坐标由方程（80）定义，流速为$u=1/\beta_1$。解析信号在共动参考系中的非线性薛定谔方程为

$$i\partial_\zeta\mathcal{E}-\frac{1}{2}\beta_2\partial_\tau^2\mathcal{E}+\gamma|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}=0, \tag{142}$$

其中非线性项 $|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$ 表示自相位调制（SPM）[60]。非线性系数 γ 由光纤模式 $B(x,\ y)$ 的重叠积分

$$\gamma=\gamma(\omega_0)=\frac{n_2\omega_0}{cA_{\mathrm{eff}}},\qquad A_{\mathrm{eff}}=\frac{\left(\iint|B(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^2}{\iint|B(x,y)|^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}. \tag{143}$$

5.2 非线性薛定谔方程的拉格朗日形式

为了建立非线性薛定谔方程的拉格朗日形式，我们从经典场论的逆向视角来处理这个问题：已知运动方程，但必须构造相应的拉格朗日密度。我们在实验室参考系 $(t、z)$中进行这项分析，以便先解释守恒量，再回到共动参考系 (ζ,τ)。

我们考虑非线性薛定谔方程的一个具有反常群速度色散 $\beta_2<0$ 和排斥型非线性$\gamma>0$的版本。

$$i\partial_t\mathcal{E}+\frac{\beta_2}{2}\partial_z^2\mathcal{E}+\gamma|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}=0. \tag{144}$$

By e考察非线性薛定谔方程的结构，我们提出如下拉格朗日密度 [61]

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}(\mathcal{E}^*\partial_t\mathcal{E}-\mathcal{E}\partial_t\mathcal{E}^*)-\frac{\beta_2}{2}|\partial_z\mathcal{E}|^2+\frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}. \tag{145}$$

由于作用量是独立变量的泛函，我们在变分法中将场 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^*$ 视为彼此独立。应用欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{\delta L}{\delta\phi_\alpha}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha}-\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\phi_\alpha)}=0, \tag{146}$$

其中 $\phi_\alpha\in\{\mathcal{E},\mathcal{E}^*\}$ 表示独立正则场的集合。对于场 $\mathcal{E}$，变分得到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{E}^*}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\mathcal{E}^*)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{E}^*}-\partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\mathcal{E}^*)}-\partial_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_z\mathcal{E}^*)}=0 \tag{147}$$

$$i\partial_t\mathcal{E}+\frac{\beta_2}{2}\partial_z^2\mathcal{E}+\gamma|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}=0, \tag{148}$$

其中我们对指标求和 $\mu=0,\ 1$，分别对应坐标 t 和z。对 $\mathcal{E}^*$ 进行类似处理，可得复共轭方程。这一验证证实，式（145）是非线性薛定谔方程的正确拉格朗日密度。

5.3 守恒荷

现在我们转而分析非线性薛定谔方程的对称性。根据诺特第一定理，每个连续对称性都对应一个以连续性方程表示的守恒定律

$$\partial_t\rho(z,t)+\partial_z j(z,t)=0, \tag{149}$$

其中 ρ 是荷密度，j 是密度流。相应的守恒量是总荷Q，其表达式为

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(z,t)\,\mathrm{d}z. \tag{150}$$

I在光纤的背景下，我们将这一框架应用于三种基本对称性 s.

5.3.1 U(1) 对称性

我们首先验证式（145）中非线性薛定谔方程的拉格朗日量在$U(1)$变换 $\mathcal{E}'=\mathcal{E}e^{i\varphi}$下不变：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'&=\frac{i}{2}[\mathcal{E}'^*\partial_t(\mathcal{E}')-\mathcal{E}'\partial_t(\mathcal{E}'^*)]-\frac{\beta_2}{2}|\partial_z(\mathcal{E}')|^2+\frac{\gamma}{2}(\mathcal{E}'^2)(\mathcal{E}'^{*2})\\&=\frac{i}{2}\left[\mathcal{E}^*e^{-i\varphi}\partial_t(\mathcal{E}e^{i\varphi})-\mathcal{E}e^{i\varphi}\partial_t(\mathcal{E}^*e^{-i\varphi})\right]-\frac{\beta_2}{2}\left|\partial_z(\mathcal{E}e^{i\varphi})\right|^2+\frac{\gamma}{2}(\mathcal{E}^2e^{2i\varphi})(\mathcal{E}^{*2}e^{-2i\varphi})\\&=\frac{i}{2}(\mathcal{E}^*\partial_t\mathcal{E}-\mathcal{E}\partial_t\mathcal{E}^*)-\beta_2|\partial_z\mathcal{E}|^2+\frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}=\mathcal{L}.\end{aligned} \tag{151}$$

对于带有 $\varphi \to \delta\varphi$ 的无穷小变换，场的变分为 $\delta\mathcal{E} = i\delta\varphi\mathcal{E}$，或

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\varphi} = i\mathcal{E}. \tag{152}$$

应用诺特定理，我们得到方程

$$\partial_t|\mathcal{E}|^2 - i\frac{\beta_2}{2}\partial_z(\mathcal{E}^*\partial_z\mathcal{E} - \mathcal{E}\partial_z\mathcal{E}^*) = 0. \tag{153}$$

这一结果与连续性方程的形式相符（149），因此我们可以将守恒量识别为总范数（或准粒子数）：

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}|^2 \,\mathrm{d}z. \tag{154}$$

在文献中，$\mathcal{N} = |\mathcal{E}|^2$ 通常被解释为光子数密度 [58] 或其经典类比系统。

5.3.2 空间对称性与线动量

作用量

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2}(\mathcal{E}^*\partial_t\mathcal{E} - \mathcal{E}\partial_t\mathcal{E}^*) - \frac{\beta_2}{2}|\partial_z\mathcal{E}|^2 + \frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t, \tag{155}$$

在空间平移 $z \to z + \delta z$下保持不变。这种连续对称性意味着存在一个与应力-能量张量 (j_z, ρ_z)相关的守恒量，其形式为连续性方程。

对于空间平移，守恒定律的形式为

$$\frac{i}{2}\partial_t(\mathcal{E}^*\partial_z\mathcal{E} - \mathcal{E}\partial_z\mathcal{E}^*) - \frac{1}{2}\partial_z\left[i(\mathcal{E}^*\partial_t\mathcal{E} - \mathcal{E}\partial_t\mathcal{E}^*) + \beta_2|\partial_z\mathcal{E}|^2 + \gamma\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}\right] = 0. \tag{156}$$

这个方程已经具有守恒方程的形式。对空间区域内的密度 ρ_z积分，我们便可得到守恒量，即线动量：

$$P = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{E}^*\partial_z\mathcal{E} - \mathcal{E}\partial_z\mathcal{E}^*)\,\mathrm{d}z. \tag{157}$$

5.3.3 时间对称性与哈密顿量

式（155）中的作用量在时间平移 $t \to t + \delta t$下也保持不变。根据诺特定理，这种对称性导致哈密顿量守恒；在非线性光学中，哈密顿量代表光场的总能量（或与其成正比的量）。

将该变换应用于拉格朗日密度 $\mathcal{L}$，我们通过对 $\mathcal{L}$ 关于“速度” $\partial_t\mathcal{E}$进行勒让德变换，定义哈密顿量密度 $\mathcal{H}$：

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\mathcal{E})}\partial_t\mathcal{E} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\mathcal{E}^*)}\partial_t\mathcal{E}^* - \mathcal{L}. \tag{158}$$

将修正后的拉格朗日密度代入此表达式后，含时间导数的项相互抵消，留下空间项和非线性项

$$\partial_t\left(\frac{\beta_2}{2}|\partial_z\mathcal{E}|^2 - \frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}\right) - \frac{\beta_2}{2}\partial_z(\partial_z\mathcal{E}^*\partial_t\mathcal{E} + \partial_z\mathcal{E}\partial_t\mathcal{E}^*) = 0. \tag{159}$$

这个方程已经具有连续性方程的形式。我们可以将哈密顿量密度识别为

$$\mathcal{H} = \frac{\beta_2}{2}|\partial_z \mathcal{E}|^2 - \frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}. \tag{160}$$

对密度 $\mathcal{H}$ 在整个空间区域内积分，可得守恒的哈密顿量 H:

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\beta_2|\partial_z \mathcal{E}|^2 - \gamma\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}\right] \mathrm{d}z, \tag{161}$$

只要作用量显式地不依赖时间，该量在场 $\mathcal{E}$ 演化过程中就保持不变。从物理角度看，第一项表示与色散（群速度色散）相关的动能，而第二项表示由场的非线性（自相位调制）产生的势能。在反常色散区（$\beta_2 < 0$），这两项可以完美平衡，从而形成稳定、不发生衍射的波包，即所谓的孤子。

5.4 非线性薛定谔方程的哈密顿形式

哈密顿量 H 已在式（161）中通过诺特定理推导得出，它是与时间对称性相关的守恒量。不过，通过勒让德变换重新推导它颇有启发性。

根据公式（145）中的拉格朗日量，正则动量定义为

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \mathcal{E})} = \frac{i}{2}\mathcal{E}^*, \qquad \pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \mathcal{E}^*)} = -\frac{i}{2}\mathcal{E}. \tag{162}$$

因此，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H} = \pi\,\partial_t \mathcal{E} + \pi^*\,\partial_t \mathcal{E}^* - \mathcal{L} = \frac{\beta_2}{2}|\partial_z \mathcal{E}|^2 - \frac{\gamma}{2}\mathcal{E}^2\mathcal{E}^{*2}, \tag{163}$$

这与先前通过诺特定理得到的形式相同。

我们还可以通过 $\mathcal{H}$ 应用复数形式的哈密顿方程 [33]，得到非线性薛定谔方程:

$$i\partial_t a = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^*} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_\beta a^*)}. \tag{164}$$

在我们的具体情况下，这给出

$$\begin{aligned} i\partial_t \mathcal{E} &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathcal{E}^*} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{E}^*} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_\beta \mathcal{E}^*)} \\ i\partial_t \mathcal{E} &= -\frac{\beta_2}{2}\partial_z^2 \mathcal{E} - \gamma|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}, \end{aligned} \tag{165}$$

这就是非线性薛定谔方程。

对式（164）取复共轭，可得取复共轭后的非线性薛定谔方程。若泊松括号满足以下条件，则可从哈密顿量得到一个守恒荷Q：

$$\{Q, H\} = 0. \tag{166}$$

这种方法尤其有价值，因为并非所有守恒量都源自连续对称性，因而也并非都源自诺特定理。

作为示例，我们证明N、P和H 确实是守恒量。对于光子数N:

$$\{N,H\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta N}{\delta \mathcal{E}} \dot{\mathcal{E}} + \frac{\delta N}{\delta \mathcal{E}^*} \dot{\mathcal{E}}^* \right] \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{E}^* \dot{\mathcal{E}} + \mathcal{E} \dot{\mathcal{E}}^*) \mathrm{d}z \tag{167}$$
$$= i \frac{\beta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z (\mathcal{E}^* \partial_z \mathcal{E} - \mathcal{E} \partial_z \mathcal{E}^*) \, \mathrm{d}z = 0.$$

同样，对于动量 P:

$$\{P,H\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta P}{\delta \mathcal{E}} \dot{\mathcal{E}} + \frac{\delta P}{\delta \mathcal{E}^*} \dot{\mathcal{E}}^* \right] \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} [(-\partial_z \mathcal{E}^*) \dot{\mathcal{E}} + (\partial_z \mathcal{E}) \dot{\mathcal{E}}^*] \mathrm{d}z \tag{168}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z \left[\frac{\beta_2}{2} |\partial_z \mathcal{E}|^2 + \frac{\gamma}{2} \mathcal{E}^2 \mathcal{E}^{*2} \right] \mathrm{d}z = 0.$$

另一方面，如果 H 不显含 t，如本例所示，则根据构造，{H,H} 为零

$$\{H,H\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\delta H}{\delta \mathcal{E}} \dot{\mathcal{E}} + \frac{\delta H}{\delta \mathcal{E}^*} \dot{\mathcal{E}}^* \right] \mathrm{d}z = 0. \tag{169}$$

注意，由于复数哈密顿方程的结构，泊松括号 {Q,H}不包含关于 π 的变分导数，因为正则动量与场本身成正比，因此求导是等价的。

得到哈密顿量 H后，我们就可以对非线性薛定谔方程进行量子化。在正则量子化下，对易关系

$$[\hat{\mathcal{E}}(z,t), \hat{\pi}(z',t)] = \delta(z-z'), \tag{170}$$

与 $\hat{\pi} = \hat{\mathcal{E}}^\dagger$。由此得到哈密顿算符

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta_2}{2} (\partial_z \hat{\mathcal{E}}^\dagger)(\partial_z \hat{\mathcal{E}}) - \frac{\gamma}{2} \hat{\mathcal{E}}^\dagger \hat{\mathcal{E}}^\dagger \hat{\mathcal{E}} \hat{\mathcal{E}} \right] \mathrm{d}z, \tag{171}$$

为简便起见，我们假设采用正规序，不过非线性项的顺序可以从微观模型推导得出 [54] 。值得注意的是，尽管物理背景截然不同，这个哈密顿量与玻色–爱因斯坦凝聚体中的 Gross–Pitaevskii 方程具有相同的数学结构。这种结构上的相似性体现了非线性薛定谔方程在不同物理领域中的根本重要性。

5.5 共动参考系中的非线性薛定谔方程

现在，让我们转而研究式（142）所示的共动参考系中的非线性薛定谔方程。在这一参考系中分析其对称性尤其有趣，因为这些对称性不同于实验室参考系中的对称性。

5.5.1 共动频率

变换参考系的动机，源于我们希望研究这样的情形：强泵浦脉冲定义了一个静态背景，从而使我们能够描述光脉冲在该参考系中保持静止的非线性光学过程。

我们考虑一个处于孤子区间的泵浦脉冲，记作 $\mathcal{E}_0$，它通过克尔效应与光纤相互作用，从而建立起一个背景场。叠加在

这一背景上的涨落 ψ 充当探测信号，在由泵浦定义的有效背景中演化。该背景在共动参考系中是静止的，即 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\tau) \neq \mathcal{E}_0(\zeta)$。

为分析系统的动力学，我们进行泵浦-探测分离 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 + \psi$，并将此表达式代入共动坐标中的非线性薛定谔方程

$$i\partial_\zeta(\mathcal{E}_0+\psi)+\frac{\beta_2}{2}\partial_\tau^2(\mathcal{E}_0+\psi)+\gamma|\mathcal{E}_0+\psi|^2(\mathcal{E}_0+\psi)=0. \tag{172}$$

从数学上讲，这种变换在场中引入了一个微扰，类似于玻色–爱因斯坦凝聚体中的 Bogoliubov–de Gennes 公式 [62]。将其按 ψ展开至一阶，我们得到线性化方程

$$i\partial_\zeta\mathcal{E}_0+\frac{\beta_2}{2}\partial_\tau^2\mathcal{E}_0+\gamma|\mathcal{E}_0|^2\mathcal{E}_0+i\partial_\zeta\psi+\frac{\beta_2}{2}\partial_\tau^2\psi+\gamma[2\psi|\mathcal{E}_0|^2+\mathcal{E}_0^2\psi^*]=0. \tag{173}$$

前三项对应于 $\mathcal{E}_0$ 的非线性薛定谔方程，我们假设该方程成立，因此将这几项设为零。剩余方程包含两个非线性项，分别表示交叉相位调制（XPM）和四波混频（FWM）。我们通过采用所谓的旋波近似（RWA），明确关注由 $\psi\psi^*$ 项描述的 XPM 过程。忽略反向旋转分量（即去掉 ψ^* 项），在反向旋波近似 [54]，下是合理的，因为相位匹配失配使四波混频贡献非常微弱。由此得到涨落的演化方程：

$$i\partial_\zeta\psi+\frac{\beta_2}{2}\partial_\tau^2\psi+2\gamma|\mathcal{E}_0|^2\psi=0. \tag{174}$$

注意其中的因子 2，它源于自相互作用与同背景场相互作用（交叉相位调制，XPM）之间的区别。该方程可由拉格朗日密度推导得出。

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}\left(\psi^*\partial_\zeta\psi-\psi\,\partial_\zeta\psi^*\right)-\frac{\beta_2}{2}|\partial_\tau\psi|^2+\gamma(\mathcal{E}\mathcal{E}^*\psi\psi^*). \tag{175}$$

由于背景场 $\mathcal{E}_0$ 仅依赖于 τ，而不依赖于 ζ，拉格朗日密度不显含 ζ。因此，它在平移 $\zeta \to \zeta + \mathrm{d}\epsilon$ 下保持不变，根据诺特定理，与这一对称性相对应的守恒量存在。

为明确求出该守恒量，我们计算与 ψ 和 ψ^*共轭的正则动量：

$$\pi_\psi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\zeta\psi)}=\frac{i}{2}\psi^*,\qquad \pi_{\psi^*}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\zeta\psi^*)}=-\frac{i}{2}\psi. \tag{176}$$

哈密顿量密度定义为

$$\mathcal{H}=\pi_\psi\partial_\zeta\psi+\pi_{\psi^*}\partial_\zeta\psi^*-\mathcal{L}, \tag{177}$$

代入正则动量以及式（$\mathcal{L}$ 175）中 的显式形式后， ζ导数项恰好抵消，得到

$$\mathcal{H}=\frac{i}{2}\psi^*\partial_\zeta\psi-\frac{i}{2}\psi\partial_\zeta\psi^*-\mathcal{L}, \tag{178}$$

然后，利用 $\mathcal{L}$ 在式（175）中的显式形式， ζ的导数项恒等相消，我们得到

$$\mathcal{H}=\frac{\beta_2}{2}|\partial_\tau\psi|^2-\gamma|\mathcal{E}_0(\tau)|^2|\psi|^2. \tag{179}$$

相应的守恒量为

$$H = \int d\tau\, \mathcal{H}, \tag{180}$$

其满足

$$\frac{dH}{d\zeta} = 0, \tag{181}$$

因此，形式为 $\psi(\zeta,\tau) \propto e^{-i\omega'\zeta}$ 的模态以恒定的共动频率ω'传播。 ω' 的守恒直接源于沿着 ζ 的平移不变性。

然而，在实验室坐标 (t,z) 中，背景孤子为 $\mathcal{E}_0(\tau) = \mathcal{E}_0(t - z/u)$，显式依赖于实验室时间 t 和传播距离z。因此，拉格朗日量具有显式的时间和空间依赖性，从而破坏了实验室参考系中的时间演化对称性和平移不变性。因此，实验室频率 ω和实验室动量 k 均不单独守恒；只有它们的一个精确组合（即共动频率）仍保持不变，该组合由速度 u定义。

6 类比系统霍金辐射光纤实验时间线

关于类比引力本身的全面历史，可参见 Barceló、Liberati 和 Visser 撰写的精彩综述 [16]。本节将简要概述这段历史，随后重点回顾光纤光学类霍金辐射实验这一特定领域的发展历程。本文叙述以关键实验为依据，并探讨这些实验如何塑造了我们对这种类比及其背后非线性光学原理的认识。

在 1974 [9], 提出天体物理学霍金辐射之后，William Unruh 于 1981 [14]提出了运动流体中的一种类似效应。尽管 Unruh 的研究在此后十年间基本无人问津，Ted Jacobson 于 1991 [19] 发表的一篇开创性论文重新点燃了科学界对这一领域的兴趣。这引发了人们对类比度规实验实现方式的深入探索。研究者起初将重点放在超流体上——尤其是 Grigory Volovik 研究的氦-3 和氦-4 [63]——之后又将目光拓展至其他系统。这些系统包括水槽 [21, 64], 、玻色–爱因斯坦凝聚体 [24, 65] 以及光纤光学 [27]。最后一种系统正是本文的重点。

以下各节将详细介绍光纤光学中类比系统霍金辐射的各项里程碑实验，并阐明其背后的相关理论。本文旨在概述，而非撰写综述，因此我们着重介绍关键进展，同时也尽力肯定更广泛的科学界所做的大量工作。对于未能在此提及其研究成果的科学家，我们深表歉意。

6.1 2008年圣安德鲁斯实验

Ulf Leonhardt 曾尝试在 2002 [66]利用原子蒸气中的慢光，但未能成功。此后，Ulf Leonhardt 和 Friedrich König 的研究团队合作，预测并测量了经典频移。这种频移是霍金辐射效应的标志，也称为正频霍金辐射（PHR）。这项研究发表于《科学》杂志，时间为 2008 [27]。

实验通过光纤传输一个泵浦脉冲，同时注入连续波（CW）探针，使其与泵浦脉冲相互作用；这种相互作用源于泵浦脉冲通过克尔效应或自相位调制（SPM）引起的折射率变化。泵浦为一个 100 fs、中心波长为 800 纳米、重复频率为 76 MHz 的孤子。探测光为一台中心波长为

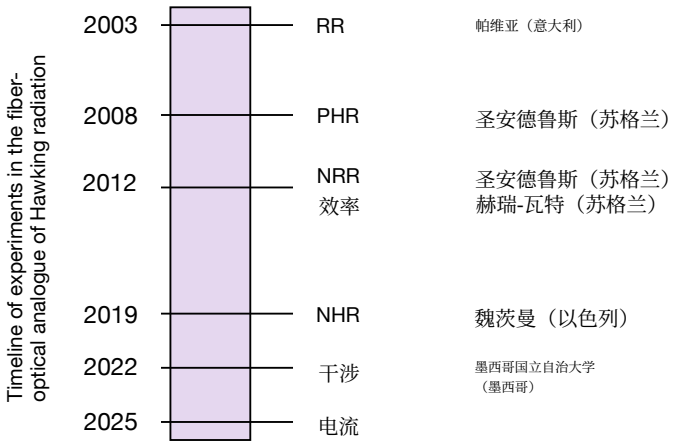


图13：类霍金辐射及其他共振过程的光纤实验时间线。

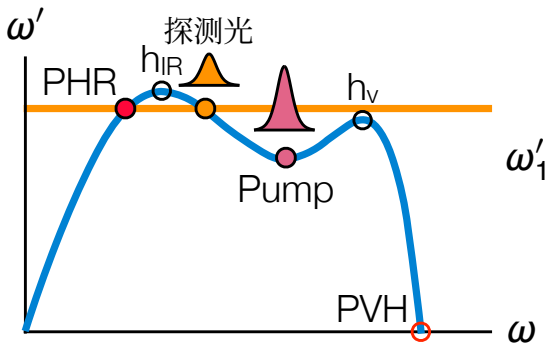


图14：说明共动频率守恒条件下频移的色散关系。PVH 是相速度视界，h_{IR} 和 h_V分别是红外和可见光群速度视界。

1500 纳米的连续波激光。所用光纤是一段长 1 m 的光子晶体光纤（PCF）。选择光子晶体光纤对于调整色散曲线至关重要，这可确保存在一个有限的反常群速度色散（GVD）区域，并实现第 4.2 节提到的视界条件。

如第 3.2 节所示，泵浦和光纤构成了背景，形成了研究探测光的有效运动几何。在这一配置中，泵浦打破了实验室中的时间和空间对称性。因此，在这种条件下，实验室能量和动量均不守恒。然而，可以恢复传播时间 $\zeta = z/u$ 对称性，从而使共动频率 ω' 保持守恒 $\Delta\omega' = 0$。

探测脉冲在这一守恒定律下传播。在这种条件下，共动频率保持守恒，因此对发射频率偏移或 PHR 的预测为

$$\omega'_{\mathrm{PHR}} = \omega'_{\mathrm{probe}}. \tag{182}$$

这一条件如图 14所示。为便于说明，我们用一个具有有限反常群速度色散的通用色散关系形状来表示。实际的色散关系在定性上相同，并得出相同的物理预测；只是绘制真实的色散关系稍微不太方便（见参考文献 [30]中的图 1）。这幅图的一个关键特征是群速度视界，其定义为频率 ω_h，此处群速度

与泵浦速度 $v_g(\omega_{\mathrm{h}}) = v_g(\omega_{\mathrm{pump}}) = u$ 相匹配。这个等式可写为

$$\frac{\mathrm{d}\omega'(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0. \tag{183}$$

对于这种形状的色散关系，有两个频率分别满足红外和可见光下的这一视界条件h_{ir} 和h_{v} 。

在这些条件下，泵浦与探测光在共动参考系中的相互作用，类似于脉冲前沿处黑洞视界的运动学过程，使探测频率发生红移。相反，脉冲后沿则如同白洞视界，使探测频率发生蓝移，见图6。如图15所示，该模型仅通过共动频率守恒即可预测频移后的实验室频率。

还值得指出的是，这是首次利用共动频率守恒 $\Delta\omega' = 0$ 来预测一种新的光学信号。值得注意的是，满足所谓的共振条件，即共动能量守恒 $\Delta\omega' = 0$，便足以产生新的输出频率，而无需满足相位匹配条件。相位匹配条件包括实验室能量守恒 $\Delta\omega = 0$和实验室动量守恒 $\Delta k = 0$。2008年的理论预测和实验探测似乎证实了这一点。不过，已有的过程也可以在这种共振条件下重新诠释和解释。这就是所谓的光纤中的切伦科夫辐射，也称为色散波和共振辐射。因此，我们将在下一节重新探讨一项先前的实验。

6.2 重访2003年帕维亚实验

首个被预测并测量、符合共振条件的效应，数十年来一直受到研究；它就是共振辐射，不过它也有多个不同名称，包括色散波、切伦科夫辐射和非孤子辐射。这一现象很可能最早由马里兰大学的Wai等人通过数值计算，在光纤中预测于 1987 [67]。

1995年，Akhmediev和Karlsson的开创性论文 [68] 将光纤中孤子发射的色散波重新解释为切伦科夫效应：该效应发生在沿光纤传播的孤子或泵浦脉冲的（1+1）维共动参考系中。发射信号必须满足条件 [32]

$$\beta(\omega_{\mathrm{RR}}) = \beta\omega_{\mathrm{pump}} + \frac{\omega_{\mathrm{RR}} - \omega_{\mathrm{pump}}}{v_{\mathrm{g}}}. \tag{184}$$

Th该表达式在数学上等价于共动频率守恒

$$\Delta\omega' = 0, \tag{185}$$

根据我们在第 5.5 节中的推导。因此，这种辐射现在也称为共振辐射，而共动频率守恒条件则称为共振条件。发射信号的强度与孤子在预测的共振频率处的光谱功率成正比。因此，产生共振辐射需要超短脉冲（通常为100 fs或更短）和高强度（通常孤子数为$N \simeq 2$）。这种以标准近似失效为特征的状态称为极端非线性光学（XNLO） [30]——这也是观测霍金辐射光学类比所需的领域。

首次实验测量直到2003年才由帕维亚的Tartara等人完成 [69]。一个关键步骤是St. J. Russell等人研制光子晶体光纤（PCF）。

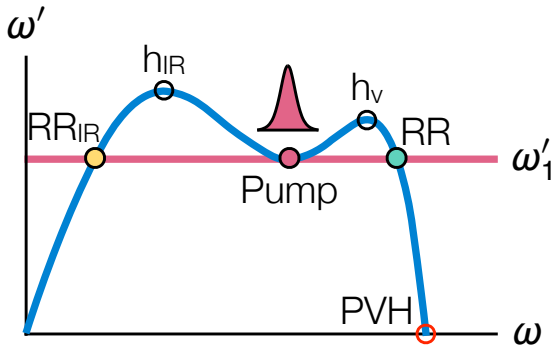


图 15：色散关系 $\omega'(\omega)$说明，泵浦的 ω' 守恒导致了共振辐射（RR）的条件。

于1996年，见参考文献 [70]。实验装置如下。一台脉宽为190 fs、波长为810纳米、且具有 $N = 1$，即基阶孤子的脉冲激光器被耦合进入一根40厘米长的光子晶体光纤，并报告了位于430纳米处的蓝移窄带可见光分量，即共振辐射。该信号构成了共振辐射的首次实验观测，转换效率高达24%。

6.3 2012年赫瑞-瓦特与圣安德鲁斯实验

在澄清共振条件的物理实在性之后，参与 2008 年圣安德鲁斯实验的同一研究团队认识到，类霍金效应的预言蕴含着更深层的意义：存在一个具有负共动频率的霍金伙伴。当时，人们对这些负共动频率是否代表真实的物理态 [71] ，以及它们是否能与正频率发生有意义的混合并产生新的可探测信号，仍存在争议。然而，团队推测，这个负频率扇区最容易观测到的特征可能并非霍金伙伴本身，而是负频共振辐射（NRR）。从数学上说，与 RR 中正共动频率下的守恒关系不同 ω' RR = ω' 泵浦，NRR 对应的条件为

$$\omega'_{\mathrm{NRR}} = -\omega'_{\mathrm{pump}}. \tag{186}$$

标准色散模型很少考虑该信号预期出现的紫外（UV）区域。然而，利用扩展的色散模型，该团队预测，若负频共振辐射存在，它将出现在紫外范围内，约在230纳米处。赫瑞-瓦特大学由Daniele Faccio领导的实验组与圣安德鲁斯大学由Friedrich König领导的实验组开展合作，并得到Ulf Leonhardt理论组的支持，以测量这一信号。由此产生的工作给出了两组测量结果：一组在块体介质中的光学丝中，另一组在光子晶体光纤中。这些测量为证明负频率模式的物理实在性及其与正频率场的非线性耦合迈出了关键一步。

预测的负频共振辐射信号源于这样一种匹配条件：泵浦的相位匹配线与共动参考系中色散关系的负频率分支相交。在2012年实验中，研究人员采用了多种光子晶体光纤，并成功测得了218–233纳米范围内的负频共振辐射。这一发现证实，光学光谱的“负频率”一侧并非仅仅是数学伪象，而是极端非线性光学中的动态参与者。

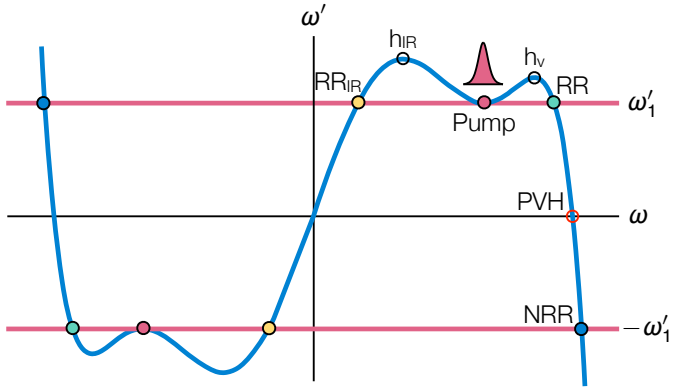


图 16：色散关系 $\omega'(\omega)$显示负频共振辐射（NRR）的条件，位于 $-\omega'_1$。

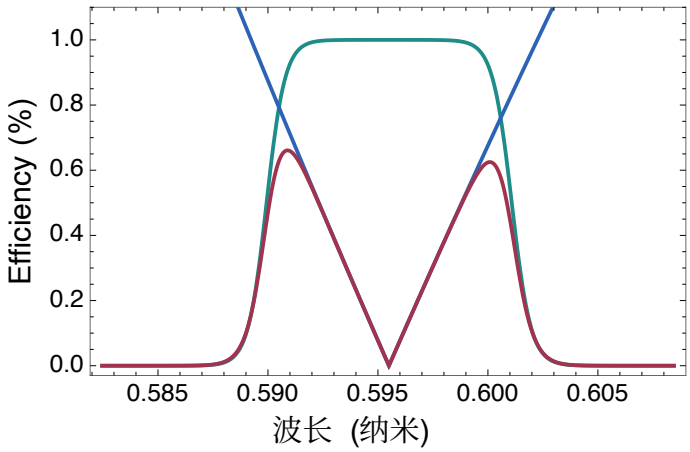


图 17：595 纳米处可见视界附近频移的效率（红色）。它是两个因素的乘积：与视界碰撞的光量（蓝色）和反射系数（绿色）。

6.4 2012 年圣安德鲁斯实验

2012年，Friedrich König 团队基于波动方程的解（其形式为非线性薛定谔方程），并在泵浦-探测近似下基于实际的薛定谔方程，建立并检验了关于 PHR 效率的理论 [72]。

如第 5 节所述，脉冲传播的基本模型是非线性薛定谔方程。然而，在泵浦-探测近似下，探测场的方程经过线性化处理。线性化后，系统可化为薛定谔型方程，其中脉冲强度 $I(\tau)$ 充当有效势垒，而共动频率 ω'——具体而言，它与视界频率 ω' h 的差值——则充当粒子的有效能量。

研究团队进行了一系列实验，以验证这一隧穿模型。受激霍金辐射的效率很大程度上取决于泵浦脉冲与连续波探针之间的群速度失配。具体而言，转换效率取决于探测频率与视界频率 ω' h 接近的程度；在该频率处，势垒最容易被“隧穿”或反射。由此得到的效率曲线呈现出图 17 所示的特征曲线。

这一实验验证具有重要意义，因为它超越了对频移的单纯观测，开始刻画类比视界的散射振幅，从而为底层的QFTCS框架提供了定量联系。

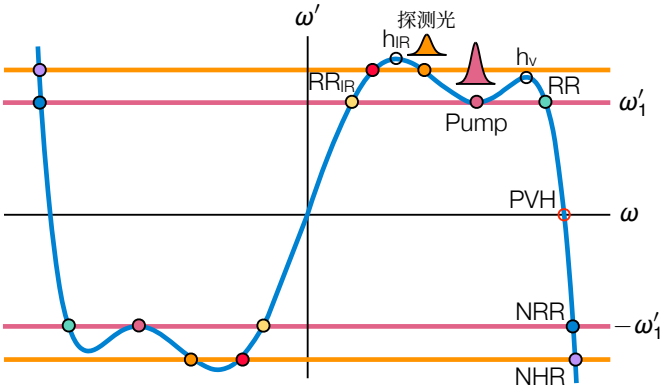


图18：色散关系 $\omega'(\omega)$显示负频率霍金辐射（NHR）的发射条件。

6.5 2019年魏茨曼实验

从2012年实验出发的逻辑推进，是对霍金伙伴的直接测量，该伙伴也称为负频霍金辐射（NHR）。然而，探测这一模式被证明比预期复杂得多。尽管NHR被预言会出现在先前测得的负频共振辐射附近的频谱区域，但研究发现，使用连续波探针时的转换效率不足以进行探测。

因此，需要脉冲探针来增强非线性相互作用，这项任务要求两个超短脉冲之间实现精确的亚皮秒同步。2019年，魏茨曼科学研究所的Ulf Leonhardt课题组成功报道了对NHR的测量。为确保时间相干性，泵浦与探测光均由同一主激光器产生。具体而言，探测光通过拉曼脉冲内频移（RIFS）被调谐至红外视界 [73]。初始脉冲被分成两部分；其中一部分送入预传播光纤，孤子自频移使其红移至视界频率（如图18所示）。

完成这一步准备后，将泵浦和红移后的探测光耦合进相互作用光纤中，并使二者在时间上同步重叠，从而产生 NHR。NHR 遵循与 PHR 类似的共振条件，但具有负共动频率：

$$\omega'_{\mathrm{NHR}} = -\omega'_{\mathrm{probe}}. \tag{187}$$

值得注意的是，相较于 NRR 信号，该条件产生的信号仅蓝移约 1 纳米。为了将 NHR 与这一邻近背景信号区分开，研究人员进行了两项不同的实验：一项仅使用泵浦，记录紫外波段的 NRR 基线；另一项同时使用泵浦和探测光，获取 NRR 与 NHR 的组合光谱。从组合测量结果中减去基线，首次清晰地证实了受激霍金伴生体。实验使用了在 7 毫米光子晶体光纤中传输的 800 纳米、8 飞秒脉冲。

6.6 2022 年墨西哥国立自治大学实验

2022年，墨西哥国立自治大学（UNAM）的一支研究团队报告了首次对两个正频霍金辐射（PHR）信号之间干涉的测量。通过发射两个同步探测脉冲，使其与单个泵浦孤子相互作用，他们证明产生的霍金辐射实现了相位锁定。这项干涉实验证实了霍金信号的相干性——这是未来开展量子关联研究的一项关键要求。

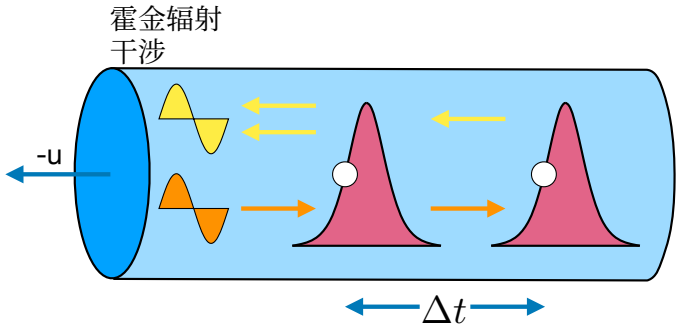


图19：由连续波探针（橙色）与双泵浦脉冲（红色）相互作用所激发的两个类霍金辐射信号（黄色）的干涉。

值得注意的是，该团队利用相长干涉，使信号的峰值强度提高了四倍（4×），同时未扭曲其光谱形状。这项实验的另一重要意义在于，它是在位于可见光谱内、接近 650 纳米的第二个群速度视界处进行的（见图 18）。通过成功将相互作用转移到这一可见光频率范围，该团队进一步证明，共振条件能够在不同色散机制下准确预测实验室测得的信号，具有良好的稳健性。

6.7 当前实验

至此，我们对与霍金辐射的光学类比系统相关的里程碑实验作了简要综述。然而，重大挑战依然存在。尤其是，迄今讨论的几乎所有实验都运行于受激的经典区，而非自发的量子区。当前的活跃研究聚焦于进入量子区，同时也致力于通过超越极端非线性光学（XNLO）中所用的标准近似来拓展共振信号理论。

该领域依然异常活跃，新的实验突破预计不久就会出现。一个主要目标是在光学中直接测量自发霍金辐射，这将受到学界的热烈欢迎。光纤平台尤其适合这项任务，因为在现代光学实验室中，单光子的直接探测已属常见。此外，还可在霍金辐射与其伙伴之间进行若干“量子性”统计检验，以验证它们所预言的量子纠缠，从而为霍金效应提供决定性的特征标志。

7 结论

在本文中，我们探讨了光纤中类比引力的理论与实验全貌。这一领域架起了黑洞物理学与非线性量子光学之间的桥梁。这项工作的核心，在于运动介质中的光与弯曲时空中的场之间存在形式上的类比。正如我们所阐明的，激光脉冲的折射率梯度相当于一次坐标变换；脉冲的群速度会为探测波或量子探测场的真空态形成阻挡视界。这种映射使我们能够在光纤实验室的实验环境中研究黑洞的运动学性质，例如事件视界和表面引力。

通过运用单向脉冲传播方程（UPPE）和非线性薛定谔方程（NLSE），我们阐明了强孤子在色散介质中传播时如何形成这种运动几何。我们推导了拉格朗日量和哈密-

尔顿形式体系，并随后应用诺特定理，凸显了对称性在这些系统中的根本作用。我们证明，尽管由于泵浦的存在，实验室能量和动量并不守恒，但共动频率 ω' 保持不变。这一守恒定律是基本共振条件，可预测正频霍金辐射（PHR）、其负频伙伴（NHR）以及与之密切相关的共振辐射（RR）和负频等效辐射（NRR）的频移。

最后，我们决定按照历史时间线讨论关键实验——从圣安德鲁斯的首次提议，到魏茨曼和墨西哥国立自治大学近期取得的突破。实验结果的演变凸显了该领域令人瞩目的转变：从2008年仅仅观测到频移，到2019年精密探测到霍金伙伴，再到2022年验证信号相干性。这些里程碑证明，光学光谱中的“负频率”一侧是一种动态现实，可借助极端非线性光学（XNLO）的工具加以观测。

展望未来，我们的最终目标仍是明确探测到自发量子霍金辐射。尽管本文讨论的实验主要利用受激发射，光子晶体光纤（PCF）平台具有独特优势，有望进入量子区。单光子计数的高精度，以及在霍金模与其伙伴之间进行纠缠验证的能力，为观测“真正的”霍金对提供了一条途径。

总之，研究光学视界不只是模拟黑洞；它还验证了弯曲时空中的量子场论（弯曲时空量子场论）的稳健性，并挑战了我们对极端条件下光与物质相互作用的理解。光纤类比证明了物理学的普适性，表明宇宙的奥秘确实可以在一米（甚至更短）的玻璃光纤中找到。

致谢

作者谨向 Ivan Agullo、Maxime Jacquet、Dimitrios Kranas、Nicholas Pavloff、Scott Robertson、Justin Wilson 和 Iacopo Carusotto 致谢，感谢他们提供的宝贵讨论。

资助信息 DB谨此感谢Marcos Moshinsky讲席（2024年）以及科学、人文、技术与创新秘书处（墨西哥）SNI-62547的支持。

参考文献

[1] C. Cohen-Tannoudji、B. Diu 和 F. Laloë，量子力学，Wiley-y-VCH，巴黎，第2版，ISBN 9783527345533（2019年）。[2] C. W. Misner、K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler，引力，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，ISBN 9780691177793（2017年）。[3]H. Ziaeepour，比较量子引力模型：弦理论、圈量子引力和纠缠引力与 *SU(∞)-QGR*，《Symmetry》**14**，58（2022年），doi：10。3390/sym14010058。[4] N. D. Birrell 和 P. C. W. Davies，弯曲时空中的量子场，剑桥大学出版社，ISBN 9780511622632，doi：10。1017/cbo9780511622632（1982年）。

[5] R. M. Wald, 《弯曲时空中的量子场论与黑洞热力学》, 芝加哥大学出版社, 芝加哥, ISBN 9780226870274（1994年）。[6] H.-N. Wu、Y.-H. Li、B. Li、X. You、R.-Z. Liu、J.-G. Ren、J. Yin、C.-Y. Lu、Y. Cao、C.-Z. Peng 和 J.-W. Pan, 《城市大气中跨越8.4公里的单光子干涉：利用光子检验弯曲时空中的量子效应》, 《物理评论快报》133(2), 020201（2024年）, doi:10.1103/physrevlett.133.020201, 2408.03259。[7] L. Parker, 《膨胀宇宙中的粒子产生》, 《物理评论快报》21, 562（1968年）, doi:10.1103/PhysRevLett.21.562。[8] W. G. Unruh, 《关于黑洞蒸发的札记》, 《物理评论D》14(4), 870（1976年）, doi:10.1103/physrevd.14.870。[9]S. W. Hawking, 《黑洞爆炸？》, 《自然》248(5443), 30（1974年）, doi:10.1038/248030a0。[10] R. Hedrich, 《量子引力：动机与替代方案》, Philosophia Naturalis 47(1- 2), 161（2010年）, doi:https://doi.org/10。48550/arXiv.0908.0355。[11] F. Belgiorno、S. L. Cacciatori 和 A. Viganò, 《类比霍金效应：一个主方程》, 《物理评论D》102(10), 105003（2020年）, doi:10.1103/physrevd.102.105003, 2003. 04236。[12] A. D. Helfer, 《黑洞会辐射吗？》, 《物理学进展报告》66(6), 943（2003年）, doi:10.1088/0034-4885/66/6/202。[13] A. D. Helfer, 《黑洞的量子本质》, 《国际现代物理学杂志D》13(10), 2299（2004年）, doi:10.1142/s021827180400636x。[14] W. G. Unruh, 《黑洞蒸发的实验研究？》, 《物理评论快报》46(21), 1351（1981年）, doi:10.1103/physrevlett.46.1351。[15] W. G. Unruh, 《黑洞的声学类比及高频对黑洞蒸发的影响》, 《物理评论D》51(6), 2827（1995年）, doi:10.1103/physrevd.51.2827。[16] C. Barceló、S. Liberati 和 M. Visser, 《类比引力》, 《相对论动态评论》14(1), 3（2011年）, doi:10.12942/lrr-2011-3, gr-qc/0505065。[17] C. Barceló、S. Liberati 和 M. Visser, 《类比引力》, 《相对论动态评论》（2024年）, doi:10.48550/arXiv.gr-qc/0505065, gr-qc/0505065。[18] R. Aguero-Santacruz 和 D. Bermudez, 《光学及其他领域中的霍金辐射》, Philosophical Transactions A 378, 20190223（2020年）, doi:10.1098/rsta.2019.0223。[19] T. Jacobson, 《黑洞蒸发与超短距离》, 《物理评论D》44(6), 1731（1991年）, doi:10.1103/physrevd.44.1731。[20] T. Jacobson, 《出射黑洞模式的起源》, 《物理评论D》53(12), 7082（1996年）, doi:10.1103/physrevd.53.7082。[21] S. Weinfurtner、E. W. Tedford、M. C. J. Penrice、W. G. Unruh 和 G. A. Lawrence, 《在类比系统中测量受激霍金辐射》, 《物理评论快报》106(2), 021302（2011年）, doi:10.1103/physrevlett.106.021302。

[22] G. Rousseaux、P. Maïssa、C. Mathis、P. Coullet、T. G. Philbin 和 U. Leonhardt，《流动水体表面波的视界效应》，《新物理学杂志》12(9)，095018（2010），doi:10.1088/1367-2630/12/9/095018.[23] A. Bossard、N. James、V. Jules、J. Fourdrinoy、S. Robertson 和 G. Rousseaux，《利用类比引力中的自由表面流设计有效时空的艺术》，《法国科学院报告：物理学》25，457（2025），doi:10.5802/crphys.215.[24] L. J. Garay、J. R. Anglin、J. I. Cirac 和 P. Zoller，《玻色–爱因斯坦凝聚体中的引力黑洞声学类比》，《物理评论快报》85(22)，4643（2000），doi:10.1103/physrevlett.85.4643.[25] O. Lahav、A. Itah、A. Blumkin、C. Gordon、S. Rinott、A. Zayats 和 J. Steinhauer，《在玻色–爱因斯坦凝聚体中实现声学黑洞类比》，《物理评论快报》105，240401（2010），doi:10.1103/PhysRevLett.105.240401.[26] M. J. Jacquet、T. Boulier、F. Claude、A. Maître、E. Cancellieri、C. Adrados、A. Amo、S. Pi-geon、Q. Glorieux、A. Bramati 和 E. Giacobino，《用于类比引力物理的极化激元流体》，《皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》378(2177)，20190225（2020），doi:10.1098/rsta.2019.0225.[27]T. G. Philbin、C. Kuklewicz、S. Robertson、S. Hill、F. König 和 U. Leonhardt，《事件视界的光纤类比》，《科学》319(5868)，1367（2008），doi:10.1126/science.1153625.[28] D. Faccio、T. Arane、M. Lamperti 和 U. Leonhardt，《光学黑洞激光器》，《经典与量子引力》29(22)，224009（2012），doi:10.1088/0264-9381/29/22/224009.[29] M. Jacquet 和 F. König，《计算光学事件视界的自发发射光谱》，SPIE新闻中心（2015），doi:10.1117/2.1201510.006156.[30] J. Drori、Y. Rosenberg、D. Bermudez、Y. Silberberg 和 U. Leonhardt，《在光学类比系统中观测到受激霍金辐射》，《物理评论快报》122(1)，010404（2019），doi:10.1103/physrevlett.122.010404, 1808.09244.[31] R. Felipe-Elizarraras、H. Cruz-Ramirez、K. Garay-Palmett、A. U'Ren 和 D. Bermudez，《在光纤霍金辐射类比中观测到有效迈克耳孙干涉》，《光学快报》30(5)，8063（2022），doi:10.1364/oe.447201.[32] E. Rubino、J. McLenaghan、S. C. Kehr、F. Belgiorno、D. Townsend、S. Rohr、C. E. Kuklewicz、U. Leonhardt、F. König 和 D. Faccio，《负频共振辐射》，《物理评论快报》108，253901（2012），doi:10.1103/PhysRevLett.108.253901.[33] S. Amiranashvili，《短光脉冲的哈密顿框架》，《非线性波的新方法》第908卷，第153–196页。施普林格国际出版，ISBN 978-3-319-20689-9，doi:10.1007/978-3-319-20690-5_6（2016）。[34] S.-S. Baak 和 F. König，《光学孤子中的量子反作用效应》，《新物理学杂志》27(1)，015001（2025），doi:10.1088/1367-2630/ad9f96。[35] 美国物理学会，1783年11月27日：John Michell 预见黑洞，美国物理学会新闻（2009）。[36] K. Schwarzschild，《根据爱因斯坦理论，质点的引力场》，普鲁士皇家科学院会议报告，柏林 1，189（1916），doi:10.48550/arXiv.physics/9905030。

[37] U. Leonhardt, 《量子光学基础》, 剑桥大学出版社, 剑桥, doi:10.1017/CBO9780511806117（2010）。[38] S. W. Hawking, 《引力坍缩中可预测性的崩溃》, 《物理评论D》14, 2460（1976）, doi:10.1103/PhysRevD.14.2460.[39] S. Chandrasekhar, 《理想白矮星的最大质量》, 《天体物理学杂志》74, 81（1931）, doi:10.1086/143324.[40] T. Kotani、T. Oka、R. Enokiya、K. Yanagihara、M. Kaneko 和 R. Ariyama, 《朝向 PKS1830–211、在 z $= 0.89$ 处对宇宙微波背景辐射温度进行新的精确测量》, 《天体物理学杂志》993(1), 134（2025）, doi:10.3847/1538-4357/ae0a1e.[41] J. Abedi、L. F. L. Micchi 和 N. Afshordi, 《GW190521：搜寻黑洞受激霍金辐射产生的回声》, 《物理评论D》108(4), 044047（2023）, doi:10.1103/physrevd.108.044047.[42]G. Cacciapaglia、S. Hohenegger 和 F. Sannino, 《测量天体物理黑洞并合中黑洞碎片发出的霍金辐射》, arXiv（2024）, doi:10.48550/arxiv.2405.12880, 2405.12880.[43] B. Carr 和 F. Kühnel, 《作为暗物质的原初黑洞：近期进展》, 《核与粒子科学年度评论》70(1), 355（2020）, doi:10.1146/annurev-nucl-050520-125911.[44]S. Lang、R. Schützhold 和 W. G. Unruh, 《具有色散和耗散的电介质中的量子辐射》, 《物理评论D》102(12), 125020（2020）, doi:10.1103/physrevd.102.125020, 1912.09869.[45] S. Vezzoli、A. Mussot、N. Westerberg、A. Kudlinski、H. D. Saleh、A. Prain、F. Biancalana、E. Lantz 和 D. Faccio, 《色散振荡光纤中的动态卡西米尔效应光学类比》, 《通讯物理》2(1), 84（2019）, doi:10.1038/s42005-019- 0183-z.[46] T. Torres、S. Patrick、A. Coutant 等, 《涡旋流中的旋转超辐射散射》, 《自然·物理》13, 833（2017）, doi:10.1038/nphys4151.[47] M. C. Braidotti、D. Faccio 和 E. M. Wright, 《非线性光学中的彭罗斯超辐射》, 《物理评论快报》125(19), 193902（2020）, doi:10.1103/physrevlett.125.193902, 2007.07766.[48]P. O. Fedichev 和 U. R. Fischer, 《谐振势阱中的超流气体中的“宇宙学”准粒子产生》, 《物理评论A》69, 033602（2004）, doi:10.1103/PhysRevA.69.033602.[49]M. Tolosa-Simeón、M. M. Scherer 和 S. Floerchinger, 《狄拉克材料中的宇宙学粒子产生类比》, 《物理评论B》110(8)（2024）, doi:10.1103/physrevb.110.085421.[50]D. Berechya 和 U. Leonhardt, 《利夫希茨宇宙学：量子真空与哈勃张力》, 《皇家天文学会月刊》507(3), 3473（2021）, doi:10.1093/mnras/stab2345, 2008.04789。

[51] A. C. Jenkins、J. Braden、H. V. Peiris、A. Pontzen、M. C. Johnson 和 S. Weinfurtner，《真空初始条件下的模拟真空衰变》，《物理评论D》109(2), 023506 (2024)，doi:10.1103/physrevd.109.023506, 2307.02549.[52] D. Bermudez 和 U. Leonhardt，《事件视界光纤类比系统的霍金谱》，《物理评论A》93(5), 053820 (2016)，doi:10.1103/physreva.93.053820.[53] C. Gerry 和 P. Knight，《量子光学导论》，剑桥大学出版社，剑桥，第2版，doi:10.1017/9781139151207(2023).[54] P. D. Drummond 和 M. Hillery，《非线性光学的量子理论》，剑桥大学出版社，剑桥，doi:10.1017/CBO9780511783616 (2014).[55] G. P. Agrawal，第7章——光纤通信，载于《非线性光纤光学的应用》（第二版），第301–348页。学术出版社，伯灵顿，第二版，ISBN 978-0-12-374302-2，doi:https://doi.org/10.1016/B978-012374302- 2.50008-5 (2008).[56]S. P. Stark、A. Podlipensky 和 P. S. J. Russell，《锥形光子晶体光纤中的孤子蓝移》，《物理评论快报》106, 083903 (2011)，doi:10.1103/PhysRevLett.106.083903.[57] N. 布隆贝根，《非线性光学与光谱学》，《现代物理学评论》54, 685 (1982)，doi:10.1103/RevModPhys.54.685.[58] G. Fibich，《非线性薛定谔方程：奇异解与光学坍缩》，Springer，瑞士，doi:10.1007/978-3-319-12748-4 (2015).[59] N. Karjanto，《非线性薛定谔方程：一种具有广泛应用的数学模型》，arXiv，doi:10.48550/arxiv.1912.10683 (2019).[60] G. P. Agrawal，《非线性光纤光学》，学术出版社，第5版，ISBN 9780120451401，doi:10.1016/C2011-0-00045-5 (2013).[61] N. A. Kudryashov，《广义非线性薛定谔方程的哈密顿量》，Mathematics 11(10), 2304 (2023)，doi:10.3390/math11102304.[62] D. Faccio、F. Belgiorno、S. L. Cacciatori、V. Gorini、S. Liberati 和 U. Moschella，《类比引力现象学》，Springer (2013).[63] G. E. Volovik，《氦液滴中的宇宙》，Clarendon Press (2003).[64] G. Rousseaux、C. Mathis、P. Maïssa、T. G. Philbin 和 U. Leonhardt，《在水槽中观测负频率波：霍金效应的经典类比？》，《新物理学杂志》10(5), 053015 (2008)，doi:10.1088/1367-2630/10/5/053015.[65] I. Carusotto、S. X. Hu、L. A. Collins 和 A. Smerzi，《玻色–爱因斯坦凝聚体中逆着障碍物流动时的 Bogoliubov-ˇCerenkov 辐射》，《物理评论快报》97(26), 260403 (2006)，doi:10.1103/physrevlett.97.260403, cond-mat/0612114.[66] U. Leonhardt，《利用原子介质中的慢光构建事件视界的实验室类比系统》，《自然》415(6870), 406 (2002)，doi:10.1038/415406a.[67]P. K. A. Wai、C. R. Menyuk、H. H. Chen 和 Y. C. Lee，《单模光纤零群速度色散波长处的孤子》，Optics Letters 12, 628 (1987)，doi:10.1364/ol.12.000628。

[68] N. Akhmediev 和 M. Karlsson，《光纤中孤子发射的切伦科夫辐射》，《物理评论A》51(3), 2602 (1995)，doi:10.1103/physreva.51.2602.[69] L. Tartara、I. Cristiani 和 V. Degiorgio，《微结构光纤中孤子裂变产生的蓝光与红外连续谱》，《应用物理 B》77, 307 (2003)，doi:10.1007/s00340-003-1172-0.[70]P. Russell，《光子晶体光纤》，《科学》299(358) (2003)，doi:10.1126/science.1079280.[71]F. Biancalana，《负频率成为现实》，《物理学》5, 68 (2012)，doi:10.1103/physics.5.68.[72] A. Choudhary 和 F. König，《孤子处色散波的高效频移》，《光学快报》20(5), 5538 (2012)，doi:10.1364/oe.20.005538.[73]Y. Rosenberg、J. Drori、D. Bermudez 和 U. Leonhardt，《利用负预啁啾增强少周期孤子的自频移》，《光学快报》28(3), 3107 (2020)，doi:10.1364/oe.383014。