arXiv:2603.03548v1 [math.AP] 3 Mar 2026

液态 Lane–Emden 星的非径向线性稳定性

King Ming Lam*

摘要

恒星的经典模型是 Lane–Emden 恒星，其动力学由欧拉–泊松方程支配。我们考虑状态方程为“刚化气体”的液态恒星情形$p = \rho^\gamma - 1$。我们推导出液态 Lane–Emden 星周围完整的三维线性化 Euler–Poisson 系统，不对扰动施加任何对称性假设，并证明只要径向模态非负，相应的线性算子 $\mathbf{L}$ 就是非负的。我们证明，$\mathbf{L}$ 具有无穷维核，其中每个元素都对应线性化系统的一个线性增长解。然而，当限制在无旋扰动并商去对应动量守恒的三个核元素后，我们证明$\mathbf{L}$ 严格为正，并具有强制性估计$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar\rho} \gtrsim \|\boldsymbol{\theta}\|^2_{L^2(B_R)}$。因此，我们证明，只要纯径向模态稳定，液态 Lane–Emden 星对非径向无旋扰动就是稳定的，这改进了此前仅研究纯径向扰动的结果。然而，稳定性可能没有人们期望的那么强，因为我们证明，即使在这种情况下，$\|\nabla\boldsymbol{\theta}\|^2_{L^2(B_R)}$ 也无法得到控制。

1 引言

1.1 欧拉–泊松系统

我们考虑一种自引力可压缩流体的基本模型，即欧拉–泊松系统。未知量包括流体密度 $\rho \geq 0$、速度向量 $\mathbf{u}$、流体压力 $p \geq 0$以及引力势 ϕ。它们满足以下系统

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad \text{in } \Omega(t), \tag{1.1}$$

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p + \rho \nabla \phi = \mathbf{0} \qquad \text{in } \Omega(t), \tag{1.2}$$

$$\Delta \phi = 4\pi\rho \qquad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{1.3}$$

这里，压力 p 满足（液态）多方状态方程

$$p = \rho^\gamma - 1 \qquad \text{where} \qquad \gamma \in [1, 2], \tag{1.4}$$

恒星是孤立的，这意味着引力势满足以下渐近边界条件：

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} \phi(t, \mathbf{x}) = 0. \tag{1.5}$$

我们将系统 (1.1)–(1.5) 称为液态 (EP)$_\gamma$-系统。此外，$\Omega(t) := \{\mathbf{x} :\ \rho(t,\mathbf{x}) > 0\}$ 是恒星密度支集的内部。注意，在 (1.3) 中，密度在 $\Omega(t)$ 的补集上自然地延拓为零。

由于我们允许边界移动，因此必须在真空自由边界 $\partial\Omega(t)$ 处为方程（1.1）–（1.5）补充适当的边界条件。边界条件如下：

*代尔夫特理工大学代尔夫特应用数学研究所，荷兰代尔夫特 2628 CD。电子邮箱：K.M.Lam@tudelft.nl。

a）边界上的压力与外部真空的压力相匹配，即 $p = 0$ on $\partial\Omega$；
b) 边界变化的法向速度在边界上任意一点等于 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的外向单位法向量。

本文将主要在拉格朗日坐标下进行讨论，因为它们特别适合分析具有真空边界的流体。设 $\boldsymbol{\eta}(t,\mathbf{x})$ 为流体流映射，其定义为

$$\partial_t\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}\circ\boldsymbol{\eta} \qquad \text{with} \qquad \boldsymbol{\eta}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{x}),$$

其中 $\mathbf{u}\circ\boldsymbol{\eta}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t,\boldsymbol{\eta}(t,\mathbf{x}))$。于是空间区域对所有时间固定为 $\Omega_0 := \boldsymbol{\eta}_0^{-1}(\Omega(0))$。为了用新变量重新表述 (EP)$\gamma$-系统，我们引入

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} = \mathbf{u}\circ\boldsymbol{\eta} && \text{（拉格朗日速度）}\\
&f = \rho\circ\boldsymbol{\eta} && \text{(Lagrangian density)}\\
&\psi = \phi\circ\boldsymbol{\eta} && \text{（拉格朗日势）}\\
&A = (\nabla\boldsymbol{\eta})^{-1} && \text{（变形张量的逆）}\\
&J = \det(\nabla\boldsymbol{\eta}) && \text{(雅可比行列式)}\\
&a = JA. && \text{(变形张量的余子式矩阵)}
\end{aligned}$$

在此坐标变换下，连续性方程变为 $fJ = f_0J_0$，定义域 Ω_0 中的动量方程 (1.2) 写为

$$\partial_t\mathbf{v} + \frac{1}{f_0J_0}\partial_k(A^k(f_0J_0)^\gamma J^{1-\gamma}) + A\nabla\psi = \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

其中使用了爱因斯坦求和约定（见定义 1.2）。此外，ψ 满足泊松方程

$$(A\nabla)\cdot(A\nabla)\psi = 4\pi f_0J_0J^{-1}. \tag{1.7}$$

为更好地描述引力势 ψ，我们引入以下卷积算子

$$\mathcal{K} := 4\pi\Delta^{-1}\mathbf{1}_{B_R} \tag{1.8a}$$
$$\mathcal{K}_\partial := 4\pi\Delta^{-1}\delta_{\partial B_R} \tag{1.8b}$$

其中 $\delta_{\partial B_R}$ 是 ∂B_R 上的狄拉克测度，即

$$\mathcal{K}f(\mathbf{x}) = -\int_{B_R}\frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{y}$$
$$\mathcal{K}_\partial f(\mathbf{x}) = -\int_{\partial B_R}\frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}S(\mathbf{y}).$$

注意，ψ 可以写成

$$\psi(\mathbf{x}) = (\mathcal{K}\rho)(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})) = -\int\frac{\rho(\mathbf{y})}{|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{y} = -\int\frac{f(\mathbf{z})J(\mathbf{z})}{|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z})|}\mathrm{d}\mathbf{z} = -\int\frac{f_0(\mathbf{z})J_0(\mathbf{z})}{|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z})|}\mathrm{d}\mathbf{z}.$$

关于欧拉–泊松系统的拉格朗日描述的细节，我们参阅 [23]。

1.2 Lane–Emden恒星

我们寻求欧拉–泊松系统的时间独立球对称解，其形式为$\boldsymbol{\eta}(t,\ \mathbf{x}) = \mathbf{x}$。在这一假设下，

$$\psi(\mathbf{x}) = -\int\frac{f_0(\mathbf{z})}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} = \mathcal{K}f_0(\mathbf{x})$$

动量方程 (1.6) 化简为

$$\frac{1}{f_0}\nabla(f_0^\gamma)+\nabla\mathscr{K}f_0=\mathbf{0}, \tag{1.10}$$

或者等价地

$$0=\begin{cases}\frac{\gamma}{\gamma-1}\Delta f_0^{\gamma-1}+4\pi f_0 & \text{when} \quad \gamma>1\\ \Delta\ln f_0+4\pi f_0 & \text{when} \quad \gamma=1\end{cases} \tag{1.11}$$

再加上条件 $\nabla f_0(\mathbf{0})=\mathbf{0}$（这是“积分常数”，可由（1.10）推得）。在球对称情形下，我们有 $\Delta=r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$，这给出了定义 Lane–Emden恒星的常微分方程。可以证明，给定 $f_0(0)$，该常微分方程存在唯一的递减解，并且此解在某个有限或无限的 r 处趋于零。设 R 为 $f_0(R)=1$成立的点。我们将 $\bar\rho$ 记为这类液态朗–爱姆登（LE）星的密度分布：

$$\bar\rho(r):=f_0(r)\mathbf{1}_{[0,R]} \tag{1.12a}$$

$$\bar\rho(\mathbf{x}):=f_0(|\mathbf{x}|)\mathbf{1}_{\bar B_R}. \tag{1.12b}$$

下面给出一个引理，对 Lane–Emden密度分布的导数进行估计；我们将在正文中用到这些估计。

引理 1.1。 设 $\bar\rho$ 为绝热指数为 γ的液态朗–爱姆登密度分布。则 $-(\bar\rho^\gamma)'/r\sim 1$，更精确地说，

$$\frac{4\pi}{3}<-\frac{(\bar\rho^\gamma)'(r)}{r}<\frac{4\pi}{3}\bar\rho(0)^2.$$

证明。 由 (1.11) 可得 $0=\gamma(r^2\bar\rho^{\gamma-2}\bar\rho')'+4\pi r^2\bar\rho$ 以及 $\bar\rho'(0)=0$，或者等价地

$$-\frac{(\bar\rho^\gamma)'(r)}{r}=\frac{4\pi\bar\rho(r)}{r^3}\int_0^r y^2\bar\rho(y)\mathrm{d}y.$$

利用 $1\le\bar\rho\le\bar\rho(0)$，可得

$$\begin{aligned}-\frac{(\bar\rho^\gamma)'(r)}{r}&<\frac{4\pi\bar\rho(0)}{r^3}\int_0^r y^2\bar\rho(0)\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{3}\bar\rho(0)^2\\ -\frac{(\bar\rho^\gamma)'(r)}{r}&>\frac{4\pi}{r^3}\int_0^r y^2\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

□

关于液态 Lane–Emden 星的详细信息，请参阅 [36]。本文将研究这类液态 Lane–Emden 星的稳定性。

1.3 历史与背景

从最基本的层面来说，恒星是一个处于真空中、由流体（通常是炽热气体）构成的团块，受到两种相互竞争的自生力作用——自身的压力试图使气体膨胀到真空中，而自身的引力则试图使气体聚集起来。因此，恒星动力学的研究始于对流体方程的研究。

描述绝热无黏流体运动的欧拉方程最早由欧拉在 1757 [16], 提出，但直到今天仍是活跃的研究领域。即使不存在真空、自由边界和自引力，这也是一个极具挑战性的问题。尤其是，即便初始数据相当规则，欧拉方程仍容易产生奇点或激波，例见 Christodoulou 的 [6] 和 Sideris 的[50] 。因此，研究解的存在性、行为及整体解并非易事。在存在真空和自由边界时，由于边界运动，问题会更加棘手

而且边界两侧存在退化或不连续性，这意味着双曲系统局部存在性的经典理论 [43] 并不适用。近期才建立了这一情形下欧拉方程的局部存在性理论：气体情形见 Coutand 和 Shkoller [9],、Jang 和 Masmoudi [33]，以及 Ifrim 和 Tataru [28]；液体情形见 Lindblad [41], 、Trakhinin [52]，以及 Coutand、Hole 和 Shkoller [8]。然而，要建立恒星模型，必须将欧拉方程与由泊松方程描述的自引力耦合起来，由此产生额外的聚集动力学，可能导致爆破。事实上，已有研究表明，解可能在有限时间内爆破 [11, 44]。而且在我们的宇宙中，既能观测到像太阳这样稳定的恒星，也能观测到坍缩成黑洞的恒星。几代学者一直致力于研究如此丰富的动力学。

从 J. Homer Lane [37], August Ritter 和 Robert Emden [15]于19世纪末和20世纪初奠定基础的研究开始，后来又由 Chandrasekhar [4],Shapiro 和 Teukolsky [49], 等天体物理学家进一步发展，自引力流体球一直是天体物理建模的基石。在这一经典框架中，恒星被视为遵循多方状态方程 $p = \rho^\gamma$ 的可压缩气体，其运动由 Euler–Poisson 方程组支配。*Lane–Emden*恒星是该系统的球对称定常解，代表压力与引力恰好平衡时处于流体静力平衡的恒星。尽管这一模型简单，甚至正因其简单，它对各种类型恒星的某些区域而言都是很好的近似，因此成为恒星经典模型。在质量临界指数 $\gamma = 4/3$处，还存在另一类球对称但不断膨胀和坍缩的解，称为 Goldreich–Weber恒星。天体物理学家 Goldreich 和 Weber [19] 最早描述了这类解，它们可用于模拟恒星坍缩和膨胀，例如超新星膨胀。

鉴于其物理意义，首先需要针对这一自由边界情形建立欧拉–泊松系统的局部适定性理论，以确保模型具有意义；其次，需要确立Lane–Emden恒星和Goldreich–Weber恒星在扰动下的稳定性，以确保它们是能够存在于我们宇宙中的一般性对象——这是一个万物彼此相互影响的宇宙。关于局部存在性，Gu 和 Lei [20] 以及 Hadˇzi´c 和 Jang [23]已完成相关工作。关于稳定性，研究 [38, 32] 表明，当 $4/3 \leq \gamma < 2$ 时，气态Lane–Emden恒星线性稳定；而当 $1 < \gamma < 4/3$时则不稳定。在临界情形 $\gamma = 4/3$ 下，Lane–Emden恒星实际上是非线性不稳定的，因为Goldreich–Weber恒星与它们属于同一参数族，因此可以通过任意小的扰动到达。最近，Jang 在 [30, 31]中证明了 $6/5 \leq \gamma < 4/3$范围内的非线性不稳定性；Cheng、Cheng 和 Lin [5]现已详细阐明这些不稳定恒星附近膨胀解的动力学。$4/3 < \gamma < 2$ 范围内的非线性稳定性尚未得到完全证明，但 Rein [48] 以及 Luo 和 Smoller [42]通过变分论证表明，在假设全局时间解存在的条件下，非线性稳定性成立；最近，Lin、Wang 和 Zhu [39] 进一步改进了这一结果，尤其是在球对称扰动情形下无条件地证明了非线性稳定性。Hadˇzi´c 和 Jang [22], 证明了膨胀的Goldreich–Weber恒星在径向对称扰动下的非线性稳定性。最近，作者与 Hadˇzi´c 和 Jang 在 [24]中将这一结果推广到了非径向扰动。

然而，在某些情况下，这种经典模型并不适用。经典气态莱恩-埃姆登星的稳定性取决于（如后文所述，这一点有些例外）气体的种类（绝热指数 γ 代表气体的“刚度”，例如氦气的 $\gamma = 5/3$），但不取决于恒星的总质量。事实上，欧拉–泊松方程的自然尺度变换意味着，可以将某一质量的解缩放为另一质量的解，因此，不同质量的经典Lane–Emden恒星实际上并无区别。但在真实的天体物理环境中，由于相对论效应，恒星存在一个最大质量，超过这个质量，恒星就会爆炸或坍缩。具体而言，主序星达到爱丁顿极限 [13]时会变得不稳定，并将物质抛散出去；超过钱德拉塞卡极限 [3] 的白矮星则会坍缩成中子星，或作为超新星爆炸；超过托尔曼-奥本海默-沃尔科夫极限 [51, 47] 的中子星则会坍缩形成黑洞。

在实际应用中，主序星通常仍用经典Lane–Emden恒星模型描述，但会调整绝热指数 γ，使其同时考虑辐射压和气体压力。随着质量增加，辐射压也随之增大，$\gamma \to 4/3$ 恒星便会变得不稳定。通过调整 γ以纳入其他效应，经典Lane–Emden恒星模型也被用于描述白矮星和中子星。然而，要恰当地描述钱德拉塞卡极限和托尔曼-奥本海默-沃尔科夫极限的形成机制，采用相对论模型更为合适。钱德拉塞卡极限源于电子的运动速度不能超过光速，因此它们产生的压力有上限，无法无限增大；托尔曼-奥本海默-沃尔科夫极限则源于广义相对论中能量和压力本身也会产生引力，而不仅仅是质量会产生引力。

爱因斯坦–欧拉系统为此提供了一种相对论恒星模型。Hadˇzi´c、Lin 和 Rein [26]已证明，低质量相对论恒星具有径向线性稳定性，而高质量恒星则不稳定；Hadˇzi´c 和 Lin 进一步刻画了转变点 [25]。在先前的一项工作中，[36], 作者证明，在经典莱恩–埃姆登欧拉–泊松模型的框架下，若以“刚化气体”状态方程（实质上是加入一个常数背景压力，常用于模拟液体）$p = \rho^\gamma - 1$取代原有状态方程，所得系统的行为与相对论模型非常相似——在质量超临界情形下，$1 < \gamma < 4/3$所得液体 Lane–Emden恒星在质量较小时具有径向线性稳定性，而质量较大时则不稳定（最近，Hao 和 Miao [27] 基于 [36]中的线性理论，也已非线性地证明了这种不稳定性）。相比之下，经典气态莱恩-埃姆登星无论质量如何，都会不稳定。在相对论情形和液体情形中，这种效应都源于压力的尺度破缺——在相对论情形中，光速作为速度上限，设定了一个固定的压力尺度；在液体情形中，加入常数也产生了同样的效果。

实际上，液体状态方程带来了额外的稳定效应，使小质量液态恒星即使处于超临界范围内也能保持稳定。在20世纪20年代与阿瑟·爱丁顿的一场著名科学论战中，詹姆斯·金斯爵士提出，液态恒星比气态恒星更稳定 [34, 35, 14]。尽管他关于主序星是正在发生裂变的液体这一具体理论后来被证明是错误的，但 [36] 我们的这项工作表明，他关于液态恒星比气态恒星更稳定的观点确有几分道理，而且真实的相对论恒星在某些方面确实与液态恒星相似。此外，由于中子星的核心表现为超流体，我们研究的液体模型可作为有用的模型，并为研究相对论恒星搭建桥梁。特别是，我们关于液态 Lane–Emden 星非径向线性稳定性的结果，可作为研究相对论恒星非径向稳定性的起点。相关研究的坚实基础已经奠定——Ginsberg、Lindblad 和 Luo [18] 已证明本文所考虑的液体 Euler–Poisson 系统具有局部适定性。对于相对论欧拉方程（无自引力），Oliynyk [46] 以及 Miao、Shahshahani 和 Wu [45] 已在液体情形下证明了其局部适定性；在气体情形下，Disconzi、Ifrim 和 Tataru[12] 也完成了这项工作，但爱因斯坦–欧拉系统的适定性仍是一个公开问题。

1.4 记号

为方便读者，我们在此汇总一些将会用到的记号。

定义 1.2（记号）。

i. $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，而 $\mathbf{e}_r$ 表示径向单位向量 $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$。*ii.* 我们将 $\langle \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \rangle_{\bar{\rho}} = \langle \boldsymbol{\theta}_1, \bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2 \rangle_{L^2(B_R)}$ 记作，同理，范数 $\|\cdot\|_{\bar{\rho}}$ 记作；也就是说，这是以 $\bar{\rho}$ 加权的 L^2 内积和范数。*iii.* 我们用 Y_{lm} 表示实球谐函数，参见附录 *A.1*。

2 表述与结果

2.1 液体Lane–Emden恒星的扰动

在表述稳定性问题之前，我们必须先利用标记规范自由度，并固定一般扰动中 f_0J_0 的选取，使其与 LE 剖面完全相同，即我们设定

$$f_0J_0 = \bar{\rho} \qquad \text{on } B_R(\mathbf{0}). \tag{2.1}$$

该方程可在初始区域 $B_R(\mathbf{0})$ 上改写为形式 $\rho_0 \circ \boldsymbol{\eta}_0 \det[\nabla \boldsymbol{\eta}_0] = \bar{\rho}$。根据 Dacorogna–Moser 的一个结果 [10]，并类似于 [22, 21]，存在初始双射映射 $\boldsymbol{\eta}_0 : B_R(\mathbf{0}) \to \Omega(0)$ 的一种选取，使得 (2.1) 成立。规范固定条件 (2.1) 是必要的，因为它限制了在初始时刻任意重新标记粒子的自由度。

引理 2.1 （液体 LE 剖面附近的 Euler–Poisson）**.** *关于第 1.2 节中的液体 LE 剖面 $\bar{\rho}$，扰动变量*

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t) := \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}, \tag{2.2}$$

which 度量非线性流相对于背景 LE 剖面的偏离，形式上求解 *s*

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\theta} + \bar{\rho}^{-1} \partial_k (\bar{\rho}^\gamma (A^k J^{1-\gamma} - I^k)) + A \nabla \psi - \nabla \mathscr{K} \bar{\rho} = \mathbf{0} \qquad \text{on } B_R \tag{2.3a}$$

$$J = 1 \qquad \text{on } \partial B_R. \tag{2.3b}$$

证明。 由 (1.11) 可知，LE 剖面满足

$$\mathbf{0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \bar{\rho}^{\gamma - 1} + \nabla \mathscr{K} \bar{\rho}. \tag{2.4}$$

利用规范条件 (2.1)，将动量方程 (1.6) 减去上面一行，得到

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\theta} + \bar{\rho}^{-1} \partial_k (\bar{\rho}^\gamma (A^k J^{1-\gamma} - I^k)) + A \nabla \psi - \nabla \mathscr{K} \bar{\rho} = \mathbf{0}.$$

此外，我们有 $J = fJ = f_0 J_0 = \bar{\rho} = 1$ 在 ∂B_R上。 □

接下来我们推导该系统的线性化。

引理 2.2 (围绕液体 LE 剖面的线性化 Euler–Poisson)。 *(2.3)* 的形式线性化 为

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{L}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \qquad \text{on } B_R \tag{2.5a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\theta} = 0 \qquad \text{on } \partial B_R \tag{2.5b}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\boldsymbol{\theta} &:= -\nabla \left((\gamma \bar{\rho}^{\gamma - 2} + \mathscr{K}) \nabla \cdot (\bar{\rho} \boldsymbol{\theta}) + \int_{\partial B_R} \frac{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{z}) \right) \\ &= -\nabla \left((\gamma \bar{\rho}^{\gamma - 2} + \mathscr{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1} \mathscr{K}_\partial) \nabla \cdot (\bar{\rho} \boldsymbol{\theta}) \right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

证明。 由于 $\nabla \boldsymbol{\eta} = I + \nabla \boldsymbol{\theta}$，在一阶近似（关于 $\boldsymbol{\theta}$）下，我们有 $A = I - \nabla \boldsymbol{\theta}$ 和 $J = 1 + \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}$。因此，在一阶近似下，我们有

$$AJ^{1-\gamma} = (I - \nabla \boldsymbol{\theta})(1 + \nabla \cdot \boldsymbol{\theta})^{1-\gamma} = (I - \nabla \boldsymbol{\theta}) \left(1 - (\gamma - 1) \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}\right) = \left(1 - (\gamma - 1) \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}\right) I - \nabla \boldsymbol{\theta}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_k (\bar{\rho}^\gamma (A^k J^{1-\gamma} - I^k)) &= -\frac{\gamma - 1}{\bar{\rho}} \nabla (\bar{\rho}^\gamma \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_k (\bar{\rho}^\gamma \nabla \theta^k) \\ &= -\gamma \nabla (\bar{\rho}^{\gamma - 1} \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla (\boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \bar{\rho}^{\gamma - 1}) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \nabla \bar{\rho}^{\gamma - 1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\gamma\nabla(\bar{\rho}^{\gamma-2}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla\nabla\bar{\rho}^{\gamma-1} \\
&= -\gamma\nabla(\bar{\rho}^{\gamma-2}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})) - \boldsymbol{\theta}\cdot\nabla\nabla\mathcal{K}\bar{\rho}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z})|^2 = |\mathbf{x}-\mathbf{z}+\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})|^2 = |\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2 + 2(\mathbf{x}-\mathbf{z})\cdot(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})) + |\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})|^2,
$$

在一阶近似下，我们有

$$
\frac{1}{|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z})|} = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\left(1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})\cdot(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z}))}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}\right).
$$

因此，在一阶近似下，我们得到

$$
\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}) &= -\int \frac{\bar{\rho}(\mathbf{z})}{|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z})|}\mathrm{d}\mathbf{z} = -\int \frac{\bar{\rho}(\mathbf{z})}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{d}\mathbf{z} + \int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})\cdot(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z}))}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^3}\bar{\rho}(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} \\
&= (\mathcal{K}\bar{\rho})(\mathbf{x}) + \int\left(-\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})\cdot\nabla_{\mathbf{z}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\right)\bar{\rho}(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} \\
&= (\mathcal{K}\bar{\rho})(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}\cdot\nabla(\mathcal{K}\bar{\rho})(\mathbf{x}) - (\mathcal{K}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}))(\mathbf{x}) - \int_{\partial B_R}\frac{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{z})
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
A\nabla\psi &= (I^i - \nabla\theta^i)\partial_i\left(\mathcal{K}\bar{\rho} + \boldsymbol{\theta}\cdot\nabla\mathcal{K}\bar{\rho} - \mathcal{K}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) - \int_{\partial B_R}\frac{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{z})\right) \\
&= \nabla\mathcal{K}\bar{\rho} - (\nabla\theta^i)\partial_i\mathcal{K}\bar{\rho} + \nabla(\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla\mathcal{K}\bar{\rho}) - \nabla\mathcal{K}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) - \nabla\int_{\partial B_R}\frac{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{z}) \\
&= \nabla\mathcal{K}\bar{\rho} + \boldsymbol{\theta}\cdot\nabla\nabla\mathcal{K}\bar{\rho} - \nabla\mathcal{K}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) - \nabla\int_{\partial B_R}\frac{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{z}).
\end{aligned}
$$

因此，动量方程 (2.3) 的线性化具有形式 (2.5)。 □

2.2 L 的性质

研究液体 LE 剖面的线性稳定性，需要分析线性算子 $\mathbf{L}$。特别是，我们需要准确理解其强制性性质。因此，本节将探讨 $\mathbf{L}$ 的性质。

在陈述主要定理之前，我们先建立 $\mathbf{L}$ 的一些基本性质。

引理 2。 3（L的对称性）。 $\mathbf{L}$ 在空间 $H = \{\boldsymbol{\theta}\in H^2（B_R）：（\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}）|_{\partial B_R} = 0\}$ an 中是对称的 d

$$
\begin{aligned}
\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2\rangle_{\bar{\rho}} = &\int_{B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2} + \mathcal{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\right)\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&- \int_{\partial B_R}\bar{\rho}'(R)^{-1}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\left(\gamma + \mathcal{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\right)\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}S.
\end{aligned}
$$

证明。 由于 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}_2)|_{\partial B_R} = 0$，我们有 $\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)|_{\partial B_R} = \bar{\rho}'(R)\boldsymbol{\theta}_2\cdot\mathbf{e}_r$。因此我们有

$$
\begin{aligned}
\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2\rangle_{\bar{\rho}} = &\int_{B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2} + \mathcal{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\right)\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&- \int_{\partial B_R}\left(\gamma + \mathcal{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\right)\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \\
= &\int_{B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2} + \mathcal{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\right)\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

$$-\int_{\partial B_R}\bar{\rho}'(R)^{-1}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\left(\gamma+\mathcal{H}-\bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\right)\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}S.$$

注意，这对于满足 $\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_i)\in H^1(B_R)$ 的 $\boldsymbol{\theta}_i(i=1,2)$ 有定义。我们看到 $\mathbf{L}$ 在$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\bar{\rho}}$下是对称的，因为

$$\begin{aligned}
\int_{B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\mathcal{H}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}\mathbf{x}&=-\int_{B_R}\int_{B_R}\frac{\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)(\mathbf{x})\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}\\
\int_{\partial B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\mathcal{K}_\partial\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}S&=-\int_{\partial B_R}\int_{\partial B_R}\frac{\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)(\mathbf{x})\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}S(\mathbf{x})\mathrm{d}S(\mathbf{y})\\
\int_{B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\mathcal{K}_\partial\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}\mathbf{x}&=-\int_{B_R}\int_{\partial B_R}\frac{\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)(\mathbf{y})\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
\int_{\partial B_R}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)\mathcal{K}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)\mathrm{d}S&=-\int_{B_R}\int_{\partial B_R}\frac{\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_2)(\mathbf{y})\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_1)(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}S(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

□

注 2.3.1。 注意，对于(2.5)的解 $\boldsymbol{\theta}$，利用$\mathbf{L}$的对称性，我们有

$$0=\langle\partial_t^2\boldsymbol{\theta}+\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\partial_t\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}=\frac{1}{2}\partial_t\left(\langle\partial_t\boldsymbol{\theta},\partial_t\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}+\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}\right).$$

因此，$\|\partial_t\boldsymbol{\theta}\|_{\bar{\rho}}^2+\langle\ \boldsymbol{\theta}\ \boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}$ $\langle\ \boldsymbol{\theta}\ \boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}\gtrsim\mathbf{L}$是$\|\boldsymbol{\theta}\|_{H^s}^2$ $\|\boldsymbol{\theta}\|_{H^s\ B_R}$一个守恒量。如果$\mathbf{L}$在$\mathbf{L}$、$(B_R)$的意义下是强制的，这意味着扰动$()$的范数始终有界，从而具有稳定性。因此，对液态 *LE* 星稳定性的研究归结为对$\mathbf{L}$正性的研究。

引理 2.4 ($\mathcal{K}\ \nabla$交换子)。 $[\mathcal{K}\ \nabla]=\mathcal{K}_\partial\mathbf{e}_r$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}\nabla h)(\mathbf{x})&=-\int_{B_R}\frac{\nabla h(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{y}=\int_{B_R}h(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{\partial B_R}\frac{h(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{y})\\
&=-\int_{B_R}h(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{y}-\int_{\partial B_R}\frac{h(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{y})\\
&=(\nabla\mathcal{K}h)(\mathbf{x})+\mathcal{K}_\partial(\mathbf{e}_r h).
\end{aligned}$$

□

命题 2.5 (平移特征函数)。 $\mathbf{e}_i$ 是$\mathbf{L}$ 的特征函数，对应特征值为 *0*。

证明。 设$\mathbf{f}\in\mathbb{R}^3$为一个常向量。由 $\mathbf{0}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\bar{\rho}^{\gamma-1}+\nabla\mathcal{K}\bar{\rho}$(1.11) 和 $[\mathcal{K}\ \nabla]\bar{\rho}=\mathcal{K}_\partial\mathbf{e}_r\bar{\rho}=\mathcal{K}_\partial\mathbf{e}_r$（引理 2.4），我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\mathbf{f}&=-\nabla\left((\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}+\mathcal{K}-\bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial)\nabla\cdot(\bar{\rho}\mathbf{f})\right)\\
&=-\nabla\left(\mathbf{f}\cdot(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}+\mathcal{K}-\bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial)\nabla\bar{\rho}\right)\\
&=-\nabla\left(\mathbf{f}\cdot(\mathcal{K}_\partial\mathbf{e}_r-\bar{\rho}'(R)^{-1}\mathcal{K}_\partial\nabla\bar{\rho})\right)=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

□

注 2.5.1。 这些特征函数对应于我们系统的伽利略不变性以及动量守恒的三个方向。对于任意常向量$\mathbf{f}$，我们看到 $\boldsymbol{\theta}=t\mathbf{f}$ 是系统(2.5) 和(2.3)的一个解。这只是沿$\mathbf{f}$方向以恒定速度平移后的 *LE* 恒星。因此，尽管这里的扰动 $\boldsymbol{\theta}$ 随时间增长，但它并不代表恒星存在任何真正的不稳定性。

本文的主要结果是$\mathbf{L}$ 非负；并且，如果扰动 $\boldsymbol{\theta}$ 与命题 2.5 中的三个特征函数正交，那么算子$\mathbf{L}$ 具有一个关于 $g=\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})$ 的定量下界。

定理 2.6 （**L**的有界性与非负性）。 设 $\mathbf{L}$ 定义如 (2.6) 且

$$H = \{\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R) : (\nabla \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0\}.$$

则对于 $\boldsymbol{\theta} \in H$，我们有

$$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\bar{\rho}} \lesssim \|\nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|^2_{L^2(B_R)} + \frac{1}{|\bar{\rho}'(R)|}\|\nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|^2_{L^2(\partial B_R)}. \tag{2.7}$$

此外，

i. 当 $\gamma \geq 4/3$ 或 $\bar{\rho}(0)$ 接近于*1*时，我们有

$$\inf_{\|\boldsymbol{\theta}\|_H = 1} \langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\bar{\rho}} \geq 0.$$

并且若此外 $\boldsymbol{\theta} \in H$ 满足 $\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_i \rangle_{\bar{\rho}} = 0$ 对所有 $i = 1, 2, 3$成立，则我们有

$$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\bar{\rho}} \gtrsim \|\nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|^2_{L^2(B_R)} + \frac{1}{\bar{\rho}'(R)^2}\|\nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|^2_{L^2(\partial B_R)}. \tag{2.8}$$

ii. 当 $\gamma < 4/3$ 且 $\bar{\rho}(0)$ 很大时，我们有

$$\inf_{\|\boldsymbol{\theta}\|_H = 1} \langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\bar{\rho}} < 0.$$

本定理的证明将在第3节给出。关于证明的概要以及该方法与相关工作的区别，见第3节开头。

备注 2.6.1. (2.8) 意味着

$$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\bar{\rho}} \gtrsim \|\Delta\Psi\|^2_{L^2(B_R)} + \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

其中， Ψ 是由流动扰动 $\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}$诱导的引力势：

$$\begin{aligned} \Psi &:= \frac{1}{4\pi}\mathscr{K}\nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) \\ \Delta\Psi &= \nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) =: g. \end{aligned}$$

这是因为，利用 *Hardy* 不等式 $\|\Psi/|\mathbf{x}|\|_{L^2} \leq 2\|\nabla\Psi\|_{L^2}$，

$$\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \langle \Psi, g \rangle_{L^2(B_R)} \leq \left\| \frac{\Psi}{|\mathbf{x}|} \right\|_{L^2(B_R)} \||\mathbf{x}|g\|_{L^2(B_R)} \leq 2\,\|\nabla\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, R\,\|g\|_{L^2(B_R)}\,.$$

因此$\|\nabla\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2R\|g\|_{L^2(B_R)}$。

推论 2.6.2 (L的核)。 定理 *2.6* 的情形 *i.* 中，$\ker \mathbf{L}$ = 张成$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \cup \{\boldsymbol{\theta} : \nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) = 0\}$；而在情形 *ii.* 中，我们有 $\supseteq$ 而非 $=$。特别地，ker$\mathbf{L}$ 是无限维的，且核中的每个元素都对应于围绕液体 *LE* 剖面的线性化 *Euler–Poisson* 系统 *2.5* 的一个线性增长解。

证明。 由 (2.6) 和引理 2.5 可知， $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \cup \{\boldsymbol{\theta} : \nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) = 0\} \subseteq \mathbf{ker}\mathbf{L}$。在情形 i. 中，由 (2.8) 可知， $\subseteq$ 事实上是等式。对于任意足够光滑的向量场$\mathbf{A}$，可知$\boldsymbol{\theta} = \bar{\rho}^{-1}\nabla \times \mathbf{A}$ 满足 $\nabla \cdot (\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) = 0$。我们可以在 B_R 中选取无穷多个互不相交的球，并且对于每个这样的球，都存在一个非零的$\mathbf{A}$，其支集完全包含在该球内。由此得到无穷多个$\mathbf{L}$ 的核中的元素，它们的支集互不相交，因此线性无关。若 $\Theta \in \mathbf{ker}\mathbf{L}$，则可知 $\boldsymbol{\theta} = t\Theta$是方程 (2.5) 的一个解。 □

注 2.6.3. 这个无穷维核类似于气态*Lane–Emden*恒星中发现的核， *[32],* 其中同样包含常向量，以及所有满足相应加权散度为零的向量场。

我们已经看到，在注 2.5.1 中，单位向量 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 并不会导致真正的不稳定性。但是，$\{\boldsymbol{\theta}:\ \nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\ =0\}$ 核也可能导致非线性系统和线性系统的不稳定扰动。不过，如果我们将范围限制在无旋扰动上，那么无限维核就会被模去，从而得到严格强制性。

推论 2.6.4 （**L**的强制性）。 假设定理 *2.6* 的情形 *i.* 成立。若 $\boldsymbol{\theta}\in H$ 是无旋的，且对所有 $i=1,$ $\langle\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{e}_i\rangle_{\bar{\rho}}=0$，2，3，则有

$$\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}\gtrsim\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{L^2(B_R)}+\|\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{e}_r\|^2_{L^2(\partial B_R)}. \tag{2.9}$$

证明。 利用 (2.8) 以及 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R}=0$ 这一事实，可得

$$\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}\gtrsim\frac{1}{\bar{\rho}'(R)^2}\|\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|^2_{L^2(\partial B_R)}=\|\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{e}_r\|^2_{L^2(\partial B_R)}.$$

由于 $\boldsymbol{\theta}$ 是无旋的，故对某个标量函数 ϕ，有 $\boldsymbol{\theta}=\nabla\phi$。不妨设 ϕ 在 B_R上的平均值为零，只需将 ϕ 替换为 $\phi-\int_{B_R}\phi\mathrm{d}\mathbf{x}$。于是由庞加莱不等式和迹定理可得

$$\|\phi\|_{L^2(B_R)}+\|\phi\|_{L^2(\partial B_R)}\lesssim\|\nabla\phi\|_{L^2(B_R)}=\|\boldsymbol{\theta}\|_{L^2(B_R)}.$$

Now

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{\bar{\rho}}&=\int_{B_R}\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\partial B_R}\phi\boldsymbol{\theta}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}-\int_{B_R}\phi\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_{\partial B_R}\phi\bar{\rho}'(R)^{-1}\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}S-\int_{B_R}\phi\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\lesssim\|\boldsymbol{\theta}\|_{L^2(B_R)}\left(\|\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|_{L^2(B_R)}+\frac{1}{|\bar{\rho}'(R)|}\|\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\|_{L^2(\partial B_R)}\right)\\&\lesssim\epsilon\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{L^2(B_R)}+\epsilon^{-1}\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}\end{aligned}$$

在最后一行中，我们使用了杨氏不等式和 (2.8)。令 ϵ 足够小，并将右端的第一项移至左端吸收，即得证。□

然而，即使我们将范围限制在此类无旋扰动上，$\|\nabla\boldsymbol{\theta}\|^2_{L^2(B_R)}$ 也无法由$\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}$ 控制，正如下一个命题所示。这表明，此类液态恒星的稳定性可能不如预期，尤其是对于“高频”扰动（对应较高阶的球谐函数）：

命题 2.7 (无法控制导数)。 取推论 *2.6.4* 中的设定，

$$\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}\not\gtrsim\|\nabla\boldsymbol{\theta}\|^2_{L^2(B_R)}.$$

证明。 令 $\boldsymbol{\theta}_l=\nabla(r^lY_{lm})$，则利用 (A.1) 可得 $\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}_l)\ =l\bar{\rho}'r^{l-1}Y_{lm}$。我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla\boldsymbol{\theta}_l\|^2_{L^2(B_R)}&=\int_{B_R}\sum_{i,j\in\{1,2,3\}}\partial_i\partial_j(r^lY_{lm})\partial_i\partial_j(r^lY_{lm})\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\int_{\partial B_R}\sum_{i,j\in\{1,2,3\}}\partial_i\partial_j(r^lY_{lm})\partial_j(r^lY_{lm})\mathbf{e}_i\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}(x)\\&\quad-\int_{\partial B_R}\sum_{i,j\in\{1,2,3\}}\partial_i\partial_i(r^lY_{lm})\partial_j(r^lY_{lm})\mathbf{e}_j\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\partial B_R} \partial_r |\nabla(r^l Y_{lm})|^2 \mathrm{d}S(x) = \frac{1}{2}\int_{\partial B_R} \partial_r |l r^{l-1} Y_{lm}\mathbf{e}_r + r^l \nabla Y_{lm}|^2 \mathrm{d}S(x)\\
&= \int_{\partial B_R} (l(l-1) r^{l-2} Y_{lm}\mathbf{e}_r + (l-1) r^{l-1}\nabla Y_{lm})(l r^{l-1} Y_{lm}\mathbf{e}_r + r^l \nabla Y_{lm}) \mathrm{d}S(x)\\
&= \int_{\partial B_R} (l^2(l-1) r^{2l-3} Y_{lm}^2 + (l-1) r^{2l-3} (r\nabla Y_{lm})^2) \mathrm{d}S(x)\\
&= l^2(l-1)R^{2l-1} + l(l-1)(l+1)R^{2l-1} = l(l-1)(2l+1)R^{2l-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\cdot(\bar\rho\boldsymbol{\theta}_l)\|_{L^2(B_R)}^2 &= \int_{B_R} l^2 \bar\rho'^2 r^{2l-2} Y_{lm}^2 \mathbf{dx}\\
&\lesssim \int_{B_R} l^2 r^{2l} Y_{lm}^2 \mathbf{dx} = \int_0^R l^2 r^{2l+2} \mathrm{d}r = \frac{l^2}{2l+3} R^{2l+3}\\
\|\nabla\cdot(\bar\rho\boldsymbol{\theta}_l)\|_{L^2(\partial B_R)}^2 &= \int_{\partial B_R} l^2 \bar\rho'^2 r^{2l-2} Y_{lm}^2 \mathrm{d}S(\mathbf{x}) = l^2 \bar\rho'(R)^2 R^{2l}
\end{aligned}
$$

其中不等式由引理 1.1 得出。因此，利用 (2.7)，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\nabla\boldsymbol{\theta}_l\|_{L^2(B_R)}^2}{\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}_l, \boldsymbol{\theta}_l\rangle_{\bar\rho}} &\geq \frac{\|\nabla\boldsymbol{\theta}_l\|_{L^2(B_R)}^2}{\|\nabla\cdot(\bar\rho\boldsymbol{\theta}_l)\|_{L^2(B_R)}^2 + |\bar\rho'(R)|^{-1}\|\nabla\cdot(\bar\rho\boldsymbol{\theta}_l)\|_{L^2(\partial B_R)}^2}\\
&\gtrsim \frac{l(l-1)(2l+1)R^{2l-1}}{\frac{l^2}{2l+3}R^{2l+3} + l^2|\bar\rho'(R)|R^{2l}} \to \infty \qquad \text{as} \qquad l\to\infty. \qquad \square
\end{aligned}
$$

注 2.7.1。 $\nabla\boldsymbol{\theta}$ 的控制在边界处失效，而非在内部。借助某种加夫尼不等式或霍奇型界（例如参见 *[24]*中的引理 *2.3*），我们确实有 $\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar\rho} \gtrsim \|\mathrm{dist}(\boldsymbol{\theta}, \partial B_R)^{\nabla\boldsymbol{\theta}}\|_{L^2(B_R)}^2$。我们预计，在系统中加入表面张力将使我们能够控制 $\|\nabla\boldsymbol{\theta}\|_{L^2(B_R)}^2$。

3 定理 2.6 的证明

使问题便于分析的第一个重要步骤已在引理 2.2 中完成：在那里推导出了线性液体边界条件 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0$，并且关键性地利用该条件将$\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}$完全改写为标量场 $g = \nabla\cdot(\bar\rho\boldsymbol{\theta})$的函数，而非完整的向量场 $\boldsymbol{\theta}$。具体而言，我们已将液体边界贡献 $\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{e}_r$ 改写为 $\bar\rho'^{-1}g$，其定义在 ∂B_R上。这一边界贡献是液体情形所特有的，在气体情形中不存在。不过，以这种方式改写液体边界项也付出了代价——就 g而言，与原变量相比，边界项在形式上涉及更高阶的导数，这使得后续阶段的分析颇为棘手。

将问题写成关于 g 的形式后，接下来我们利用球谐函数将问题分解为一系列标量问题，每个问题对应一个单独的模态 g_{lm} （其中 $l\in\mathbb{N}_0$ 且 $m\in\{-l,\cdots,l\}$），这与 Jang 和 Makino 关于气态Lane–Emden恒星的工作 [32] 类似。对于每个模态，我们得到体贡献 Λ_{lm} 和边界贡献 Γ_{lm}，需要证明两者之和为正。径向 $l=0$ 模态恰好对应于 [36] 中研究的径向稳定性情形。在 [32] 的气体情形中，只有体贡献 Λ_{lm} 存在，他们证明了它为正。尽管可以用同样的 [32] 方法证明，在我们的液体情形下，Λ_{lm} 为正，但这种方法不足以证明 $\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm}$ 为正，至少对于模态 $l=2$，3，4，5 是如此。问题有两方面。首先，在 $l\geq 1$ 的情形下，[32] 用一个椭圆算子从下方逼近了 Λ_{lm}，但由于该椭圆算子的正性弱于 Λ_{lm} 本身，这种逼近会造成损失。其次，我们的液体边界项 Γ_{lm} 符号不明确，而且如前所述，它们在形式上比体项 Λ_{lm} 阶数更高，这意味着 Λ_{lm} 的额外正性无法轻易转移过来抵消 Γ_{lm}。

为了解决这一问题，我们在此处的创新之处在于，根据引理 3.5，将 g_{lm} 改写为关于新变量 χ_{lm} 的表达式；在该变量下，我们的问题自然呈现出正性。事实上，在这个新变量下，我们

可以将 $\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm}$ 精确地写成正项之和，而无需依赖任何有损近似或估计。这个新变量 χ_{lm} 非常适用于该问题，因此液体边界条件 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R}=0$ 简单地表现为条件 $\chi'_{lm}(R)=0$，并且可以将边界项 Γ_{lm}换回以导数阶数计的正确顺序。事实上，这个新变量 χ_{lm} 对气体情形同样适用，因此它将为 [32] 中的气体情形提供一个更简单的证明，并给出"能量"下界的精确界。

引理 3.1（球谐函数分解）。设 $\boldsymbol{\theta}\in H^2(B_R)$。那么

$$g:=\nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta})\in H^1(B_R) \tag{3.1}$$

$$\Psi(\mathbf{x}):=\frac{1}{4\pi}\mathscr{K}g(\mathbf{x})\in H^2(\mathbb{R}^3)\cap C^1(\mathbb{R}^3), \tag{3.2}$$

并且它们可以展开为球谐函数

$$g(\mathbf{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_{lm}(r)Y_{lm}(\mathbf{x}) \qquad \textit{on } B_R, \tag{3.3}$$

$$\Psi(\mathbf{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Psi_{lm}(r)Y_{lm}(\mathbf{x}) \qquad \textit{on } \mathbb{R}^3, \tag{3.4}$$

且分别在 $L^2(B_R)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中收敛，其中球谐函数 Y_{lm} 在附录 *A.1* 中引入。此外，Ψ_{lm} 与 g_{lm} 之间满足关系

$$\Psi_{lm}(r)=\frac{-1}{2l+1}\left(\int_0^r\frac{y^{l+2}}{r^{l+1}}g_{lm}(y)\mathrm{d}y+\int_r^R\frac{r^l}{y^{l-1}}g_{lm}(y)\mathrm{d}y\right) \tag{3.5}$$

$$g_{lm}=\Delta^{\langle l\rangle}\Psi_{lm}:=\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2\Psi'_{lm}\right)'-\frac{l(l+1)}{r^2}\Psi_{lm}\right). \tag{3.6}$$

由此，下面的恒等式成立：

$$\langle\mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm}), \tag{3.7}$$

其中，对于 $l\geq 0$ 和 $m\in\{-l,\dots,l\}$,

$$\Lambda_{lm}:=\int_0^R\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}g_{lm}^2+4\pi g_{lm}\Psi_{lm}\right)r^2\mathrm{d}r \tag{3.8a}$$

$$\Gamma_{lm}:=-\frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)}\left(\left(\gamma+\frac{4\pi R}{\bar{\rho}'(R)}\frac{1}{2l+1}\right)g_{lm}(R)^2+8\pi g_{lm}(R)\Psi_{lm}(R)\right). \tag{3.8b}$$

证明。由 $\boldsymbol{\theta}\in H^2(B_R)$ 可立即得到 $g\in H^1(B_R)$。由于 Ψ 是 g 与核 $|\cdot|^{-1}$ 的卷积，其中 g 在 $\mathbb{R}^3\backslash B_R$ 上自然地延拓为 0，标准计算表明 $\Psi\in C^1(\mathbb{R}^3)\cap H^2(\mathbb{R}^3)$。由于球谐函数构成一组 L^2 基（见 [1, 29, 7] 和附录 A.1），我们得到 g 和 Ψ 在 L^2 中的球谐展开（3.3）–（3.4）。

由引理 A.1 可得

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}}Y_{lm}(\mathbf{y})Y_{lm}(\mathbf{x})$$

它们在 $\{(\mathbf{x},\mathbf{y}):|\mathbf{x}|\neq|\mathbf{y}|\}$ 中的所有紧集上一致收敛。因此我们有

$$\mathscr{K}g(\mathbf{x})=-4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}Y_{lm}(\mathbf{x})\left(\int_{B_{|\mathbf{x}|}(\mathbf{0})}\frac{|\mathbf{y}|^l}{|\mathbf{x}|^{l+1}}gY_{lm}\mathrm{d}\mathbf{y}+\int_{B_{|\mathbf{x}|}(\mathbf{0})^c}\frac{|\mathbf{x}|^l}{|\mathbf{y}|^{l+1}}gY_{lm}\mathrm{d}\mathbf{y}\right)$$

$$= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\mathbf{x}) \left(\int_0^{|\mathbf{x}|} \frac{y^{l+2}}{|\mathbf{x}|^{l+1}} g_{lm} \mathrm{d}y + \int_{|\mathbf{x}|}^{R} \frac{|\mathbf{x}|^l}{y^{l-1}} g_{lm} \mathrm{d}y \right). \tag{3.9}$$

因此我们得出结论：

$$\Psi_{lm}(r) = \frac{-1}{2l+1} \left(\int_0^r \frac{y^{l+2}}{r^{l+1}} g_{lm}(y) \mathrm{d}y + \int_r^R \frac{r^l}{y^{l-1}} g_{lm}(y) \mathrm{d}y \right)$$

由于球谐展开是唯一的（利用标准的希尔伯特空间理论，以及球谐函数构成球面上 L^2 函数的 L^2 基这一事实）。将此表达式求逆，得到 (3.6)。

现在利用 g 和 Ψ 的球谐展开，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R} g \mathscr{K}_{\partial} g \, \mathrm{d}S &= -\int_{\partial B_R} \int_{\partial B_R} \frac{g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= -\frac{4\pi}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \int_{\partial B_R} \int_{\partial B_R} g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) Y_{lm}(\mathbf{x}) Y_{lm}(\mathbf{y}) \mathrm{d}S(\mathbf{x}) \mathrm{d}S(\mathbf{y}) \\
&= -4\pi R^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{g_{lm}(R)^2}{2l+1}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\bar{\rho}} &= \int_{B_R} g \left(\gamma \bar{\rho}^{\gamma-2} + \mathscr{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1} \mathscr{K}_{\partial} \right) g \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\partial B_R} \bar{\rho}'(R)^{-1} g \left(\gamma + \mathscr{K} - \bar{\rho}'(R)^{-1} \mathscr{K}_{\partial} \right) g \, \mathrm{d}S \\
&= \int_{B_R} g \left(\gamma \bar{\rho}^{\gamma-2} g + 4\pi \Psi \right) \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial B_R} \bar{\rho}'(R)^{-1} g \left(\gamma g + 8\pi \Psi - \bar{\rho}'(R)^{-1} \mathscr{K}_{\partial} g \right) \, \mathrm{d}S \\
&= \int_{B_R} \left(\gamma \bar{\rho}^{\gamma-2} |g|^2 + 4\pi g \Psi \right) \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \frac{1}{\bar{\rho}'(R)} \int_{\partial B_R} \left(\gamma |g|^2 + 8\pi g \Psi - \bar{\rho}'(R)^{-1} g \mathscr{K}_{\partial} g \right) \, \mathrm{d}S \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_0^r \left(\gamma \bar{\rho}^{\gamma-2} g_{lm}^2 + 4\pi g_{lm} \Psi_{lm} \right) r^2 \mathrm{d}r \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)} \left(\gamma g_{lm}(R)^2 + 8\pi g_{lm}(R) \Psi_{lm}(R) + \frac{4\pi R}{\bar{\rho}'(R)} \frac{g_{lm}(R)^2}{2l+1} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (\Lambda_{lm} + \Gamma_{lm}).
\end{aligned}$$

□

引理 3.2. 采用引理 *3.1* 的设定。我们有

$$\Psi'_{lm}(r) = -\frac{l+1}{r} \Psi_{lm}(r) \qquad \textit{for} \qquad r \geq R.$$

$$\int_R^{\infty} \Psi'_{lm}(r)^2 r^2 \mathrm{d}r = (l+1)^2 \int_R^{\infty} \Psi_{lm}(r)^2 \mathrm{d}r = \frac{(l+1)^2 R}{2l+1} \Psi_{lm}(R)^2.$$

证明。 对 (3.5) 求导，得到

$$\Psi'_{lm}(r) = \frac{-1}{2l+1} \left(r g_{lm}(r) - r g_{lm}(r) - (l+1) \int_0^r \frac{y^{l+2}}{r^{l+2}} g_{lm}(y) \mathrm{d}y + l \int_r^R \frac{r^{l-1}}{y^{l-1}} g_{lm}(y) \mathrm{d}y \right) \tag{3.10}$$

因此

$$\Psi'_{lm}(r) = \frac{l+1}{2l+1}\int_0^R \frac{y^{l+2}}{r^{l+2}} g_{lm}(y)\mathrm{d}y \qquad \text{for} \qquad r \geq R.$$

由于

$$\Psi_{lm}(r) = \frac{-1}{2l+1}\int_0^R \frac{y^{l+2}}{r^{l+1}} g_{lm}(y)\mathrm{d}y \qquad \text{for} \qquad r \geq R,$$

我们有

$$\Psi'_{lm}(r) = -\frac{l+1}{r}\Psi_{lm}(r) \qquad \text{for} \qquad r \geq R$$

$$\Psi_{lm}(r) = \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}}\Psi_{lm}(R) \qquad \text{for} \qquad r \geq R.$$

因此我们有

$$\int_R^\infty \Psi_{lm}(r)^2\mathrm{d}r = \int_R^\infty \frac{R^{2l+2}}{r^{2l+2}}\Psi_{lm}(R)^2\mathrm{d}r = -\frac{R^{2l+2}}{2l+1}\Psi_{lm}(R)^2\left[\frac{1}{r^{2l+1}}\right]_R^\infty = \frac{R}{2l+1}\Psi_{lm}(R)^2. \quad \square$$

由 [36] 我们得到如下定理。

定理 3.3. 设 $\bar{\rho}$ 为绝热指数为 γ、半径为 R的液体 *LE* 剖面，且

$$\mathscr{L}\chi := -\gamma\partial_r\left(\bar{\rho}^\gamma r^4\partial_r\chi\right) + (4-3\gamma)r^3\chi\partial_r\bar{\rho}^\gamma.$$

设 $E := \{\chi : \ \|\chi\|_E < \infty,\ 3\chi(R) + R\chi'(R) = 0\}$，其中

$$\|\chi\|_E := \|r^2\chi'\|^2_{L^2([0,R])} + \|r^2\chi\|^2_{L^2([0,R])} + (R^3+R^4)|\chi(R)|^2.$$

Then

i. 当 $\gamma \geq 4/3$ 或 $\bar{\rho}(0)$ 接近 *1* 时，我们有

$$\inf_{\|\chi\|_E>0} \frac{\langle\mathscr{L}\chi,\chi\rangle_{L^2([0,R])}}{\|\chi\|_E^2} > 0.$$

ii. 当 $\gamma < 4/3$ 和 $\bar{\rho}(0)$ 很大时，我们有

$$\inf_{\|\chi\|_E>0} \frac{\langle\mathscr{L}\chi,\chi\rangle_{L^2([0,R])}}{\|\chi\|_E^2} < 0.$$

我们将使用定理 3.3 为二次型 Λ_{00} 获得强制性。

命题 3.4 ($l=0$ 模态界)。 假设 $\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R)$ 以及 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0$。当引理 *3.3* 的情形 *i.* 成立时，我们有

$$\Lambda_{00} + \Gamma_{00} \gtrsim \int_0^R g_{00}^2 r^2\mathrm{d}r + \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)^2}g_{00}(R)^2, \tag{3.11}$$

其中， Λ_{00}、 Γ_{00}、 g_{00} 如引理 *3.1* 中所定义。

证明。 $\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R)$ 表示 $\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}$ 在 ∂B_R 上有良定义（迹定理）。由于 $(\nabla \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0$ 且$\bar{\rho}\boldsymbol{\theta} = \nabla\Psi + \mathbf{C}$，其中$\mathbf{C}$ 是无散度的，因此我们有

$$\int_{\partial B_R} \partial_r \Psi \, \mathrm{d}S = \int_{\partial B_R} \nabla\Psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial B_R} \bar{\rho}\boldsymbol{\theta} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\bar{\rho}'(R)} \int_{\partial B_R} g \, \mathrm{d}S.$$

由此可得 $\Psi'_{00}(R) = \bar{\rho}'(R)^{-1} g_{00}(R)$。现在对 (3.5) 求导，并利用 $g_{00}(r) = 0$ 作为$r > R$，我们看到事实上必须有

$$\Psi'_{00}(r) = \frac{R}{r\bar{\rho}'(R)} g_{00}(R) \qquad \text{for} \qquad r \geq R. \tag{3.12}$$

记

$$\chi := \frac{\Psi'_{00}}{r\bar{\rho}}, \tag{3.13}$$

引理 3.2 给出

$$\Psi_{00}(R) = -R\Psi'_{00}(R).$$

利用 (3.6) 和 (3.12)，我们得到

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00} &= -\frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)} \left(\left(\gamma + \frac{4\pi R}{\bar{\rho}'(R)} \right) g_{00}(R)^2 + 8\pi g_{00}(R)\Psi_{00}(R) \right) \\
&= -\frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)} \left(\gamma g_{00}(R)^2 + 4\pi g_{00}(R)\Psi_{00}(R) \right) = -\gamma R^2 \bar{\rho}'(R)\Psi'_{00}(R)^2 - 4\pi R^2 \Psi'_{00}(R)\Psi_{00}(R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{00} &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2} g_{00}^2 + 4\pi g_{00}\Psi_{00} \right) r^2 \mathrm{d}r = \int_0^R \left(\frac{\gamma}{r^2}\bar{\rho}^{\gamma-2} \left(\left(r^2\Psi'_{00} \right)' \right)^2 + 4\pi \left(r^2\Psi'_{00} \right)' \Psi_{00} \right) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^R \left(\frac{\gamma}{r^2}\bar{\rho}^{\gamma-2} \left(\left(r^2\Psi'_{00} \right)' \right)^2 - 4\pi r^2 (\Psi'_{00})^2 \right) \mathrm{d}r + 4\pi R^2 \Psi'_{00}(R)\Psi_{00}(R) \\
&= \int_0^R \left(\frac{\gamma}{r^2}\bar{\rho}^{\gamma-2} \left(\left(r^3\bar{\rho}\chi \right)' \right)^2 - 4\pi\chi^2\bar{\rho}^2 r^4 \right) \mathrm{d}r - \Gamma_{00} - \gamma R^4 \bar{\rho}'(R)\chi(R)^2.
\end{aligned}$$

现在，由于 $0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\Delta\bar{\rho}^{\gamma-1} + 4\pi\bar{\rho}$ 如式 (2.4) 所示，我们可得

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{00} + \Gamma_{00} \\
&= \int_0^R \left(\frac{\gamma}{r^2}\bar{\rho}^{\gamma-2} \left(\left(r^3\bar{\rho}\chi \right)' \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} r^4\chi^2\bar{\rho}\Delta\bar{\rho}^{\gamma-1} \right) \mathrm{d}r - \gamma R^4 \bar{\rho}'(R)\chi(R)^2 \\
&= \int_0^R \left(\frac{\gamma}{r^2}\bar{\rho}^{\gamma-2} \left(3r^2\bar{\rho}\chi + r^3\bar{\rho}'\chi + r^3\bar{\rho}\chi' \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}(r^2(\bar{\rho}^{\gamma-1})')'\chi^2\bar{\rho}r^2 \right) \mathrm{d}r - \gamma R^4 \bar{\rho}'(R)\chi(R)^2 \\
&= \int_0^R \left(\gamma \left(3r\bar{\rho}^{\gamma/2}\chi + r^2\bar{\rho}^{\gamma/2-1}\bar{\rho}'\chi + r^2\bar{\rho}^{\gamma/2}\chi' \right)^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} r^2 (\bar{\rho}^{\gamma-1})'(\chi^2\bar{\rho}r^2)' \right) \mathrm{d}r \\
&\quad \underbrace{+\frac{\gamma}{\gamma-1} R^4 (\bar{\rho}^{\gamma-1})'(R)\chi(R)^2 - \gamma R^4 \bar{\rho}'(R)\chi(R)^2}_{=0} \\
&= \int_0^R \Big(\gamma \big(9r^2\bar{\rho}^{\gamma}\chi^2 + r^4\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}')^2\chi^2 + r^4\bar{\rho}^{\gamma}(\chi')^2 + 6r^3\bar{\rho}^{\gamma-1}\bar{\rho}'\chi^2 + 2r^4\bar{\rho}^{\gamma-1}\bar{\rho}'\chi\chi' + 6r^3\bar{\rho}^{\gamma}\chi\chi' \big) \\
&\qquad\qquad - \gamma r^2\bar{\rho}^{\gamma-2}\bar{\rho}'(2\chi\chi'\bar{\rho}r^2 + \chi^2\bar{\rho}'r^2 + 2r\chi^2\bar{\rho}) \Big) \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^R \gamma \left(9r^2\bar{\rho}^\gamma\chi^2 + r^4\bar{\rho}^\gamma(\chi')^2 + 4\gamma^{-1}r^3(\bar{\rho}^\gamma)'\chi^2 + 6r^3\bar{\rho}^\gamma\chi\chi'\right) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^R \gamma \left(r^4\bar{\rho}^\gamma(\chi')^2 + (4\gamma^{-1}-3)r^3(\bar{\rho}^\gamma)'\chi^2\right) \mathrm{d}r + 3\gamma R^3\chi(R)^2 \\
&= \int_0^R \left(\gamma r^4\bar{\rho}^\gamma(\chi')^2 + (4-3\gamma)r^3(\bar{\rho}^\gamma)'\chi^2\right) \mathrm{d}r + 3\gamma R^3\chi(R)^2 = \langle \mathscr{L}\chi, \chi\rangle_{L^2([0,R])}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

由引理 3.3 的情形 i，我们得到

$$\Lambda_{00} + \Gamma_{00} \gtrsim \|\chi\|_E^2.$$

于是，当 ϵ 足够小时，我们得到

$$(1+\epsilon)(\Lambda_{00}+\Gamma_{00}) \geq \int_0^R \epsilon\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}g_{00}^2 - 4\pi r^2(\Psi_{00}')^2\right)\mathrm{d}r - \epsilon\gamma R^2\bar{\rho}'(R)\Psi_{00}'(R)^2 + C\|\chi\|_E^2.$$

最后，利用 (3.13) 并取 ϵ 足够小，我们得到

$$\Lambda_{00} + \Gamma_{00} \gtrsim \int_0^R \left(\bar{\rho}^{\gamma-2}g_{00}^2 + (\Psi_{00}')^2\right) r^2\mathrm{d}r + R^2\Psi_{00}'(R)^2.$$

根据 (3.12)，我们可以将边界项化为 $g_{00}(R)$，从而得到 (3.11)。 □

为了证明高阶模态的正性，我们将把泛函改写为关于某些变量的形式，在这些变量下正性是显然的。

引理 3.5 (χ_{lm} 表述。 取引理 *3.1* 的设定。设 $\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R)$且 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R}=0$，则可将 $g_{lm} = (\bar{\rho}\chi_{lm})'r^{l-1}$ 写为，其中 χ_{lm} 满足 $\chi_{lm}'(R) = 0$。并且我们有

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{lm} + \Gamma_{lm} &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2 - 4\pi(\bar{\rho}\chi_{lm})^2\right) r^{2l}\mathrm{d}r - \gamma\bar{\rho}'(R)\chi_{lm}(R)^2R^{2l} \qquad (3.15) \\
&= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^\gamma\chi_{lm}'^2 r^{2l} - 2(l-1)(\bar{\rho}^\gamma)'\chi_{lm}^2 r^{2l-1}\right)\mathrm{d}r. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

证明。 我们可以将 $\boldsymbol{\theta}$ 分解为向量球谐函数（见 (A.4)）：

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\Theta_{lm}^{[0]}\mathbf{Y}_{lm}^{[0]} + \Theta_{lm}^{[1]}\mathbf{Y}_{lm}^{[1]} + \Theta_{lm}^{[2]}\mathbf{Y}_{lm}^{[2]}\right).$$

利用 (A.1) 以及 $\nabla\cdot(\mathbf{x}\times\nabla) = 0$ 这一事实，我们可以用 $\Theta_{lm}^{[k]}$ 表示 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}$ 的散度。条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}|_{\partial B_R} = 0$ 意味着

$$0 = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(r^{-2}(\Theta_{lm}^{[0]}r^2)' + \Theta_{lm}^{[1]}r\Delta\right)Y_{lm}\Big|_{r=R}$$

这意味着对于所有 l, m 我们都有

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(r^{-2}(\Theta_{lm}^{[0]}r^2)' - l(l+1)\Theta_{lm}^{[1]}r^{-1}\right)\Big|_{r=R} \\
&= R^{-1}\left(2\Theta_{lm}^{[0]}(R) - l(l+1)\Theta_{lm}^{[1]}(R)\right) + \left(\Theta_{lm}^{[0]}\right)'(R). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Now

$$g = \nabla\cdot(\bar{\rho}\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(r^{-2}(\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[0]}r^2)' + \bar{\rho}\Theta_{lm}^{[1]}r\Delta\right)Y_{lm}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(r^{-2}(\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[0]}r^2)' - l(l+1)\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[1]}r^{-1}\right)Y_{lm}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(r^{-2}(\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[0]}r^{1-l}r^{l+1})' - l(l+1)\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[1]}r^{-1}\right)Y_{lm}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left((\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[0]}r^{1-l})'r^{l-1} + (l+1)\left(\Theta_{lm}^{[0]} - l\Theta_{lm}^{[1]}\right)\bar{\rho}r^{-1}\right)Y_{lm}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left((\bar{\rho}\Theta_{lm}^{[0]}r^{1-l})'r^{l-1} - (l+1)\left(\bar{\rho}\bar{\rho}^{-1}\int_r^R\left(\Theta_{lm}^{[0]} - l\Theta_{lm}^{[1]}\right)(y)\bar{\rho}(y)y^{-l}\mathrm{d}y\right)'r^{l-1}\right)Y_{lm}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\bar{\rho}\chi_{lm})'r^{l-1}Y_{lm}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\chi_{lm} = \Theta_{lm}^{[0]}r^{1-l} - (l+1)\bar{\rho}^{-1}\int_r^R\left(\Theta_{lm}^{[0]} - l\Theta_{lm}^{[1]}\right)(y)\bar{\rho}(y)y^{-l}\mathrm{d}y. \tag{3.18}
$$

由于 $\boldsymbol{\theta}\in H^2(B_R)$，当 $r\to 0$ 时，我们必有 $\Theta_{00}^{[0]} = O(r)$；而对于 $l\geq 1$，有 $\Theta_{lm}^{[0]} = \Theta_{lm}^{[1]} = O(r^{l-1})$和$\Theta_{lm}^{[2]} = O(r^l)$。这意味着当 $r\to 0$ 时，$\chi_{00} = O(1)$ 且 $\chi_{lm} = O(\ln r)$，对于 $l\geq 1$ 成立。这些条件足以保证下文分部积分时，0 处的边界项消失。

利用 (3.17)，我们有

$$
\begin{aligned}
\chi_{lm}'(R) &= (\Theta_{lm}^{[0]}r^{1-l})'(R) + (l+1)\left(\Theta_{lm}^{[0]}(R) - l\Theta_{lm}^{[1]}(R)\right)R^{-l}\\
&= (\Theta_{lm}^{[0]})'(R)R^{1-l} + \left(2\Theta_{lm}^{[0]}(R) - l(l+1)\Theta_{lm}^{[1]}(R)\right)R^{-l} = 0.
\end{aligned}
$$

采用引理 3.1 中的记号，我们有

$$
\begin{aligned}
g_{lm} &= (\bar{\rho}\chi_{lm})'r^{l-1}\\
\Psi_{lm} &= -\frac{1}{2l+1}\left(\int_0^r\frac{y^{2l+1}}{r^{l+1}}(\bar{\rho}\chi_{lm})'(y)\mathrm{d}y + \int_r^R r^l(\bar{\rho}\chi_{lm})'(y)\mathrm{d}y\right)Y_{lm}\\
&= -\frac{1}{2l+1}\left(r^l(\bar{\rho}\chi_{lm})(r) - (2l+1)\int_0^r\frac{y^{2l}}{r^{l+1}}(\bar{\rho}\chi_{lm})(y)\mathrm{d}y + r^l(\chi_{lm}(R) - (\bar{\rho}\chi_{lm})(r))\right)Y_{lm}\\
&= \left(\int_0^r\frac{y^{2l}}{r^{l+1}}(\bar{\rho}\chi_{lm})(y)\mathrm{d}y - \frac{r^l\chi_{lm}(R)}{2l+1}\right)Y_{lm} = Y_{lm}\int_0^r\frac{y^{2l}}{r^{l+1}}((\bar{\rho}\chi_{lm})(y) - \chi_{lm}(R))\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

所以我们有

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{lm} &= \int_0^R\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2r^{2l} + 4\pi(\bar{\rho}\chi_{lm})'\left(\int_0^r y^{2l}((\bar{\rho}\chi_{lm})(y) - \chi_{lm}(R))\mathrm{d}y\right)\right)\mathrm{d}r\\
&= 4\pi\chi_{lm}(R)\left(\int_0^R y^{2l}((\bar{\rho}\chi_{lm})(y) - \chi_{lm}(R))\mathrm{d}y\right)\\
&\quad + \int_0^R\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2r^{2l} - 4\pi r^{2l}\bar{\rho}\chi_{lm}(\bar{\rho}\chi_{lm} - \chi_{lm}(R))\right)\mathrm{d}r\\
&= \int_0^R\left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2r^{2l} - 4\pi r^{2l}(\bar{\rho}\chi_{lm} - \chi_{lm}(R))^2\right)\mathrm{d}r\\
\Gamma_{lm} &= -R^2\left(\left(\gamma\bar{\rho}_{lm}'(R) + \frac{4\pi R}{2l+1}\right)\chi_{lm}(R)^2R^{2l-2} + 8\pi\chi_{lm}(R)R^{-2}\int_0^R y^{2l}((\bar{\rho}\chi_{lm})(y) - \chi_{lm}(R))\mathrm{d}y\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(-\gamma\bar{\rho}'(R) - \frac{4\pi R}{2l+1}\right)\chi_{lm}(R)^2R^{2l} - 8\pi\chi_{lm}(R)\int_0^R r^{2l}(\bar{\rho}\chi_{lm} - \chi_{lm}(R))\mathrm{d}r.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm} &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2 - 4\pi((\bar{\rho}\chi_{lm} - \chi_{lm}(R) + \chi_{lm}(R))^2 - \chi_{lm}(R)^2)\right) r^{2l}\mathrm{d}r \\ &\quad + \left(-\gamma\bar{\rho}'(R) - \frac{4\pi R}{2l+1}\right)\chi_{lm}(R)^2R^{2l} \\ &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2 - 4\pi(\bar{\rho}\chi_{lm})^2\right) r^{2l}\mathrm{d}r - \gamma\bar{\rho}'(R)\chi_{lm}(R)^2R^{2l}.\end{aligned}$$

根据 (1.11)，我们有 $0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}(r^2(\bar{\rho}^{\gamma-1})')' + 4\pi r^2\bar{\rho} = \gamma(r^2\bar{\rho}^{\gamma-2}\bar{\rho}')' + 4\pi r^2\bar{\rho}$，因此得到

$$\begin{aligned}\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm} &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2r^{2l} + \gamma(r^2\bar{\rho}^{\gamma-2}\bar{\rho}')'\bar{\rho}\chi_{lm}^2r^{2l-2}\right)\mathrm{d}r - \gamma\bar{\rho}'(R)\chi_{lm}(R)^2R^{2l} \\ &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma-2}(\bar{\rho}\chi_{lm})'^2r^{2l} - \gamma r^2\bar{\rho}^{\gamma-2}\bar{\rho}'(\bar{\rho}\chi_{lm}^2r^{2l-2})'\right)\mathrm{d}r \\ &= \gamma\int_0^R \left(\bar{\rho}^{\gamma}\chi_{lm}'^2r^{2l} - 2(l-1)\bar{\rho}^{\gamma-2}\bar{\rho}'\bar{\rho}\chi_{lm}^2r^{2l-1}\right)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma}\chi_{lm}'^2r^{2l} - 2(l-1)(\bar{\rho}^{\gamma})'\chi_{lm}^2r^{2l-1}\right)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

□

注记 3.5.1. 引理 *3.5* 中此处的 χ_{lm} 并不是命题 *3.4* 的证明中 χ 的球谐展开，χ_{00} 也不等于 χ。乍看之下，对于 $l=0$，(3.16) 似乎与命题 *3.4* 中的非负性结果相矛盾，因为在(3.16)中选取 $\chi_{00}=1$会得到一个严格为负的数。然而，χ_{00} 不能自由选取，因为它受到 (3.18) 的约束，原因在于它来源于 $\boldsymbol{\theta}$。为加以说明，我们将在下文证明，不存在 $\boldsymbol{\theta}\in H^2(B_R)$ 在满足 $(\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R}=0$ 时能够导出 $\chi_{00}=1$。假设 $\chi_{00}=1$，这意味着

$$1 = \Theta_{00}^{[0]}r - \bar{\rho}^{-1}\int_r^R \Theta_{00}^{[0]}(y)\bar{\rho}(y)\mathrm{d}y.$$

这意味着$(\bar{\rho}(1-\Theta_{00}^{[0]}r))' = \Theta_{00}^{[0]}\bar{\rho}$，我们可以将其改写为

$$\bar{\rho}' = 2\Theta_{00}^{[0]}\bar{\rho} + (\bar{\rho}\Theta_{00}^{[0]})'r = r^{-1}(\bar{\rho}\Theta_{00}^{[0]}r^2)'.$$

因此，

$$\int_0^r y\bar{\rho}'(y)\mathrm{d}y = \bar{\rho}\Theta_{00}^{[0]}r^2 + C.$$

由(3.17)可得

$$0 = 2R^{-1}\Theta_{00}^{[0]}(R) + \left(\Theta_{00}^{[0]}\right)'(R).$$

这意味着 $C(\bar{\rho}^{-1})'(R) = \left(\bar{\rho}^{-1}\int_0^r y\bar{\rho}'(y)\mathrm{d}y\right)'(R)$，并且

$$C = \int_0^R y\bar{\rho}'(y)\mathrm{d}y - R = \int_0^R \bar{\rho}\,\mathrm{d}r \neq 0.$$

但这意味着 $\Theta_{00}^{[0]}\neq O(r)$，这与 $\boldsymbol{\theta}\in H^2(B_R)$ 矛盾。因此，尽管 χ_{lm} 对于证明 $l\geq 1$ 模态的非负性非常有用，但并不太适合研究径向 $l=0$ 模态。这就是我们在命题 *3.4* 中使用不同变量 χ 的原因。

由 (3.15) 可立即看出

推论 3.5.2 (上界)。 取引理 *3.1* 中的设定。假设 $\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R)$ 和$(\nabla \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0$，则对所有 l, m，有

$$\Lambda_{lm} + \Gamma_{lm} \lesssim \int_0^R g_{lm}^2 r^2 \mathrm{d}r - \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)} g_{lm}(R)^2.$$

命题 3.6 ($l = 1$ 模态上界。 假设 $\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R)$ 和 $(\nabla \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0$。则

$$\Lambda_{1m} + \Gamma_{1m} \gtrsim \int_0^R g_{1m}^2 r^2 \mathrm{d}r + \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)^2} g_{1m}(R)^2 \qquad \textit{when} \qquad \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_i \rangle_{\bar{\rho}} = 0 \textit{ for all } i = 1, 2, 3,$$

其中 $\Lambda_{1m}, \Gamma_{1m}, g_{1m}$ 如引理 *3.1* 中所定义。

证明。 正交条件

$$\begin{aligned} 0 = \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_i \rangle_{\bar{\rho}} &= \int_{B_R} \bar{\rho} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla x^i \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{B_R} g x^i \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial B_R} x^i \boldsymbol{\theta} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= -\int_{B_R} g x^i \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{\bar{\rho}'(R)} \int_{\partial B_R} x^i g \, \mathrm{d}S \end{aligned}$$

意味着 $0 = -\int_0^R g_{1m} r^3 \mathrm{d}r + R^3 \bar{\rho}'(R)^{-1} g_{1m}(R)$，因此

$$0 = -\int_0^R (\bar{\rho} \chi_{1m})' r^3 \mathrm{d}r + R^3 \chi_{1m}(R) = 3 \int_0^R \bar{\rho} \chi_{1m} r^2 \mathrm{d}r$$

其中 χ_{1m} 如引理 3.5 中所定义。此约束排除了非零常数函数，因此我们可以应用庞加莱不等式，得到

$$\int_0^R \chi_{1m}^2 r^2 \mathrm{d}r \lesssim \int_0^R \chi_{1m}'^2 r^2 \mathrm{d}r.$$

因此，根据引理 3.5,

$$\begin{aligned} \Lambda_{1m} + \Gamma_{1m} &= \int_0^R \gamma \bar{\rho}^\gamma \chi_{1m}'^2 r^2 \mathrm{d}r \gtrsim \int_0^R \left(\gamma \bar{\rho}^\gamma \chi_{1m}'^2 r^2 + \chi_{1m}^2 r^2 \right) \mathrm{d}r \\ &\gtrsim \int_0^R \left(\gamma \bar{\rho}^\gamma \chi_{1m}'^2 r^2 + \chi_{1m}^2 r^2 \right) \mathrm{d}r + R^2 \chi_{1m}(R)^2 \end{aligned}$$

其中最后一行由迹的性质得到。由于 $g_{1m} = (\bar{\rho} \chi_{1m})' = \bar{\rho}' \chi_{1m} + \bar{\rho} \chi_{1m}'$ 且 $g_{1m}(R) = \bar{\rho}'(R) \chi_{1m}(R)$，我们得到

$$\Lambda_{1m} + \Gamma_{1m} \gtrsim \int_0^R g_{1m}^2 r^2 \mathrm{d}r + \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)^2} g_{1m}(R)^2. \qquad \square$$

命题 3.7 ($l \geq 2$ 模态有界)。 设 $\boldsymbol{\theta} \in H^2(B_R)$ 且 $(\nabla \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\partial B_R} = 0$。那么对所有 $l \geq 2$，我们有

$$\Lambda_{lm} + \Gamma_{lm} \gtrsim \int_0^R g_{lm}^2 r^2 \mathrm{d}r + \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)^2} g_{lm}(R)^2,$$

其中 Λ_{lm}、 Γ_{lm}、 g_{lm} 如引理 *3.1* 所定义。

证明。 由引理 3.5

$$\begin{aligned}\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm} &= \int_0^R \left(\gamma\bar{\rho}^{\gamma}\chi_{lm}'^2 r^{2l} - 2(l-1)(\bar{\rho}^{\gamma})'\chi_{lm}^2 r^{2l-1}\right)\mathrm{d}r \\ &\gtrsim \int_0^R \left(\chi_{lm}'^2 r^{2l} + (l-1)\chi_{lm}^2 r^{2l}\right)\mathrm{d}r + R^{2l}\chi_{lm}(R)^2\end{aligned}$$

其中最后一行由引理 1.1 和迹得到。由于 $g_{lm} = (\bar{\rho}\chi_{lm})'r^{l-1} = \bar{\rho}'\chi_{lm}r^{l-1} + \bar{\rho}\chi_{lm}'r^{l-1}$ and$g_{lm}(R) = \bar{\rho}'(R)\chi_{lm}(R)R^{l-1}$，我们便得到所需的界。 □

最后，综合所有这些结果，我们可以证明定理 2.6。

定理 *2.6* 的证明。 推论 3.5.2 给出

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm}) \\ &\lesssim \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\int_0^R g_{lm}^2 r^2\mathrm{d}r + \frac{R^2}{|\bar{\rho}'(R)|}g_{lm}(R)^2\right) = \|g\|_{L^2(B_R)}^2 + \frac{1}{|\bar{\rho}'(R)|}\|g\|_{L^2(\partial B_R)}^2.\end{aligned}$$

i. 注意，由于 $\mathbf{L}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ and $\mathbf{L}$ 对称，我们有

$$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}} = \left\langle \mathbf{L}\left(\boldsymbol{\theta} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{e}_i\rangle_{\bar{\rho}}}{\|\mathbf{e}_i\|_{\bar{\rho}}^2}\mathbf{e}_i\right), \left(\boldsymbol{\theta} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{e}_i\rangle_{\bar{\rho}}}{\|\mathbf{e}_i\|_{\bar{\rho}}^2}\mathbf{e}_i\right)\right\rangle_{\bar{\rho}}.$$

因此，对于 i.，只需证明 $\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{e}_i\rangle_{\bar{\rho}} = 0, i = 1,2,3$ 的情形。
结合命题 3.4、3.6 和 3.7 中针对每个 l,m 得到的所有界，我们有 e

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}} &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(\Lambda_{lm}+\Gamma_{lm}) \\ &\gtrsim \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\int_0^R g_{lm}^2 r^2\mathrm{d}r + \frac{R^2}{\bar{\rho}'(R)^2}g_{lm}(R)^2\right) = \|g\|_{L^2(B_R)}^2 + \frac{1}{\bar{\rho}'(R)^2}\|g\|_{L^2(\partial B_R)}^2.\end{aligned}$$

ii. 根据定理 3.3 的 ii.，存在 χ 使得 $\langle\mathscr{L}\chi,\chi\rangle_{L^2([0,R])} < 0$。令 $\boldsymbol{\theta} = (4\pi)^{-1/2}r\chi\mathbf{e}r$，则按照引理 3.1 的记号，我们有 $g = (4\pi)^{-1/2}r^{-2}(r^3\bar{\rho}\chi)' = r^{-2}(r^3\bar{\rho}\chi)'Y_{00}$，并且 $\Psi = \Psi_{00}Y_{00}$，因此

$$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}} = \Lambda_{00}+\Gamma_{00}.$$

由 (3.10) 可得

$$\Psi_{00}'(r) = \int_0^r \frac{y^2}{r^2}y^{-2}(y^3\bar{\rho}\chi)'\mathrm{d}y = r\bar{\rho}\chi.$$

因此，由 (3.14)
可得，

$$\langle \mathbf{L}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}\rangle_{\bar{\rho}} = \Lambda_{00}+\Gamma_{00} = \langle\mathscr{L}\chi,\chi\rangle_{L^2([0,R])} < 0.$$ □

致谢

作者得到荷兰科学研究组织项目 VI.Vidi.223.019 和 OCENW.M20.194 的资助，并在本研究开始时曾获得英国工程与自然科学研究委员会研究生奖学金项目 EP/R513143/1 的资助。作者感谢 Mahir Had˘zi´c 和 Juhi Jang 的有益讨论，并感谢 Had˘zi´c 向他介绍了这一问题。

A 附录

附录 A.1 球谐函数

球谐函数既有实形式，也有复形式。关于复形式的定义和基本性质，见 [29]。复球谐函数 Y_l^m: $S^2 \to \mathbb{C}$ 与实球谐函数 Y_{lm}： $S^2 \to \mathbb{R}$ 之间的关系为

$$Y_l^m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{l,-m} - iY_{lm}) & m < 0 \\ Y_{l0} & m = 0 \\ \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}}(Y_{lm} + iY_{l,-m}) & m > 0. \end{cases}$$

我们还有关系式 $(Y_l^m)^* = (-1)^m Y_l^{-m}$. 零阶和一阶实球谐函数为

$$Y_{0,0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{1,-1}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{x^2}{|\mathbf{x}|},$$
$$Y_{1,0}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{x^3}{|\mathbf{x}|}, \qquad Y_{1,1}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{x^1}{|\mathbf{x}|}.$$

球谐函数满足

$$\Delta Y_{lm} = -l(l+1)r^{-2}Y_{lm}, \qquad \Delta(r^l Y_{lm}) = 0, \tag{A.1}$$

以及以下正交归一条件

$$\int_{S^2} Y_{lm}Y_{l'm'}\mathrm{d}S = \delta_{ll'}\delta_{mm'} = \int_{S^2} Y_m^m (Y_{l'}^{m'})^* \mathrm{d}S$$

它们构成 $L^2(S^2)$ [1] 的一组基，因此，特别地，任意函数 $g \in L^2(S^2)$ 都可以进行球谐展开

$$g = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_{lm}Y_{lm}, \qquad g_{lm} \in \mathbb{R}$$

在 $L^2(S^2)$ 中收敛。更一般地，函数 $g \in L^2(B_R)$ 在 $L^2(B_R)$ 中有球谐展开，

$$g = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_{lm}(r)Y_{lm}, \qquad g_{lm} : [0,R] \to \mathbb{R}. \tag{A.2}$$

事实上，由于 $L^2(B_R) = L^2([0,R];\ L^2(S^2)\ r^2) = L^2([0,R]; L^2(\partial B_r))$，换言之

$$\int_{B_R} |\cdot|\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^R \int_{\partial B_r} |\cdot|\,\mathrm{d}S\mathrm{d}r,$$

$g|_{\partial B_r}$ 必须对几乎处处的 $r \in [0,R]$ 属于 $L^2(\partial B_r)$。因此，对几乎处处的 r，球谐展开都存在。现在

$$\left\| g - \sum_{l=0}^{N}\sum_{m=-l}^{l} g_{lm}Y_{lm} \right\|^2_{L^2(B_R)} = \int_0^R \left\| g - \sum_{l=0}^{N}\sum_{m=-l}^{l} g_{lm}Y_{lm} \right\|^2_{L^2(\partial B_r)} \mathrm{d}r$$
$$\to 0 \qquad \text{as} \qquad N \to \infty$$

根据控制收敛定理（其中控制函数为 $4\|g\|^2_{L^2(\partial B_r)}$）。因此，(A.2) 在 $L^2(B_R)$ 中收敛。类似地，$L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的函数也有球谐展开。

以下引理使我们能够将引力势展开为球谐函数 .

引理 A.1. 对于 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$，有

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} Y_{lm}(\mathbf{y}) Y_{lm}(\mathbf{x})$$

并且该表达式在 $\{(\mathbf{r},\mathbf{r}') \in \mathbb{R}^6 : |\mathbf{r}| \neq |\mathbf{r}'|\}$ 中的任意紧集上关于 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 一致收敛。

证明。 由 [29] 可得

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} Y_l^m(\mathbf{y})^* Y_l^m(\mathbf{x}).$$

该公式的一种推导如下。假设 $r' = |\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}| = r$，否则交换 $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}$。根据余弦定理,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos\gamma}} = \frac{1}{r\sqrt{1+h^2-2h\cos\gamma}} \quad \text{with} \quad h := \frac{r'}{r}.$$

这里得到勒让德多项式关于 $P_\ell(\cos\gamma)$ 的生成函数:

$$\frac{1}{\sqrt{1+h^2-2h\cos\gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell P_\ell(\cos\gamma). \tag{A.3}$$

球谐函数加法定理的应用

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) Y_\ell^m(\theta',\varphi')$$

由此得到我们的第一个公式。由于 $|P_\ell(\cos\gamma)| \leq 1$ 对所有 ℓ 都成立，(A.3) 中的幂级数的收敛半径为 1，且在 B_1 的任意紧集上均一致收敛。根据解析函数恒等定理，(A.3) 中的等式对 $h < 1$ 成立。因此我们得出， $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$的展开式在 $\{(\mathbf{r},\mathbf{r}') \in \mathbb{R}^6$ 的任意紧集上一致收敛： $|\mathbf{r}| \neq |\mathbf{r}'|\}$。此外，用实球谐函数表示时,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} Y_l^m(\mathbf{y})^* Y_l^m(\mathbf{x}) \\
&= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{(-1)^m}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} Y_l^{-m}(\mathbf{y}) Y_l^m(\mathbf{x}) \\
&= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{2} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} (Y_{l,m}(\mathbf{y}) - iY_{l,-m}(\mathbf{y}))(Y_{lm}(\mathbf{x}) + iY_{l,-m}(\mathbf{x})) \\
&\quad + 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} Y_{l0}(\mathbf{y}) Y_{l0}(\mathbf{x}) \\
&\quad + 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{-1} \frac{1}{2} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} (Y_{l,-m}(\mathbf{y}) + iY_{lm}(\mathbf{y}))(Y_{l,-m}(\mathbf{x}) - iY_{lm}(\mathbf{x})) \\
&= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{\min\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^l}{\max\{|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|\}^{l+1}} Y_{lm}(\mathbf{y}) Y_{lm}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

□

通过以下方式定义向量球谐函数

$$\mathbf{Y}_{lm}^{[0]} = Y_{lm}\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{Y}_{lm}^{[1]} = r\nabla Y_{lm}, \qquad \mathbf{Y}_{lm}^{[2]} = \mathbf{x}\times\nabla Y_{lm}. \tag{A.4}$$

这些向量球谐函数彼此正交，并且

$$\int_{S^2} \left|\mathbf{Y}_{lm}^{[0]}\right|^2 \mathrm{d}S = 1, \qquad \int_{S^2} \left|\mathbf{Y}_{lm}^{[1]}\right|^2 \mathrm{d}S = \int_{S^2} \left|\mathbf{Y}_{lm}^{[2]}\right|^2 \mathrm{d}S = l(l+1). \tag{A.5}$$

我们可以将 L^2 向量场 $\boldsymbol{\theta}$ 展开为

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \left(\Theta_{lm}^{[0]}\mathbf{Y}_{lm}^{[0]} + \Theta_{lm}^{[1]}\mathbf{Y}_{lm}^{[1]} + \Theta_{lm}^{[2]}\mathbf{Y}_{lm}^{[2]}\right).$$

关于这些向量球谐函数的详细信息可见于 [2, 17]。

参考文献

[1] K. Atkinson 和 W. Han. 球谐函数与单位球面上的逼近：导论，收录于第 2044 卷数学讲义。施普林格，海德堡，2012年。[2] R. G. Barrera、G. A. Est´evez 和 J. Giraldo. 向量球谐函数及其在静磁学中的应用。《欧洲物理学杂志》，6(4):287–294，1985年。[3] S. Chandrasekhar. 理想白矮星的最大质量。《天体物理学杂志》，74:81–82，1931年。[4] S. Chandrasekhar. 恒星结构研究导论。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1939年。[5] M. Cheng、X. Cheng 和 Z. Lin. 不稳定 Lane–Emden 恒星附近的膨胀解。《数学物理通讯》，406:105，2025年6月。[6] D. Christodoulou. 三维流体中的激波形成。欧洲数学学会数学专著。欧洲数学学会，苏黎¨世，2007年。[7] R. Courant 和 D. Hilbert. 数理物理方法。第一卷。Interscience出版社，纽约，纽约州，1953年。[8] D. Coutand、J. Hole 和 S. Shkoller. 带表面张力的自由边界可压缩三维欧拉方程的适定性及零表面张力极限。*SIAM*数学分析杂志，45(6):3690–3767，2013年。[9] D. Coutand 和 S. Shkoller. 物理真空条件下移动边界可压缩三维欧拉方程在光滑函数空间中的适定性。《数学分析与应用档案》，206(2):515–616，2012年。[10] B. Dacorogna 和 J. Moser. 关于一个涉及雅可比行列式的偏微分方程。《亨利·庞加莱研究所年刊´*C*辑：非线性分析´》，7(1):1–26，1990年。[11] Y. Deng、J. Xiang 和 T. Yang. 欧拉–泊松方程解的爆破现象。《数学分析及其应用杂志》，286(1):295–306，2003年。[12] M. M. Disconzi、M. Ifrim 和 D. Tataru. 具有物理真空边界的相对论欧拉方程：Hadamard局部适定性、粗糙解与延拓判据。《数学分析与应用档案》，245(1):127–182，2022年。[13] A. S. Eddington. 恒星的辐射平衡。《皇家天文学会月刊》，77:16–35，1916年。[14] A. S. Eddington. 液态恒星。《自然》，121:278，1928年。[15] R. Emden.《气体球：机械热理论在宇宙学与气象学问题中的应用¨》。B. G. Teubner出版社，莱比锡和柏林，1907年。

[16] L. Euler. 流体运动的一般原理。柏林科学院院刊，11:274–315，1757年。[17] W. Freeden 和 M. Schreiner. 数学地球科学中的球函数。地球系统数学。Birkh¨äuser/施普林格，沙姆，第二版，2022年。[18] D. Ginsberg、H. Lindblad 和 C. Luo. 具有自由表面边界的可压缩自引力液体运动的局部适定性。《数学分析与应用档案》，236(2):603–733，2020年。[19] P. Goldreich 和 S. Weber. 同源塌缩的恒星核心。《天体物理学杂志》，238:991–997，1980年。[20] X. Gu 和 Z. Lei. 具有物理真空的三维可压缩欧拉–泊松方程的局部适定性。《纯粹与应用数学杂志》(第9辑)，105(5):662–723，2016年。[21] M. Had˘zi´c 和 J. Jang. 可压缩流体力学方程的大型膨胀整体解。《数学创刊》，214(3):1205–1266，2018年。[22] M. Had˘zi´c 和 J. Jang. 径向对称的质量临界欧拉–泊松系统中膨胀恒星解的非线性稳定性。《纯粹与应用数学通讯》，71(5):827–891，2018年。[23] M. Had˘zi´c 和 J. Jang. 欧拉–泊松系统的一类整体解。《数学物理通讯》，370(2):475–505，2019年。[24] M. Had˘zi´c、J. Jang 和 K. M. Lam. 自相似膨胀 Goldreich–Weber 恒星的非径向稳定性，2022年。预印本，arXiv:2212.11420。[25] M. Had˘zi´c 和 Z. Lin. 相对论恒星的转折点原理。《数学物理通讯》，387(2):729–759，2021年。[26] M. Had˘zi´c、Z. Lin 和 G. Rein. 自引力相对论物质分布的稳定性与不稳定性。《数学分析与应用档案》，241(1):1–89，2021年。[27] Z. Hao 和 S. Miao. 液态 Lane–Emden 恒星的非线性不稳定性。《变分法与偏微分方程》，63(6):论文编号157，54页，2024年。[28] M. Ifrim 和 D. Tataru. 物理真空中的可压缩欧拉方程：全面的欧拉方法。《亨利·庞加莱研究所年刊》´e C辑：非线性分析，41(2):405–495，2024年。[29] J. D. Jackson.《经典电动力学》。John Wiley & Sons, Inc.，纽约—伦敦，1962年。[30] J. Jang. $\gamma = 6/5$的引力欧拉–泊松系统中的非线性不稳定性。《数学分析与应用档案》，188(2):265–307，2008年。[31] J. Jang. Lane–Emden恒星的非线性不稳定性理论。《纯粹与应用数学通讯》，67(9):1418–1465，2014年。[32] J. Jang 和 T. Makino. 欧拉–泊松方程所描述的球对称气态恒星周围斜压扰动的线性化分析。《数学物理学杂志》，61(5):051508，25页，2020年。[33] J. Jang 和 N. Masmoudi. 物理真空中的可压缩欧拉方程的适定性。《纯粹与应用数学通讯》，68(1):61–111，2015年。[34] J. H. Jeans. 关于液态恒星及恒星能量的释放。《皇家天文学会月刊》，87(5):400–414，1927年。[35] J. H. Jeans. 液态恒星。《自然》，121:173，1928年。[36] K. M. Lam. 液态 Lane–Emden 星的线性稳定性。《应用数学季刊》，82(4):639–672，2024年。[37] J. H. Lane. 在气态质量依靠内部热量维持体积、并遵循地面实验所知气体定律的假设下，论太阳的理论温度。《美国科学与艺术杂志》，50(148):57–74，1870年。

[38] S.-S. Lin. 球对称运动中气态恒星的稳定性。*SIAM*数学分析杂志，28(3):539–569，1997年。[39] Z. Lin、Y. Wang 和 H. Zhu。非旋转气态恒星的非线性稳定性。数学年刊，391:843–880，2024年7月。[40] Z. Lin 和 C. Zeng。可分哈密顿偏微分方程与气态恒星稳定性的转折点原理。《纯粹与应用数学通讯》，75(2):306–376，2022年。[41] H. Lindblad。具有自由表面边界的可压缩液体运动的适定性。《数学物理通讯》，260(2):319–392，2005年。[42] T. Luo 和 J. Smoller。可压缩 Euler–Poisson 方程旋转星解的存在性与非线性稳定性。《数学分析与应用档案》，191(3):447–496，2009年。[43] A. Majda。多个空间变量中的可压缩流体流动与守恒律组，第53卷，应用数学科学。Springer-Verlag，纽约，1984年。[44] T. Makino。气态恒星演化的 Euler–Poisson 方程爆破解。输运理论与统计物理，21(4-6):615–624，1992年。[45] S. Miao、S. Shahshahani 和 S. Wu。闵可夫斯基背景下自由边界硬相流体的适定性及其牛顿极限。剑桥数学杂志，9(2):269–350，2021年。[46] T. A. Oliynyk。相对论液体天体的动力学，2019年。预印本，arXiv:1907.08192。[47] J. R. Oppenheimer 和 G. M. Volkoff。论大质量中子核。物理评论，55(4):374–381，1939年。[48] G. Rein。气态恒星的非线性稳定性。《数学分析与应用档案》，168(2):115–130，2003年。[49] S. L. Shapiro 和 S. A. Teukolsky。黑洞、白矮星与中子星：致密天体物理学。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1983年。[50] T. C. Sideris。三维可压缩流体中的奇点形成。《数学物理通讯》，101(4):475–485，1985年。[51] R. C. Tolman。流体球的爱因斯坦场方程静态解。物理评论，55(4):364–373，1939年。[52] Y. Trakhinin。带真空边界条件的非相对论及相对论可压缩欧拉方程自由边界问题的局部存在性。《纯粹与应用数学通讯》，62(11):1551–1594，2009年。