arXiv:2603.03549v1 [math.FA] 3 Mar 2026

取值于 Hadamard 空间的 Lipschitz 映射的保序延拓

EDOARDO GARGIULO 和 EFE A. OK

Abstract. 我们研究这样一个问题：将从偏序希尔伯特空间 X 的子集映射到 Hadamard 偏序集 Y 的任意保序 Lipschitz函数进行延拓，同时不增大其 Lipschitz 常数并保持其单调性。当 X 为一维时，这种延拓总是可能的。然而，当 $\dim X \geq 2$ 且 Y 满足一些相当宽松的条件时，该性质普遍成立当且仅当 X 的序是平凡的。任何希尔伯特偏序集都满足对 Y 的条件。因此，作为主要结果的一个特例，我们发现，Kirszbraun定理不存在序理论上的推广。

1. Introduction

若一对度量空间 (X, Y) 具有利普希茨延拓性质，则对任意非空 $S \subseteq X$ 及任意 1-Lipschitz 映射 $f\colon S \to Y$，都存在一个 1-Lipschitz$F\colon X \to Y$，使其延拓 f.。利普希茨分析的核心问题之一，是确定哪些 (X, Y) 具有利普希茨延拓性质。[1] 两个经典结果界定了这一问题的范围。McShane-Whitney 定理（由[15] 和 [25]提出）断言，对于任意度量空间 X，，$(X, \mathbb{R})$ 都具有利普希茨延拓性质；而 Kirszbraun定理（由 [12]提出）则指出，对于任意希尔伯特空间 X 和 Y，(X, Y) 都具有利普希茨延拓性质。[2]

当度量空间具有额外结构时，自然会问能否在保留该结构的前提下获得 Lipschitz 延拓。特别是，当定义域和值域都是偏序度量空间时，除了要求延拓为 Lipschitz 映射外，还可以要求其保序。更准确地说，若对任意非空的 $S \subseteq X$ 以及保序的 1-Lipschitz 映射 $f\colon S \to Y$，，都存在保序的 1-Lipschitz $F\colon X \to Y$，使得 $F|_S = f$.[3]，则称一对 (X, Y) 偏序度量空间具有单调利普希茨延拓性质

Date：2026年1月25日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：54C20、54C30；次要分类号：06F30。*Key words and phrases.* Hadamard 偏序集、偏序希尔伯特空间、保序 Lipschitz 映射、径向性、布塞曼函数、Kirszbraun定理。本文已定稿，不会将其任何版本提交至其他地方发表。[1]关于这一问题及其变体，一篇极具价值的参考文献是 Benyamini 和 Lindenstrauss [5].[2]准确地说，Kirszbraun 证明了这一结论适用于两个有限维欧几里得空间之间的映射。Valentine [21] 注意到，该定理无需修改即可推广到希尔伯特空间的情形。因此，有些作者将这一结果称为 Kirszbraun-Valentine 定理。[3]实值映射的这一问题的连续版本（即将拓扑偏序集某个子集上的单调连续实函数单调且连续地延拓到整个空间）受到了广泛关注。关于这一问题的文献始于 Nachbin [16], , 并在决策理论、数理经济学以及

Ok [18] 最近刻画了所有使 $(X, \mathbb{R})$ 具有单调利普希茨延拓性质的 X 上的偏序类。由于该类包含 X 上的相等关系（它无法比较空间中任意两个不同的点），这一结果提供了 McShane-Whitney 定理的序论推广。

本文旨在研究Kirszbraun定理的适用范围能在多大程度上以这种方式加以扩展。因此，我们特别关注 X 与 Y 为希尔伯特偏序集（即借助尖闭凸锥赋予向量序的$=$ 希尔伯特空间）的情形，但我们的主要结果并非真正线性的，并且它适用于一类丰富得多的度量空间。我们首先指出，当 $X = \mathbb{R}$ 与 Y为任意巴拿赫偏序集时，借助仿射插值即可直接得到一个肯定结果（定理2）。然而，当 X 的维数超过1时，情况便发生根本变化。

在希尔伯特空间的背景下，本文的主要结果表述如下：

The No-Extension Theorem. 设 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 为满足$\dim X \geq 2$的偏序希尔伯特空间，且 $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 为任意希尔伯特偏序集。则(X, Y) 具有单调利普希茨延拓性质，当且仅当 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的。

当 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的（即相等关系）时， X 上的每个映射都自动保序。因此，在这种情况下，单调 Lipschitz 扩张性质与 Lipschitz 扩张性质相同，问题便归结为Kirszbraun定理。因此，无扩张定理表明，不存在一种保序的理论

c

Kirszbraun定理的推广。

我们将无扩张定理作为一个更一般的无扩张定理的特例来证明，其中 Y 属于一类相当大的 Hadamard偏序集。（Hadamard 偏序集是配备了测地遗传闭偏序的完备 CAT(0)空间；参见第 2.4 节。）从启发式角度看，后一个结果的证明基于一种简单但严格的障碍机制，它将定义域的序结构与陪域的渐近几何结合起来。关键观察是：若保序的 1-Lipschitz 扩张到给定的 Hadamard 偏序集 Y 总是可能，那么定义域 X 上的偏序就必然满足一种强度很高的度量相容条件，称为径向性（第 2.2 节）。这一必要条件可通过两点集上的一个测试映射来检验：该映射的保序 1-Lipschitz 扩张与一个单调Busemann函数复合后，会迫使某个度量不等式成立；这个函数与 Y 中的一条保序测地射线相关联（定理 3）。因此，为了得到这一必要条件，我们假设 Y 至少具有一个与保序测地射线相关联的单调Busemann函数。任意希尔伯特偏序集都满足这一条件（命题 10），此外还有许多其他 Hadamard 偏序集也满足（例 1–3）。

我们仍需探究径向性究竟有多苛刻。在有限度量偏序集的情形下，这一性质相当宽松（参见 [18]）。相比之下，我们在此发现，对于连通度量偏序集而言，它的限制极为严格（定理4）。事实上，如果一个度量空间包含一个接近简单环的副本，例如维数为≥ 2的赋范空间，那么它就不可能是非平凡径向有序的（定理5）。综合这些观察，可得出一个一般性结果（定理 8）；其中一个特例正是我们前文所述无扩张定理的必要性部分。

最优传输理论。关于这一领域的近期成果，请参见 [26], 及其中引用的文献。

最后，我们概述一项研究计划，以定量研究单调利普希茨延拓问题。

2. Preliminaries

2.1. 偏序集。 设 X 为一个非空集合。 X 上的预序 是 X上的自反且传递的二元关系，而 X 上的偏序 是X. 上的反对称预序。若 $\succcurlyeq$ 是 X.上的偏序，则称有序对（X， $\succcurlyeq$）为偏序集 。显然， X 上最小的偏序是 $\{$（x， x）： $x \in X\}$；我们将此偏序称为 X 上的平凡序 。 X 上的预序 $\succcurlyeq$ 是全序 ，如果 X 中任意两个元素 x 与 y 是 $\succcurlyeq$-可比较的，即 $x \succcurlyeq y$ 或 $y \succcurlyeq x$ 成立。 X 上的全序偏序称为 X上的线性序 。

下文中，除非另有明确说明，我们将 $\mathbb{R}^n$ 视为关于通常逐坐标序的偏序集。显然，该序为全序当且仅当 $n = 1$。

给定任意偏序集 $(X, \succcurlyeq)$，我们将 $\succcurlyeq$ 的非对称部分记为 $\succ$，也就是说， $x \succ y$ 表示 $y \neq x \succcurlyeq y$. 我们还将 X 上的二元关系 $\succcurlyeq^\bullet$ 定义为

$$x \succcurlyeq^\bullet y \quad \text{iff} \quad \text{not } y \succcurlyeq x.$$

因此， $x \succcurlyeq^\bullet y$ 表示 $x \succ y$，或者 x 与 y 不可 $\succcurlyeq$比较。显然， $\succcurlyeq^\bullet$ 是一种非自反关系。一般而言，这种关系既不对称，也不非对称，而且不具传递性。然而，当 $\succcurlyeq$ 是全序时， $\succcurlyeq^\bullet$ 等于 $\succ$。

若函数 $f\colon X \to Y$ 从偏序集 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 映射到偏序集 $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$，且对每个 x， $y \in X$，都满足以下条件，则称其为保序（或保序</style>）：

$$x \succcurlyeq_X y \quad \text{implies} \quad f(x) \succcurlyeq_Y f(y).$$

若 $Y = (\mathbb{R}, \geq)$，其中 $\geq$ 采用通常的序，则我们将 f 简称为 $\succcurlyeq$-递增。

2.2. 偏序度量空间。 设 $X = (X, d)$ 是一个度量空间。若偏序 $\succcurlyeq$ 定义在 X. 上，则称 $(X, \succcurlyeq)$ 为一个偏序度量空间 。此外，若 $\succcurlyeq$ 是 $X \times X$ 的一个闭子集， 则称 $(X, \succcurlyeq)$ 为一个度量偏序集。

所谓径向有序度量空间，是指满足下列条件的偏序度量空间 $(X, \succcurlyeq)$:

(1) $$x \succcurlyeq^\bullet y \succ z \quad \text{implies} \quad d(x, z) \geq d(x, y)$$

and

(2) $$x \succ y \succcurlyeq^\bullet z \quad \text{implies} \quad d(x, z) \geq d(y, z).$$

（在这种情况下，我们称 $\succcurlyeq$ 在 X 上的偏序为径向。）这一概念将在我们对单调利普希茨延拓问题的分析中发挥关键作用。

X 上的平凡序显然是径向的。 [18] 给出了度量空间上径向序的其他若干例子。

Remark. 径向偏序由 Ok [18] 引入，他证明了径向性这一性质是充分必要的，使得偏序度量空间的子集上所有保序的 1-利普希茨实值映射都能延拓为整个空间上的此类映射。因此，它将在本文中发挥重要作用并不令人意外，但径向性在此处的作用将更为微妙。值得注意的是，每个径向有序度量空间（$X, \succcurlyeq$）都是径向凸的，也就是说，只要 $x \succ y \succ z$.[4]， d（x, z） $\geq \max\{d$（x, y） d（y, z）$\}$ 就成立。

[4]径向凸度量偏序集是拓扑序理论的研究对象（参见 [4], [6] 、 [23], 等）。它们也用于光滑树状连续体的拓扑分析（参见 [9]）。

逆命题不成立，但线性有序度量空间是径向的，当且仅当它是径向凸的。

每个径向偏序都是闭的，这或许会让人略感意外。这一结论在 [18]中以一种非常间接的方式得到了证明。由于下文将用到这一结论，我们在此给出一个初等证明。

LEMMA 1. 每个径向有序度量空间$(X, \succcurlyeq)$ 都是一个度量偏序集。

证明。任取 $x, x_1, x_2, ..., y, y_1, y_2, ... \in X$，使得 $x_m \succcurlyeq y_m$, $x_m \to x$，并且$y_m \to y.$ 。为导出矛盾，假设 $x \succcurlyeq y$ 不成立。分两种情况讨论。首先，假设 $x \succcurlyeq y_m$ 对无穷多个 $m.$ 成立。那么，存在(y_m)的一个子列(y_{m_k})，使得 $y \succcurlyeq^{\bullet} x \succcurlyeq y_{m_k}$，因此，由径向性可知，对于所有 $k \geq 1$，$d(x, y) \leq d(y, y_{m_k})$。令 $k \to \infty$，得到 $x = y.$。其次，假设 $x \succcurlyeq y_m$至多对有限多个 $m.$ 成立。那么，对于某个 $M \in \mathbb{N}$，对所有 $m \geq M$都有 $x_m \succcurlyeq y_m \succcurlyeq^{\bullet} x$。因此，由径向性可知，对于所有 $m \geq M$，$d(x, y_m) \leq d(x, x_m)$，令$m \to \infty$，再次得到 $x = y$。我们得出，$y \succcurlyeq^{\bullet} x$ 蕴含 $x = y$，这与 $\succcurlyeq$的自反性矛盾。 ■

2.3. 偏序赋范空间。 设 $X = (X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范（实）线性空间。若 $\succcurlyeq$ 是 X，上的向量序，即它是 X 上满足以下条件的偏序：对于所有 $\lambda \geq 0$，$x \succcurlyeq y$ 蕴含 $\lambda x \succcurlyeq \lambda y$；对于所有 $z \in X.$，$x + z \succcurlyeq y + z$，则称 $(X, \succcurlyeq)$ 为偏序赋范空间。此外，若 $\succcurlyeq$ 是 $X \times X$，的闭子集，则称 $(X, \succcurlyeq)$ 为赋范偏序集。偏序巴拿赫空间/希尔伯特空间和巴拿赫偏序集/希尔伯特偏序集的含义依此类推。

任意偏序赋范空间 $(X, \succcurlyeq)$ 的正锥 定义为 $C(\succcurlyeq) := \{x \in X : x \succcurlyeq \mathbf{0}\}$，其中$\mathbf{0}$ 表示 $X.$ 的原点。由于该集合包含 $\mathbf{0}$，因此它总是非空的。众所周知，$C(\succcurlyeq)$ 是 X 中的一个尖凸锥，且 $x \succcurlyeq y$ 当且仅当 $x - y \in C(\succcurlyeq)$。[5] (反之，对于 X，中的任意尖凸锥 C，在 X 上定义二元关系 $\succcurlyeq_C$，使得 $x \succcurlyeq_C y$ 当且仅当 $x - y \in C$，则它是 X 上的向量序。)显然，$\succcurlyeq$ 是平凡的当且仅当 $C(\succcurlyeq) = \{\mathbf{0}\}$。此外，若 $(X, \succcurlyeq)$ 是赋范偏序集，则 $C(\succcurlyeq)$ 在 X 中是闭的。

2.4. Hadamard偏序集。 设 $(X, \succcurlyeq)$ 是一个度量偏序集。若 X 具有唯一测地性，且 $\succcurlyeq$ 是测地遗传的，即，

$$x \succcurlyeq y \quad \text{implies} \quad x \succcurlyeq z \succcurlyeq y \text{ for every } z \in [x, y],$$

其中 $[x, y]$ 是连接 x 与 y的测地线段，我们称 $(X, \succcurlyeq)$ 为测地偏序集。此外，若 X 是 Hadamard 空间，即它是一个完备的 CAT(0)空间——这意味着具有唯一测地性——我们称 $(X, \succcurlyeq)$ 为一个 *Hadamard* 偏序集。显然，每个希尔伯特偏序集都是 Hadamard 偏序集。

2.5. Lipschitz函数。 设 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 和 $Y = (Y, \succcurlyeq_X)$ 是两个偏序度量空间，且 $f\colon X \to Y$是任意函数。对于任意实数 $K > 0$，若对每个 $x, y \in X$，都有 $d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)$，则称 f 是 K-*Lipschitz*的。（此处及下文中，d_X 表示 X 的度量，d_Y 的含义类似。）若 f 对某个 $K > 0.$ 是 K-Lipschitz 的，则称其为 *Lipschitz* 函数。关于 Lipschitz 函数一般理论的精彩论述，参见 [3], [7], 和 [24]。

[5]作为提醒，我们注意到，线性空间 X 中的 *convex cone* 是 X 的一个子集 C，满足对所有 $\lambda \geq 0$, 以及 $C + C \subseteq C.$。这样的锥称为 *pointed*，如果 $C \cap -C = \{\mathbf{0}\}$。

我们将从 X 到 Y 的所有 K-Lipschitz 映射组成的集合记作 $\mathrm{Lip}_K(X,Y)$，但将 $\mathrm{Lip}_K(X,\mathbb{R})$ 简记为 $\mathrm{Lip}_K(X)$。相应地，$\mathrm{Lip}_K(X,Y)$ 和 $\mathrm{Lip}_K(X)$ 中所有保序元素组成的集合分别记作 $\mathrm{Lip}_{K,\uparrow}(X,Y)$ 和 $\mathrm{Lip}_{K,\uparrow}(X)$。

2.6. 单调利普希茨延拓性质。 设 $X=(X,\succcurlyeq_X)$和$Y=(Y,\succcurlyeq_Y)$是两个偏序度量空间。若对于每个非空的 $S\subseteq X$ 和 $f\in\mathrm{Lip}_{1,\uparrow}(S,Y)$，都存在一个 $F\in\mathrm{Lip}_{1,\uparrow}(X,Y)$，使得 $F|_S=f.$，则称(X,Y)具有单调利普希茨延拓性质 。用这一术语来说，经典的麦克沙恩-惠特尼延拓定理 指出：若 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的，则$(X,\mathbb{R})$具有单调利普希茨延拓性质。Ok [18] 将这一结果推广为：$(X,\mathbb{R})$具有单调利普希茨延拓性质，当且仅当 $\succcurlyeq_X$ 是径向的。

再用这一术语，我们可以将*Kirszbraun*定理 表述如下：若 X 和 Y是希尔伯特空间，且 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的，则(X,Y)具有单调利普希茨延拓性质。这是麦克沙恩-惠特尼定理的一个著名推广。本文的主要目标是探究在这一表述中，能够在多大程度上放宽对 $\succcurlyeq_X$ 为平凡的要求。

相对于两个偏序度量空间 X 和 Y的单调利普希茨延拓问题 ，是要确定 (X,Y) 是否具有单调利普希茨延拓性质。

3. A Possibility Theorem

我们先考虑一个非常具体情形下的单调利普希茨延拓问题，即 $X=\mathbb{R}$。在这种情况下， X 上的偏序要么是平凡的，要么是线性的。前一种情形下，定义在 X 任意子集上的所有映射都自动保序（无论陪域是什么），因此问题就归结为标准的利普希茨延拓问题。（正如定理2的证明所示，这样的延拓确实可行，至少当 Y 是巴拿赫空间时如此。）后一种情形下也一切顺利。

Theorem 2. 设 $Y=(Y,\succcurlyeq)$ 是一个巴拿赫偏序集。那么，$(\mathbb{R},Y)$ 具有单调利普希茨延拓性质。

我们可以通过仿射插值证明这一点。为简洁起见，我们只概述基本论证。设 S 是实数集的任意非空子集，并取任意保序的 1-利普希茨映射 $f\colon S\to Y$。对于任意 $t_1,t_2,\ldots\in S$，若满足 $t_m\to t,$，利普希茨性质便可直接推出 $(f(t_m))$ 是 $Y,$中的柯西序列；由于 Y是巴拿赫空间，$(f(t_m))$ 在 Y中收敛。（同样由利普希茨性质可知，极限只取决于 $t,$而与序列 (t_m) 无关。）于是我们可以定义 $F\colon \mathrm{cl}(S)\to Y$，令 $F(t):=\lim f(t_m),$，其中 (t_m) 是 S 中任意满足 $t_m\to t$的序列。显然， F 是 1-利普希茨的。 $\succcurlyeq$ 的闭性也确保了 F 保序。

因此，不失一般性，可以假设 S 是闭的。若 $S=\mathbb{R},$ 则无需证明，故我们取 S 为 $\mathbb{R}$的一个非空闭真子集。于是，存在一个由互不相交的非空开区间构成的可数集族 $\mathcal{I}$，且满足 $\mathbb{R}\backslash S=\bigcup\mathcal{I}$。对任意满足 $a,\ b\in\mathbb{R},$ 的$(a,\ b)\in\mathcal{I}$，我们定义

$$F(t):=f(a)+\frac{t-a}{b-a}(f(b)-f(a)),\quad a<t<b.$$

若 S有最小元素，例如 a_*，则 $(-\infty,a_*)\in\mathcal{I},$，并令 $F(t):=f(a_*)$，对所有 $-\infty<t<a_*$均成立。对偶地，若 S有最大元素，例如 a^*，则 $(a^*,\infty)\in\mathcal{I},$

并令 $F(t) := f(a^*)$，对所有 $a^* < t < \infty$均成立。这就在 $\mathbb{R}$上处处定义了一个取值于 Y 的映射 F。容易验证， F 是保序且 1-Lipschitz 的。

4. Necessity of Radiality

事实证明，在相当一般的条件下，除非 X 是径向有序的，否则一对偏序度量空间 X 和 Y 不可能具有单调利普希茨延拓性质。我们将以此为切入点，展开本文的主要结果。

Theorem 3. 设 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 和 $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 是两个偏序度量空间。假设存在一条测地射线 $\sigma\colon [0,\infty) \to Y$，使得

(a) $\sigma(s) \succcurlyeq_Y \sigma(t)$ 只要 $s \geq t \geq 0$; 且(b) 与 σ 相关联的布塞曼函数 B_σ 是 $\succcurlyeq_Y$-递减的。[6]若(X, Y) 具有单调利普希茨延拓性质，则 $\succcurlyeq_X$ 是径向的。

证明。 假设(X, Y)具有单调利普希茨延拓性质，但 $\succcurlyeq_X$ 不是径向的。那么，存在 $x, y, z \in X$，使得以下情况之一成立

$$x \succcurlyeq_X^{\bullet} y \succ_X z \quad \text{and} \quad d_X(x,z) < d_X(x,y) \tag{3}$$

or

$$x \succ_X y \succcurlyeq_X^{\bullet} z \quad \text{and} \quad d_X(x,z) < d_X(y,z). \tag{4}$$

我们只考虑情形 (3)，因为情形 (4) 的论证类似。定义$f\colon \{x, y\} \to Y$，使得 $f(x) := \sigma(d_X(x, y))$，且 $f(y) := \sigma(0)$。由于 $d_Y(f(x)\ f(y)) = |d_X(x, y) - 0| = d_X(x, y)$，显然 f是 1-利普希茨的。此外，根据假设 (a)， $f(x) \succcurlyeq_Y f(y)$，因此 f是保序的。于是，根据单调利普希茨延拓性质，存在一个 $F\colon X \to Y$，使得 $F(x) := \sigma(d_X(x, y))$，且$F(y) := \sigma(0)$。由于 $y \succ_X z$，我们有 $F(y) \succcurlyeq_Y F(z)$。于是，根据假设 (b)，

$$0 = -B_\sigma(\sigma(0)) = -B_\sigma(F(y)) \geq -B_\sigma(F(z)). \tag{5}$$

定义 $\varphi := -B_\sigma \circ F$，使得 $\varphi(x) = -B_\sigma(\sigma(d_X(x,\ y))) = d_X(x,\ y) > 0$， 而根据 (5)， $0 = \varphi(y) \geq \varphi(z)$。特别地， $|\varphi(x) - \varphi(z)| = \varphi(x) - \varphi(z)$。另一方面，由于 $-B_\sigma$ 和 F都是 1-利普希茨的， $\varphi := -B_\sigma \circ F$也如此。因此，根据 (3)，

$$d_X(x, y) - \varphi(z) = \varphi(x) - \varphi(z) \leq d_X(x, z) < d_X(x, y),$$

也就是说， $\varphi(z) > 0$，这就产生了矛盾。 ■

5. Radial Orders on Connected Spaces

定理 3 证明了径向性对于单调利普希茨延拓问题的重要性。因此，我们自然会探究径向性这一性质的要求有多高。虽然 [18] 提供了相当多径向有序度量空间的例子，但它们并不特别适合当前的设定，因为它们全都不连通。本节将说明，这并非偶然。事实证明，度量空间的连通性与其径向可序性之间存在相当大的张力。

[6]我们回顾一下， $B_\sigma\colon Y \to \mathbb{R}$ 定义为 $B_\sigma(a) := \lim_{t\to\infty}(d_Y(a,\ \sigma(t)) - t)$。众所周知，该函数定义良好、满足 1-Lipschitz 条件，并且对所有 $t \geq 0$ 都满足 $B_\sigma(\sigma(t)) = -t$。由于 Y 是 CAT(0)，它也具有凸性。（例如，参见 [19]的第 12 章。）

THEOREM 4. 设 $X=(X,\succcurlyeq)$ 是一个径向有序度量空间。若 X 连通，则 $\succcurlyeq$ 要么是平凡的，要么是全序的。

证明。假设 X 是连通的，并任取 $x\in X$。我们定义$x^{\uparrow}:=\{y\in X:\ y\succcurlyeq x\}$ 以及 $x^{\downarrow}:=\{y\in X:\ x\succcurlyeq y\}$. 。由于 $\succcurlyeq$ 是闭的（引理 1），显然这些都是 X的闭子集。我们断言 $x^{\uparrow}\backslash\{x\}$ 和 $x^{\downarrow}\backslash\{x\}$ 在 X. 中都是开集。为此，任取一个不同于 x的 $y\in x^{\uparrow}$，并反设 y 位于 $x^{\uparrow}\backslash\{x\}$的边界上。于是，存在一个取自 $X\backslash x^{\uparrow}$的序列（y_m），满足 $y_m\to y$. 。因此，$y\succ x\succcurlyeq^{\bullet}y_m$，故由径向性可知，对于所有 $m.$，$d\left(x,\ y_m\right)\leq d\left(y,\ y_m\right)$。于是令 $m\to\infty$，得到 $x=y$，这与 y 不同于 x.矛盾。这证明了 $x^{\uparrow}\backslash\{x\}$ 在 X. 中是开集。类似地可证 $x^{\downarrow}\backslash\{x\}$ 是开集。由于 x 是在 X中任意选取的，且 X 是连通的，Schmeidler 定理（关于[20]）便给出了我们的断言。 ■

定理4中设想的第二种情形在无数情况下并不成立。具体来说：

THEOREM 5. 设 X 是一个包含圆$\mathbb{S}^1$副本的连通度量空间。那么，X 上唯一的径向序是平凡序。

证明。 设 $\succcurlyeq$ 是 X上的一个径向序。根据定理4，$\succcurlyeq$要么是全序，要么是平凡序。为导出矛盾，假设前一种情形成立。那么，设 $f:\mathbb{S}^1\to X$ 是一个嵌入，我们在 $\mathbb{S}^1$上定义二元关系 $\trianglerighteq$如下：$a\trianglerighteq b$当且仅当 $f(a)\succcurlyeq f(b)$。由于 $\succcurlyeq$是闭的（引理 1），$\trianglerighteq$ 是 $\mathbb{S}^1$ 上的闭线性序。 不失一般性，我们可以假设 $e^{\pi i}\trianglerighteq 1$. 根据 $\trianglerighteq$的闭性，集合 $\{\theta\in[0,\pi]:\ e^{(\theta+\pi)i}\trianglerighteq e^{\theta i}\}$ 是 $\mathbb{R}$的闭子集，因而是紧集。因此它包含其上确界，记作 θ^*。显然，$\theta^*<\pi$，否则，$1=e^{2\pi i}\trianglerighteq e^{\pi i},$ 这与 $\trianglerighteq$的反对称性矛盾。由此可得

$$e^{(\theta^*+\pi)i}\trianglerighteq e^{\theta^* i}\ \text{ and }\ e^{(\theta^*+\varepsilon)i}\trianglerighteq e^{(\theta^*+\varepsilon+\pi)i}$$

对于任意小的 $\varepsilon>0.$，这与 $\trianglerighteq$ 为闭相矛盾。 ■

REMARK. 本证明基于如下观察：任何包含闭合简单环的连通度量空间上都不存在闭全序。该观察中的后一条件，因而定理5中的相应条件，可以相当程度地放宽。例如，参见 [17] 和 [22]。

现在我们从定理5中提取一些具体情形。首先，我们约定称一个测地空间 X 非分支，如果对任意测地线 $\sigma:\ [0,1]\to X$ 与$\sigma':\ [0,1]\to X$，当对某个 $\varepsilon>0,$ 有 $\sigma|_{[0,\varepsilon)}=\sigma'|_{[0,\varepsilon)}$ 时，我们有 $\sigma=\sigma'$.（例如，每个严格凸赋范空间都是非分支的，但一个 $\mathbb{R}$-树则不是。）照例，若 X 是唯一测地的，我们将 X 中任意两点x 与 y 之间的测地线段记为 $[x,y],$ 并令$(x,\ y):=[x,y]\backslash\{x,y\}$.

COROLLARY 6. 设 X 是一个非分支的唯一测地空间。那么，X 要么与某个区间等距同构，要么 X 上的唯一径向序是平凡序。

证明。 我们分两种情况讨论。首先，假设 X 中任意三个互不相同的点都共线（即其中一个点位于另外两点之间的测地线段上）。任取互不相同的 a、$b\in X$，并定义$\tau:\ X\to\mathbb{R}$，使得

$$\tau(x):=\begin{cases} d(a,x), & \text{if } x\in[a,b] \text{ or } b\in[a,x],\\ -d(a,x), & \text{if } a\in[x,b].\end{cases}$$

现在任取互不相同的 $x, y \in X$.。不失一般性，设 $\tau(y) \geq \tau(x)$。若 $\tau(x) \geq 0$，则 $x \in [a, y]$，因此 $d(a, x) + d(x, y) = d(a, y)$，由此可得 $\tau(y) - \tau(x) = d(a, y) - d(a, x) = d(x, y)$。此外，若 $\tau(y)$和 $\tau(x)$均为负数，同样的论证仍然适用。最后，设 $\tau(x) < 0 < \tau(y)$。此时，$a \in [x, y]$，因此 $d(x, a) + d(a, y) = d(x, y)$，故 $\tau(y) - \tau(x) = d(a, y) - (-d(a, x)) = d(x, y)$。我们得出，对于所有 $x, y \in X.$，都有 $d(x, y) = |\tau(x) - \tau(y)|$。由此可知，$\tau$是从 X 到 $\mathbb{R}$的等距映射。由于 X 是测地的，因而是连通的，所以 $\tau(X)$是一个区间。因此，X与一个区间等距同构。

最后，假设存在互不相同且不共线的点 a、b、$c \in X$。在这种情况下，$(a$、$b)$、$(b$、$c)$ 和 $(a$、$c)$ 必须两两不相交。（例如，若 d属于 $(a$、$b) \cap (a$、$c)$，根据唯一测地性，我们必须有 $[a, d] \subseteq [a, b]$ 和 $[a, d] \subseteq [a, c]$，但由于 $b \neq c$、这与 X 是非分支的相矛盾。）由此可得，$S := [a, b] \cup [b, c] \cup [a, c]$ 是 X 中的一个闭合简单环，当然它与 $\mathbb{S}^1$同胚。因此，根据定理5，X 上的唯一径向序是平凡序。 ■

以下是推论 6 的一个特例。

Corollary 7. 设 $X = (X, \succcurlyeq)$ 是一个径向有序的赋范空间。那么，或者$\dim X = 1$，或者 $\succcurlyeq$ 是平凡的。

Remark. 引言中陈述的无扩张定理基于推论 7。因此，给出这一结果的另一种直接证明可能会有所帮助，该证明不依赖于 Schmeidler 定理。设 $\dim X \geq 2$，并为导出矛盾，假设 $\succcurlyeq$ 不是平凡的。令 $C := C(\succcurlyeq)$，即 X的正锥。我们先证明 C 有一个非零边界点。反设不然，则$C \backslash \{\mathbf{0}\}$是开集。由于 $\succcurlyeq$ 具有径向性，它是闭集（引理 1），由此可知 C 是闭集。因此，$C \backslash \{\mathbf{0}\}$ 是 $X \backslash \{\mathbf{0}\}$. 中的既开又闭集。但由于 $\dim X \geq 2$，$X \backslash \{\mathbf{0}\}$是道路连通的，因而连通。因此，或者 $C \backslash \{\mathbf{0}\} = \varnothing$，或者 $C \backslash \{\mathbf{0}\} = X \backslash \{\mathbf{0}\}$。在前一种情况下，我们得到 $C = \{\mathbf{0}\}$，这与 $\succcurlyeq$非平凡相矛盾；在后一种情况下，$C = X$，这与 $\succcurlyeq$的反对称性相矛盾。由此可知，C的边界上存在一个非零点 y。现在任取一个 $X \backslash C$中的序列 (y_m)，使得 $y_m \to y$。于是，$-y_m \in X \setminus -C$ 且 $-y \in -C$，也就是说，对所有 $m \geq 1$，均有 $-y_m \succcurlyeq^{\bullet} \mathbf{0} \succcurlyeq -y$。因此，由径向性可知，对所有 $m \geq 1.$，均有 $\|-y_m\| \leq \|-y_m + y\|$。令 $m \to \infty$，得到 $\|y\| \leq 0$，也就是说，$y = \mathbf{0}$，矛盾。 ■

6. Impossibility Theorems

结合定理 3 和推论 6，可得本文的主要结果：

Theorem 8. 设 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 是一个偏序、非分支且唯一测地的空间，并且 $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 是一个偏序度量空间。假设 X不同构于一个区间，且存在一条保序测地射线$\sigma \colon [0, \infty) \to Y$，其布塞曼函数是 $\succcurlyeq_Y$-递减的。若 (X, Y) 具有单调利普希茨延拓性质，则 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的。

在这一一般性层面上，其逆命题并不成立。[7] 一对非分支 Hadamard 空间完全可能不具有利普希茨延拓性质。举一个简单的例子：取庞加莱圆盘，以及其上任意一个等边三角形。将该三角形的顶点映射到平面上一个边长相同的等边三角形

[7]我们感谢 Urs Lang 指出这一事实。

等距同构地。该映射无法延拓为庞加莱圆盘上的 1-Lipschitz映射。

COROLLARY 9. 设 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 是一个偏序希尔伯特空间，且维数 $X \geq 2$； $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 是一个具有保序测地射线且其布塞曼函数为 $\succcurlyeq_Y$-递减的 *Hadamard* 偏序集。那么，(X, Y) 具有单调利普希茨延拓性质，当且仅当 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的。

证明。 我们只需证明充分性，但这是 Lang 和 Schroeder 的定理 A [13]的一个特例。 ■

接下来我们证明，任意 Hilbert 偏序集 Y都满足推论 9 的条件。

PROPOSITION 10. 设 $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 是一个 *Hilbert* 偏序集。那么，存在一条保序测地射线 $\sigma : [0, \infty) \to Y$，其布塞曼函数为 $\succcurlyeq_Y$-递减。

这一结果的关键来自凸分析：对于任意希尔伯特空间 Y以及实数集 Y中的尖闭凸锥 C，都存在一个正方向（相对于由 C诱导的偏序），且该方向属于 C.的对偶锥

LEMMA 11. 设 $Y = (Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个希尔伯特空间，且 C 是 Y 中的尖闭凸锥，并满足 $C \neq \{\mathbf{0}\}$。那么， $C \cap C^* \neq \{\mathbf{0}\}$.[8]

证明。 显然， $C^* \neq \{\mathbf{0}\}$，否则 $C^\circ = \{\mathbf{0}\}$，根据双极定理，$C = C^{\circ\circ} = Y$，这与 C 是尖锥矛盾。此外， $C^* \neq -C^*$，否则 C° 是 Y 的线性子空间，且由于 $C = C^{\circ\circ}$，这意味着 C 是 Y的线性子空间，这与 C 是尖锥矛盾。因此存在一个$a \in C^* \setminus -C^*$。

令 P_C 表示从 Y 到 C.的度量投影算子。根据莫罗分解定理，

$$a = P_C(a) + P_{C^\circ}(a).$$

我们设定 $b := P_C(a)$。该向量非零，否则 $a = P_{C^\circ}(a)$，于是$a \in C^\circ = -C^*$，这就导致矛盾。此外， $a - b = P_{C^\circ}(a) \in C^\circ$，因此 $\langle a - b, c \rangle \leq 0$对所有 $c \in C$. 均成立。但是，由于 $a \in C^*$，我们有 $\langle a, c \rangle \geq 0$ 对所有 $c \in C$. 均成立。由此可得

$$\langle b, c \rangle = \langle a, c \rangle - \langle a - b, c \rangle \geq 0 \quad \text{for all } c \in C,$$

也就是说， $b \in C^*$. 结论： b 是 $C \cap C^*$的一个非零元素。 ■

命题 *10* 的证明。 显然， $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 是一个 Hadamard 偏序集。此外，由引理 11， $C(\succcurlyeq_Y) \cap C(\succcurlyeq_Y)^* \neq \{\mathbf{0}\}$， 也就是说，存在某个 $e \in Y$，使得 $e \succ_Y \mathbf{0}$ 且 $\langle e, a \rangle \geq 0$ 对每个满足 $a \succcurlyeq_Y \mathbf{0}$ 的 $a \in Y$ 都成立。不失一般性，我们可以取 $\|e\|_Y = 1.$ 。考虑测地射线 $\sigma : [0, \infty) \to Y$，其中$\sigma(t) := te.$ 。由于 $e \succ_Y \mathbf{0}$，这条射线是保序的。此外，对于任意 $a \in Y$ 和 $t > 0$,

$$\|a - \sigma(t)\|_Y - t = \frac{\|a - te\|_Y^2 - t^2}{\|a - te\|_Y + t} = \frac{\|a\|_Y^2 - 2t \langle a, e \rangle}{\|a - te\|_Y + t} = \frac{t^{-1} \|a\|_Y^2 - 2 \langle a, e \rangle}{\|t^{-1}a - e\|_Y + 1}.$$

[8]我们采用凸分析中的标准记号。特别地， C^* 表示 C的 *dual cone*，即 $C^* = \{x \in X : \langle x, y \rangle \geq 0$ 对所有 $y \in C\}$. 均成立。 C 的 *polar cone* 为 $C^\circ := -C^*$。

令 $t \to \infty$，我们得到 $B_\sigma(a) = -\langle a, e\rangle$ 对每个 $a \in Y$， 都成立，因此 B_σ 确实是 $\succcurlyeq_Y$- 递减的。 ■

结合推论 9 和命题 10，便得到了我们在引言中陈述的无扩张定理。

最后，我们指出，定理 8 所提供的一般性在其他情形下也可能有用。下面的简单例子旨在说明这一点。

Example 1. (ℝ树值映射) 设 Y 是一个 $\mathbb{R}$-树，也就是说， Y 是一个唯一测地度量空间，且对任意 a， b， $c \in Y$，若 $[a,b]\cap[b,c] = \{b\}$， 则有$[a,b] \cup [b,c] = [a,c]$.[9] 此外，假设 Y的视觉边界非空，即至少存在一条测地射线 $\sigma\colon [0,\infty) \to Y$。我们在 Y 上定义二元关系 $\succcurlyeq$ 如下:

$$a \succcurlyeq b \text{ iff there is a } t \geq 0 \text{ with } a \in [b, \sigma(t)].$$

由于 Y 是唯一测地的，因此该定义是良定义的。容易验证， $\succcurlyeq$是一个偏序，即 $Y = (Y, \succcurlyeq)$是一个偏序集。显然， σ 相对于该偏序集是保序的，并且 $a \succcurlyeq b$ 和 $c \in [a,b]$ 推出 $a \succcurlyeq c \succcurlyeq b$。

现在来计算与 σ 相关联的布塞曼函数。令 $R :=\sigma([0,\infty))$，并任取 $a \in Y$. 。对于每个 $t \geq 0$， Y 的唯一测地性意味着 $[a,\sigma(t)] \cap R$ 是 R 的闭且连通子集。此外，由于 Y 是一棵 $\mathbb{R}$-树，任意两条相交的测地线都在一条（可能退化的）测地线段上相交；从 a 出发的测地线一旦与 R 相交，就会在唯一一点与之合并，此后不再分开。因此，存在唯一的（首次到达时间） $t_a \geq 0$ ，使得对于每个 $t \geq t_a$， $[a,\sigma(t)] \cap R$ 等于 $[\sigma(t_a)\ \sigma(t)]$。现在令 $m_a := \sigma(t_a)$。于是，$m_a \in [a,\sigma(t)]$,，由此可得，对于每个 $t \geq t_a$， $d(a,\sigma(t)) = d(a,m_a) + d(m_a,\sigma(t))$。由于 $d(m_a, \sigma(t)) = t - t_a$，因此，对于每个 $t \geq t_a$， $d(a,\sigma(t)) - t = d(a,m_a) - t_a$。结论:

$$B_\sigma(a) = d(a,m_a) - t_a. \tag{6}$$

特别地，对于任意 a， $b \in Y$，满足 $t_{ab} := \max\{t_a, t_b\}$，的情形，我们有

$$B_\sigma(b) - B_\sigma(a) = d(b,\sigma(t)) - d(a,\sigma(t)) \tag{7}$$

对每个 $t \geq t_{ab}$均成立。

接下来，我们将用 B_σ刻画偏序 $\succcurlyeq$。任取 $a, b \in Y$。设 $a \succcurlyeq b$. 则存在一个 $T \geq 0$，使得 $a \in [b,\sigma(T)]$. 因此， $a \in [b,\sigma(t)]$, 从而$d(b,\sigma(t)) = d(a,b) + d(a,\sigma(t))$，对所有 $t \geq T$. 均成立。将其代入式（7），例如取 $t = \max\{T, t_{ab}\}$，得到 $B_\sigma(b) - B_\sigma(a) = d(a,b)$。反之，假设 $d(a,b) = B_\sigma(b) - B_\sigma(a)$。再次利用式（7），有 $d(b,\sigma(t_{ab})) = d(a,b) + d(a,\sigma(t_{ab}))$。由于 Y是唯一测地的，这意味着 $a \in [b,\sigma(t_{ab})]$, ，即 $a \succcurlyeq b$. 我们证明了:

$$a \succcurlyeq b \text{ iff } B_\sigma(b) - B_\sigma(a) = d(a,b). \tag{8}$$

由于 $(a,b) \mapsto B_\sigma(b) - B_\sigma(a) - d(a,b)$ 是定义在 $Y \times Y$, 上的连续函数，因此 $\succcurlyeq$ 是闭的，也就是说，$(Y, \succcurlyeq)$ 是一个 Hadamard 偏序集。此外，由 (8) 显然可知， B_σ 是 $\succcurlyeq$-递减的。现在可以应用定理 8 得出：对于任意$n \geq 2$, ，$(\mathbb{R}^n, Y)$ 不具有单调利普希茨延拓性质。 □

[9]有关 $\mathbb{R}$-树理论的精彩入门介绍，请参阅 [1] 和 [8] 。

EXAMPLE 2. (CAT(0)值映射) 设 Y 是任意一个具有视觉边界的 Hadamard 空间（例如 $\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^n$、 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^n$ 等）。在这样的空间中，存在一条测地射线 $\sigma: [0,\infty) \to Y$。在 Y上定义二元关系 $\succcurlyeq$ 如下： $a \succcurlyeq b$ 当且仅当 $\{a,b\} \subseteq \sigma([0,\infty))$ 且 $\sigma^{-1}(x) \geq \sigma^{-1}(y)$。容易验证，相对于该关系， Y 上的这是一个闭且测地遗传的偏序，并且 σ 是保序的。由于对于所有 $t \geq 0,$ ， $B_\sigma(\sigma(t)) = -t$ ，显然 B_σ 也是 $\succcurlyeq$-递减的。因此，根据定理 8：对于任意 $n \geq 2,$ ， $(\mathbb{R}^n, Y)$ 不具有单调利普希茨延拓性质。□

EXAMPLE 3. （$\mathbb{H}^n$值映射）我们采用双曲 n空间 $\mathbb{H}^n$的双曲面模型。（也就是说， $\mathbb{H}^n$ 是一个度量空间，其底集为 $\{a \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle a,a\rangle_L = -1$ 和 $a_{n+1} > 0\}$，其度量 d 为每个（a,b） $\in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$赋予唯一的非负数 $d(a,b)$，使得 $\cosh\ d(a,b) = -\langle a, b\rangle_L$. 这里， $\langle \cdot,\cdot\rangle_L$ 是定义为 $\langle a,b\rangle_L := \sum^n a_i b_i - a_{n+1}b_{n+1}$的洛伦兹双线性形式。）我们在 $\mathbb{H}^n$ 上定义闭偏序 $\succcurlyeq$： 当且仅当对每个 $i = 1,$ ....., n且$a_{n+1} \geq b_{n+1}$时， $a \succcurlyeq b$成立，并令 $Y = (\mathbb{H}^n, \succcurlyeq)$。现在考虑测地射线 σ： $[0,\infty) \to \mathbb{H}^n$， 其中 $\sigma(t) := (0, ..., 0, e^t)$。容易计算得出，对每个$a \in \mathbb{H}^n$， 都有 $B_\sigma(a) = -\log\ a_{n+1}$。因此， B_σ 是 $\succcurlyeq$递减的。由于定理 8 的其他要求也很容易满足，我们得出结论：对于任意 $n \geq 2$， $(\mathbb{R}^n, Y)$都不具有单调利普希茨延拓性质。 □

7. 结语

我们用近期 Lipschitz 扩张文献中的通用术语，重述引言中的无扩张定理。设 $X = (X, \succcurlyeq_X)$ 和 $Y = (Y, \succcurlyeq_Y)$ 为度量偏序集；对于任意 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$， 令 $\mathcal{X}_k$ 表示所有满足 $0 < |S| \leq k$ 的 $S \subseteq X$ 的集合。对于任意非空 $S \subseteq X$，定义 $e_\uparrow(X, S, Y) := \inf\{K \in (0, \infty] :$ 对于每个 $f \in \mathrm{Lip}_{1,\uparrow}(S, Y)$，都存在一个 $F \in \mathrm{Lip}_{K,\uparrow}(X, Y)$，使得 $F|_S = f\}$， ；对于任意 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，定义

$$e_{k,\uparrow}(X,Y) := \sup_{S \in \mathcal{X}_k} e_\uparrow(X,S,Y).$$

当 $\succcurlyeq_X$ 是平凡的情形下（因此对所有 $S \in \mathcal{X}$， $\mathrm{Lip}_{1,\uparrow}(S, Y) = \mathrm{Lip}_1(S, Y)$），我们用 $e(X, Y)$ 表示 $e_{\uparrow,\infty}(X, Y)$， 并且对任意 $k \in \mathbb{N}$，用 $e_k(X, Y)$ 表示 $e_{k,\uparrow}(X, Y)$。

关于量 $e(X,Y)$ 和 $e_k(X,Y)$，已有相当多的研究成果。首先，McShane-Whitney 定理表明 $e(X,\mathbb{R}) = 1$——事实上， $e(X,\ell_\infty) = 1$——而 Kirszbraun定理则表明，当 X 和 Y 是希尔伯特空间时， $e(X,Y) = 1$。Johnson 和 Lindenstrauss 在一篇著名论文中证明了，当 Y 是希尔伯特空间时， $e_k(X,Y) \leq 2\sqrt{\log\ k}$。对于 Y 是巴拿赫空间的情形，Johnson、Lindenstrauss 和 Schlechtman 证明了 $e_k(X,Y) = O(\log\ k)$，而 Lee 和 Naor 将该估计改进为 $e_k(X,Y) = O(\log\ k \log\log\ k)$。值得注意的是，这些引人入胜的结果全都是通过概率方法得到的。[10]

不过，关于序理论框架，我们所知甚少。Ok [18]证明了，当 $\succcurlyeq_X$ 具有径向性时， $e_\uparrow(X, \mathbb{R}) = e_\uparrow(X, \ell_\infty) = 1$ ；但本文发现，对于连通度量空间而言，径向性要求过于苛刻。只要 Y是巴拿赫偏序集，我们就有 $e_\uparrow(\mathbb{R}, Y) = 1$，但这并不能令人宽慰。例如，我们甚至有 $e_\uparrow(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) > 1.$ 。更一般地，引言中的无扩张定理表明，当 X 和 Y是希尔伯特偏序集且 $\dim X \geq 2$，时，我们

[10]此外，还有强有力的估计可以从下方界定 $e_k(X, Y)$。有关这一研究领域最新进展的介绍，请参见 [2] 。

有 $e_{\uparrow}(X,Y) > 1$。事实上，我们对这一结果的证明表明，在这种情况下，$e_{2,\uparrow}(X,Y) > 1$。因此，探求量$e_{k,\uparrow}(X,Y)$ 在 X和 Y为任意希尔伯特偏序集（且 $\dim X \geq 2$）时的上界，应该颇有意义；不过，这在很大程度上取决于 X 和 Y的偏序结构。例如，由于 $e_{\uparrow}(X,\mathbb{R}) = 1$，对于所有 $n \in \mathbb{N}$（其中 X是任意度量偏序集），我们有 $e_{\uparrow}(X,\mathbb{R}^n) \leq \sqrt{n}$；但我们目前尚不清楚这是否是最佳上界，也没有关于 $e_{\uparrow,k}(X,\mathbb{R}^n)$ 的良好估计。

References

[1] A. Aksoy 和 T. Oikhberg，度量树中的一些结果， *Banach Center Publications*，第 91 卷（2011），9-34。[2] G. Basso，具有显式常数的利普希茨延拓定理，

Anal. Geom. Metr. Spaces ( )。[3]

12 2024

G. Beer， *Bornologies and Lipschitz Analysis*，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2023。[4] G. Beer 和 E. A. Ok，拓扑偏序集在超空间中的嵌入， *J. Convex Anal.* 30 (2023)，515-540。[5] Y. Benyamini 和 J. Lindenstrauss， *Geometric Nonlinear Functional Analysis*，《AMS Colloquium Publications》，罗得岛州，2000。[6] J. Carruth，关于偏序紧空间的一则注记， *Pacific J. Math.* **24**(1968)，229-231。[7] S. Cobza.s、R. Miculescu 和 A. Nicolae， *Lipschitz Functions*，《数学讲义》，第 2241 卷，施普林格，尚，2019。[8] S. Evans， *Probability and Real Trees*，施普林格，柏林，2008。[9] J. Fugate、G. Gordh Jr. 和 L. Lum，弧光滑连续统， *Trans. Amer. Math. Soc.* 265 (1981)，545-561。[10] W. Johnson 和 J. Lindenstrauss，将利普希茨映射延拓到希尔伯特空间，载于 *Conference in odern Analysis and Probability*，《当代数学》，第 26 卷，第 189-206 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1984。[11] W. Johnson、J. Lindenstrauss 和 G. Schechtman，将利普希茨映射延拓到巴拿赫空间， *Israel J. Math* 54 (1986)，129-138。[12] M. Kirszbraun，

¨

Fund. 关于压缩

Math. 22 1934 77 108

变换与利普希茨变换，( )，-。[13] U. Lang 和 V. Schroeder。Kirszbraun定理与有界曲率度量空间。 *Geom. Funct. Anal.*，7 (1997)，535-560。[14] J. Lee 和 A. Naor，通过随机度量划分延拓利普希茨函数，

Invent. ( )，-。

Math. 160 2005 59 95

[15] E. McShane，函数值域的延拓， *Bull. Amer. Math. Soc.* 40 (1934)，837-842。[16] L. Nachbin， *Topology and Order*，范诺斯特兰德，普林斯顿，1965。[17] H. Nishimura 和 E. A. Ok，连续选择函数不存在， *J. Econ. Theory*，153 2014 376 391 ( )，-。[18] E. A. Ok，利普希茨映射的保序延拓， *J. Australian Math. Soc.* 118(2025)，91-107。[19] A. Papadopoulos， *Metric Spaces*， *Convexity and Nonpositive Curvature*，欧洲数学会，苏黎世，2005。[20] D. Schmeidler，偏好关系完备性的一项条件，

Econometrica

39 1971 403 404 ( )，-。

[21] F. Valentine。向量函数的保持利普希茨条件的延拓，

Amer. J. Math. ( )，-。

67 1945 83 93

[22] J. van Mill 和 E. Wattel，选择与可序化， *Proc. Amer. Math. Soc.* 83 (1981)，601-605。[23] L. Ward Jr.，关于惠特尼映射的一则注记， *Canad. Math. Bull.* 23 (1980)，373-374。[24] N. Weaver， *Lipschitz Algebras*，世界科技出版公司，新泽西州，2018。[25] H. Whitney，在闭集上定义的可微函数的解析延拓，

Trans. ( )，-。

Amer. Math. Soc. 36 1934 63 89

[26] K. Yamazaki，连续递增函数的延拓， *Topol. Appl.* 335(2023)，108566。

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University*Email address*: eg3504@nyu.edu
Department of Economics and Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University*Email address*: efe.ok@nyu.edu