arXiv:2603.03552v1 [physics.optics] 3 Mar 2026

# 非局域超表面中的有限尺寸效应

Tom Hoekstra[1], Sander A. Mann[1], 和 Jorik van de Groep*[1]

[1]范德华-塞曼研究所，物理研究所，阿姆斯特丹大学，1098 XH，阿姆斯特丹，荷兰

*电子邮箱：j.vandegroep@uva.nl

**摘要**

利用非局域共振的超表面能够实现窄带光谱调控和强近场，在增强现实、生物传感和非线性光学等领域具有应用前景。然而，这些模式较大的空间延展范围也带来了新的挑战：有限尺寸效应往往会损害占用面积受限的实用器件的性能。在此，我们建立了一种时空耦合模理论模型，能够直观且定量地描述有限尺寸如何影响非局域超表面的散射响应。研究表明，当模态传播长度受到物理相互作用长度的限制时，散射场会呈现强烈的干涉条纹和线宽展宽。我们推导出一个包含额外边缘损耗通道的品质因数表达式，并证明储存能量和有效寿命随相互作用长度呈指数增长。我们利用位置与动量分辨光谱对一块宽 30 微米的超表面进行实验测量，验证了这些预测。总之，本研究阐明了有限尺寸对非局域光子系统散射响应的影响，并为如何在超表面设计中尽量减小有限尺寸效应的影响提供了调控手段。

**关键词：**非局域超表面、导模共振、有限尺寸效应、时空耦合模理论、二维材料

## 引言

数十年来，由共振纳米结构构成的平面阵列——超表面——已从模仿其体材料对应物的简单光学元件，发展为能够实现多种新颖功能的复杂系统 [1, 2]。通过采用多种材料和几何形状来调控介电或金属纳米结构的散射响应，局域超表面能够以深亚波长分辨率塑造入射波前的空间相位分布。然而，光电子技术日益需要窄带选择性和强光—物质相互作用，而这些特性难以通过深亚波长超原子实现，因为其品质（$Q$）因子往往较低。

非局域超表面利用导模共振 [3–6]和准连续谱束缚态 [7–9], 等空间扩展模式，已成为局域超表面 [10]的一种前景广阔的替代方案。这些长寿命共振态可支持极高的 $Q$因子 [11–13], ，从而实现极高的光谱分辨率和近场增强。近期研究甚至表明，可通过局部变化的特征设计非局域性，同时调控光谱与空间自由度 [14–16]。结合起来，这些特性使其能够广泛应用于生物分子传感

领域 [17–19]，相干光源 [20–22]，自由空间调制器 [23–25]，混合现实眼镜 [26, 27]，非线性光学[28–30]，光学图像处理 [31, 32],热超表面 [33, 34]，以及波前整形[35–37]。因此，在迈向超紧凑光学器件的过程中，采用非局域超表面颇具吸引力。

在追求元光学器件小型化的过程中，超表面的横向尺寸不断缩小，以适应有限的占用面积。对于局域超表面，有限尺寸的影响在很大程度上可以忽略，只有少数研究对此进行了探讨 [38–41]，。然而，非局域超表面中高-$Q$ 共振的固有非局域性意味着，有限尺寸效应已不容忽视 [29, 42, 43]。事实上，导模共振光栅问世后不久，人们便意识到有限尺寸会降低其性能 [44, 45]， [46–52]。尽管这些早期研究确立了有限尺寸效应的重要性，但它们往往仅限于经验观察或针对特定系统的近似，缺乏统一的建模框架。如今这一趋势依然存在：非局域超表面通常仍被视为无限周期结构进行仿真，因为在全波求解器中模拟有限阵列的计算成本过高，而且时域耦合模理论也无法自然地描述这类阵列 [53,54]。因此，制造器件的共振响应往往会受到有限尺寸所带来、难以预测的后果影响，这已促使人们提出缓解策略 [42, 55–57] 并开展理论研究 [58,59]。尽管如此，迄今仍缺乏一种具有广泛适用性的预测建模框架。

在此，我们建立了一个模型，直观且定量地描述有限横向占地面积如何重塑导模共振超表面的散射响应。我们采用时空耦合模理论（STCMT），这是时域耦合模理论的最新扩展，可描述空间非均匀性 [60–62]。我们的模型明确考虑了行波的激励；由于超表面宽度有限，该行波可在有限孔径内重新辐射。我们表明，当物理相互作用长度与模态传播长度相当时，有限尺寸效应会从根本上改变光学响应，产生取决于激发位置的干涉条纹和线宽

展宽。关键是，我们推导出了一个关于

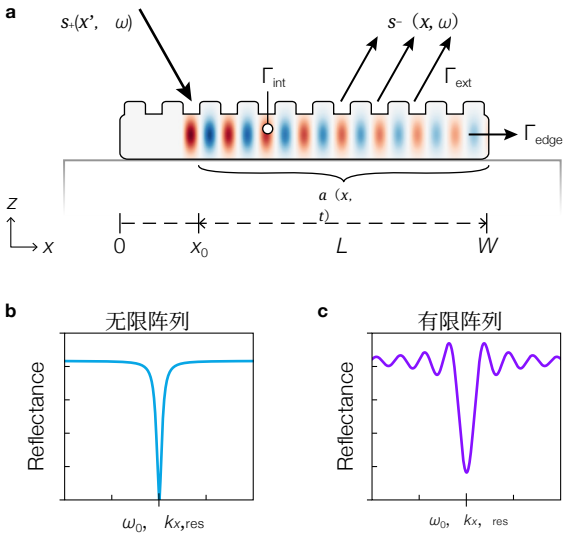



**图 1：具有有限尺寸效应的非局域超表面。（a）**一个以 $x_0$ 为中心的入射场 $s_+(x', \omega)$ 激发了振幅为 $a(x, t)$ 的右向传播准导模。该模式具有相互作用长度 $L$，在此长度范围内通过本征损耗（$\Gamma_{int}$）和再辐射（$\Gamma_{ext}$）发生衰减。到达右边缘的功率 $x = W$ 将不可逆地损失，从而产生额外的边缘损耗通道 $\Gamma_{edge}$。散射场表示为 $s_-(x, \omega)$。**（b）**无限超表面阵列和**（c）**有限超表面阵列的模拟反射率，分别显示了有限尺寸对共振频率 $\omega_0$ 或面内波矢 $k_{x,res}$ 附近散射响应的影响。

$Q$-因子，该因子纳入了边缘损耗导致的额外耗散通道，表明储存能量和有效寿命随相互作用长度呈指数增长 $L$，其定义为非局域模式在 $x_0$ 处受到激励后，到达终止端之前传播的距离（图1a）。我们通过制备一片宽度为 30 微米的超表面，并进行位置分辨和动量分辨反射光谱测量，对该模型进行了实验验证。测量结果与理论高度吻合，直接证实了预测的尺寸效应，并能够定量区分本征损耗率、辐射损耗率和边缘诱导损耗率。总之，本研究确立了 STCMT 作为设计和阐释尺寸受限的非局域超表面的重要工具。

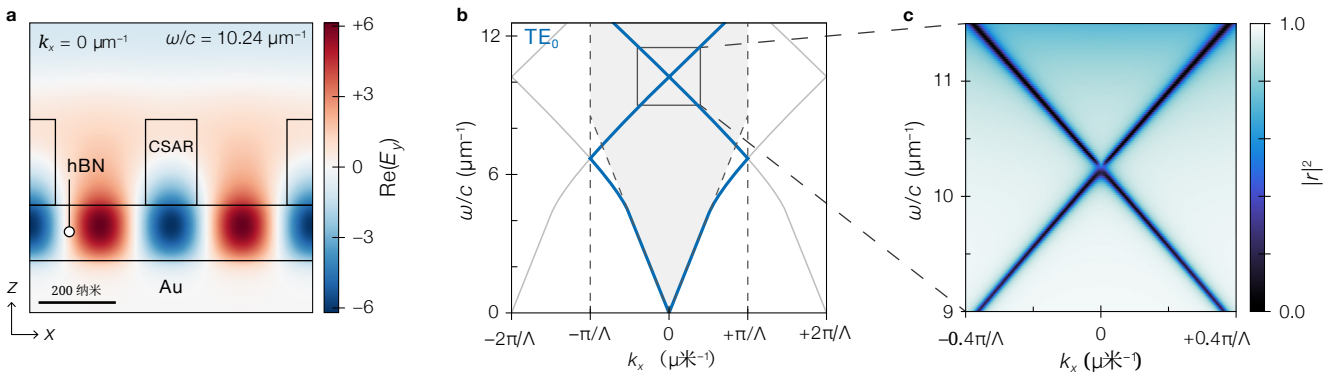



**图2：半无限导模谐振器。(a)** 由 CSAR 亚波长光栅、六方氮化硼波导和金背反射器构成的半无限谐振器中，准导模电场分布 Re($E_y$) 的全波仿真。**(b)** 计算得到的 $TE_0$ 导模色散，其中光栅被建模为有效介质。光栅将色散折叠至第一布里渊区（$-\pi/\Lambda$ 至 $+\pi/\Lambda$），如竖直虚线所示；位于光锥内的部分以灰色阴影区域标出。**(c)** 模拟的动量分辨反射率（$|r|^2$），显示了相应的色散。

# 结果

在本研究中，我们考察有限尺寸对反射式导模谐振器光学响应的影响。该结构由宽度为 $W$、刻有周期为 $\Lambda$ 的亚波长光栅并由反射器支撑的截断波导构成（图1a）。散射问题通过单个模态参数 $a(x,\ t)$ 描述，该参数由空间局域的输入场 $s_+(x')$从自由空间激励。与无限超表面相比，晶格截断会从根本上改变共振频率 $s_-(x)$ 或等效地改变面内波矢 $\omega_0$ 附近的散射场$k_{x,\ \mathrm{res}}$引入条纹并使共振展宽（图1b、c）。

为确定图1c 中观察到的有限尺寸效应的来源，我们首先从无限周期系统入手。我们考虑一种准导模，其色散在点 $(\omega_0, \beta_0)$ 附近线性化，形式如下：

$$\Omega(\beta) \simeq \omega_0 - i\Gamma + v_g(\beta - \beta_0) \qquad (1)$$

其中 $\beta$ 为相位常数，$v_g$ 为群速度，而 $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{int}} + \Gamma_{\mathrm{ext}}$ 分别为模式因内部（非辐射）和外部（辐射）机制而衰减的速率（图 1a）。为实现这种色散，我们在金背反射器上设计了一种介电六方氮化硼（hBN）波导，该波导支持基模 $TE_0$ 模式（图 2a）。波导顶部覆盖有一种低折射率介电聚合物，具体而言是化学半增幅抗蚀剂（CSAR），其上刻制了周期为 $\Lambda = 368$ nm、占空比为 36% 的亚波长光栅。在该系统中，占空比决定辐射耦合（$\Gamma_{\mathrm{ext}}$），而非辐射损耗（$\Gamma_{\mathrm{int}}$）则在金层中以倏逝方式产生。我们优化了几何结构，以便在相关带宽范围内实现类似镜面的背景反射。

CSAR层中的周期性扰动打破了面内平移对称性，并将导模的色散折叠到光锥内（图2b）。亚波长周期性将散射限制在 $0^{\mathrm{th}}$级直接反射通道中；由于光栅采用对称设计，衍射级次构成向左和向右传播的倏逝波。通过全波仿真（图2c），我们发现，除 $k_x = 0$ 微米$^{-1}$附近外，这些模式之间的耦合可以忽略不计。因此，在大部分相关 $k_x$ 范围内，我们可以将它们视为彼此独立的线性模式（补充图S2对此进行了验证）。这并非普遍结果；当正向和反向传播模式之间的耦合不可忽略时，带边处会出现抛物线色散 [60]。我们认为，模式耦合极弱，是因为这些模式主要局限于连续波导层（图2）中，且低对比度光栅的散射效率相对较低。

色散利用本征模求解器数值获得，方法是将光栅建模为ef-

有效介质，从而直接给出色散关系中的大部分物理参数，式（1）。然而，由于本征模是针对封闭系统计算的，我们必须获得 $\Gamma_{\text{ext}}$ ，即通过拟合受驱结构的模拟响应（图2c）。虽然 $\Gamma_{\text{ext}}$原则上可能依赖于频率，或因模式杂化而改变，但我们发现 $\Gamma_{\text{ext}} = 7.4 \times 10^{12}$ $\text{s}^{-1}$ 的常数值便足以在此处所考虑的带宽内准确再现全波响应（补充图S2）。

衰减率决定共振寿命，并与品质因数密切相关。品质因数形式上定义为谐振器中储存能量 $U$ 与能量耗散速率 $P_{\text{loss}}$之比，

$$Q \equiv \omega_0 \frac{U}{P_{\text{loss}}} = \frac{\omega_0}{2\Gamma} \tag{2}$$

以及模态传播长度，

$$L_p = \frac{v_g}{\Gamma} \tag{3}$$

模态传播长度决定了必须考虑非局域性的特征长度尺度（即非局域长度 [61]）。当入射波在 $x' = x_0$激发出一个向右传播的模式时，产生的激励会在长度有限的结构 $L = W - x_0$ 上与其相互作用。在半无限极限下， $L/L_p \to \infty$，阵列尺寸对共振响应的影响微乎其微（图1b）。相反，在短光栅极限下， $L \lesssim L_p$，有限尺寸效应会严重损害理论性能（图 1c）。在 $\omega/c = 9$ 微米$^{-1}$ 处，我们发现 $L_p = 11.9$ 微米和$Q = 132$；由于高频下金层的光学损耗增加 [63]，这些数值在 $\omega/c = 11.5$ 微米$^{-1}$ 处降至 $L_p = 6.4$ 微米和 $Q = 96$ 。

前文讨论的无限周期极限通常是超表面设计的起点，但显然，如果超表面的横向尺寸接近传播长度 $L_p$，我们就可以预期会出现显著的有限尺寸效应。接下来，我们将讨论如何利用 STCMT 将这些有限尺寸效应纳入考虑。

## 有限尺寸效应

通常，对于具有一个输入端口且色散关系局部线性的系统，其时空运动方程可写为

[61]

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} + v_g \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} + i(\omega_0 - i\Gamma - v_g\beta_0)\, a(x,t) = \int \kappa(x,x')\, s_+(x',t)\, \mathrm{d}x' \tag{4}$$

该方程描述了单个模式振幅 $a(x,t)$ 的传播。该振幅由入射波 $s_+(x',t)$ 通过耦合系数$\kappa$从自由空间激发。参数 $a(x,t)$ 经过归一化，使其绝对值的平方表示非局域模式单位面积内的瞬时储存能量，而 $|s_+|^2$表示输入功率密度。随着模式沿结构传播，它会向自由空间辐射（由 $d$ 描述），从而与非共振背景发生干涉并形成散射场 $s_-(x,t)$（同样经过归一化，使得 $|s_-|^2$ 表示出射功率密度）；非共振背景由 $Cs_+(x',t)$ 描述（更多详情见补充材料第 S2 节）：

$$s_-(x) = \int \left(C(x,x')\, s_+(x') + d(x,x')\, a(x')\right) \mathrm{d}x' \tag{5}$$

尽管该模式具有非局域空间分布，我们仍假设散射完全局域化 [61]。因此，散射系数与 $\delta(x-x')$（补充材料第 S2 节）成正比。在稳态下，方程（4）和（5）可简化为

$$v_g \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\tilde{\beta}\right) a(x) = \kappa(x) s_+(x) \tag{6}$$

$$s_-(x) = -s_+(x) + d(x)a(x) \tag{7}$$

其中，我们引入了复传播常数$\tilde{\beta} = \beta + i\alpha$ ，其衰减率为 $\alpha = \Gamma/v_g$ ，符合标准波导形式。此外，我们假设在所关注的带宽范围内，离共振响应具有完美反射特性，即 $C = -1$。

为将时空耦合模理论框架应用于超表面截断至宽度为 $W$ 时产生的有限尺寸效应，我们只需令耦合系数仅在空间上的同一宽度范围内非零，

$$\kappa(x) = d(x)^* = \sqrt{2\Gamma_{\text{ext}}}\, e^{iqx} \Theta(x)\Theta(W-x) \tag{8}$$

其中， $\sqrt{2\Gamma_{\text{ext}}}$ 是时域耦合模理论中熟知的辐射耦合项， [53] 而相位因子（$e^{iqx}$，其中 $q = 2\pi/\Lambda$）编码了面内动量

匹配，即导模与自由空间辐射之间的匹配。关键的是，亥维赛函数（Θ）将耦合限制在有限区间 $x \in [0, W]$内。请注意，虽然我们有标准的时域耦合模理论恒等式 $|\kappa|^2 = |d|^2 = 2\Gamma_{\text{ext}}$，但也有不寻常的关系$\kappa = d^*$，这是因为输入耦合系数和输出耦合系数携带方向相反的光栅动量。

为了捕捉此处关注的核心物理特性，我们发现只需对单个向右传播的模式进行建模，

$$a(x) = \frac{\sqrt{2\Gamma_{\text{ext}}}}{v_g} \int_0^x e^{i\tilde{\beta}(x-x')} e^{iqx'} \, s_+(x') \, \mathrm{d}x'. \quad (9)$$

严格来说，这种简化违背了互易性（因为缺少反向传播模式），但我们认为，当前向模式与反向模式之间的相互作用可以忽略时，这种处理是合理的。值得注意的是，原则上，该理论可以轻松纳入耦合的反向传播模式，但代价是复杂度增加[60]。

前述方程为我们提供了一种求解有限尺寸非局域超表面反射场的方法。一般而言，求解反射最简单的方法是对方程 9 进行数值积分以求得模式振幅，然后将其代入方程 5。不过，在某些情况下，这些方程可以直接解析求解：例如，当共振线宽远窄于激发的数值孔径时（$\alpha \ll k_{x,\ \max}$），我们可以将衍射极限输入场近似为一个 $\delta$ 函数（补充图 S3 验证了这一近似的有效性）。这样，反射系数便可化简为紧凑的闭式表达式，

$$r(k_x) = -1 + \frac{2\Gamma_{\text{ext}}}{v_g \left(\alpha + i\Delta_k\right)} \left(1 - e^{-(\alpha + i\Delta_k)L}\right). \quad (10)$$

或者也可以用 $\omega$ 表示（完整推导见补充材料第S3节）。这里，第一个因子还原了失谐 $\Delta_k = k_x - k_{x,\ \text{res}}$下熟悉的洛伦兹依赖，而指数项则通过相互作用长度 $L$ 表征有限尺寸的影响。这些效应的显著程度取决于 $L$ 与 $L_p$ 的相对大小。在短光栅极限下，$L \lesssim L_p$，有限孔径会产生振荡的光谱特征和表观共振展宽；而在长光栅极限下，$L \gg L_p$，有限尺寸项消失，式（10）简化为标准的单端口时域耦合模表达式 [53]。

接下来，我们将该模型应用于宽度为 $W = 30$ μm 的有限尺寸超表面。该超表面由相干的衍射受限输入场照明，该输入场由数值孔径为 NA$= k_{x,\ \max}/k_0 = 0.4$的一维入瞳的傅里叶变换产生。激励激发了一个向右传播的准导模，该模式因吸收和辐射而衰减。当模式到达超表面的终止端 $x = W$时，我们假设剩余功率不可逆地损耗。有限宽度 $W$ 因此将模式的相互作用长度（即散射孔径）限制为$L = W - x_0$。图 3a 展示了频率为 $k_0 = \omega/c = 9.7$ μm$^{-1}$ 且中心位于 $x_0 = 22$ μm 处时的输入场和输出场，对应的相互作用长度为$L = 8$ μm。我们观察到强烈局域的激励，其特征是辛克条纹（鲑红色）；反射场的振幅仅略有减小（紫色），因为大部分入射功率分布在非共振 $k$-矢量中。然而，观察模式振幅时，我们清楚地看到，激励在 $x_0$处发射，向右传播并呈指数衰减（图 3a，插图）。在此频率下，传播长度为 $L_p = 10.6$ μm，因此模式振幅在到达 $x = W$处的终止端之前仅衰减至 $e^{-L/L_p} \approx 0.47$，有限尺寸效应不可忽略。

然而，在实空间中，晶格截断的影响似乎较为轻微，但在傅里叶空间中则并非如此（图 3b）。角度散射响应仍在 $k_x/k_0 = -0.13$处呈现共振凹陷（紫色），与半无限结构（蓝色虚线）一致，但整体响应与简单的洛伦兹线型有很大偏差。相反，共振特征受到由有限散射孔径决定的类 sinc 包络调制，并因光栅上不同位置发出的辐射发生相干干涉而产生明显条纹。需要指出的是，$|s_-(k_x)|^2$ 可能因角谱内功率重新分布而局部超过 1，这并不意味着存在光学增益；总散射功率受限于入射功率减去吸收和边缘损耗所耗散的功率。

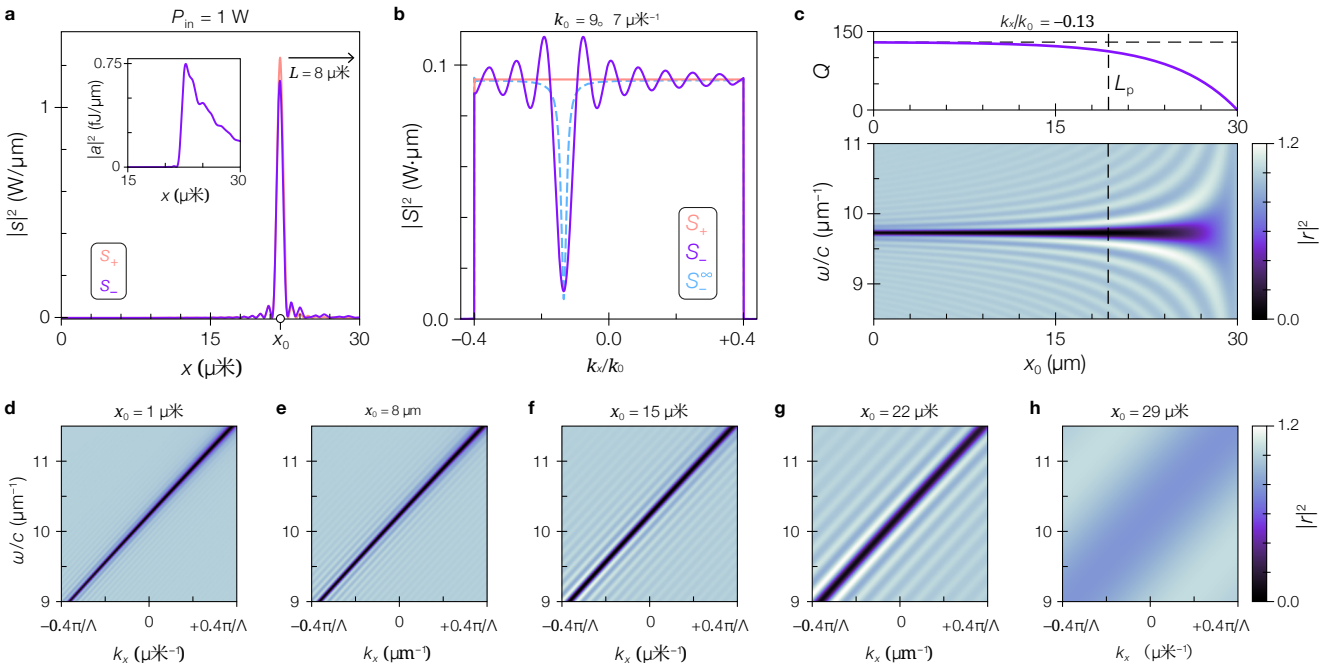



**图3：有限尺寸导模谐振器的时空耦合模理论。（a）**实空间输入场 $|s_+(x')|^2$ (鲑红色)及对应的散射场 $|s_-(x)|^2$ (紫色)，是在 $x_0 = 22\ \mu$m ($L = 8\ \mu$m) 处、数值孔径为 $= k_{x,\ \max}/k_0 = 0.4$ 时，对宽度为 $P_{\rm in} = 1$ W 的激励进行计算得到的。插图显示了模式振幅 $a(x)$ 在 $x = W$ 处的突变截断。**（b）**输入场 $|S_+(k_x)|^2$ 对应的横向动量表示。所得散射场 $|S_-(k_x)|^2$ 与半无限响应 $|S_-^\infty|^2$ (蓝色虚线)相比，呈现出由边缘截断引起的展宽和条纹。**（c）**固定 $k_x/k_0 = -0.13$ 时， $Q$ 因子（上）和反射率（下）随 $x_0$ 的变化；传播长度 $L_p$ 是相对于谐振器边缘标示的（竖直虚线）。随着 $L$ 增大， $Q$ 因子趋近于半无限极限（水平虚线）。**（d–h）**相应的反射率色散，显示出依赖于 $x_0$ 的干涉条纹和线宽。

沿样品移动激励点会改变 $L$ ，并系统性地重塑光谱（图 3h）和角度响应（图 3d–g）。当光束接近右边缘（$x_0 \to W$）时，干涉图样变得更加明显，条纹间距也随 $\Delta k_{\rm fringe} = 2\pi/L$ 增大，这与矩形孔径的夫琅禾费衍射直接类似。相反，将 $x_0$ 移离右边缘会减小条纹间距。最终，在左边缘（$L = 29$ 微米）处，响应看起来与无限阵列无法区分（图 3d）。此时，归一化传播长度为 $L/L_p = 2.7$，模式在到达$x = W$之前衰减至 $e^{(-L/L_p)} \approx 0.06$ ——这表明了获得未受扰动性能所需的相对尺寸。

由于有限尺寸展宽，无法直接从共振特征的光谱宽度推断 $Q$-因子。具有物理意义的 $Q$ 应反映导模的储存能量和能量损耗。为体现边缘损耗的影响，我们引入有效衰减率 $\Gamma_{\rm tot}(L) = \Gamma + \Gamma_{\rm edge}(L)$ 其中 $\Gamma_{\rm edge}$是依赖于 $L$ 的边缘损耗率。于是，我们可以将式（2）改写为

$$Q(L) = \frac{\omega_0}{2\Gamma_{\rm tot}(L)} = \frac{\omega_0}{2\Gamma}\left(1 - e^{-2L/L_p}\right) \qquad (11)$$

从而得到基于寿命的 $Q$ ，将对相互作用长度和传播长度的依赖关系形式化；当 $L \to 0$ 时，该关系趋于零，同时接近半无限极限（$Q \to 130$ 在 $k_0 = 9.7$ 微米$^{-1}$处），如 $L \gg L_p$（图3b）。总之，这些发现凸显了有限尺寸可能产生的不利影响，即使在适中的 $Q$因子下也是如此。

## 实验验证

为制造所设计的超表面，我们采用干法转移技术 [64] ，将143纳米厚的机械剥离六方氮化硼转印至预先图形化的30 微米宽金背反射器上。然后，我们旋涂一层222纳米

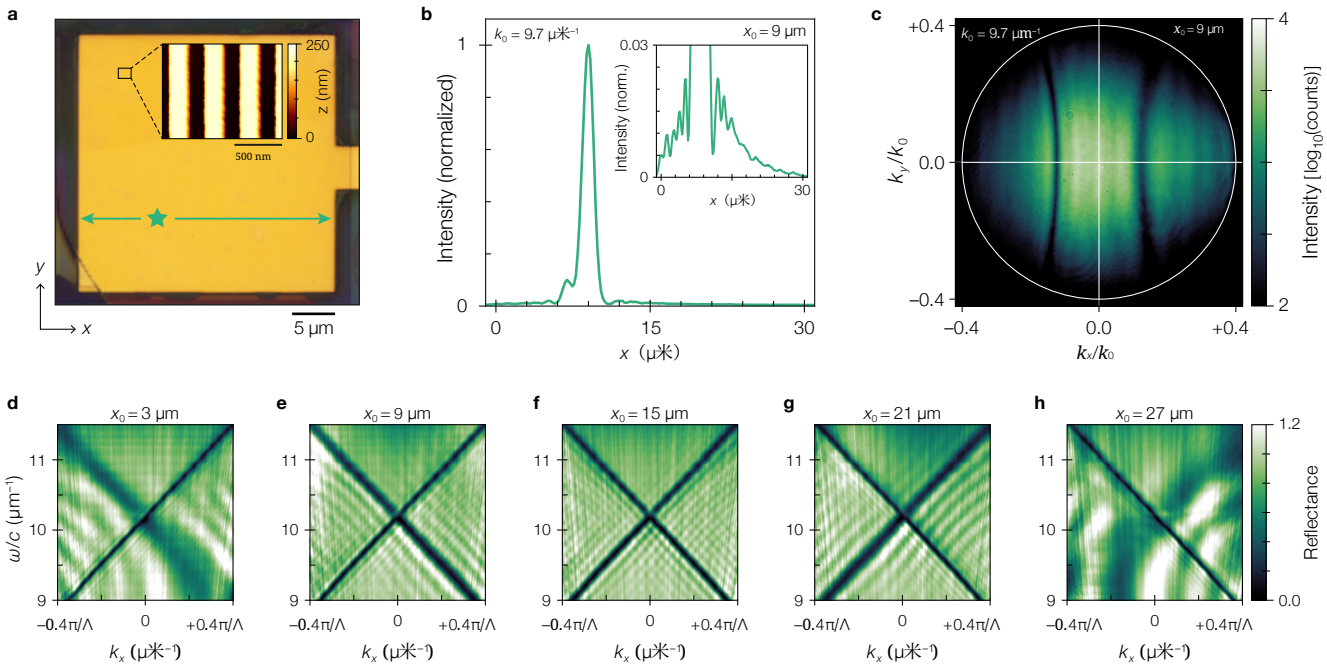



**图4：位置依赖的线宽和干涉图样。（a）**制成的谐振器的光学显微图。插图：亚波长光栅的原子力显微图。绿色星号标记激发位置（$x_0 = 9$ $\mu$微米）。**（b）**穿过实空间成像的反射光束中心的水平线剖面。插图：以更长曝光时间记录的同一图像，揭示低强度特征，并缩放至与主图面板中的强度一致。**（c）**在动量空间（傅里叶平面）成像的相应反射。**（d–h）**不同入射位置 $x_0$ 下测得的动量分辨反射率，证实了预测的干涉条纹和线宽变化。

的CSAR，并通过电子束光刻对亚波长光栅进行图形化。在此，我们采用无刻蚀方法——即在低折射率抗蚀剂中对光栅进行图形化，而非在波导本身中进行浅刻蚀——以尽量减少制造缺陷并实现快速原型制作[12, 13, 25, 65]。原子力显微镜显示出优异的均匀性，并确认所制造的光栅与设计相符（图4a）。

我们将制成的样品安装在衍射极限光学显微镜中，并用聚焦的单色激光束照射（20× 物镜，数值孔径 = 0.4），位于 $k_0 = 9.7$ 微米$^{-1}$，中心位于 $x_0 = 9$ 微米。与 STCMT模型不同，光栅的对称性使照明光斑激发出两个反向传播导波。图4b 显示了相机上实空间成像的反射强度分布的水平线剖面。采用更长的曝光时间记录时，可以观察到离域辐射图样以及远离 $x_0$的指数衰减，这是泄漏导波共振的特征（图4b 的插图）。

通过插入伯特兰透镜，我们对显微物镜的后焦（傅里叶）平面成像，以获取动量空间中的散射场（图 4c）。在 $k_x/k_0 \approx \pm 0.13$ 处，反射率出现两个凹陷，对应两个共振特征。由于激励位置偏离中心，向左和向右传播的导波具有不同的相互作用长度。根据前向模式的相位匹配条件，$k_x + q = \beta$，可得 $k_x/k_0 = -0.13$，因此我们将负 $k_x$ 处的特征识别为向右传播。后焦平面图像直接证实了这一判断：该分支的共振比 $k_x/k_0 = +0.13$ 处的分支更窄，这是因为它具有更长的相互作用长度 $L$。

为更详细地研究共振线形对位置的依赖性，我们将激光光斑从 $x = 0$ 微米扫描至 $x = W = 30$ 微米，步长为 1 微米。在每个位置，我们扫描激光频率并记录动量分辨反射率。图 4d–h 展示了五个具有代表性的入射位置处测得的色散。当超表面在靠近中心处受到照射时（图 4f），其响应呈对称性，两个反向传播模式

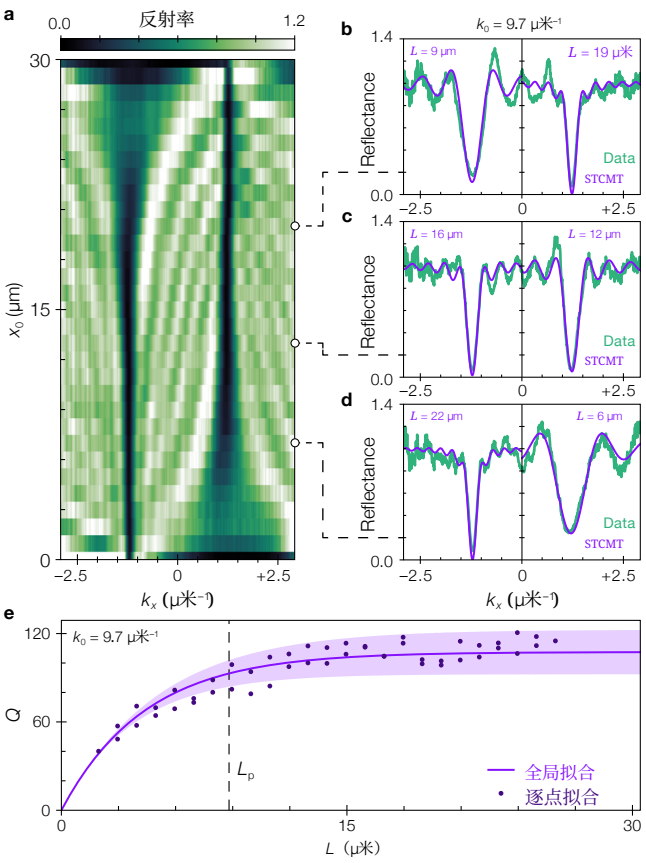



**图5：模型与实验的比较。(a)** 测得的反射率随激发位置 $x_0$ 和横向动量 $k_x$的变化，测量条件为 $k_0 = 9.7\ \mu\text{m}^{-1}$。**(b–d)** 在选定的 $x_0$处获得的代表性动量分辨反射率线切（绿色），并叠加全局 STCMT 拟合结果（紫色）。拟合得到的长度 $L$ 以图示表示。**(e)** 由全局 STCMT 拟合推得的品质因子 $Q(L)$，并标出提取的传播长度 $L_p$（虚线）。各点表示对每条线切独立进行的拟合；阴影带表示相对于这些逐点拟合的相应模型偏差（一个标准差）。

均表现出窄共振，同时已呈现出干涉图样，表明有限样品尺寸会影响响应。随着光斑向左移动（图 4e），这种对称性被打破：向右传播的分支变窄（由于更长的 $L$），而向左传播的分支则变宽，最终在靠近边缘处几乎无法辨认（图 4d）。向右边缘移动时，这一趋势反转（图 4g、h），这与两个导波所经历的相互作用长度互换相一致。为进一步展示这种模式演化，我们绘制了固定位置处随位置变化的角分辨反射率 $k_0 = 9.7$ 微米$^{-1}$ （图5a），突出显示共振线形和干涉条纹如何随激发位置而变化。总体而言，这些观察结果与 STCMT 的预测（图 3）高度吻合。

受这一质性对应关系的启发，我们接下来通过拟合测得的反射率来提取本征衰减率， $\Gamma_{\text{int}}$ 和 $\Gamma_{\text{ext}}$ 。为缩小参数空间，我们根据本征模色散（图 2b）固定 $\beta$ 和 $v_g$ ，并通过一个较小的 $\Delta k_x$ 偏移量来表征实验偏差。此外，我们引入有效宽度修正 $\Delta W$，以补偿制成的超表面中因边缘渐变加窗而导致的 $L$ 系统性减小。图 5b–d 展示了在三个激发位置 $x_0$处的代表性线切片，分别使用 STCMT 拟合向左和向右传播的分支（因为 STCMT 是针对单一模式建立的）。对于 $\Delta k_x \approx 0.08$ 微米$^{-1}$ 和$\Delta W \approx -2.1$ 微米范围内的数据，该模型准确再现了扫描范围内的反射率数据，包括共振凹陷附近的许多较小条纹。通过这些拟合，我们得到 $\Gamma_{\text{ext}} \approx 7.1 \times 10^{12}\ \text{s}^{-1}$ 和 $\Gamma_{\text{int}} \approx 6.5 \times 10^{12}\ \text{s}^{-1}$，对应的传播长度为 $L_p \approx 8.8$ 微米。利用公式（11），我们进一步得到实验 $Q$（$L$）曲线，其中 $Q \to 107$ 为 $L \gg L_p$ （图 5e）。尽管提取出的辐射率与模型值 $\Gamma_{\text{ext}}^{\text{sim}} = 7.4 \times 10^{12}\ \text{s}^{-1}$非常吻合，但非辐射率几乎是模型值 $\Gamma_{\text{int}}^{\text{sim}} = 3.9 \times 10^{12}\ \text{s}^{-1}$ 的两倍，我们将其归因于表面粗糙度、聚合物残留物和空间非均匀性导致的额外耗散。因此，实验测得的 $L_p$和 $Q$ 均小于模型值（图 3b ）。尽管如此，为评估模型偏差，我们在每个 $x_0$ 处独立重新拟合$Q$ （图 5e 中的数据点），并据此确定 $Q$ 的不确定性范围（阴影区域）。这些逐点拟合再现了相同的整体趋势，进一步支持了模型的有效性。

## 设计原则

尽管本文聚焦于一种具有中等 $Q$因子的特定导模共振超表面，以展示有限尺寸效应的影响，但我们强调，这些观察结果具有更广泛的适用性。原则上，任何能够用局域线性色散描述的传播型非局域模式，其 $Q$因子都会随着 $1 - e^{-2L/L_p}$趋近于半无限极限。

具体而言，对于进入长光栅工作状态（此时基本可以忽略有限尺寸效应）的设计建议是：制备物理宽度为 $5\times$ 模态传播长度的超表面。这样可确保在结构中心激发的模式（$L/L_p = 2.5$）衰减至其原始振幅的约 8%，并使基于寿命的 $Q$因子达到理论值的 99.3%。当然，在尺寸受限光栅的极限下工作也可能颇具意义。值得注意的是，在这一状态下，品质因数主要由模式传播至边缘所需的渡越时间决定（补充信息第 S4节）。这意味着，对于占地面积受限的器件，要实现高-$Q$，就需要通过设计平带来增加固定占用面积内的相互作用时间，即慢光 [42,66]。

我们迄今尚未考察的另一个方面，是驱动场的数值孔径（光斑尺寸）所带来的影响；这与实验设计有关，而非样品尺寸。一般而言，对于无限光栅，尽可能减小角带宽是有利的，从而使所有入射功率都集中在 $k_{x,\ \mathrm{res}}$。对于要求尽可能强的光与物质相互作用的应用（如非线性光学），这一点尤其重要。

下面，我们考虑有限数值孔径的 sinc 光束，以探究如何通过使光斑尺寸与光栅宽度相匹配来最大化谐振器中的储存能量 $U$ （详见补充材料第 S4 节）。将总入射功率固定为任意值 $P_{\mathrm{inc}} = 1\ W$，我们改变数值孔径以控制衍射极限光斑尺寸。接着，我们通过

$$U \equiv \int_0^W |a(x)|^2 \ \mathrm{d}x \tag{12}$$

代入模式振幅的解，即式（9），并取不同的归一化宽度 $W/L_p$ （图 6a），评估储存能量；可以观察到一个显著的极大值，且相干孔径重叠能够很好地描述这一现象，

$$\int w(x) s_+(x) \ \mathrm{d}x \tag{13}$$

注意， $U$ 并非随数值孔径单调变化，而是在某个最佳数值孔径处达到最大值。对于以光栅为中心的 sinc 光束（$L = W/2$），我们发现最佳值为 NAopt $\approx 0.685\lambda_0/W$。尽管数值前因子取决于具体的激发条件，但整体的缩放关系 $\mathrm{NA}_{\mathrm{opt}} \propto \lambda_0/W$ 普遍成立。

为探究这一最大值的来源，我们再次考察贯穿全文讨论的 30-微米宽超表面（图 6b）。我们选取四个具有代表性的数值孔径，以说明对于有限光栅而言，随着 NA $\to$ 0 照明分布 $s_+(x)$ 开始延伸到远超光栅窗口的范围$[0, W]$，越来越多的入射功率无法激励共振模式。另一方面，随着 NA 增大，越来越多的入射功率对应于位于共振波数之外的波数，从而增强反射并降低耦合进入共振的功率。因此， $U$ 当光斑尺寸与光栅宽度相匹配（或反之）时达到最大值，这反映了匹配实空间占地范围与匹配动量空间中的共振之间的权衡。

总之，我们系统阐明了模态传播长度、超表面物理占用面积、激发光斑尺寸与非局域超表面关键性能指标之间的关系；在近期向超高 $Q$-因子发展的趋势下，这一点尤为重要。我们的工作提供了切实可行的设计指南，可用于实现理论线宽并最大化光与物质相互作用：i）若要获得接近无限阵列的 a$Q$-因子，超表面的长度需要超过五个传播长度；ii）若要最大化谐振器中的储存功率，阵列尺寸必须与入射光束的中央主瓣相匹配。

## 讨论与结论

我们展示了有限横向范围对漏波超表面光学性质的影响。具体而言，我们利用时空耦合模理论框架，推导出截断导模谐振器光谱-空间散射响应的近似解析表达式。结果表明，当相互作用长度与导波的传播长度相当或更短时，散射场会呈现强烈的干涉条纹；由于动量空间中的谱权重重新分布，反射率可能超过 1，同时有效寿命降低，因而谐振器中储存的能量也会减少。为验证这些结果，我们制备了所述的

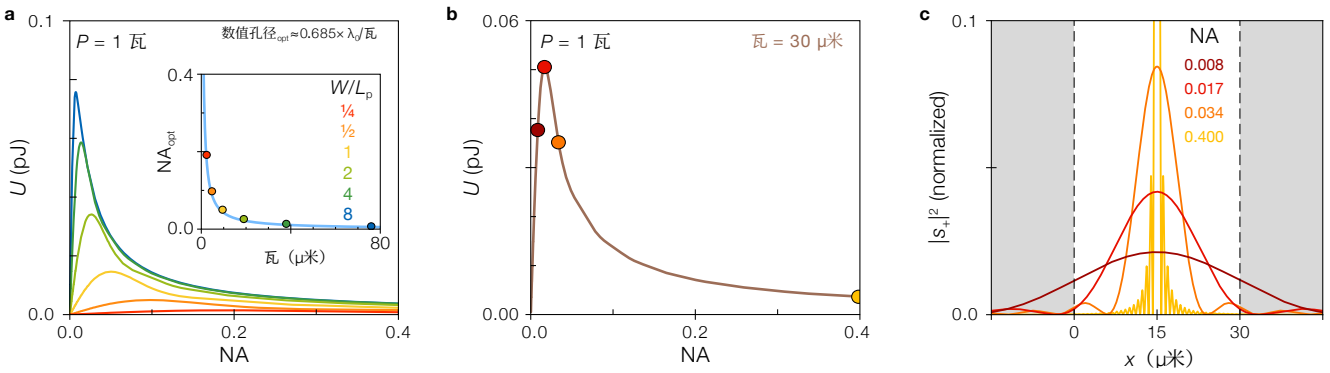



**图6：通过使照明宽度与光栅匹配来最大化储存能量。（a）**在 sinc 激励下，于中心（$L = W/2$）以恒定总入射功率 $P = 1$ W 入射时，储存能量（$U$）随入射数值孔径 NA 变化的关系；计算采用不同的光栅宽度 $W/L_p$（颜色表示）。插图：由每个宽度下提取的最优 NA（彩色数据点）可由 $\mathrm{NA}_{\mathrm{opt}} \approx 0.685\,\lambda_0/W$（浅蓝色曲线）很好地近似。**（b）**正文中讨论的 $W = 30$ 微米光栅的储存能量随 NA 的变化（棕色曲线），其中四个突出显示的数据点分别对应于**（c）**相同四个 NA 值下的归一化入射强度分布 $|s_+(x)|^2$。光栅边界以虚线表示；光栅外部的入射场（灰色阴影区域）不参与共振能量积累。

超表面，并进行了位置分辨和动量分辨反射光谱测量。这些测量展示了有限尺寸效应，且实验结果与理论预测高度吻合。更普遍地说，给定导波的理论色散，我们的模型提供了一种直接的方法，可预测有限占用面积下可实现的最大品质因数。这进一步表明，STCMT 是一种有价值的方法，能够对真实世界中的非局域超光学元件的散射响应进行定性和定量表征。

STCMT的广泛适用性为进一步研究留下了许多富有前景的方向。例如，未来的工作可以研究使用面内反射器，通过将光限制在有限散射孔径内来增加有效相互作用长度 [55,56]。其他方向包括研究由准连续谱束缚态或强耦合的反向传播泄漏波产生二次色散的超表面，以及用于建模基于透射的超光学的双端口系统 [10, 32, 42,60]。总而言之，本文提出的框架从根本上揭示了有限尺寸对这些新兴光子系统共振响应的影响，这是推动增强现实、生物传感和非线性光学技术集成的关键一步。

## 致谢

本研究由荷兰国家科学基金会（NWO）提供的Vidi资助（VI.Vidi.203.027）支持。J.v.d.G.还获得了欧洲研究理事会启动基金的支持，资助协议编号为101116984。

## 数据可用性

完整的复现资料包包括所有数据和脚本，将在论文发表后公开提供。

## 利益冲突

作者声明不存在竞争性利益。

## 贡献

T.H.、J.v.d.G. 和 S.A.M. 提出了这项研究的构想。S.A.M. 和 T.H. 建立了 STCMT模型。T.H. 制作了样品，并在 J.v.d.G. 和 S.A.M. 的指导下进行了测量和模拟。所有作者均参与了结果分析和手稿撰写。

# 参考文献

(1) Yu, N.; Capasso, F. 《自然·材料》2014, 13, 139–150. (2) Kuznetsov, A. I. et al. ACS Photonics 2024, 11, 816–865. (3) Bandiera, S.; Jacob, D.; Muller, T.; Marquier, F.; Laroche, M.; Greffet, J.-J. Applied Physics Letters 2008, 93, 193103. (4) Magnusson, R.; Ko, Y. H. 载于《纳米工程：制造、特性、光学与器件 XIII》，国际光学工程学会：2016；第 9927 卷，页码 992702. (5) Kim, S. J.; Brongersma, M. L. 《光学快报》2017, 42, 5. (6) Lawrence, M.; Barton, D. R.; Dixon, J.; Song, J.-H.; Van De Groep, J.; Brongersma, M. L.; Dionne, J. A. 《自然·纳米技术》2020, 15, 956–961. (7) Hsu, C. W.; Zhen, B.; Lee, J.; Chua, S.-L.; Johnson, S. G.; Joannopoulos, J. D.; Soljačić, M. 《自然》2013, 499, 188–191. (8) Koshelev, K.; Lepeshov, S.; Liu, M.; Bogdanov, A.; Kivshar, Y. 《物理评论快报》2018, 121, 193903. (9) Jin, J.; Yin, X.; Ni, L.; Soljačić, M.; Zhen, B.; Peng, C. 《自然》2019, 574, 501–504. (10) Shastri, K.; Monticone, F. 《自然·光子学》2023, 17, 36–47. (11) Chen, Z.; Yin, X.; Jin, J.; Zheng, Z.; Zhang, Z.; Wang, F.; He, L.; Zhen, B.; Peng, C. Science Bulletin 2022, 67, 359–366. (12) Huang, L.; Jin, R.; Zhou, C.; Li, G.; Xu, L.; Overvig, A.; Deng, F.; Chen, X.; Lu, W.; Alù, A.; Miroshnichenko, A. E. 《自然·通讯》2023, 14, 3433. (13) Fang, J. et al. 《自然·通讯》2024年, 15, 10341. (14) Overvig, A. C.; Malek, S. C.; Yu, N. 《物理评论快报》2020, 125, 017402. (15) Overvig, A.; Alù, A. 《激光与光子学评论》2022, 16, 2100633. (16) Chai, R.; Liu, Q.; Liu, W.; Li, Z.; Cheng, H.; Tian, J.; Chen, S. ACS Photonics 2023, 10, 2031–2044

(17) Wang, J.; Kühne, J.; Karamanos, T.; Rockstuhl, C.; Maier, S. A.; Tittl, A. 《先进功能材料》**2021**, *31*, 2104652. (18) Kühner, L.; Sortino, L.; Berté, R.; Wang, J.; Ren, H.; Maier, S. A.; Kivshar, Y.; Tittl, A. 《自然·通讯》**2022**, *13*, 4992. (19) Hu, J.; Safir, F.; Chang, K.; Dagli, S.; Balch, H. B.; Abendroth, J. M.; Dixon, J.; Moradifar, P.; Dolia, V.; Sahoo, M. K.; Pinsky, B. A.; Jef- frey, S. S.; Lawrence, M.; Dionne, J. A. 《自然·通讯》**2023**, *14*, 4486. (20) Kodigala, A.; Lepetit, T.; Gu, Q.; Bahari, B.; Fainman, Y.; Kanté, B. 《自然》**2017**, *541*, 196– 199. (21) Ha, S. T.; Fu, Y. H.; Emani, N. K.; Pan, Z.; Bakker, R. M.; Paniagua-Domínguez, R.; Kuznetsov, A. I. 《自然·纳米技术》**2018**,*13*, 1042–1047. (22) Hwang, M.-S.; Lee, H.-C.; Kim, K.-H.; Jeong, K.-Y.; Kwon, S.-H.; Koshelev, K.; Kivshar, Y.; Park, H.-G. 《自然·通讯》**2021**, *12*, 4135. (23) Benea-Chelmus, I. C.; Mason, S.; Meretska, M. L.; Elder, D. L.; Kazakov, D.; Shams-Ansari, A.; Dalton, L. R.; Capasso, F. 《自然·通讯》*style id='39'>2022*, *13*, 3170. (24) Damgaard-Carstensen, C.; Yezekyan, T.;Brongersma

M. L.; Bozhevolnyi, S. I. 《*ACS Nano*》**2025**, *19*, 11999–12006. (25) Hoekstra, T.; van de Groep, J. 《光：科学与应用》**2026**, *15*, 28. (26) Song, J. H.; van de Groep, J.; Kim, S. J.; Brongersma, M. L. 《自然·纳米技术》**2021**, *16*, 1224–1230. (27) Malek, S. C.; Overvig, A. C.; Alù, A.; Yu, N.《光：科学与应用》**2022**, *11*, 246. (28) Koshelev, K.; Tang, Y.; Li, K.; Choi, D.-Y.; Li, G.; Kivshar, Y. *ACS Photonics* **2019**, *6*, 1639– 1644. (29) Liu, Z.; Xu, Y.; Lin, Y.; Xiang, J.; Feng, T.; Cao, Q.; Li,J.; Lan,S.; Liu,J. 《物理评论快报》**2019**, *123*, 253901.

(30) Zograf, G.; Koshelev, K.; Zalogina, A.; Korolev, V.; Hollinger, R.; Choi, D.-Y.; Zuerch, M.; Spiel- mann, C.; Luther-Davies, B.; Kartashov, D.; Makarov, S. V.; Kruk, S. S.; Kivshar, Y. ACS Photonics 2022, 9, 567–574. (31) Kwon, H.; Sounas, D.; Cordaro, A.; Polman, A.; Alù, A. 《物理评论快报》2018, 121, 173004. (32) Cordaro, A.; Kwon, H.; Sounas, D.; Koenderink, A. F.; Alù, A.; Polman, A. 《纳米快报》2019, 19, 8418–8423. (33) Overvig, A. C.; Mann, S. A.; Alù, A. 《物理评论X》2021, 11, 021050. (34) DeLuca, F.; Guddala, S.; Cotrufo, M.; Touma, J.; Overvig, A.; Alù, A. 《先进材料》2025, 37, e07848. (35) Klopfer, E.; Dagli, S.; Barton, D. I.; Lawrence, M.; Dionne, J. A. 《纳米快报》2022, 22, 1703– 1709. (36) Lin, L.; Hu, J.; Dagli, S.; Dionne, J. A.; Lawrence, M. 《纳米快报》2023, 23, 1355–1362. (37) Hail, C. U.; Foley, M.; Sokhoyan, R.; Michaeli, L.; Atwater, H. A. 《自然·通讯》2023, 14, 8476. (38) Rodriguez, S. R. K.; Schaafsma, M. C.; Berrier, A.; Gómez Rivas, J. Physica B: Condensed Mat- ter 2012, 407, 4081–4085. (39) Grepstad, J. O.; Greve, M. M.; Holst, B.; Jo- hansen, I.-R.; Solgaard, O.; Sudbø, A. Optics Ex- press 2013, 21, 23640. (40) Yang, Y.; Kravchenko, I. I.; Briggs, D. P.; Valen- tine, J. 《自然·通讯》2014, 5, 5753. (41) Zundel, L.; Manjavacas, A. 《物理学杂志：光子学》2018, 1, 015004. (42) Taghizadeh, A.; Chung, I.-S. Applied Physics Let- ters 2017, 111, 031114. (43) Droulias, S.; Koschny, T.; Soukoulis, C. M. ACS Photonics 2018, 5, 3788–3793. (44) Wang, S. S.; Moharam, M. G.; Magnusson, R.; Bagby, J. S. 《美国光学学会杂志A辑》1990, 7, 1470. (45) Wang, S. S.; Magnusson, R. 《应用光学》1993, 32, 2606. (46) Brazas, J. C.; Li, L. 《应用光学》1995年, 34, 3786. (47) Saarinen, J.; Noponen, E.; Turunen, J. 《光学工程》1995年, 34, 2560–2566. (48) Boye, R. R.; Kostuk, R. K. 《应用光学》2000年, 39, 3649. (49) Jacob, D. K.; Dunn, S. C.; Moharam, M. G. 《美国光学学会杂志A辑》2000年, 17, 1241. (50) Bendickson, J. M.; Glytsis, E. N.; Gaylord, T. K.; Brundrett, D. L. 《美国光学学会杂志A辑》2001年, 18, 1912. (51) Jeong, D.-Y.; Ye, Y. H.; Zhang, Q. M. 《应用物理学杂志》2002年, 92, 4194–4200. (52) Peters, D. W.; Kemme, S. A.; Hadley, G. R. 《美国光学学会杂志A辑》2004年, 21, 981. (53) Haus, H. A., 《光电子学中的波与场》; Prentice-Hall 固态物理电子学丛书; Prentice-Hall: 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1984 年 . (54) Fan, S.; Suh, W.; Joannopoulos, J. D. 《美国光学学会杂志A辑》2003年, 20, 569. (55) Kintaka, K.; Majima, T.; Inoue, J.; Hatanaka, K.; Nishii, J.; Ura, S. 《光学快报》2012, 20, 1444–1449. (56) Dolia, V.; Balch, H. B.; Dagli, S.; Abdollahramezani, S.; Carr Delgado, H.; Moradifar, P.; Chang, K.; Stiber, A.; Safir, F.; Lawrence, M.; Hu, J.; Dionne, J. A. 《自然·纳米技术》2024年, 19, 1290–1298. (57) Hao, R.; Ye, B.; Xu, J.; Zou, Y. 电子学前沿 2025, 18, 3. (58) Ustimenko, N.; Rockstuhl, C.; Evlyukhin, A. B. 《物理评论B》2024年, 109, 115436. (59) Hoang, T. X.; Leykam, D.; Chu, H.-S.; Png, C. E.; García-Vidal, F. J.; Kivshar, Y. S. 物理评论研究 2025, 7, 013316. (60) Bykov, D. A.; Doskolovich, L. L. 《光学快报》2015, 23, 19234. (61) Overvig, A.; Mann, S. A.; Alù, A. 《光：科学与应用》2024年, 13, 28.

(62) Jeon, D.; Kim, H.; Rho, J. *ACS Photonics* **2025**,*12*, 375–383. (63) Yakubovsky, D. I.; Arsenin, A. V.; Stebunov, Y. V.; Fedyanin, D. Y.; Volkov, V. S. 《光学快报》**2017**, *25*, 25574. (64) Castellanos-Gomez, A.; Buscema, M.; Molenaar, R.; Singh, V.; Janssen, L.; Van Der Zant, H. S.; Steele, G. A. 二维材料 **2014**, *1*, 011002. (65) Shen, F.; Liu, D.; Chen, Z.; Zhu, J.; Jin, S.; Zhao, X.; Ma, Y.; Lei, D.; Xu, J. *Optica* **2025**, *12*,1702. (66) Barton, D.; Hu, J.; Dixon, J.; Klopfer, E.; Dagli, S.; Lawrence, M.; Dionne, J. 纳米光子学**2021**, *10*, 83–88.

# 补充信息

**本文件包括：**

- 材料与方法
- S1–4节
- S1–3图

# 方法

### 样品制备

使用 Nitto SPV-224 胶带将块状六方氮化硼晶体（HQ Graphene）机械剥离到从聚二甲基硅氧烷片材（Gel-Pak WF-30）裁切而成的印章上。使用共聚焦显微镜（WITec α-300）检查印章，并通过白光反射测量法识别厚度合适的六方氮化硼薄片。将带有预制图案金背反射器的目标基底安装在一台配有温控载物台的定制压印显微镜中。将选定的六方氮化硼薄片与背反射器区域对准后，使印章与基底接触，并在 60 °C 下保持 5 min。随后以 0.1 微米/s 的速度撤回印章，使六方氮化硼薄片留在基底上。为增强附着力并减少表面污染，将样品置于真空管式炉（$P \approx 10^{-6}$–$10^{-7}$ mbar）中，在 150 °C 下退火 8 h。随后使用 $O_2$ 等离子体去胶处理清洁表面 30 s（Oxford Instruments Plasma 80）。旋涂一层厚度为 222 nm 的 CSAR AR-P 62 电子束抗蚀剂，并在 150 °C 下烘烤 120 s。使用 130.8 µC/cm$^2$ 的剂量，通过电子束光刻（Raith Voyager）制备光栅图案。使用正戊酸异戊酯显影 60 s，随后依次用邻二甲苯（7 s）和 MIBK:IPA 9:1（15 s）冲洗。最后用 IPA 冲洗样品，并在 $N_2$ 气氛下干燥。使用原子力显微镜（Bruker Dimension FastScan）测量并核验制成的光栅尺寸是否符合设计。

### 光学测量

反射测量使用衍射极限共聚焦显微镜（WITec α-300）进行。光源采用 NKT Photonics SuperK 可调谐激光系统，通过单模光子晶体光纤（Connect FD7-PM）耦合至显微镜。脉冲超连续谱光源（Extreme EXW-12；重复频率为 78 MHz，脉冲宽度为 $\sim$5 ps）提供线偏振照明，并通过声光可调滤波器（Select VIS/1X）进行光谱选择，从而在可见光范围内获得带宽为 $\sim$1 nm 的相干单色光。准直光束被导向物镜（Zeiss EC Epiplan，$20\times$，数值孔径 $= 0.4$）的入瞳（傅里叶平面），在样品平面形成衍射极限光斑。样品安装在显微镜压电台上，以实现精确的横向定位。

反射信号由同一物镜收集，并成像到一台 14 位 CMOS 相机（Zeiss Axiocam 705 mono）上。可将伯特兰透镜插入探测光路，在实空间成像与动量空间成像之间切换。针对不同波长，对入射功率和相机曝光时间进行校准并稍作调整，以最大限度提高信噪比；入射功率范围为 36–80 nW。对于位置相关的色散测量，我们使用自定义 Python 控制脚本自动执行波长扫描和压电位移台扫描。我们采集两组参考测量：一组在未安装样品时进行，以考虑内部反射；另一组在裸露的金区域进行，用于归一化。后者使用根据表列介电常数数据计算得到的薄膜金（Au）的理论角度和波长相关反射率 [1]。

### 数值模拟

使用 S$^4$ 严格耦合波分析 [2]模拟无限结构的场分布和反射率色散。本征模色散通过定制的平板波导模态求解器计算，其中光栅被视为有效介质。对于六方氮化硼和金，我们采用表列光学常数 [1, 3], ，而对于 CSAR，则从光谱椭偏测量（J.A. Woollam VB-400）中提取介电常数。时空耦合模方程通过解析方法推导，完整细节见补充章节 S1、S2 和S3。所有模拟均使用定制的 Python 脚本完成。

## S1 色散关系

考虑沿正 $x$ 方向传播、由模态参数 $a(x,\ t)$ 描述的准导模，其演化形式为

$$a(x,t) \propto e^{i\beta x - i\omega t} \tag{1}$$

相位常数为 $\beta$，频率为 $\omega$。在全文中，我们通过在参考点附近（S1）对复传播常数进行一阶展开，将色散近似为局部线性（图 $\beta_0$，$\omega_0$），即

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta + i\alpha \simeq \beta_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} + i\alpha, \qquad v_g \equiv \left.\frac{d\omega}{d\beta}\right|_{\beta_0}, \tag{2}$$

其中 $\alpha$ 为空间衰减率。等价地，在动量域图像中，我们可以写出复频率

$$\Omega(\beta) \equiv \omega - i\Gamma \simeq \omega_0 - i\Gamma + v_g(\beta - \beta_0), \tag{3}$$

其中 $\Gamma \equiv \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{int}} = v_g\alpha$ 为时间衰减率，由外部（辐射）衰减率 $\Gamma_{\text{ext}}$ 和本征非辐射损耗率 $\Gamma_{\text{int}}$组成；前者与导模通过光栅耦合至远场有关。一个密切相关的参数是模态传播长度，

$$L_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{v_g}{\Gamma}, \tag{4}$$

即，模式振幅衰减至 $1/e$ 所对应的距离。该参数尤为重要，因为它决定了不能忽略有限尺寸效应的特征长度尺度。

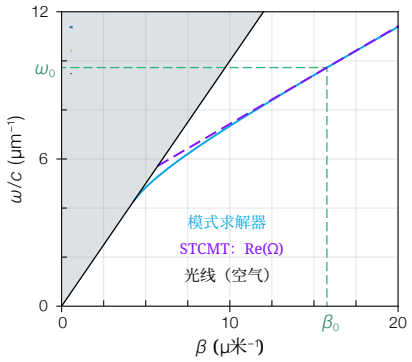



**图 S1：局部线性复色散关系**。采用平板波导模态求解器，将光栅视为有效介质，得到模拟的 $TE_0$ 本征模色散（蓝色）。图中叠加了近似的 STCMT 色散 Ω（紫色虚线），该色散在点 $\omega_0, \beta_0$（绿色虚线）附近进行线性化。作为参考，还显示了光锥（灰色阴影）和空气中的光线（黑色）。

为了在 STCMT 中对色散进行参数化，即式（3），我们将光栅建模为有效介质，并使用平板波导模态求解器数值求解导模色散。然而，由于本征模是在封闭系统中计算的，我们必须通过其他方式获得辐射率 $\Gamma_{\text{ext}}$。在此情况下，我们使用全波模拟对半无限超表面的受驱响应进行建模，并将其拟合为众所周知的耦合模理论表达式，该表达式描述了具有一个外部端口的单个模式（即式（46））[4–6]。通过分析，我们发现，取一个恒定的 $\Gamma_{\text{ext}} = 7.4 \times 10^{12}\ \text{s}^{-1}$ 值，便足以在此处考察的带宽范围内准确再现全波响应（图S2）。高频处观察到的偏差是由于金层中的光学损耗随频率增大，而我们的模型未考虑这一点（背景振幅恒定 $C = -1$）。

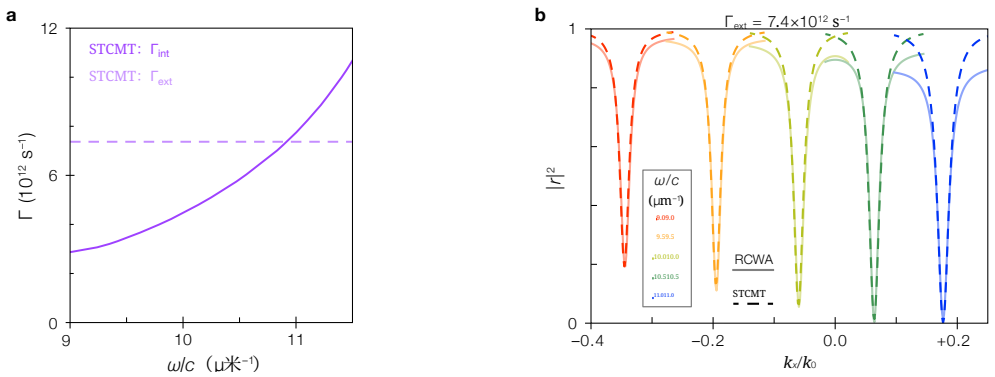



**图 S2：与全波仿真的比较。(a)** STCMT 中使用的损耗率：将本征模求解器得到的衰减率视为内部（非辐射）损耗率 $\Gamma_{\mathrm{int}}$（紫色实线），而外部（辐射）损耗率 $\Gamma_{\mathrm{ext}}$ 在相关频带内近似视为常数，并通过拟合全波仿真结果得到（粉色虚线；$\Gamma_{\mathrm{ext}} = 7.4 \times 10^{12}\mathrm{s}^{-1}$）。**(b)** 选定频率下由全波 RCWA 得到的动量分辨反射率 $|r(k_x)|^2$（实线），并叠加在长光栅极限下计算的相应 STCMT 预测结果（虚线）。颜色表示标注的频率 $\omega/c$。

# S2 时空耦合模方程

## 运动方程

单模式系统的时空动力学方程 $a(x,\ t)$ 可写为

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} + i\Omega a(x,t) = \int \kappa(x,x')\, s_+(x',t)\ \mathrm{d}x', \tag{5}$$

其中 $\kappa$ 是将外部驱动场 $s_+$ 耦合至内部模式的输入耦合参数。具体而言，在式（3）的局域线性色散条件下，该参数可写为

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} + i(\omega_0 - i\Gamma + v_g(\beta - \beta_0))\, a(x,t) = \int \kappa(x,x')\, s_+(x',t)\ \mathrm{d}x'. \tag{6}$$

取空间谐波 $\beta \to -i\partial_x$，可将其改写为正文中给出的形式：

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} + v_g \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} + i(\omega_0 - i\Gamma - v_g\beta_0)\, a(x,t) = \int \kappa(x,x')\, s_+(x',t)\ \mathrm{d}x'. \tag{7}$$

相反，取时间谐波 $\partial_t \to -i\omega$ 后，我们可以将稳态表达式写成纯空间微分方程：

$$v_g \frac{\partial a(x)}{\partial x} + i(\omega_0 - \omega - i\Gamma - v_g\beta_0)\, a(x) = \int \kappa(x,x')\, s_+(x')\ \mathrm{d}x'. \tag{8}$$

我们可以将左侧改写为

$$\left(-i(\omega - \omega_0) + v_g \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma - iv_g\beta_0\right) a(x) = v_g \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\tilde{\beta}\right) a(x). \tag{9}$$

引入空间算子 $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}a(x) = v_g \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\tilde{\beta}\right) a(x), \tag{10}$$

我们最终得到紧凑形式

$$\mathcal{L}a(x) = \int \kappa(x,x')\, s_+(x')\ \mathrm{d}x'. \tag{11}$$

## 模式振幅

为求解式（11），我们引入格林函数 $G$（$x$； $x'$），其定义为，

$$\mathcal{L}G(x;x') = \delta(x-x'). \tag{12}$$

对于 $x \neq x'$，格林函数满足

$$\mathcal{L}G(x;x') = 0, \tag{13}$$

这意味着，

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x;x') = i\left(\beta_0 + \frac{\omega-\omega_0}{v_g} + i\frac{\Gamma}{v_g}\right)G(x;x') = i\tilde{\beta}\,G(x;x'). \tag{14}$$

因此，远离源点处的解具有如下形式

$$G(x;x') = A\,e^{i\tilde{\beta}(x-x')}, \qquad \text{for } x \neq x'. \tag{15}$$

为确定前因子 以及因果结构，我们对12式（ $x$ $'$，

$$\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \mathcal{L}G\,\mathrm{d}x = v_g[G(x'+0;x') - G(x'-0;x')] = 1, \tag{16}$$

其中只有导数项会产生不连续性。限定为右向传播解可保证因果性， $G(x<x')=0$，使得 $G(x'-0;x')=0$。由此得到 $G(x'+0;\,x')=1/v_g$。因此，格林函数可写为

$$G(x;x') = \begin{cases} \dfrac{1}{v_g}\,e^{i\tilde{\beta}(x-x')} & \text{for } x > x', \\ 0 & \text{for } x < x'. \end{cases} \tag{17}$$

等价地，可以利用赫维赛德阶跃函数将其写成紧凑形式 $\Theta$，

$$G(x;x') = \frac{1}{v_g}\,e^{i\tilde{\beta}(x-x')}\,\Theta(x-x'). \tag{18}$$

模式振幅由格林函数与驱动项的卷积得到，

$$a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(x')\,G(x;x')\,s_+(x')\,\mathrm{d}x', \tag{19}$$

最后，代入方程（18），可得模式振幅：

$$a(x) = \frac{1}{v_g}\int_0^x e^{i\tilde{\beta}(x-x')}\,\kappa(x')\,s_+(x')\mathrm{d}x'. \tag{20}$$

## 输入-输出关系

散射场的一般形式写为

$$s_-(x,t) = \int \left(C(x,x')\,s_+(x',t) + d(x,x')\,a(x',t)\right)\mathrm{d}x', \tag{21}$$

其中， $C$ 表示非共振（背景）散射的贡献，而 $d(x,\ x')$是一个输出耦合参数，用于调节从内部模式到外部辐射的耦合。在本研究中，我们假设空间上

inva不变的背景散射以及瞬时的空间输入耦合与输出耦合，使得 at

$$C(x,x') = C\delta(x-x'), \tag{22}$$

$$\kappa(x,x') = \kappa(x)\delta(x-x'), \tag{23}$$

$$d(x,x') = d(x)\delta(x-x'). \tag{24}$$

在这些假设下，稳态时，输入—输出关系的形式为

$$s_-(x) = C\, s_+(x) + d(x)\, a(x). \tag{25}$$

共振贡献 由导模重新耦合至外部通道产生。我们写作 e

$$s_-^{(\mathrm{res})}(x) = d(x)\, a(x). \tag{26}$$

外部场与导模之间的耦合由周期为 $\Lambda$ 的亚波长光栅实现，该光栅提供光栅动量 $q = 2\pi/\Lambda$。此外，耦合仅限于宽度为$W$的有限光栅区域，我们用窗函数表示

$$w(x) = \Theta(x)\Theta(W-x), \tag{27}$$

因此，在 $x \in [0, W]$ 之外，输入耦合与输出耦合均为零。采用这一描述，我们将输入耦合建模为

$$\kappa(x) = \kappa_0\, w(x)\, e^{iqx}, \tag{28}$$

将输出耦合建模为

$$d(x) = d_0\, w(x)\, e^{-iqx}. \tag{29}$$

这些因子 $e^{\pm iqx}$ 确保满足光栅辅助动量匹配：外部场耦合到导模时会获得光栅动量，而再辐射到外部通道时则会出现相反的相位因子。整体耦合强度受能量守恒约束 [6, 7], ，因此 $\kappa_0 = d_0 = \sqrt{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}$，并且

$$\kappa(x) = d(x)^* = \sqrt{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}\, e^{iqx} w(x). \tag{30}$$

最后，将式（30）代入式（20），即可得到所考虑超表面的模式振幅的一般表达式：

$$a(x) = \frac{\sqrt{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}}{v_g} \int_0^x e^{i\tilde{\beta}(x-x')} e^{iqx'}\, w(x')\, s_+(x')\, \mathrm{d}x'. \tag{31}$$

# S3 点激励下的闭式反射

## 输入场

一般而言，入射场被建模为一个以位置 $x_0$ 为中心的衍射极限光斑，在动量空间中表示为

$$S_+(k_x) = S_0\, e^{-ik_x x_0}, \quad \text{for } |k_x/k_0| \le \mathrm{NA}, \tag{32}$$

其中，$|S_0|^2$ 表示单位 $k_x$的入射功率。此处，面内波矢为 $k_x = k_0 \sin\theta$，自由空间波矢为 $k_0 = \omega/c$，入射角为 $\theta$。数值孔径 $\mathrm{NA} = k_{x,\ \max}/k_0$ 决定了激发带宽。

在实空间中， 这种孔径限制的动量空间分布会产生 sinc 照明分布 ，

$$s_+(x') \propto \mathrm{sinc}\big(k_{x,\max}(x'-x_0)\big). \tag{33}$$

这类似于衍射极限光学系统：显微物镜的圆形入瞳受到均匀照明时，会产生艾里斑。关键在于，当 $k$ 空间中的共振宽度（由 $\alpha$ 决定）相对于数值孔径窗口（$\alpha/k_0 \ll$NA）足够窄时，入射场可近似为局域于 $x_0$ 的点激励，

$$s_+(x') \approx S_0\,\delta(x'-x_0), \quad \text{with } x_0 \in [0,W]. \tag{34}$$

这一近似使我们能够在本框架内推导出许多相关物理量的闭式表达式。在下一节中，我们将评估这一近似的准确性。我们将证明，对于正文中所研究的系统， $\delta$ 近似能够在辛克函数照明下很好地再现数值计算响应。

## 共振散射场

下面我们首先推导共振贡献的闭式表达式 $S_-^{(\mathrm{res})}(k_x)$。我们从模式振幅的形式解（式（31））出发。对于上文引入的点激励近似，该解可直接写为

$$a(x) = \frac{\sqrt{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}\,S_0}{v_g}\, e^{i\tilde{\beta}(x-x_0)} e^{iqx_0}\,\Theta(x-x_0), \tag{35}$$

假设散射仅限于光栅区域内 $w(x)$。将其代入式（26），得到

$$s_-^{(\mathrm{res})}(x) = \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}\,S_0}{v_g}\, e^{i(\tilde{\beta}-q)(x-x_0)}\Theta(x-x_0). \tag{36}$$

为计算 $k$空间中的共振散射贡献，我们从 $x_0$ 积分到右边缘 $W$，即在模态相互作用长度 $L=W-x_0$上积分，

$$S_-^{(\mathrm{res})}(k_x) = \int_{x_0}^{W} s_-^{(\mathrm{res})}(x)\, e^{-ik_x x}\,\mathrm{d}x. \tag{37}$$

代入 $u=x-x_0$ 并改写后得到

$$S_-^{(\mathrm{res})}(k_x) = \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}\,S_0}{v_g} e^{-ik_x x_0} \int_0^{L} e^{i\tilde{\beta}u}\, e^{-i(k_x+q)u}\,\mathrm{d}u. \tag{38}$$

将导模波矢与输入波的面内动量（对于 $m=+1$ 级次）之间的失谐定义为

$$\Delta_k = (k_{\mathrm{x}}+q)-\beta = k_x - k_{x,\mathrm{res}}, \tag{39}$$

其中，我们还定义了自由空间中的共振面内波矢$k_{x,\ \mathrm{res}} = \beta - q$。利用这一记号，可以写成

$$S_-^{(\mathrm{res})}(k_x) = \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}\,S_0}{v_g}\, e^{-ik_x x_0} \int_0^{L} e^{-(\alpha+i\Delta_k)u}\mathrm{d}u, \tag{40}$$

其计算结果为

$$S_-^{(\mathrm{res})}(k_x) = \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}\,S_0}{v_g}\, e^{-ik_x x_0}\, \frac{1-e^{-(\alpha+i\Delta_k)L}}{\alpha+i\Delta_k}. \tag{41}$$

## 反射系数

$k$空间中的输入-输出关系写为

$$S_-(k_x) = CS_+(k_x) + S_-^{(\mathrm{res})}(k_x), \tag{42}$$

并且反射系数定义为

$$r(k_x) \equiv \frac{S_-(k_x)}{S_+(k_x)}. \tag{43}$$

对于此处考虑的超表面，离共振响应呈镜面特性，因此 $C \approx -1$ 在所关注的带宽内成立。随后，将式（32）和（41）代入式（43），即可直接得到反射系数：

$$r(k_x) = -1 + \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}{v_g\,(\alpha + i\Delta_k)} \left(1 - e^{-(\alpha + i\Delta_k)L}\right). \tag{44}$$

在线性色散条件下， $\Delta_\omega = v_g \Delta_k$，因此我们可以等效地将超短脉冲的反射系数表示在频率空间中，形式如下

$$r(\omega) = -1 + \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}{\Gamma + i\Delta_\omega} \left(1 - e^{-(\Gamma + i\Delta_\omega)L/v_g}\right). \tag{45}$$

在这两种表示中，响应都包含熟悉的、对失谐呈洛伦兹依赖的项，以及一个表征有限相互作用长度 $L$ 影响的指数项。该长度尺度应与准导模的传播长度 $L_p$ 进行比较。当 $L \lesssim L_p$ 时，有限孔径会产生振荡的光谱特征，并使共振有效展宽。另一方面，在长光栅极限 $L \gg L_p$ 下，有限尺寸因子趋于 1，反射系数则简化为众所周知的单端口时域耦合模理论表达式[4]，

$$r_\infty(\omega) = -1 + \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}{\Gamma + i\Delta_\omega}, \tag{46}$$

等效地，在 $k$ 空间中，

$$r_\infty(k_x) = -1 + \frac{2\Gamma_{\mathrm{ext}}}{v_g(\alpha + i\Delta_k)}. \tag{47}$$

## 点激励近似的有效性

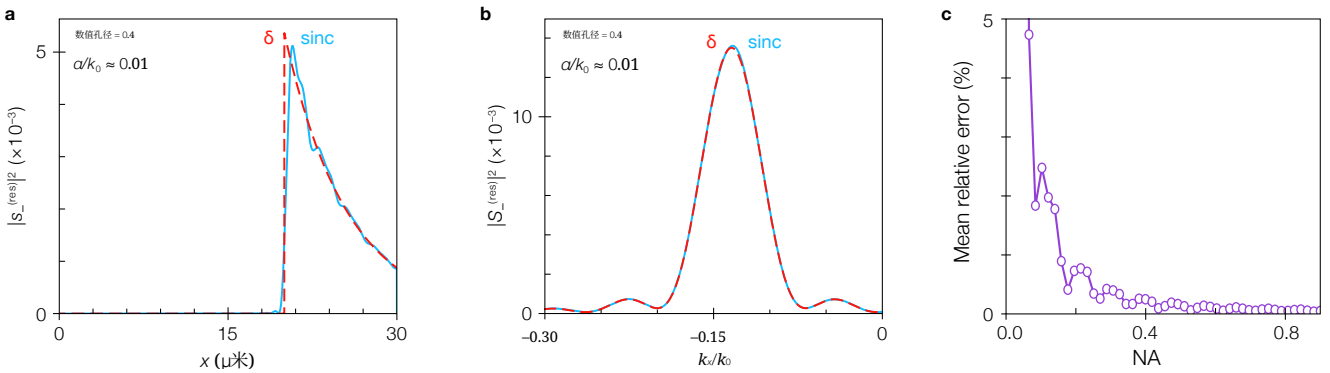



**图 S3：评估 $\delta$ 函数输入近似。** 比较数值孔径为 NA 的辛克函数激励（蓝色实线）与无限数值孔径下 $\delta$ 函数激励的闭式表达式（红色虚线）。**(a)** 实空间中的共振散射场，以及**(b)** 在动量空间中的共振散射场，分别在 $k_0 = 9.7$ 微米$^{-1}$ 和 $L = 10$ 微米处计算，其中 $\alpha/k_0 \approx 0.01$ **(c)** 使用辛克函数激励与 $\delta$ 函数激励计算得到的 $R(k_x)$ 的平均相对误差随数值孔径 NA 的变化；结果显示，当 NA $\to \alpha/k_0$ 时，误差发散。

为说明对于所研究的系统，在数值孔径为 $= 0.4$ 时， $\delta$-近似能够在sinc照明下高度准确地复现数值计算响应，我们比较了采用和未采用 $\delta$-近似时的三个关键参数。图 S3a、b 分别展示了在 $k_0 = 9.7$ 微米$^{-1}$处的实空间和动量空间共振散射场，其中相互作用长度为 $L = 10$ 微米，模态传播长度为 $L_p = 10.6$ 微米，对应于 $\alpha/k_0 \approx 0.01$ ，因此满足 $\alpha/k_0 \ll$ 数值孔径。实空间衰减的差异最大，其明显的振荡特征源于sinc条纹；而动量空间散射场几乎完全吻合。我们进一步研究了有限数值孔径sinc激励与无限数值孔径 $\delta$-函数激励下计算得到的反射率（$|r(k_x)|^2$）之间的平均相对误差（图 S3c）。值得注意的是，该误差呈现类似sinc的形状：当数值孔径比 $\alpha/k_0$大 $\sim 16\times$ 时，误差低于 1%；而当数值孔径 $\to \alpha/k_0$时，误差则急剧增大。综合来看，这些结果证实了对于所研究的系统， $\delta$-近似是有效的。

# S4 有限尺寸效应

## 共振抗反射

消失的反射率（$R = |r|^2 = 0$）对应于输出通道中的相消干涉条件，而该条件会因有限尺寸而改变。在共振（$\Delta_k = 0$）处，有限相互作用长度 $L$ 会在共振散射振幅中引入因子$1 - e^{-\alpha L}$，而众所周知的临界耦合判据 $\Gamma_{\text{ext}} = \Gamma_{\text{int}}$ 不再对应于 $R = 0$。相反，抗反射条件变为

$$\frac{\Gamma_{\text{ext}}}{\Gamma} = \frac{1}{2\left(1 - e^{-\alpha L}\right)}, \tag{48}$$

这通常比无限长度情形需要更强的外部耦合（即更大的过耦合）。对式（48）求解 $L$ 可得

$$L = -\frac{v_g}{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_{\text{ext}}}\right). \tag{49}$$

给定 $\Gamma \geq 0$，式（49）存在实的正数解的必要条件是 $\Gamma_{\text{ext}} > \Gamma/2$ （等价于 $\Gamma_{\text{ext}} > \Gamma_{\text{int}}$），否则任何有限的 $L$ 都无法产生 $R = 0$。应当指出，与无限长度极限相反，产生完美抗反射的参数组合不必与使储存能量 $U$ 在谐振器中达到最大的参数组合一致。

## 储存能量

接下来，我们推导储存能量的闭式表达式

$$U \equiv \int |a(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{50}$$

对于 $x \in [0, W]$。根据 $a(x)$（式（35））， 我们有

$$|a(x)|^2 = 2\Gamma_{\text{ext}} \left(\frac{S_0}{v_g}\right)^2 e^{-2\alpha(x - x_0)} \, \Theta(x - x_0). \tag{51}$$

由于激励点位于光栅内部（$x_0 \in [0, W]$），积分区间缩减为 $x \in [x_0, W]$:

$$U = 2\Gamma_{\text{ext}} \left(\frac{S_0}{v_g}\right)^2 \int_{x_0}^{W} e^{-2\alpha(x - x_0)} \, \mathrm{d}x. \tag{52}$$

代入 $u = x - x_0$ 并定义 $L = W - x_0$，得到

$$U = 2\Gamma_{\text{ext}} \left(\frac{S_0}{v_g}\right)^2 \int_0^L e^{-2\alpha u}\, \mathrm{d}u = 2\Gamma_{\text{ext}} \left(\frac{S_0}{v_g}\right)^2 \frac{1 - e^{-2\alpha L}}{2\alpha}. \tag{53}$$

因此，储存能量为

$$U = \frac{S_0^2}{v_g} \frac{\Gamma_{\text{ext}}}{\Gamma} \left(1 - e^{-2\alpha L}\right). \tag{54}$$

在长光栅极限 $L \gg L_p$下，储存能量趋于饱和，达到

$$U \to \frac{S_0^2}{v_g} \frac{\Gamma_{\text{ext}}}{\Gamma}. \tag{55}$$

## 边缘损耗

有限的光栅长度引入了一个额外的损耗通道，这与准导引波在光栅边缘的泄漏有关。我们假设导模仅沿正 $x$方向传播，且任何到达右侧边缘 $x = W$ 的功率都会不可逆地损失，不会反射回导模中。

位置 $x$ 处的导引功率流正比于

$$P(x) \propto v_g \left|a(x)\right|^2. \tag{56}$$

使用上文推导出的模式振幅表达式（式（51））， 因此，到达右侧边缘的功率为

$$P_{\text{edge}} \propto v_g \left|a(W)\right|^2 = 2\Gamma_{\text{ext}} \frac{S_0^2}{v_g} e^{-2\alpha L}, \tag{57}$$

其中 $L = W - x_0$ 是激励点到右侧边缘的距离。

将这种边缘损耗表示为有效衰减率 $\Gamma_{\text{edge}}$ 会很方便，该衰减率通过标准耦合模关系定义：

$$P_{\text{edge}} = 2\Gamma_{\text{edge}} U, \tag{58}$$

其中 $U$ 为上一节（式（54））中得到的储存能量。代入$P_{\text{edge}}$ 和 $U$ 的闭式表达式可得

$$\Gamma_{\text{edge}} = \Gamma \frac{e^{-2\alpha L}}{1 - e^{-2\alpha L}} = \frac{\Gamma}{e^{2\alpha L} - 1}. \tag{59}$$

该表达式凸显了边缘损耗随光栅长度增加而呈指数衰减。在长光栅极限（$L \gg L_p$）下，边缘损耗的贡献可以忽略；而在短光栅极限（$L \ll L_p$）下，边缘损耗主要由到达边界所需的渡越时间决定。在这一图景中，边缘损耗构成一种额外的几何诱导衰减通道，与内禀损耗和辐射损耗不同。

## 品质因数

虽然有限光栅长度会导致 $k$ 空间反射率谱出现类 sinc 展宽，但这种效应源于几何因素，并不对应内禀能量衰减过程。因此，有物理意义的品质因数必须根据导模的能量寿命来定义，而非根据 $|r(k_x)|^2$ 的表观谱宽来定义。

角频率为 $\omega_0$ 的共振品质因数定义为

$$Q \equiv \omega_0 \frac{U}{P_{\text{loss}}} = \frac{\omega_0}{2\Gamma_{\text{tot}}}, \tag{60}$$

其中 $U$ 是存储 d 能量， $P_{\text{loss}}$ 是能量耗散率， $\Gamma_{\text{tot}}$ 是总能量衰减率。

对于无限长的光栅，总衰减率可简单表示为 $\Gamma = \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{int}}$。然而，对于长度为 $L$ 的有限光栅，我们必须计入额外的边缘损耗通道。如上所示，这种由边缘引起的损耗可表示为有效衰减率（式（59））， 因此总衰减率为

$$\Gamma_{\text{tot}}(L) = \Gamma + \Gamma_{\text{edge}}(L) = \frac{\Gamma}{1 - e^{-2\alpha L}}. \tag{61}$$

因此，相应的品质因数可由以下闭式表达式给出

$$Q(L) = \frac{\omega_0}{2\Gamma_{\text{tot}}(L)} = \frac{\omega_0}{2\Gamma}\left(1 - e^{-2L/L_p}\right). \tag{62}$$

该定义得到的基于寿命的品质因数不受有限散射孔径导致的表观线宽展宽影响。

在长光栅极限（$L \gg L_p$）下，边缘贡献消失，品质因数趋近于其本征值

$$Q \to \frac{\omega_0}{2\Gamma}. \tag{63}$$

在相反的尺寸受限光栅极限（$L \ll L_p$）下，可对指数项进行泰勒展开，得到

$$Q(L) \simeq \frac{\omega_0}{2\Gamma}\, 2\frac{\Gamma}{v_g} L = \frac{\omega_0 L}{v_g} = \frac{\omega_0}{\Gamma}\frac{L}{L_p}. \tag{64}$$

值得注意的是，在这一机制下，品质因数主要由模式到达边缘的渡越时间决定，即 $t = L/v_g$。这意味着，对于占地面积受到严格限制的器件，要实现高-$Q$ ，就必须通过降低群速度（慢光）来增加固定占用面积内的相互作用时间。

### 干涉条纹

除了决定共振线形外，有限的光栅长度还会在$k$空间的反射率中产生振荡条纹。具体而言，导模能够耦合出射至远场的区域由有效长度 $L = W - x_0$ 界定，由此产生的条纹源于沿光栅不同位置发射的贡献之间的相干干涉。这相当于用矩形窗对实空间中的场进行调制，其傅里叶变换会在 $k$空间产生类 sinc 调制。因此，反射强度会呈现具有特征条纹间距的干涉图样

$$\Delta k_{\text{fringe}} = \frac{2\pi}{L}. \tag{65}$$

由于这种有限孔径干涉会重新分配 $k$空间中的谱权重，反射率局部可能超过 1，但这并不意味着存在光学增益；散射功率仍受输入功率减去耗散功率的限制。

## 参考文献

(1) Yakubovsky, D. I.; Arsenin, A. V.; Stebunov, Y. V.; Fedyanin,D. Y.; Volkov, V. S. 《光学快报》**2017**, *25*, 25574. (2) Liu, V.; Fan, S. 《计算物理通讯》**2012**, *183*, 2233–2244. (3) Lee, S. Y.; Jeong, T. Y.; Jung, S.; Yee, K. J. 《固体物理学报 *B* 辑》**2019**, *256*, 1800417.

(4) Haus, H. A., 光电子学中的波与场; Prentice-Hall 固态物理电子学丛书; Prentice-Hall:恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1984年. (5) Haus, H.; Huang, W. *IEEE*会刊**1991年**,*79*, 1505–1518. (6) Fan, S.; Suh, W.; Joannopoulos, J. D. 《美国光学学会杂志*A*辑》**2003年**, *20*, 569. (7) Overvig, A.; Mann, S. A.; Alù, A. 《光：科学与应用》**2024年**, *13*, 28.