arXiv:2603.03558v1 [quant-ph] 3 Mar 2026

费米系统的星指数与费曼-卡茨公式

J.Berra-Montiel[a], [1], H. Garc´ıa-Compe´an[b], [2], A. Kafuri[b], [3], A. Molgado[a], [4]

[a]圣路易斯波托西自治大学科学学院

Pedregal 校区，查普尔特佩克公园大道*1610*号，*Pedregal* 私人住宅区，圣路易斯波托西´ı，圣路易斯波托西州，*78217*，墨西哥

[b]*IPN* 高级研究中心物理系，研究与高级研究中心，邮政信箱 *14-740*，邮编 *07000*，墨西哥城，墨西哥

摘要

受玻色系统中星指数与量子传播子之间关系形式体系的启发，本文针对费米子情形提出了相应的扩展。具体而言，我们在变形量子化框架内，研究如何计算费米系统的星指数（即演化算符的符号）。为得到费米子星指数关于其对应传播子的闭式表达式，我们引入格拉斯曼变量和相干态。作为一项主要应用，我们在这一形式体系中推导了费曼-卡茨公式的费米子版本，从而可以直接在相空间中计算基态能量。最后，我们将此方法成功应用于简谐费米振子和受驱费米振子，验证了其有效性；本文所得结果为研究费米子系统提供了一种强有力的替代计算工具。

[1]电子邮箱地址：jasel.berra@uaslp.mx[2]电子邮箱地址：hugo.compean@cinvestav.mx[3]电子邮箱地址：anuar.kafuri@cinvestav.mx[4]电子邮箱地址：alberto.molgado@uaslp.mx

1 引言

变形量子化（形变量子化，DQ）是一种在同一动力学空间（即相空间）中分析经典与量子形式体系的方法 [1, 2]。受相空间量子力学（PSQM）发展的启发，该方法通过将可观测量代数扩展为一种更一般的结构，使其渐近地与经典相空间量相联系。其最重要的要素之一是星乘积的存在，它通过引入一种非交换且满足结合律的代数结构，将经典力学中的标准逐点乘积推广为能够恰当地描述量子力学内在框架的形式。数十年来，人们唯一已知的例子是平坦辛流形上的 Moyal星乘积 [1, 2]。文献 [3–6]证明了一般辛流形上星乘积的存在。后来，文献 [7]发现了泊松流形上的一种新星乘积。

形变量子化是一种用途广泛的量子化方法，不一定需要希尔伯特空间的正则结构，却能以自主的方式给出量子力学算符的正确谱（综述参见 [8–10]）。事实上，它无需在适当的希尔伯特空间中使用传统的算符方法，就能得到自由系统和相互作用系统的谱。然而，每当我们考察时间演化时，形变量子化都会面临若干技术问题；在量子力学和量子场论中，时间演化通常通过费曼传播子来描述路径积分 [11–14]。在形变量子化形式体系中，演化由星指数函数（与演化算符相关联的符号）实现。然而，由于收敛性问题，这个函数至今仍未得到充分理解。事实上，一般星指数的收敛性问题仍是一个悬而未决的数学问题。只有极少数情况下，星指数才得到了解析求解 [1, 2, 15], ，例如谐振子和阻尼谐振子。星指数还出现在其他一些情境中，例如文献 [16–22] 所述。

在文献 [23] 中，研究并确立了玻色系统中星指数与路径积分之间的联系。文中提出了一种无需依赖星指数函数显式形式级数计算的方法：通过一个闭式积分关系，将星指数与其量子传播子等同起来。这是一种直接且实用的应用，它利用先验已知的物理量（量子传播子）计算其对应符号，从而缓解了收敛性问题。它有多种潜在应用，其中最重要的应用之一是其与费曼-卡茨公式的联系 [24]。然而，原有形式体系仅适用于玻色情形，因此其应用范围局限于非常特定的一类系统。根据自旋统计定理，费米子的存在及其物理相关性得到了保证，至少在 $3+1$ 维相对论量子场论中如此。多年来，费米子系统的经典动力学与量子化已得到发展 [25–29]。此外，文献 [30–35] 也对这些系统的形变量子化进行了探讨。

在本文中，我们探讨了 [23], 中所研究的星指数与费曼传播子之间的上述关系，以及一个直接应用，该应用给出了用于确定费米子系统基态能量的费曼-卡茨公式。由此，我们得到一个定义良好的星指数以及

互补的费曼-卡茨公式，与所讨论的玻色系统完全类似，见 [24]。

本文结构如下：第2节介绍与费米子量子力学中 Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal 形式相关的一些预备知识 [32]。第3节致力于探讨费米子量子力学中星指数与费曼传播子之间的关系。此外，还给出了一些基本的费米子示例，可据此显式构造星指数函数。第4节讨论费米子系统的费曼-卡茨公式及一些示例。第5节给出一些总结性评述和结论。最后，本文附有一个附录，介绍第4.2节所研究的受驱费米振子的基态能量的计算。

2 相空间费米子量子力学简述

本节将简要概述后续各节中要用到的工具。我们的目的并非详细介绍费米子系统的变形量子化，而只是说明本文通篇采用的符号和约定。更准确、详尽的介绍可参见 [32] 及其中的参考文献；本文主要遵循其中的符号和约定。

首先我们引入费米变量的相空间，将其定义为 Γ_F^{2n}:={(ψ,π)}，其中 ψ =($\psi_1,\ldots,\psi_n$)， π =($\pi_1,\ldots,\pi_n$)，且 ψ_j与 π_k是 Γ_F^{2n}和 $i,j,k,$等上的复格拉斯曼坐标 $\in\{1,\ldots,n\}$。正则动量π_j 可以用 ψ 写成 $\pi_j=\mathrm{i}\psi_j^*,$ 的形式，其中 ψ^* 表示 ψ的复共轭。正则量子化规则确立

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{\psi}_j,\widehat{\pi}_k]_+=\mathrm{i}\hbar\delta_{jk},\\
&[\widehat{\psi}_j,\widehat{\psi}_k]_+=0=[\widehat{\pi}_j,\widehat{\pi}_k]_+,\\
&[\widehat{\psi}_j,\widehat{\psi}_k^*]_+=\hbar\delta_{jk},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $[\cdot,\cdot]_+$ 为反对易子运算。

这些算符是作用于希尔伯特空间 $L^2\ \mathbb{R}^n\ \otimes\mathbb{C}^2$ $\mathcal{H}$ = $\widehat{b}_j$ =( ) 上的有界线性算符。适当的产生与湮灭算符可构造为：$\widehat{\psi}_j/\sqrt{\hbar}$，以及 $\widehat{b}_j^*:=\widehat{\psi}_j^*/\sqrt{\hbar}$。因此，真空态可表示为右矢 $|0\rangle$ 或左矢 $\langle 0|$ ，分别借助 $b_j|0\rangle=0$、 $\langle 0|b_j^*=0$ 得到 ^ ^，对所有 j 均成立；这些态满足归一化条件 $\langle 0|0\rangle=1$。所有态的基可由真空态 $|0\rangle$ 的激发态构造^ ^ ^而得，表示为 $|j,k,l,\ldots\rangle:=b_j^*b_k^*b_l^*\cdots|0\rangle$. 满足泡利不相容原理的态矢量 $|j,k,l,\ldots\rangle$ 应属于福克空间，其定义为 $\mathcal{F}(\mathcal{H})=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{A}(\mathcal{H}^{\otimes k})$，其中 $\mathcal{A}$ 是作用于 $\mathcal{H}$ 的张量积上的反对称化算子。此外，态 $|j,k,l,\ldots\rangle$ 满足关系式⌢ ^ ⌢$b_l|j,k,\ldots\rangle=0$, $b_l^*|j,k,\ldots\rangle=|l,j,k,\ldots\rangle$，以及 $b_l|l,j,k,\ldots\rangle=|j,k,\ldots\rangle$, $b_l^*|l,j,k,\ldots\rangle=$

$\widehat{\widehat{\widehat{0}}}$，其中 $l \notin \{j,k,\ldots\}$。对于对偶基，有 $\langle j,\ k,\ l,\ \ldots| := \langle 0|\cdots b_l b_k b_j$. 两种态 $|j,\ k,\ l,\ \ldots\rangle$ 和 $\langle j,\ k,\ l,\ \ldots|$ 均可用于构成内积并验证

$$\langle j_1,k_1,l_1,\ldots|j_2,k_2,l_2,\ldots\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } \{j_1,k_1,l_1,\ldots\} \neq \{j_2,k_2,l_2,\ldots\} \\ 1 & \text{if } j_1=j_2, k_1=k_2, l_1=l_2,\ldots \end{cases}. \tag{2}$$

现在，我们寻找满足以下（本征值）条件的态 $|\psi_1,\ldots,\psi_n\rangle \equiv |\psi\rangle$

$$\widehat{\psi}_j|\psi\rangle = \psi_j|\psi\rangle, \qquad \widehat{\psi}_j|0\rangle = 0, \tag{3}$$

对所有 j均成立。因此可以看出，$|\psi\rangle$ 具有以下形式

$$|\psi\rangle = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\widehat{\pi}_j\psi_j\right\}|0\rangle. \tag{4}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$于是，本征值方程成立 $\psi_j|\psi\rangle = \psi_j|\psi\rangle$, 且 $\psi_j|0\rangle = 0$, 对所有 j均成立。结合前述结果，不难得到关键的平移公式

$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\widehat{\pi}_j\xi_j\right\}|\psi\rangle = |\psi+\xi\rangle. \tag{5}$$

为了定义内积 $\langle\psi'|\psi\rangle$，我们来求相应的左矢，即右矢的对偶$\widehat{\ }$矢量。我们寻求对所有 j均成立的形式为 $\langle\psi|\psi_j = \langle\psi|\psi_j$ 的解。经过一番繁琐但直接的推导，可以得出左矢态为[5] [32]

$$\begin{aligned}\langle\psi| &:= \langle 0|\widehat{\psi}_1\cdots\widehat{\psi}_n\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\psi_j\widehat{\pi}_j\right\} \\ &= \langle 0|\left(\prod_{j=1}^{n}\widehat{\psi}_j\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\widehat{\pi}_j\psi_j\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

通过直接计算可知，$\langle\psi| \neq (|\psi\rangle)^*$。我们还可以看到，右矢 $|\psi\rangle$ 与所有 Grassmann数 η对易，即 $\eta|\psi\rangle = |\psi\rangle\eta$。但是，对于为 $\langle\psi|$ 定义的左矢，我们得到

$$\eta\langle\psi| = (-1)^{e_\eta\cdot n}\langle\psi|\eta, \tag{7}$$

其中，e_η 是数 η的 Grassmann奇偶性。其定义为：奇 Grassmann数取 $e_\eta = 1$，偶 Grassmann数取 $e_\eta = 0$。内积$\langle\psi'|\psi\rangle$ 满足

$$\langle\psi'|\psi\rangle = \langle 0|\widehat{\psi}_1\cdots\widehat{\psi}_n\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\widehat{\pi}_j\left(\psi'_j-\psi_j\right)\right\}|0\rangle$$

[5]乘积中各个 $\widehat{\psi}_j$的排列顺序可以任意选择，因此为简便起见，我们将其固定为 $\widehat{\psi}_1\cdots\widehat{\psi}_n$。

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\psi_j - \psi'_j \right) =: \delta(\psi - \psi'). \tag{8}$$

对于 π 基，可以得到以下类似结果[6]。将 ψ 和 π 的右矢与左矢混合，可得

$$\langle \pi | \psi \rangle = \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} \pi_j \psi_j \right\}, \qquad \langle \psi | \pi \rangle = (\mathrm{i}^n \hbar)^n \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} \pi_j \psi_j \right\}. \tag{9}$$

从现在起，我们将遵循 Weinberg 著作中的积分约定[12]：$\int \psi_j d\psi_j = -\int d\psi_j \psi_j = 1$，$\int \pi_j d\pi_j = -\int d\pi_j \pi_j = 1$，对所有 j，由此得到完备性条件

$$\int |\psi\rangle \mathcal{D}\psi \langle \psi| = 1, \tag{10}$$

其中 $\mathcal{D}\psi = d\psi_n \cdots d\psi_1$。类似地，也可以为 10 式找到类似的形式，适用于 $|\pi\rangle$基。

2.1 Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal 对应

我们先考虑相空间 Γ_F^{2n} 中任意光滑函数 f 的 Weyl 映射，设 $f = f(\pi, \psi) \in C^\infty(\Gamma_F^{2n})$ 是任意经典可观测量：

$$Q_W(f) = \int \widetilde{f}(\lambda, \mu) \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} (\widehat{\pi}_j \lambda_j + \widehat{\psi}_j \mu_j) \right\} \prod d\lambda d\mu, \tag{11}$$

其中 Q_W 是一个同构映射（称为 Weyl 变换）$Q_W : C^\infty(\Gamma_F^{2n}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是量子力学可观测量的集合，它们是作用于适当希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子。此外，$\prod d\lambda d\mu := d\lambda_1 d\mu_1 \cdots d\lambda_n d\mu_n$，$\widetilde{\ }$而 $f(\lambda, \mu)$ 表示函数 f 的傅里叶变换：

$$\widetilde{f}(\lambda, \mu) := \int f(\pi, \psi) \exp\left\{ -\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} (\pi_j \lambda_j + \psi_j \mu_j) \right\} \prod d\pi d\psi, \tag{12}$$

以及 $\prod d\pi d\psi := d\pi_1 d\psi_1 \cdots d\pi_n d\psi_n$。利用该变换的显式展开，并将 f 视为Γ_F^{2n}上的光滑函数，我们得到

$$Q_W(f) = \int f(\pi, \psi) \widehat{\Omega}(\pi, \psi) \prod d\pi d\psi, \tag{13}$$

[6]对于动量基的情形，状态 $|\pi\rangle$ 的定义为 $|\pi\rangle = \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} \widehat{\psi}_j \pi_j \right\} \prod_{j=1}^{n} \widehat{\pi}_j |0\rangle$，而对偶矢量写作：$\langle \pi | = \langle 0 | \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} \pi_j \widehat{\psi}_j \right\} = \langle 0 | \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{j=1}^{n} \widehat{\psi}_j \pi_j \right\}$. 显然，$\langle \pi | \neq (|\pi\rangle)^*$。内积 $\langle \pi' | \pi \rangle$ 给出：$\langle \pi' | \pi \rangle = \prod_{j=1}^{n} (\pi'_j - \pi_j) = \delta(\pi' - \pi)$。

其中，算符 $\widehat{\Omega}(\pi,\ \psi)$ 对应于斯特拉托诺维奇–外尔算符/量子化算符，其定义为

$$\widehat{\Omega}(\pi,\psi)=\int\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}[(\widehat{\pi}_j-\pi_j)\lambda_j+(\widehat{\psi}_j-\psi_j)\mu_j]\right\}\prod d\lambda d\mu. \tag{14}$$

利用平移公式（5）和归一化方程（10），经过一些计算，我们得到以下等价表达式

$$\widehat{\Omega}(\pi,\psi)=\mathrm{i}^n\int\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\pi_j\lambda_j\right\}\left|\psi-\frac{\hbar\lambda}{2}\right\rangle\left\langle\psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\right|D\lambda. \tag{15}$$

在 π–基底中，它的形式为

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}(\pi,\psi)&=(-1)^n\int\widehat{\Omega}(\pi,\psi)|\pi'\rangle\langle\pi'|\mathcal{D}\pi'\\&=(-i)^n\int\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\psi_j\mu_j\right\}\left|\pi-\frac{\hbar\mu}{2}\right\rangle\left\langle\pi+\frac{\hbar\mu}{2}\right|\mathcal{D}\mu.\end{aligned} \tag{16}$$

对任意算符 $\mathcal{O}$，定义其迹如下

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\widehat{\mathcal{O}}\}&=(\mathrm{i}\hbar)^{-n}\int\langle\psi|\widehat{\mathcal{O}}|\psi\rangle\mathcal{D}\psi=(\mathrm{i}\hbar)^{-n}\int\langle\pi|\widehat{\mathcal{O}}|\pi\rangle\mathcal{D}\pi\,,\\\mathrm{tr}\{\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}'\}&=(-1)^{\widehat{e}_{\mathcal{O}}\widehat{e}_{\mathcal{O}'}}\,\mathrm{tr}\{\widehat{\mathcal{O}}'\widehat{\mathcal{O}}\}\,,\end{aligned} \tag{17}$$

其中，$\widehat{e}_{\mathcal{O}}$ 和 $\widehat{e}_{\mathcal{O}'}$ 分别是 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$的格拉斯曼奇偶性。根据前面对迹的定义，斯特拉托诺维奇–韦尔算符的迹定义良好，并满足以下性质：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\widehat{\Omega}(\pi',\psi')\widehat{\Omega}(\pi'',\psi'')\}&=(\psi_1'-\psi_1'')(\pi_1'-\pi_1'')\cdots(\psi_n'-\psi_n'')(\pi_n'-\pi_n'')\\&=\delta(\psi'-\psi'',\pi'-\pi'')\,,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\mathrm{tr}\{\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\}=1\,. \tag{19}$$

现在考虑 Weyl逆量子化映射

$$Q_W^{-1}(\widehat{f})=\mathrm{tr}\{\widehat{f}\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\}\,. \tag{20}$$

该关系定义了一个符号 f，它源自其量子化 $\widehat{f}$。为简便起见，我们将分析限制在可积函数的情形。利用（10）和（17），可得到以下关系

$$\begin{aligned}f(\pi,\psi)&=\mathrm{tr}\{\widehat{f}\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\}\\&=\mathrm{tr}\{\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\widehat{f}\}.\end{aligned} \tag{21}$$

利用 Weyl量子化映射及其逆映射，我们可以计算出对应于作用在希尔伯特空间上的密度算符的维格纳函数

$$\rho_W(\pi,\psi)=\mathrm{tr}\{\widehat{\rho}\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\}=(\mathrm{i}\hbar)^{-n}\int\langle\psi'|\widehat{\rho}\widehat{\Omega}(\pi,\psi)|\psi'\rangle\mathcal{D}\psi'$$

$$=\hbar^{-n}\int\exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\pi_j\lambda_j\right\}\left\langle\psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\middle|\widehat{\rho}\middle|\psi-\frac{\hbar\lambda}{2}\right\rangle\mathcal{D}\lambda. \tag{22}$$

维格纳函数是一种准概率分布，可通过在 Grassmann相空间上对算符的相应符号积分来确定其期望值

$$\langle\widehat{\mathcal{O}}\rangle=\int\rho(\pi,\psi)\mathcal{O}(\pi,\psi)\prod d\pi d\psi, \tag{23}$$

其中 $\mathcal{O}=Q_W^{-1}(\widehat{\mathcal{O}})$ 是利用 Weyl逆量子化映射得到的。现在我们来概述费米子情形下的星乘积。

2.2 星乘积

利用 Weyl 映射的双射性以及希尔伯特–施密特算符空间的闭合性，我们发现存在唯一的函数 $f\star g$，定义在 Γ_F^{2n} 上，使得

$$Q_W(f)Q_W(g)=Q_W(f\star g). \tag{24}$$

这个函数称为*Moyal*星乘积，其显式形式为

$$\begin{aligned}(f\star g)(\pi,\psi)&=Q_W^{-1}(Q_W(f)Q_W(g))\\&=\mathrm{tr}\left\{\widehat{f}\widehat{g}\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\right\}.\end{aligned} \tag{25}$$

以下恒等式的推导细节见 [32]。三个 Stratonovich–Weyl算符乘积的迹可写为

$$\mathrm{tr}\{\widehat{\Omega}(\pi',\psi')\widehat{\Omega}(\pi'',\psi'')\widehat{\Omega}(\pi,\psi)\}=\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\right)^{2n}\exp\left\{-\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}(\pi'(\psi''-\psi)+\pi''(\psi-\psi')+\pi(\psi'-\psi''))\right\}. \tag{26}$$

将这一恒等式与迹中的（13）结合，我们得到

$$\begin{aligned}(f\star g)(\pi,\psi)=\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\right)^{2n}&\int f(\pi',\psi')g(\pi'',\psi'')\\&\times\exp\left\{-\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}[\pi'(\psi''-\psi)+\pi''(\psi-\psi')+\pi(\psi'-\psi'')]\right\}\mathcal{D}\pi'\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\pi''\mathcal{D}\psi''.\end{aligned} \tag{27}$$

引入以下变量： $\Psi'' = \psi' - \psi$, $\Pi'' = \pi' - \pi$, $\Psi''' = \psi'' - \psi$,$\Pi''' = \pi'' - \pi$，Moyal乘积的前一种形式变为

$$(f \star g)(\pi,\psi) = \left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\right)^{2n} \int f(\Pi' + \pi, \Psi'' + \psi) g(\Pi'' + \pi, \Psi'' + \psi) \times \exp\left\{-\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}[\Pi''\Psi'' - \Pi''\Psi']\right\} \mathcal{D}\Pi'\mathcal{D}\Psi''\mathcal{D}\Pi''\mathcal{D}\Psi'', \tag{28}$$

它表示星乘积的积分表示。

随后将函数 f 和 g 展开为泰勒级数 [32] 即可得到 Moyal 乘积的闭式表达

$$(f \star g)(\pi,\psi) = f(\pi,\psi) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_F\right\} g(\pi,\psi)\,, \tag{29}$$

其中， $\mathcal{P}_F$ 是费米-泊松张量，它对格拉斯曼变量起到泊松结构的作用，并可明确写为

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_F = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\pi}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\psi} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\pi}, \tag{30}$$

$\overrightarrow{\partial}$ 和 $\overleftarrow{\partial}$ 分别表示右导数和左导数。这种结构自然地将标准 Moyal 乘积推广到了费米子域。关于涉及玻色子和费米子变量的系统的泊松结构，更完整的描述请参见 [25–27, 29]。费米子系统的泊松括号对应于辛超空间（或超流形）上辛结构的奇部分（更多详情请参见例如 [36]）。

在介绍了这些基本工具之后，接下来的章节将探讨它们与路径积分方法中的传播子以及费米子语境下的费曼-卡茨公式之间的关系。

3 Sta费米子传播子的 r 指数函数

参考文献 [23] 中，玻色情形下星指数与路径积分之间的关系已得到确立。本节将为费米子系统建立上述对应关系。已知在费米子情形下， [32] 以下等式成立： $\langle\pi| = (|\psi\rangle)^*$。本文中最适合我们用途的费米子传播子形式，是 [37]中讨论的形式

$$K(\psi_f, t; \psi_0, 0) = \langle\pi_f| e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} |\psi_0\rangle\,. \tag{31}$$

于是，维格纳函数可以写为

$$\rho_{f,o}(\psi,\pi) = Q_W^{-1}(|\psi_0\rangle\langle\pi_f|). \tag{32}$$

利用 [32]可得

$$\begin{aligned}\rho_{f,o}(\pi,\psi) &= \hbar^{-n}\int \exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}\pi_j\lambda_j\right\}\left\langle \psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\middle|\,\widehat{\rho}\,\middle|\psi-\frac{\hbar\lambda}{2}\right\rangle D\lambda \\ &= \hbar^{-n}\int \exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}\pi_j\lambda_j\right\}\left\langle \psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\middle|\psi_0\right\rangle\left\langle \pi_f\middle|\psi-\frac{\hbar\lambda}{2}\right\rangle D\lambda \\ &= \hbar^{-n}\int \exp\left\{-i\sum_{j}\pi_j\lambda_j\right\}\delta\left(\psi_0-\left(\psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\right)\right) \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\sum_{j}\pi_{j,f}\left(\psi_j-\frac{\hbar\lambda_j}{2}\right)\right\}D\lambda,\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $\widehat{\rho}=|\psi_0\rangle\langle\pi_f|$，并且下标 f 在 $\pi_{j\text{中},\ f}$ 表示末动量。现在利用格拉斯曼变量的公式 $\delta(f(\theta))=\sum_i\delta(\theta-\theta_i)f'(\theta_i)$，其中 θ_i表示 f 中 delta 符号自变量的零点，并引入新变量$\chi_j:=\psi_j-\psi_0$和 $\eta_j:=\pi_j-\pi_{j,\ f}$，即可完成式（33）中的积分，得到

$$\rho_{f,0}=2^{-n}\exp\left\{\frac{2i}{\hbar}\eta\cdot\chi\right\}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\pi_{j,f}\cdot\psi_j^0\right\}. \tag{34}$$

现在，对于费米子量子力学，传播子为

$$\begin{aligned}K(\pi_f,t;\psi_0,0) &= \langle\pi_f|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}\right\}|\psi_0\rangle=\int\rho_{f,0}(\psi,\pi)\mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\psi,\pi)\right\}D\psi D\pi \\ &= 2^{-n}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\pi_{j,f}\cdot\psi_j^0\right\}\int\exp\left\{\frac{2i}{\hbar}\eta\cdot\chi\right\}\mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\chi+\psi^0,\eta+\pi_f)\right\}D\chi D\eta,\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\mathrm{Exp}_\star$ 是星指数，它对应于演化算符的符号（逆魏尔-维格纳映射）。为了求出积分中的星指数，我们考虑以下变量变换

$$\Psi=\frac{\psi_f+\psi_0}{2},\quad \Psi'=\frac{\psi_f-\psi_0}{2},\quad \Pi=\frac{\pi_f+\pi_0}{2},\quad \Pi'=\frac{\pi_f-\pi_0}{2}. \tag{36}$$

考虑以下量

$$\widetilde{F}(\Psi,\Pi)=C\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\cdot\Psi\right\}\int\exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\cdot\Psi'\right\}K(\Pi+\Pi',t;\Psi-\Psi')D\Psi' D\Pi', \tag{37}$$

其中 C 是一个常数，用于确保结果的归一化。现在，将式（35）代入式（37），并使用新变量 $\chi=\chi'+\Psi'$ 和 $\eta=\eta'-\Pi'$，我们可以将式（37）表示为

$$\widetilde{F}(\Psi,\Pi)=2^{-n}C\int\exp\left\{\frac{2i}{\hbar}\eta'\cdot\chi'\right\}\mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\chi'+\Psi,\eta'+\Pi)\right\}\widetilde{G}D\chi' D\eta', \tag{38}$$

其中

$$\widetilde{G} := \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-3\Pi^{'}\cdot\Psi^{'}-\Psi^{'}\cdot(2\eta^{'}+\Pi)-\Pi^{'}\cdot(\Psi+2\chi^{'})\right]\right\}D\Psi^{'}D\Pi^{'}. \tag{39}$$

现在利用如下形式的高斯积分

$$\begin{aligned} J &= \int \exp\left(\mathbf{v}^T M\mathbf{u}+\mathbf{u}^T\mathbf{a}+\mathbf{v}^T\mathbf{b}\right)D\mathbf{u}\,D\mathbf{v} \\ &= \det(M)\,\exp\left(-\mathbf{a}^T M^{-1}\mathbf{b}\right) \end{aligned} \tag{40}$$

并取 $M=\frac{i}{\hbar}(-3)\mathrm{I}$、$a=-\frac{i}{\hbar}(2\eta^{'}+\Pi)$、$b=-\frac{i}{\hbar}(\Psi+2\chi^{'})$、$M^{-1}=\frac{\hbar i}{3}\mathrm{I}$，且 $\det(M)=\left(-\frac{3i}{\hbar}\right)^n$，$-a^T M^{-1}b=\frac{i}{3\hbar}(2\eta^{'}+\Pi)\cdot(\Psi+2\chi^{'})$，其中 I 为单位算符，我们得到

$$\widetilde{G}=\left(-\frac{3i}{\hbar}\right)^n\exp\left\{\frac{i}{3\hbar}(2\eta^{'}+\Pi)\cdot(\Psi+2\chi^{'})\right\}, \tag{41}$$

最终我们得到

$$\widetilde{F}(\Psi,\Pi)=2^{-n}C(-\frac{3i}{\hbar})^n\int e^S\mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\chi^{'}+\Psi,\eta^{'}+\Pi)\right\}D\chi^{'}D\eta^{'}, \tag{42}$$

其中

$$S=\frac{i}{\hbar}\left(\frac{10}{3}\eta^{\prime}\cdot\chi^{\prime}+\frac{2}{3}\eta^{\prime}\cdot\Psi+\frac{1}{3}\Pi\cdot\Psi+\frac{2}{3}\Pi\cdot\chi^{\prime}\right). \tag{43}$$

将指数函数 e^S 按其 Grassmann 性质展开至二阶，并利用格拉斯曼积分的顶形式，可得

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\Psi,\Pi) =& C\left(-\frac{3i}{2\hbar}\right)^n\int\left[1+\frac{i}{\hbar}\left(\frac{10}{3}\eta^{\prime}\cdot\chi^{\prime}+\frac{2}{3}\eta^{\prime}\cdot\Psi+\frac{1}{3}\Pi\cdot\Psi+\frac{2}{3}\Pi\cdot\chi^{\prime}\right)\right] \\ &\times\mathrm{Exp}_\star\left(-\frac{it}{\hbar}H(\chi^{\prime}+\Psi,\eta^{'}+\Pi)\right)D\chi^{\prime}D\eta^{\prime} \\ =&\,\mathrm{Exp}_\star\left(-\frac{it}{\hbar}H(\Psi,\Pi)\right), \end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$C=\left(\frac{2^{n-1}\hbar^{n+1}}{5\cdot 3^{n-1}}\right)i^{3-3n}. \tag{45}$$

因此，星指数可以改写为用费米子传播子表示的形式：

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\Psi,\Pi)\right\} =& \,i^{3-3n}\left(\frac{2^{n-1}\hbar^{n+1}}{5\cdot 3^{n-1}}\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\cdot\Psi\right\} \\ &\times\int\exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi^{'}\cdot\Psi^{'}\right\}K(\Pi+\Pi^{'},t;\Psi-\Psi^{'})D\Psi^{'}D\Pi^{'}. \end{aligned} \tag{46}$$

因此，星指数的这一表达式推广了在 [23]中提出的类似恒等式。如那里所讨论的，通过传播子得到的星指数可能具有潜在优势，因为该表达式避免了星乘积通常定义中出现的收敛问题。现在让我们看看它如何应用于不同的简单费米子系统。

3.1 费米振子

本小节的讨论改编自 [13] （另见 [14]）。设 ψ 和 $\bar{\psi}$ 为两个独立的含时格拉斯曼变量。振子行为可由如下拉格朗日量表述

$$L_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \frac{\omega}{2}[\bar{\psi}, \psi], \tag{47}$$

其中 ω 表示振荡频率，$[\cdot, \cdot]$ 表示对易子。直接计算表明，以下拉格朗日量（在相差一个全导数的意义下）等价于

$$L_2 = i\bar{\psi}\dot{\psi} - \frac{\omega}{2}[\bar{\psi}, \psi]. \tag{48}$$

为简单起见，我们考虑 L_1。我们首先计算正则共轭动量

$$\Pi_\psi = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}, \qquad \Pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2}\psi. \tag{49}$$

我们通过勒让德变换计算其哈密顿量

$$H = \frac{\omega}{2}[\bar{\psi}, \psi]. \tag{50}$$

按照我们的约定，这些独立的格拉斯曼变量是复的。这使我们能够确定量子化映射

$$\psi \quad \to \quad \widehat{\psi} \quad , \quad \bar{\psi} \quad \to \quad i\widehat{\pi}\,, \tag{51}$$

这意味着量子哈密顿算符取如下形式

$$\widehat{H} = \frac{i\omega}{2}[\widehat{\pi}, \widehat{\psi}]. \tag{52}$$

利用反对易关系（1），我们得到

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \frac{i\omega}{2}[\widehat{\pi}, \widehat{\psi}] = \frac{i\omega}{2}(\widehat{\pi}\widehat{\psi} - \widehat{\psi}\widehat{\pi}) \\ &= \frac{i\omega}{2}(\widehat{\pi}\widehat{\psi} + (\widehat{\pi}\widehat{\psi} - i\hbar)) = \omega\left(i\widehat{\pi}\widehat{\psi} + \frac{\hbar}{2}\right). \end{aligned} \tag{53}$$

现在让我们来计算演化算符

$$\begin{aligned} \widehat{U}(t, t_0) &= \exp\{-i\widehat{H}(t - t_0)\} \\ &= \exp\left\{\omega\widehat{\pi}\widehat{\psi}(t - t_0) - \frac{i\omega\hbar}{2}(t - t_0)\right\} \\ &= \exp\left\{\omega\widehat{\psi}\widehat{\pi}(t - t_0)\right\} \exp\left\{-\frac{i\omega\hbar}{2}(t - t_0)\right\} \\ &= \exp\left\{\omega\widehat{\psi}\widehat{\pi}(t - t_0)\right\} \times [\text{phase}]. \end{aligned} \tag{54}$$

众所周知，物理系统的哈密顿量在全局相位偏移下保持不变；因此，可以调整这一相位项。下一节中，我们将对传播子采用这种处理方式。

按照 [38], 中详细介绍的逐步推导， [32], 或者采用与费米振子示例类似的二维基底进行计算，可以得到传播子 K 满足以下公式

$$\begin{aligned} K(\pi_f, t; \psi_0, 0) &= \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\} \exp\{\pi_f e^{-i\omega t}\psi_0\} \\ &= \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\} \exp\{(\Pi + \Pi')e^{-i\omega t}(\Psi - \Psi')\} \\ &= \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\} + [\Pi\Psi - \Pi\Psi' + \Pi'\Psi - \Pi'\Psi'] \exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{55}$$

其中我们使用了幂零格拉斯曼双线性项的性质 $e^A = 1 + A$。类似地，指数核可展开至一阶项:

$$e^{-i\frac{2}{\hbar}\Pi'\cdot\Psi'} = 1 - \frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'. \tag{56}$$

将核与传播子相乘，得到

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{2}{\hbar}\Pi'\Psi'}K = \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\} &+ [\Pi\Psi - \Pi\Psi' + \Pi'\Psi - \Pi'\Psi'] \exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\} \\ &- \frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi' \exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\} - \frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\Pi\Psi \exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{57}$$

现在对辅助变量 Ψ' 和 Π'进行积分。根据标准的格拉斯曼积分规则（$\int d\theta = 0$, $\int \theta d\theta = 1$），只有包含乘积 $\Pi'\Psi'$ 的项才会保留下来。由此得到

$$\int \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\right\} K D\Psi' D\Pi' = -\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\} - \frac{2i}{\hbar}\Pi\Psi \exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\} - \frac{2i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\}. \tag{58}$$

最后，代入归一化常数 C （按照我们的约定，对于 $n = 1$，它对应于$-\hbar^2/5$），即可得到星指数

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\Psi,\Pi)\right\} &= C\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\Psi\right\}\int \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\right\} K D\Psi' D\Pi' \\ = -\left(\frac{\hbar^2}{5}\right)&\left[\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\Psi\right\}\left(\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\} + \frac{2i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i\omega t}{2}\right\}\right) + \frac{2i}{\hbar}\Pi\Psi\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\}\right]. \end{aligned} \tag{59}$$

这个精确表达式凸显了积分方法的优势，因为它避免了通常在尝试直接通过星乘积的形式幂级数计算星指数时遇到的收敛问题。此外，星指数对于之后通过相应的费曼-卡茨公式求出费米子系统的基态能量也非常有用。

3.2 受驱动的费米振子

考虑一个由哈密顿量 $H = \omega\hat{\pi}\psi + \alpha\psi$ 定义的受驱动费米子模型，其中 ω 是频率，α 是格拉斯曼值耦合参数。由于该表达式不是厄米的，我们必须加入线性项的复共轭，以确保其代表物理可观测量。由此得到的哈密顿量为

$$\widehat{H} = \omega\hat{\pi}\widehat{\psi} + \alpha\widehat{\psi} + \alpha^*\hat{\pi}. \tag{60}$$

在占据数基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 中，算符的作用定义如下：

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}\,|1\rangle = |0\rangle, \quad \widehat{\psi}\,|0\rangle = 0, \\ \hat{\pi}\,|1\rangle = 0, \quad \hat{\pi}\,|0\rangle = |1\rangle, \end{aligned} \tag{61}$$

且粒子数算符 $N = \hat{\pi}\psi$ 满足 $N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$。此基下的矩阵表示为

$$(\widehat{\psi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\hat{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\widehat{N}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

这意味着哈密顿量的形式为

$$\begin{aligned} (\widehat{H}) &= \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^* & \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{63}$$

为确定基态能量，我们对哈密顿量进行对角化。特征方程由条件 $\det\left(\widehat{H} - \lambda\mathbb{I}\right) = 0$ 得出：

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -\lambda & \alpha \\ \alpha^* & \omega - \lambda \end{bmatrix} &= -\lambda(\omega - \lambda) - |\alpha|^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda\omega - |\alpha|^2 = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

求解本征值 λ，得到

$$\lambda_\pm = \frac{\omega \pm \sqrt{\omega^2 + 4|\alpha|^2}}{2}. \tag{65}$$

哈密顿量中的非对角项会混合粒子数不同的态，因此需要变换到新的基底。所得本征值对应于由此产生的准粒子激发的能量。

海森堡运动方程

设 A 为一个算符。其时间演化由海森堡方程决定（为简化代数，令 $\hbar = 1$）：

$$i\frac{d\widehat{A}}{dt} = [\widehat{A}, \widehat{H}]. \tag{66}$$

回忆恒等式 $[A, BC] = [A, B]C - B[A, C]$。由于 α 和 α^* 是格拉斯曼$\widehat{}$变量，它们与费米子算符反对易。对于 ψ，有

$$\begin{aligned}[\widehat{\psi}, \widehat{H}] &= [\widehat{\psi}, \omega\widehat{\pi}\widehat{\psi} + \alpha\widehat{\psi} + \alpha^*\widehat{\pi}] \\ &= \omega[\widehat{\psi}, \widehat{\pi}]\widehat{\psi} - \omega\widehat{\pi}[\widehat{\psi}, \widehat{\psi}] + [\widehat{\psi}, \alpha]\widehat{\psi} - \alpha[\widehat{\psi}, \widehat{\psi}] + \{\widehat{\psi}, \alpha^*\}\widehat{\pi} - \alpha^*[\widehat{\psi}, \widehat{\pi}]. \end{aligned} \tag{67}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$利用正则反对易关系 $\{\psi, \widehat{\pi}\} = i$ 和幂零性 $\{\psi, \psi\} =$0，可将其简化为

$$[\widehat{\psi}, \widehat{H}] = i(\omega\widehat{\psi} - \alpha^*). \tag{68}$$

类似地，对于 $\widehat{\pi}$ 可得

$$[\widehat{\pi}, \widehat{H}] = i(-\omega\widehat{\pi} - \alpha). \tag{69}$$

由此得到以下耦合线性微分方程组

$$\dot{\widehat{\psi}} = -i(\omega\widehat{\psi} - \alpha^*), \qquad \dot{\widehat{\pi}} = -i(-\omega\widehat{\pi} - \alpha). \tag{70}$$

这些是一阶线性非齐次微分方程。利用积分因子法$\widehat{}$，满足初始条件 $t = 0$ 的 ψ(*t*) 的通解可写为

$$\widehat{\psi}(t) = e^{-i\omega t}\widehat{\psi}(0) + \frac{\alpha^*}{\omega}(1 - e^{-i\omega t}). \tag{71}$$

类似地，对于 $\widehat{\pi}$(*t*)，应用变换 $\omega \to -\omega$ 和 $\alpha^* \to \alpha$:

$$\widehat{\pi}(t) = e^{i\omega t}\widehat{\pi}(0) + \frac{\alpha}{\omega}(e^{i\omega t} - 1). \tag{72}$$

传播子的分解

如玻色情形中所确立的 [23], ，传播子的形式为 $K = \mathcal{N}e^{iS_{cl}}$。由于运动方程是线性的，总经典作用量 S_{cl} 可以拆分为齐次部分（仅取决于边界条件）和非齐次部分（取决于源）。我们将传播子的计算分解为四个不同项，分别对应作用量的不同部分:

1. 齐次传播子（自由演化）
   在没有源（$\alpha = \alpha^* = 0$）的情况下，我们得到标准的谐振子结果。请注意，我们暂时省略了全局相位偏移（真空能量），并将在最后恢复它

$$\mathcal{A}_1 = \bar{\psi}_f e^{-i\omega t}\psi_i. \tag{73}$$

2. 源项-初态耦合（线性项 *1*）
   This $\bar{}$项表示末端边界条件 ψ_f an 之间的相互作用 d

由源驱动的初态演化。它是通过将 $\bar{}(t)$ 的非齐次部分 ψ投影到 ψ_f上得到的

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \bar{\psi}_f \cdot (\psi(t)_{\text{inhom}}) \\ &= \bar{\psi}_f \left[\frac{\alpha^*}{\omega}(1 - e^{-i\omega t})\right] \\ &= -\frac{\alpha^*}{\omega}(1 - e^{-i\omega t})\bar{\psi}_f. \end{aligned} \tag{74}$$

3. 源-末态耦合（线性项 *2*）
这一项源于动量源与初态 ψ_i的相互作用。它涉及将源项 $\hat{\pi}$ 与时间反演演化核 $D(t' - t) = e^{i\omega(t'-t)}$进行积分

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3 &= -i \int_0^t \alpha D(t' - t) dt' \\ &= -i\alpha e^{-i\omega t} \int_0^t e^{i\omega t'} dt' \\ &= -\frac{\alpha}{\omega}(1 - e^{-i\omega t})\psi_i. \end{aligned} \tag{75}$$

4. 源自相互作用（常数项）
$\bar{}$最后，我们必须计算与边界场 ψ_i 和 ψ_f无关的项。这对应于源彼此相互作用的经典作用量，通常称为存在源时的“真空到真空”振幅。按照泛函方法（例如参见 Das [13]），相位为

$$\Phi(t) = -\frac{i}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left[\bar{\eta}(t') G_F(t' - t'')\eta(t'') + \text{h.c.}\right], \tag{76}$$

其中，有效源为 $\eta(t) = -i\alpha^*$ 和 $\bar{\eta}(t) = -i\alpha$，而 G_F 是费曼格林函数。对常数源计算二重积分可得

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= |\alpha|^2 \int_0^t dt' e^{i\omega t'} \int_0^{t'} dt'' e^{-i\omega t''} + \text{const} \\ &= \frac{i|\alpha|^2}{\omega} \left[t - \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega t} - 1)\right]. \end{aligned} \tag{77}$$

为了得到一个与费米子迹一致的整体因子，我们定义函数

$$\mathcal{A}_4 = f(\alpha, t, \omega) = \frac{|\alpha|^2}{2\omega}(-i\omega t + e^{-i\omega t} - 1). \tag{78}$$

收集　所有四项相加，受驱动费米子振子的完整传播子为　s

$$K(\pi_f,t;\psi_0,0)=\exp\left\{\pi_f e^{-i\omega t}\psi_0-\frac{1}{\omega}(1-e^{-i\omega t})(\alpha^*\pi_f+\alpha\psi_0)-f(\alpha,t,\omega)\right\}. \quad (79)$$

不难验证，关闭源（$\alpha=\alpha^*=0$）后，即可得到简谐振子的传播子（相差一个零点能相移）。

为计算星指数，我们首先展开传播子。根据辅助变量 Ψ' 和 Π'上的格拉斯曼积分性质，我们只保留对积分有非零贡献的项。具体而言，将指数函数 K 展开如下

$$K=1+\pi_f e^{-i\omega t}\psi_0-\frac{1}{\omega}(1-e^{-i\omega t})(\alpha^*\pi_f+\alpha\psi_0)-\frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t+e^{-i\omega t}-1\Big). \quad (80)$$

代入质心变量 $\pi_f=\Pi+\Pi'$和 $\psi_0=\Psi-\Psi'$后，我们按各项对带撇变量的依赖关系进行分组

$$\begin{aligned}K&=1+(\Pi+\Pi^{'})e^{-i\omega t}(\Psi-\Psi^{'})+\frac{1}{\omega}(1-e^{-i\omega t})\big[(\Pi+\Pi^{'})\alpha^*+(\Psi-\Psi^{'})\alpha\big]\\&\quad-\frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t+e^{-i\omega t}-1\Big)\\&=1-\frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t+e^{-i\omega t}-1\Big)+\Pi\Psi e^{-i\omega t}-\Pi\Psi' e^{-i\omega t}+\Pi'\Psi e^{-i\omega t}-\Pi'\Psi' e^{-i\omega t}\\&\quad+\Big(\Pi\alpha^*+\Pi'\alpha^*+\Psi\alpha-\Psi'\alpha\Big)\frac{1}{\omega}\Big(1-e^{-i\omega t}\Big). \end{aligned} \quad (81)$$

现在，我们将传播子乘以积分核。由于格拉斯曼变量具有幂零性，积分核可精确展开为 $\exp\{-2i\Pi'\Psi'/\hbar\}=1-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'$，于是计算得：

$$\begin{aligned}\exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\right\}K&=\left(1-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\right)\left[1-\frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t+e^{-i\omega t}-1\Big)+\Pi\Psi e^{-i\omega t}\right.\\&\quad-\Pi\Psi' e^{-i\omega t}+\Pi'\Psi e^{-i\omega t}-\Pi'\Psi' e^{-i\omega t}\\&\quad\left.+\Big(\Pi\alpha^*+\Pi'\alpha^*+\Psi\alpha-\Psi'\alpha\Big)\frac{1}{\omega}\Big(1-e^{-i\omega t}\Big)\right]\\&=[\text{Terms independent of }\Pi'\Psi']\\&\quad-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\left[1-\frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t+e^{-i\omega t}-1\Big)+\Pi\Psi e^{-i\omega t}\right.\\&\quad\left.+\Big(\Pi\alpha^*+\Psi\alpha\Big)\frac{1}{\omega}\Big(1-e^{-i\omega t}\Big)\right]-\Pi'\Psi' e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (82)$$

现在我们进行积分 $\int\ldots D\Psi' D\Pi'$。回顾一下，只有以下系数

$\Pi'\Psi'$ 会保留下来，我们得到

$$\int \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\right\} K D\Psi' D\Pi' = -\exp\{-i\omega t\} - \frac{2i}{\hbar}\Bigg[1 - \frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t + e^{-i\omega t} - 1\Big) + \Pi\Psi\exp\{-i\omega t\} + \Big(\Pi\alpha^* + \Psi\alpha\Big)\frac{1}{\omega}\Big(1 - \exp\{-i\omega t\}\Big)\Bigg]. \tag{83}$$

最后，乘以归一化常数 C，并考虑到指数前因子的格拉斯曼性质（它只对标量项产生非平凡作用），即可得到星指数的闭式表达。

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}_\star\left(-\frac{it}{\hbar}H(\Psi,\Pi)\right) &= C\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\Psi\right\}\int\exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\Pi'\Psi'\right\}KD\Psi' D\Pi' \\ &= -\left(\frac{\hbar^2}{5}\right)\Bigg\{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\Psi\right\}\Bigg[\exp\{-i\omega t\} \\ &\quad + \frac{2i}{\hbar}\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{2\omega}\Big(-i\omega t + e^{-i\omega t} - 1)\right)\Big)\Bigg] \\ &\quad + \frac{2i}{\hbar}\left[\Pi\Psi\exp\{-i\omega t\} + (\Pi\alpha^* + \Psi\alpha)\frac{(1 - \exp\{-i\omega t\})}{\omega}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{84}$$

显然，当驱动源消失时（$\alpha = \alpha^* = 0$），我们便得到上一节推导出的谐振子结果（59）（相差一个全局相位偏移 $\omega/2$）。再次指出，这里得到的星指数并不依赖于通常定义中将其展开为星乘积幂级数时出现的任何标准收敛问题。

4 费米子的费曼-卡茨公式与变形量子化

费曼-卡茨公式为系统传播子的渐近行为与其基态能量 [39]之间提供了强有力的联系。鉴于上一节详细阐述了传播子与星指数之间的既定联系，并基于诸如 [23, 40, 41], 等研究，我们现在将在变形量子化框架下，为费米变量建立一个类似的费曼-卡茨公式。关于玻色情形的全面论述，读者可参阅文献 [24]。

正如预期的那样，与玻色情形相比，存在一些细微差异，尤其是涉及各自相空间中所定义量的不同性质。

尤其是，我们必须将谱分解分析扩展至$\widehat{}$费米子域。哈密顿算符 $H = Q_W(H)$ 的本征值对应于物理谱；然而，对角维格纳函数的性质以及格拉斯曼变量上的积分需要谨慎处理，具体如下文所述。

考虑纯态 $\widehat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ 的密度矩阵。在 Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal 形式体系中，与之对应的归一化 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}\rho_W(\psi,\pi) &= \hbar^{-n}\int \exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}\pi_j\lambda_j\right\}\left\langle \psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\middle|\,\widehat{\rho}\,\middle|\psi-\frac{\hbar\lambda}{2}\right\rangle D\lambda \\ &= \hbar^{-n}\int \exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}\pi_j\lambda_j\right\}\phi_n\left(\psi-\frac{\hbar\lambda}{2}\right)\overline{\phi}_n\left(\psi+\frac{\hbar\lambda}{2}\right)D\lambda. \end{aligned} \tag{85}$$

回顾一下，对星指数在相空间上积分，对应于演化算符的迹。利用演化算符在能量本征基中的谱分解，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\exp\left\{-\frac{it}{\hbar}\widehat{H}\right\}\right) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\psi,\pi)\right\}D\pi D\psi \\ &= \int\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{tE_n}{\hbar}}\rho_W^{(n)}(\psi,\pi)D\pi D\psi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{tE_n}{\hbar}}\underbrace{\left(\int \rho_W^{(n)}(\psi,\pi)\,D\pi D\psi\right)}_{1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{tE_n}{\hbar}}, \end{aligned} \tag{86}$$

其中，$1/(2\pi\hbar)$ 表示费米子相空间对应的迹归一化因子。由此表达式出发，进行维克旋转 $t \to -i\tau$ 后，得到统计配分函数之和。在欧几里得时间 $\tau \to \infty$ 趋于无穷大时，该和由最低能量项（基态）主导。因此，我们可以用以下公式提取基态能量

$$E_0 = -\lim_{\tau\to\infty}\frac{\hbar}{\tau}\ln\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{\tau H(\psi,\pi)}{\hbar}\right\}D\pi D\psi\right). \tag{87}$$

这个关系表示费米子情形下的费曼-卡茨公式。在接下来的小节中，我们将把该公式应用于前文分析过的费米子振子，以便明确构造出它们各自的能量基态。

4.1 费米振子的费曼-卡茨公式

考虑此前得到的费米谐振子的星指数表达式，并对相空间上的积分进行计算，我们得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{it}{\hbar}H(\Psi,\Pi)\right\}D\Pi D\Psi &= \int -\left(\frac{\hbar^2}{5}\right)\left[\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Pi\Psi\right\}\left(\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\}+\frac{2i}{\hbar}\exp\left\{i\frac{\omega t}{2}\right\}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{2i}{\hbar}\Pi\Psi\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\}\right]D\Pi D\Psi \qquad (88)\\ &= \frac{2}{5}\exp\left\{i\frac{\omega t}{2}\right\}-\frac{3i\hbar}{5}\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\}.\end{aligned}$$

这意味着基态能量可写为

$$\begin{aligned}E_0 &= -\lim_{\tau\to\infty}\frac{\hbar}{\tau}\ln\left|\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{\tau H(\Psi,\Pi)}{\hbar}\right\}D\Pi\, D\Psi\right|\\ &= -\lim_{\tau\to\infty}\frac{\hbar}{\tau}\ln\left|a\exp\left\{\frac{\tau\omega}{2}\right\}+b\exp\left\{-\frac{\tau\omega}{2}\right\}\right|, \qquad (89)\end{aligned}$$

为简便起见，我们在此将复常数写作 $a=2/5$ 和 $b=-3i\hbar/5$。现在，我们将研究极限，并说明 a，b 的性质在 $\tau\to\infty$ 时将无关紧要

$$\begin{aligned}\ln|ae^{\frac{\tau\omega}{2}}+be^{\frac{-\tau\omega}{2}}| &= \ln|e^{\frac{\tau\omega}{2}}(a+be^{-\tau\omega})|,\\ &= \ln|e^{\frac{\tau\omega}{2}}|+\ln|a+be^{-\tau\omega}|,\\ &= \frac{\tau\omega}{2}+\ln|a+be^{-\tau\omega}|. \qquad (90)\end{aligned}$$

回到之前的计算，我们得到

$$\begin{aligned}E_0 &= -\lim_{\tau\to\infty}\frac{\hbar}{\tau}\left(\frac{\tau\omega}{2}+\underbrace{\ln|a+be^{-\tau\omega}|}_{\approx\ln|a|\quad as\quad \tau\to\infty}\right)\\ &= -\frac{\hbar\omega}{2}. \qquad (91)\end{aligned}$$

由于常数项的对数相较于线性项 $\tau\omega/2$，在 τ 趋于无穷时趋于消失，这证实了具有单个自由度的费米系统的基态能量的精确结果。

4.2 受驱动费米振子的费曼-卡茨公式

以类似的方式，我们现在着手研究受驱费米振子的费曼-卡茨公式。利用（84），我们得到

$$\int \mathrm{Exp}_\star\left(-\frac{it}{\hbar}H(\Psi,\Pi\right)D\Pi D\Psi$$

$$= -\left(\frac{\hbar^2}{5}\right)\left\{\left(\frac{i}{\hbar}\right)\left[\exp\{-i\omega t\} + \frac{2i}{\hbar}\left(1 - \frac{|\alpha|^2}{2\omega}(-i\omega t + \exp\{-i\omega t\} - 1)\right)\right] + \frac{2i}{\hbar}\exp\{-i\omega t\}\right\}. \tag{92}$$

这意味着如下

$$\begin{aligned} E_0 &= -\lim_{\tau\to\infty}\frac{\hbar}{\tau}\ln\left|\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{Exp}_\star\left\{-\frac{\tau H(\Psi,\Pi)}{\hbar}\right\} D\Pi\, D\Psi\right| \\ &:= -\lim_{\tau\to\infty}\frac{\hbar}{\tau}\ln\left|ae^{-\tau\omega} + b\tau + c\right|. \end{aligned} \tag{93}$$

这里已完成对 Ψ 和 Π 的高斯积分，将线性项与 τ 中的指数函数合并，并引入了以下复值常数:

$$a = \frac{1}{\pi\hbar} + \frac{i|\alpha|^2}{2\pi\omega\hbar^2}, \quad b = -\frac{i|\alpha|^2}{\hbar}\omega, \quad c = -i\left(\frac{|\alpha|^2}{\hbar\omega} - \frac{2}{\hbar}\right).$$

We m鉴于这些常数的复数性质，必须仔细分析极限 s.

因此，必须详细分析以下极限

$$L = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\ln\left|ae^{-\tau\omega} + b\tau + c\right|,$$

正如我们将看到的，该极限的值只取决于参数 ω，而与常数 a、 b和 c的具体复数取值无关。为证明这一点，我们按以下步骤进行。

令 $Z(\tau) = ae^{-\tau\omega} + b\tau + c$。由于 a, b, c均为复数，因此对于任意给定的 τ， $Z(\tau)$都是一个复数。复数 Z 的自然对数定义为 $\ln(Z) = \ln|Z| + i\cdot\arg(Z)$，其中 $|Z|$ 表示 Z的模，而 $\arg(Z)$表示其辐角主值（相位）。因此，将其代入极限表达式后，我们可以把极限拆分为实部和虚部

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(\ln|Z(\tau)| + i\cdot\arg(Z(\tau))\right), \\ &= \underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\ln|Z(\tau)|}_{\text{Real Part}} + i\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\arg(Z(\tau))}_{\text{Imaginary Part}}. \end{aligned}$$

为计算这一点，我们必须找出 $Z(\tau)$ 中在 $\tau\to\infty$ 时模最大的项，也就是其主导项。当 τ 非常大时， $Z(\tau)$ 的辐角将趋近于其主导项的常数辐角，即 $\arg(Z(\tau)) \to \phi_{\text{dominant}}$。极限的虚部于是变为

$$i\lim_{\tau\to\infty}\frac{1\cdot\phi_{\text{dominant}}}{\tau} = 0.$$

由于分子是常数，而分母趋于无穷大，极限的虚部始终为零。因此，最终结果是纯实数，完全由模项的极限决定

$$L = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \ln|Z(\tau)|.$$

这将问题简化为分析 $Z(\tau)$ 中主导项的模，该模取决于 ω 的符号。现在，我们分析实参数 ω 的三种可能情况。

情况 *1*： $\omega > 0$

在这种情况下，项 $e^{-\tau\omega}$ 是一个衰减指数。当 $\tau \to \infty$ 时， $Z(\tau)$ 中各项的模表现如下：

- $|ae^{-\tau\omega}| = |a|e^{-\tau\omega} \to 0$,
- $|b\tau| = |b|\tau \to \infty$,
- $|c|$ 是常数。

主导项为 $b\tau$。因此，当 τ 较大时，模 $|Z(\tau)|$ 近似为$|b|\tau$。于是极限变为

$$L = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \ln(|b|\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1(\ln|b| + \ln\tau)}{\tau}.$$

由于线性函数 τ的增长速度快于对数函数 $\ln\ \tau$，该极限为零。因此，对于 $\omega > 0$，基态能量为 $E_0 = 0$。

情形*2*： $\omega = 0$

若 $\omega = 0$，常数 b 恒等于零， $b = 0$。因此， $Z(\tau)$的表达式简化为一个与 τ无关的常数，即 $Z(\tau) = a + c$。此时的极限因此为

$$L = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln(a+c)}{\tau}.$$

由于 $\ln(a + c)$ 只是一个复常数，该极限也为零。对于情形$\omega > 0$，我们得到基态能量 $E_0 = 0$。

情形*3*： $\omega < 0$

在这种情况下，写成 $\omega = -|\omega|$ 会很有帮助。指数项变为 $e^{-\tau\omega} = e^{\tau|\omega|}$，这是一个增长指数。其模的变化规律为

- $|ae^{\tau|\omega|}| \to \infty$ （指数增长），
- $|b\tau| \to \infty$ （线性增长），
- $|c|$ 是常数。

指数增长远快于线性增长，因此主导项是 $ae^{\tau|\omega|}$。模 $|Z(\tau)|$ 约为 $|a|e^{\tau|\omega|}$。极限变为

$$L = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \ln\big(|a|e^{\tau|\omega|}\big) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}(\ln|a| + \ln\big(e^{\tau|\omega|}\big))$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}(\ln|a| + \tau|\omega|) = \lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{\ln|a|}{\tau} + \frac{\tau|\omega|}{\tau}\right).$$

第一项趋于零，因此剩下

$$L = |\omega|.$$

由于 $\omega < 0$，我们有 $|\omega| = -\omega$。因此，基态能量的值 E_0 等于ω，其中我们已考虑了公式（87）中的整体负号。

如上文所述，极限的最终值完全取决于 ω的符号。 ω 取不同值时的结果总结如下。

表 1：根据关于 ω的条件确定的极限 L 的最终值。

关于 ω的条件	**极限的最终值（L）**
$\omega > 0$	0
$\omega = 0$	0
$\omega < 0$	$-\omega$

如果我们再回想起 E_0 的表达式带有一个整体负号（模 $\hbar$），便可得到

$$E_0 = \begin{cases} 0 & \omega \geq 0 \\ \omega & \omega < 0 \end{cases} \tag{94}$$

现在，回顾我们为该哈密顿量确定的本征能量结果：

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega \pm \sqrt{\omega^2 + 4|\alpha|^2}}{2} = \frac{\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + 4|\alpha|^2} \\ &\approx \begin{cases} \omega \\ 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \ |\alpha| \ll |\omega|\,. \end{aligned} \tag{95}$$

在附录A中，我们更详细地研究了某些方面，以验证（95）中所考虑的近似，以及下文表2中所考虑的不同物理条件（由ω标记），其中我们考虑了 $g := |\alpha|$。

表 2：不同物理条件下的近似本征值 $\lambda_\pm$ 。

区域	**条件**	**近似本征值** $\lambda_\pm$
（1）共振	$\omega \to 0$, g 不弱	$\lambda_\pm \approx \pm g + \frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega^2}{8g} \quad \left(O\left((\omega/g)^3\right)\right)$
(2) 色散 ($\omega > 0$) $\lvert\omega\rvert \gg g$		$\lambda_+ \approx \omega + \frac{g^2}{\omega}, \qquad \lambda_- \approx -\frac{g^2}{\omega} \quad \left(O(g^4/\omega^3)\right)$
(2) 色散 ($\omega < 0$) $\lvert\omega\rvert \gg g$		$\lambda_- \approx \omega + \frac{g^2}{\omega}, \qquad \lambda_+ \approx -\frac{g^2}{\omega} \quad \left(O(g^4/\omega^3)\right)$
(3) 强耦合	$g \gg \lvert\omega\rvert$	$\lambda_\pm \approx \pm g + \frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega^2}{8g} \quad \left(O\left((\omega/g)^3\right)\right)$
(4) 弱耦合	$g \to 0$	$\lambda_+ \to \omega, \qquad \lambda_- \to 0$

如表2所示，我们的精确计算与弱耦合区域中的标准近似相一致。

5 结语

在本工作中，我们已成功将对星指数与路径积分传播子之间的对应关系推广至费米子系统领域：前者在形变量子化的语境中自然出现，后者通常与量子场论的视角相关联。我们建立了一套自洽的形式体系，由此可得到费米子演化算符符号的精确表达式，而该表达式可直接借助量子传播子获得。

作为首要应用，我们推导了费曼-卡茨公式的费米子类比，从而在形变量子化框架内提供了一种提取基态能量的可靠方法。此外，一般费米子费曼-卡茨公式（87）的推导提供了另一条计算途径，可直接从相空间表达式中提取基态能量。

该形式体系通过分析两个基本费米子示例得到了验证：简谐振子（91）和受驱动费米子振子（93）。我们得到一个显式关系（46），它将星指数函数与一般费米子系统的路径积分传播子联系起来。我们还分别在表达式（59）和（84）中，找到了确定费米振子与受驱费米振子情形下星指数的显式积分表示。对于这类力学系统，若干技术难题得到了处理。首先，我们利用相干态路径积分推导了费米子传播子的简洁精确表达式。其次，我们解决了有关边界条件以及Grassmann奇偶性保持的含糊之处。尽管最初的启发式方法表明需要对相空间积分施加辅助约束，但我们的结果表明，严格应用星积迹的定义即可自然地处理这些微妙问题。

展望未来，这项研究的一个自然拓展方向，是合理地统一玻色与费米自由度。这将推动超对称（SUSY）量子力学的实现，而两个扇区之间的相互作用或可进一步阐明量子化的几何结构。这项工作的有益指引，是在 [32]中确立的形式体系，并结合超对称系统的标准路径积分描述。此外，本研究也为探索更广泛的背景奠定了初步基础，包括量子场论 [42–48] 以及可能的弦论框架 [49], ，在这些领域中，变形量子化仍面临重大挑战。

致谢

A. Kafuri（CVU 1314608）感谢科学、人文、技术与创新秘书处（SECIHTI）通过国家奖学金项目提供的资助。AM 感谢 COPOCYT 根据项目 2467 HCDC/2024/SE-02/16（2024-03征集，23871号信托基金）提供的资助。JBM 感谢马科斯·莫辛斯基基金会提供的资助。

A 近似区域分析：参数空间

现在，我们将详细介绍第 4.2 节表 2 中总结的各区域分析。如前所述，这里考虑 $g := |\alpha|$。

A.1 情形 1：共振与强耦合（$|\omega/g| \ll 1$）

此条件同时适用于共振 区域（$\omega \to 0$， g 非弱）和强耦合 区域（$g \gg |\omega|$），因为从数学上看，这两个区域都由g 相对于 ω的主导地位所控制。我们首先从本征值公式的平方根中提出主导项 $2g$

$$\lambda_\pm = \frac{\omega \pm \sqrt{4g^2+\omega^2}}{2} = \frac{\omega \pm \sqrt{4g^2\left(1+\frac{\omega^2}{4g^2}\right)}}{2} = \frac{\omega \pm 2g\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2g}\right)^2}}{2}.$$

并对 $\sqrt{1+x}$应用泰勒级数展开，得到近似结果

$$\lambda_\pm \approx \frac{\omega \pm 2g\left(1+\frac{\omega^2}{8g^2}\right)}{2} = \frac{\omega}{2} \pm \left(g + \frac{\omega^2}{4g}\right).$$

最后，重新排列各项即可得到所需的近似，适用于以下情形： $|\omega/g| \ll 1$

$$\lambda_\pm \approx \pm g + \frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega^2}{8g}.$$

A.2 情形 2：色散（$\omega > 0$ 和 $|\omega| \gg g$）

这一条件对应于 $|g/\omega| \ll 1$的极限。由于在这种情况下 ω 是主导项，且已知 ω 为正，我们将其从 $\lambda_\pm$表达式中的平方根内提取出来。对于 $\omega > 0$， $\sqrt{\omega^2} = \omega$，因此

$$\lambda_\pm = \frac{\omega \pm \sqrt{\omega^2\left(1+\frac{4g^2}{\omega^2}\right)}}{2} = \frac{\omega \pm \omega\sqrt{1+\frac{4g^2}{\omega^2}}}{2}.$$

再次对最后一个表达式中的平方根项进行泰勒展开，可得近似特征值

$$\begin{aligned}\lambda_+ &\approx \frac{\omega+\omega\left(1+\frac{2g^2}{\omega^2}\right)}{2}=\frac{2\omega+\frac{2g^2}{\omega}}{2}=\omega+\frac{g^2}{\omega}\,,\\ \lambda_- &\approx \frac{\omega-\omega\left(1+\frac{2g^2}{\omega^2}\right)}{2}=\frac{-\frac{2g^2}{\omega}}{2}=-\frac{g^2}{\omega}\,.\end{aligned}$$

A.3 情形3：色散（$\omega<0$ 和 $|\omega|\gg g$）

条件仍然是 $|g/\omega|\ll 1$，与上一种情形相同，但现在的区别在于ω 为负。对于这种情形，我们仍按之前的方法进行。首先从 $\lambda_\pm$的特征值表达式中的平方根里提出 $|\omega|$。关键是要认识到，由于$\omega<0$，我们有 $\sqrt{\omega^2}=|\omega|=-\omega$

$$\lambda_\pm=\frac{\omega\pm\sqrt{\omega^2\left(1+\frac{4g^2}{\omega^2}\right)}}{2}=\frac{\omega\pm(-\omega)\sqrt{1+\frac{4g^2}{\omega^2}}}{2}\,.$$

像前几种情形一样对平方根作泰勒展开，得到 $\sqrt{1+4g^2/\omega^2}\approx 1+2g^2/\omega^2$，因此我们得到近似特征值

$$\begin{aligned}\lambda_+ &\approx \frac{\omega-\omega\left(1+\frac{2g^2}{\omega^2}\right)}{2}=\frac{\omega-\omega-\frac{2g^2}{\omega}}{2}=-\frac{g^2}{\omega}\,,\\ \lambda_- &\approx \frac{\omega+\omega\left(1+\frac{2g^2}{\omega^2}\right)}{2}=\frac{2\omega+\frac{2g^2}{\omega}}{2}=\omega+\frac{g^2}{\omega}\,.\end{aligned}$$

A.4 情形4：弱耦合（$g\to 0$）

这个条件意味着 $g=|\alpha|\to 0$。

在这种情形下，我们令 $\lambda_\pm$ 的精确公式取 $g\to 0$时的极限

$$\lim_{g\to 0}\lambda_\pm=\lim_{g\to 0}\frac{\omega\pm\sqrt{\omega^2+4g^2}}{2}=\frac{\omega\pm\sqrt{\omega^2}}{2}=\frac{\omega\pm|\omega|}{2}\,.$$

结果取决于 ω的符号。若 $\omega>0$，则 $|\omega|=\omega$，因此相应的极限为 $\lambda_+\to\omega$ 和 $\lambda_-\to 0$。相反，若 $\omega<0$，这些极限则互换，即 $\lambda_+\to 0$ 和 $\lambda_-\to\omega$。

参考文献

[1]F. Bayen、M. Flato、C. Fronsdal、A. Lichnerowicz 和 D. Sternheimer，《变形理论与量子化。1. 辛结构的变形》，《物理年鉴》**111**，61（1978），doi:10.1016/0003-4916(78)90224-5[2] F. Bayen、M. Flato、C. Fronsdal、A. Lichnerowicz 和 D. Sternheimer，《变形理论与量子化。2. 物理应用》，《物理年鉴》**111**，111（1978），doi:10.1016/0003-4916(78)90225-7[3] M. De Wilde 和 P.B.A. Lecomte，《任意辛流形上的泊松李代数的星乘积及形式变形的存在性》，《数学物理快报》**7**，487（1983），https://doi.org/10.1007/BF00402248[4] H. Omori、Y. Maeda 和 A. Yoshioka，《韦尔流形与变形量子化》，Adv. Math. **85**，224（1991），https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90057-E[5] B. Fedosov，《变形量子化的简单几何构造》，《微分几何杂志》**40**，第2期，213–238（1994）[6]B. Fedosov，《变形量子化与指标理论》，（Akademie Verlag，柏林，1996）。[7] M. Kontsevich，《泊松流形的变形量子化。1.》，《数学物理快报》**66**，157–216（2003），doi:10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf [arXiv:q- alg/9709040 [math.QA]]。[8]I. Todorov，《量子化是一个谜》，《保加利亚物理学杂志》**39**，107–149（2012）[arXiv:1206.3116 [math-ph]]。[9] T. L. Curtright、D. B. Fairlie 和 C. K. Zachos，《相空间量子力学简明论述》，（World Scientific Publishing Co Pte Ltd，2014），ISBN 978-981-4520-45-4，doi:10.1142/8870[10] A. C. Hirshfeld 和 P. Henselder，《量子力学教学中的变形量子化》，《美国物理学杂志》**70**，537–547（2002），doi:10.1119/1.1450573[arXiv:quant-ph/0208163 [量子物理]]。[11] R. P. Feynman、A. R. Hibbs 和 D. F. Styer，《量子力学与路径积分：修订版》，（Dover Publ.，2010），ISBN: 978-0-486-47722-0[12] S. Weinberg，《量子场论。第1卷：基础》，（剑桥大学出版社，2005），ISBN 978-0-521-67053-1，978-0-511-25204-4，doi:10.1017/CBO9781139644167[13] A. Das，《场论：路径积分方法》，《世界科学物理学讲义》**83**，1–456（2019），doi:10.1142/11369

[14] J. Zinn-Justin，《量子力学中的路径积分》，（牛津大学出版社，2004年），https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566748.001.0001，在线ISBN：9780191717994，印刷ISBN：9780198566748

[15]G. Dito 和 F. J. Turrubiates，《变形量子化中的阻尼谐振子》，《物理快报 A》**352**，309-316（2006）doi:10.1016/j.physleta.2005.12.013 [arXiv:量子物理/0510150 [量子物理]]。

[16] A. C. Cadavid 和 M. Nakashima，《紧群上的星指数与路径积分》，《数学物理快报》**23**，111-115（1991）。

[17] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, “星指数函数作为双值元素”，载于：Marsden, J., Ratiu, T.（编）《辛几何与泊松几何的广阔天地》，《数学进展》第232卷，第483–492页，Birkh¨auser，波士顿（2004年），arXiv:0711.3668。[18] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki 和 A. Yoshioka，“代数元素的变形表达式（VII）——真空/赝真空表示——”，AIP Conf. Proc. **1564**，184（2013年）。[19] P. Bieliavsky, A. de Goursac 和 F. Spinnler，“庞加莱群的非形式变形量子化与星指数”，载于：Kielanowski, P., Ali, S., Odesskii, A., Odzijewicz, A., Schlichenmaier, M., Voronov, T.（编）《物理学中的几何方法》。《数学趋势》。Birkh¨auser，巴塞尔（2013年）。$https$：//doi.org/$10.1007/978-3-0348-0645-9_1$[20] A. Yoshioka，“星乘积、星指数与星函数”，载于：Diagana, T., Toni, B.（编）《数学结构与应用》。《STEAM-H：科学、技术、工程、农业、数学与健康》。Springer，Cham。doi.org/10.1007/978-3-319-97175-9 20（2018年）。[21] A. Yoshioka，“星乘积代数中的星指数”，载于：Kielanowski, P., Odzijewicz, A., Previato, E.（编）《物理学中的几何方法 XXXVI》。《数学趋势》。Birkh¨auser，Cham。（2019年）$https$：//doi.org/$10.1007/978-3-030-01156-7_17$[22] J. Berra-Montiel, D. Contreras-Bear, A. Molgado 和 M. Sanchez-Cordova，“时变谐振子的星指数与维格纳函数”，[arXiv:2503.06384 [量子物理]].[23]J. Berra-Montiel, H. Garc´ıa-Compe´an 和 A. Molgado，“由传播子和路径积分得到的星指数”，《物理年鉴》**468**，169744（2024年），doi:10.1016/j.aop.2024.169744 [arXiv:2404.08815 [math-ph]].[24] J. Berra-Montiel, H. Garc´ıa-Compe´an 和 A. Molgado，“变形量子化中的费曼–卡茨公式”，《欧洲物理学杂志 Plus》**140**，第9期，881（2025年），doi:10.1140/epjp/s13360-025-06820-0 [arXiv:2502.03624 [math-ph]]。

[25] R. Casalbuoni，“玻色-费米系统的经典力学”，Nuovo Cim. A 33，389（1976年），doi:10.1007/BF02729860[26] R. Casalbuoni，“反对易变量系统的量子化”，Nuovo Cim. A 33，115（1976年），doi:10.1007/BF02748689[27] F. A. Berezin 和 M. S. Marinov，“粒子自旋动力学：经典力学的格拉斯曼变体”，《物理年鉴》104，336（1977年），doi:10.1016/0003- 4916(77)90335-9[28] R. Marnelius，“费米子量子力学与超场”，Int. J. Mod. Phys. A 5，329（1990年），doi:10.1142/S0217751X90000143[29] A. Lahiri, P. K. Roy 和 B. Bagchi，“量子力学中的超对称性”，Int. J. Mod. Phys. A 5，1383–1456（1990年），doi:10.1142/S0217751X90000647[30] A. C. Hirshfeld 和 P. Henselder，“费米子系统的变形量子化”，《物理年鉴》302，59–77（2002年），doi:10.1006/aphy.2002.6302[31] A. C. Hirshfeld, P. Henselder 和 T. Spernat，“克利福德化、自旋与费米子星乘积”，《物理年鉴》314，75–98（2004年），doi:10.1016/j.aop.2004.06.008[arXiv:量子物理/0404168 [量子物理]].[32] I. Galaviz, H. Garc´ıa-Compe´an, M. Przanowski 和 F. J. Turrubiates，“费米经典系统的 Weyl-Wigner-Moyal 形式体系”，《物理年鉴》323，267–290（2008年），doi:10.1016/j.aop.2007.04.004 [arXiv:高能物理理论/0612245 [高能物理理论]].[33] S. Odendahl 和 P. Henselder，“星乘积形式体系与路径积分形式体系中的自旋描述”，《物理快报 A》372，2552（2008年），doi:10.1016/j.physleta.2007.10.035 [arXiv:0705.3601 [量子物理]].[34] B. Lin 和 T. Heng，“变形费米子相空间中带有第二类约束系统的变形量子化”，Mod. Phys. Lett. A 37，第17期，2250107（2022年），doi:10.1142/S0217732322501073[35] S. Mrowczynski，“费米子场的维格纳泛函”，《物理评论 D》87，第6期，065026（2013年），doi:10.1103/PhysRevD.87.065026 [arXiv:1212.5703 [高能物理理论]].[36] B. S. DeWitt，《超流形》，剑桥大学出版社，2012年，ISBN 978-1-139- 24051-2，978-0-521-42377-9，doi:10.1017/CBO9780511564000[37] T. Engl, P. Pl¨oßl, J. D. Urbina 和 K. Richter，“费米子福克空间中的半经典传播子”，Theor. Chem. Acc. 133，1563（2014年），doi:10.1007/s00214- 014-1563-9 [arXiv:1409.4196 [physics.chem-ph]].[38] A. Kafuri，“路径积分与变形量子化：费米子情形”，理学硕士论文，Cinvestav，墨西哥（2025年） [arXiv:2602.00367 [量子物理]]。

[39] J. Glimm 与 A. Jaffe，《量子物理学：泛函积分观点》，Springer，1987，ISBN 978-0-387-96477-5，978-1-4612-4728-9 doi:10.1007/978-1- 4612-4728-9

[40] P. Sharan，《路径积分的$*$-乘积表示》，《物理评论 D》**20**，414（1979）doi:10.1103/PhysRevD.20.414

[41] J.Berra-Montiel，《相干态路径积分的星积表示》，《欧洲物理学杂志 Plus》 **135**，第11期，906（2020）doi:10.1140/epjp/s13360-020-00930-7[arXiv:2007.02483 [量子物理]]。

[42] S. Mrowczynski，《关于杨-米尔斯场的规范协变维格纳函数的若干评述》，《物理学杂志 G》 **13**，L33-L37（1987）doi:10.1088/0305-4616/13/4/001[43] S. Mrowczynski 与 B. Muller，《量子场动力学的维格纳泛函方法》，《物理评论 D》**50**，7542-7552（1994）doi:10.1103/PhysRevD.50.7542[arXiv:高能物理理论/9405036 [高能物理理论]]。

[44] H. Garc´ıa-Compe´an、J. F. Pleba´nski、M. Przanowski 和 F. J. Turrubiates，《经典场的变形量子化》，Int. J. Mod. Phys. A **16**，2533-2558（2001）doi:10.1142/S0217751X01003652 [arXiv:hep-th/9909206 [hep-th]]。

[45]I. Galaviz、H. Garc´ıa-Compe´an、M. Przanowski 和 F. J. Turrubiates，《费米场的变形量子化》，《物理年鉴》**323**，827-844（2008年）doi:10.1016/j.aop.2007.05.006 [arXiv:hep-th/0703125 [hep-th]]。

[46]B. Carballo P´erez 和 H. Garc´ıa-Compe´an，《通过变形量子化得到Rarita-Schwinger量子自由场》，《基础物理学》**42**，362-368（2012年）doi:10.1007/s10701-011-9605-9 [arXiv:1104.5067 [hep-th]]。

[47]E. A. Polyakov，《费米子的格拉斯曼相空间方法：揭示经典概率结构》，物理评论**A94**，062104（2016年），doi:10.1103/PhysRevA.94.062104 [arXiv:1609.06360 [量子物理]]。

[48]N. Mueller 和 R. Venugopalan，《构造具有内部对称性的相空间分布》，《物理评论 D》**99**，第5期，056003（2019年），doi:10.1103/PhysRevD.99.056003 [arXiv:1901.10492 [高能物理理论]]。[49] H. Garc´ıa-Compe´an、J. F. Pleba´nski、M. Przanowski 和 F. J. Turrubiates，《玻色弦的变形量子化》，物理学杂志**A33**，7935–7953（2000年），doi:10.1088/0305-4470/33/44/305 [arXiv:hep-th/0002212 [高能物理理论]]。