arXiv:2603.03567v1 [math.CA] 3 Mar 2026

关于k点构形集的豪斯多夫维数及 Elekes-Rónyai 型定理

MINH-QUY PHAM

摘要。我们证明了三元实解析函数的 Elekes-Rónyai 定理的一个“维数扩张”版本：若f是三元实解析函数，则f要么局部具有$g(h(x)+k(y)+l(z))$的形式，要么满足以下结论：每当博雷尔集$A\subset\mathbb{R}$的豪斯多夫维数为$\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f(A\times A\times A)$的维数都显著大于$A$的维数，即

$$\dim_H f(A\times A\times A)\geq \alpha+\varepsilon(\alpha),\quad \text{for some } \varepsilon(\alpha)>0,$$

此外，若 $\alpha>\frac{2}{3}$，则$f(A\times A\times A)$具有正的勒贝格测度。这显著推广了 Koh、T. Pham 和 Shen 的结果（*J. Funct. Anal.* **286** (2024)）。

我们还为 Raz 和 Zahl（*Geom. Funct. Anal.* **34** (2024)）所建立的关于二元实解析函数的 Elekes-Rónyai 型定理给出了另一种证明，并对其作了改进。

我们从更一般的结果推导出这些结论：通过利用相关傅里叶积分算子族的最优 L^2-型 Sobolev估计，证明薄集的各种k点构形集具有正的勒贝格测度。我们将 Greenleaf、Iosevich 和 Taylor（*Mathematika* **68**(2022)，*Math. Z.* **306**(2024)）为证明 Mattila-Sjölin 型定理所发展的框架加以扩展，从而为许多构形集得到 Falconer 型结果；若要求其具有非空内点，这种方法便无法发挥作用。具体而言，当$k=2$时，我们将 Eswarathasan、Iosevich 和 Taylor（*Adv. Math.* **228**(2011)）针对满足强非消失曲率条件的 $\mathbb{R}d$ 中度量函数所建立的 Falconer 型结果，以及 Greenleaf、Iosevich 和 Taylor（*J. Geom. Anal.* **31** (2021)）的非对称 Mattila-Sjölin 型结果，推广到更广泛的一类非对称形式的光滑函数。 $\Phi:\mathbb{R}m\times\mathbb{R}n\to\mathbb{R}$，其中 $1\leq m\leq n$，并满足某些较弱的非退化条件。

关键词。 Elekes-Rónyai 定理、傅里叶积分算子、豪斯多夫维数。**MSC**。 主要分类：28A75、28A80、58J40、42B10；次要分类：52C10。

1. 引言

本文运用傅里叶积分算子技术，研究几何测度论中两类相关问题：关于多项式维数扩张性质的 Elekes-Rónyai 型定理，以及针对k点 Φ-构形的扩张问题、Falconer 型问题和 Mattila-Sjölin 型问题。

关于扩张多项式的 Elekes-Rónyai 定理 [ER00，RZ24]，我们发现，若二元实解析函数不具有某种特定形式（例如$f(x,y)=x+y$），则与之相关的一族傅里叶积分算子对应于一种折叠

日期：2026年3月5日。

典范关系（即余切空间投影至多具有惠特尼折叠奇点）。我们证明，对于豪斯多夫维数足够大的博雷尔子集 $A \subset \mathbb{R}$，像集 $f(A \times A)$ 的维数等于 1（这是可能达到的最大值），甚至具有正的勒贝格测度。对于三元解析函数，也存在类似的“维数扩张”现象。

我们给出了一些非退化条件，使得当底层集合具有足够高的豪斯多夫维数时，某些类型的构形集具有正的勒贝格测度或非空内点。这扩展了 [EIT11、GIT21、GIT22、GIT24] 中的方法和结果，将其推广到更广泛的 k点构形。

1.1. 解析函数的维数扩张与 Elekes-Rónyai 型定理 s

Erd ″os 的不同距离问题及其他几何问题，与加法组合学和离散几何中的扩张多项式问题有着密切联系；而许多关于代数对象的组合问题，往往会引出距离、直线、圆、和积型问题等几何问题中的应用。1983年，Erd ″os 和 Szemerédi [ES83] 证明：如果 A $\subset \mathbb{R}$ 是一个有限集合，那么和集 A + A = {a + a′ : a, a′ ∈ A} 或积集 A · A = {aa′ : a, a′ ∈ A} 的基数必定远大于 A 的基数，也就是说，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\#(A+A) + \#(A \cdot A) \gtrsim (\#A)^{1+\varepsilon}.$$

一方面，这一结果背后的直觉是，大集合不可能同时表现得既像等差数列又像等比数列。另一方面，这一结果也暗示，既然多项式是加法和乘法的组合，那么可以预期类似的结果对一般多项式也成立，除非该多项式具有与群相关的特殊形式。

对多项式零点集的代数结构及其与笛卡尔积的交集的研究，始于 Elekes 和 Rónyai [ER00], 以及 Elekes 和 Szabó [ES12],的工作，这项研究在 Erd ″os 型问题中有许多应用。Elekes 和 Rónyai 证明，若 f 是实二元多项式，则要么 f 具有特殊形式 g (h(x)+k(y)) 或 g (h(x)·k(y))，其中 g、h、k 是实一元多项式；要么对于所有基数为 n 且 n 充分大的有限集 A、B $\subset \mathbb{R}$，都有

$$\#f(A \times B) \geq cn,$$

对于某个常数 $c > 0$，它取决于 f。最近，Solymosi 和 Zahl [SZ24] 将下界改进为

$$\#f(A \times B) \gtrsim n^{3/2}.$$

如果f不是上述特殊形式多项式，我们就称它为扩张多项式。组合几何中 Elekes-Rónyai 定理的推广和类似结果可见 [ES12、RSdZ16、RSS16、RSdZ18、RST20] 及其中的参考文献。在 [Tao15], Tao 为有限域上的二元多项式建立了 Elekes-Rónyai 结果的一种变体。关于 Elekes-Rónyai 型问题近期进展与应用的全面综述，读者可参阅 [Z18]。

在连续情形下，也可以提出关于扩张函数的类似问题：将基数为 n 的有限集替换为豪斯多夫维数为 α 的分形集。Bourgain[Bou10] 证明了子集的以下“维数扩张”结果： $\mathbb{R}$:

定理 1.1 (Bourgain [Bou10])。 对于每个 $0 < \alpha < 1$，存在一个数 $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$，使得以下结论成立。设 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个满足$\dim_H A = \alpha$的博雷尔集。那么存在 $\lambda \in A$，使得

$$\dim_H (A + \lambda A) \geq \alpha + \varepsilon.$$

事实上，Bourgain 从其关于离散化情形下 δ， $\alpha)_2$集投影的更深层结果 [Bou03，Bou10]中推导出了定理1.1 。他的研究影响深远，推动了几何测度论和调和分析中多个长期悬而未决问题的解决与发展，例如 Kakeya 问题、Furstenberg 集问题、离散化和积问题、离散化投影问题以及 Falconer 距离问题；近期进展可参见例如 [OSW25、OS23、RW23、Shm23、SW25、WZ25] 及其中的参考文献。

与定理 1.1的主题类似，Raz 和 Zahl [RZ24] 证明了适用于二元实解析函数的 Elekes-Rónyai 定理的“维数扩张”版本。为方便起见，固定一个包含 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$的连通开集 $[0,1]^2$；给定解析函数 $f \in C^\omega(\Omega)$，以及 $A,B \subset \mathbb{R}$，记 $\Delta_f(A,B) := f(A \times B)$。我们回顾一下 [RZ24]中的以下定义和定理。

定义 1.2。 设 $f \in C^\omega(\Omega)$ 是一个实二元实解析函数。若在 $\Omega \setminus \left(\{\partial_x f = 0\} \cup \{\partial_y f = 0\}\right)$ 的每个连通区域上，都存在单变量实解析函数 g、h 和 k，使得 $f(x,y) = g(h(x) + k(y))$，则称 f 是一种解析特殊形式。</output>

定理 1.3 (Raz 和 Zahl [RZ24])。 对于每个 $0 < \alpha < 1$，存在 $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$，使得以下结论成立。设 $f \in C^\omega(\Omega)$ 为解析的。那么，要么 f 是解析特殊形式，要么对于任意一对豪斯多夫维数至少为 α的博雷尔集 A， $B \subset [0,1]$，都有

$$\dim_H \Delta_f(A,B) \geq \alpha + \varepsilon.$$

事实上，Raz 和 Zahl 还建立了 Elekes-Rónyai 定理的离散化版本，该版本是在（δ， α）$_2$ 集的框架下由能量弥散估计推导而来。为此，他们引入了辅助函数 $\kappa_f(x,\ y)$，用于量化函数 f 是否类似于特殊形式。当函数 $\kappa_f(x,\ y)$ 与 0 保持正距离时，作者运用了加法组合学中的思想，并应用 Shmerkin 非线性离散投影定理 [Shm23]来获得能量弥散估计。他们还证明了其他相关结果，包括涉及 Blaschke 曲率的固定点距离问题和非线性投影，详见 [RZ24]以了解更多细节。

本文中，我们给出定理 1.3 的另一种证明，并在底层集合的维数足够大时给出明确的下界。更准确地说，当维数 $_H\Delta_f(A,B) \geq \alpha+\varepsilon$（其中 ε 非常小且未明确给出）改进为 $\varepsilon(\alpha)=\frac{3\alpha-2}{3}$ 时，我们改进了下界 $\alpha>\frac{2}{3}$。此外，我们还能够加强定理的结论：若 $\Delta_f(A,B,$ 则其勒贝格测度为正 $\alpha>\frac{5}{6}$。

我们的结果表述如下。

定理 1.4。设 $\alpha,\beta\in(0,1],$，并设 $f\in C^{\omega}(\Omega)$ 是一个二元实解析函数。那么，f 要么是解析特殊形式，要么对于每一对博雷尔集 $A,B\subset[0,1]$，若 $\dim_H A=\alpha$，且 $\dim_H B=\beta$，则有以下结论：

(i) 若 $\alpha+\beta\leq\frac{5}{3}$，则 $\dim_H\Delta_f(A,B)\geq\max\{\alpha+\beta-\frac{2}{3},0\}$。(ii) 若 $\alpha+\beta>\frac{5}{3}$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta_f(A,B))>0$。

注 1.5。尽管 [RZ24] 中的框架优雅且能够得到离散化版本，但它仅适用于维数较小的集合，所产生的维数增益 $\varepsilon(\alpha)$ 并非显式，且无法提供定量信息，因为 α 趋近于 1。特别是，他们的方法无法证明像集 $f(A,B)$ 具有正的勒贝格测度。定理 1.4 针对维数足够大的集合弥补了这一缺口。根据定理 1.4 (i)，若 $\alpha\in\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6}\right]$，$A,\ B\subset[0,1]$ 是维数至少为 α 的博雷尔集，我们便可得到一个显式的维数估计

$$\dim_H\Delta_f(A,B)\geq\alpha+\left(\alpha-\frac{2}{3}\right),$$

这改进了定理1.3在这一范围内的结论。当 $\alpha\in\left(\frac{5}{6},\ 1\right]$，我们通过建立构型测度的 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A,\ B)\right)>0$ L^2可积性，得到一个定性上更强的结论；单凭维数增益无法推出这一结论。这一结果是新的，似乎也无法通过其他方法获得。

定理 1.4 以及三元定理1.8均可由我们的一般定理推出。为此，我们采用傅里叶积分算子（FIO）和微局部分析技术，将 [GIT21、GIT22、GIT24] 的划分优化方法从 Mattila-Sjölin 型定理（非空内点）拓展至 Falconer 型（正勒贝格测度）和扩张型问题。这种方法与 Raz 和 Zahl 的工作中所用的方法截然不同，但我们将看到，前述辅助函数 κ_f(x,y) 也会自然地出现在我们的框架中。当κ_f(x, y) 非零时，我们证明相关的傅里叶积分算子族与一个折叠典范关系 Λ 相联系；按照 Melrose 和 Taylor [MT85], 的定义，该关系 Λ 在左右余切空间投影中都呈现惠特尼折叠奇点 π_L π_R。奇点的性质使我们能够利用这些算子的尖锐 L^2 型 Sobolev估计 [MT85] 。这使我们得以绕过技术上复杂的离散化论证以及 [RZ24]中非线性投影定理的应用。详情将在后续章节讨论。

注 1.6. 近期，Demeter 和 O'Regan [DO26] 研究了一个特殊的扩张函数$f(x,y) = x(x+y)$，并为该函数得到了一个改进的界。给定博雷尔集 $A,B \subset [0,1]$满足 $\dim_H A = \alpha, \dim_H B = \beta$，其中 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, 他们证明了

$$\dim_H \Delta_f(A,B) \geq \frac{2(\alpha+\beta)}{3}.$$

这一结果源自 δ-离散化版本，处于 Katz 和 Tao $(\delta,\alpha)_2$ 集的情形下，详见 [DO26]。然而，这一结果无法给出一段 α, β 使得 $\Delta_f(A,B)$ 具有正的勒贝格测度。

关于三元多项式的 Elekes-Rónyai 定理由 SSdZ13、RSdZ18], 得出，因此可以预期，类似于定理 1.3 和定理 1.4 的结果也适用于三元解析函数。在这方面，假设 f (x, y, z) 是一个关于三个变量的二次多项式，且依赖于每个变量，并且不具有 g (h(x)+k(y)+l (z)) 的形式，Koh、T. Pham 和 Shen [KPS24] 证明：若 A、B、C $\subset \mathbb{R}$ 是满足 $\dim_H$A $+\dim_H$B $+\dim_H$C >2的博雷尔集，则集合

$$\Delta_f(A,B,C) := f(A \times B \times C) = \{f(x,y,z) : x \in A, y \in B, z \in C\}$$

具有正的勒贝格测度。排除形如$g(h(x) + k(y) + l(z))$的多项式是自然且必要的，因此我们有以下关于解析特殊形式解析函数的定义。沿用二元情形的记号，现在设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个包含 $[0,1]^3$, 的连通开集。对于解析函数f: $\Omega \to \mathbb{R}$ 以及博雷尔集$A,B,C \subset [0,1]$，记$\Delta_f(A,B,C) := f(A \times B \times C)$。

定义1.7。 设$f \in C^{\omega}(\Omega,\mathbb{R})$是 Ω上的解析函数。若f在每个连通区域上都是解析特殊形式，则称其为

$$\Omega \setminus \big(\{\partial_x f = 0\} \cup \{\partial_y f = 0\} \cup \{\partial_z f = 0\}\big),$$

存在单变量实解析函数g、h、k和l，使得$f(x,\ y,\ z) = g(h(x) + k(y) + l(z)$。

以下关于三个变量的 Elekes-Rónyai 型定理是对 Koh、T. Pham 和 Shen [KPS24]的重大推广。

定理1.8。 令 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,1]$。设 $f \in C^{\omega}(\Omega)$ 是一个三元实解析函数，且 $\partial_x f$、$\partial_y f$ 和 $\partial_z f$ 在 Ω 上不恒为零。则 f 要么是解析特殊形式，要么对于满足 维数$_H A = \alpha$、维数$_H B = \beta$以及维数$_H C = \gamma$ 的博雷尔集 $A,B,C \subset [0,1]$，有如下结论：

(i) 若 $\alpha+\beta+\gamma \le 2$，则维数$_H \Delta_f(A,B,C) \ge \max\{\alpha+\beta+\gamma-1,$ $0\}$。(ii) 若 $\alpha+\beta+\gamma > 2$，则 $\mathcal{L}^1\big(\Delta_f(A,B,C)\big) > 0$。

定理 1.8 的证明与定理1.4的证明思路相同，尽管技术上更为复杂。我们引入辅助函数族 $\{\mathcal{G}_i(x,y,z)\}^3_{i=1}$，用于衡量函数$f$是否呈现某种特殊形式。一个关键事实是，对于解析函数$f\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$，当且仅当$f$局部具有特殊形式时，这些辅助函数才在 Ω 上恒等于零。另一方面，如果这些函数中至少有一个不为零，我们便证明相关的傅里叶积分算子族与一个非退化典范关系相关联，从而可以利用已知的最优L^2型Sobolev估计得到相应结果。

注1.9。

(i) 定理 1.8 (ii) 推广了 Koh、T. Pham 和 Shen [KPS24] 关于二次多项式的结果。在那篇论文中，他们将有限域模型中的组合论论证与 Eswarathasan、Iosevich 和 Taylor [EIT11]提出的傅里叶积分算子框架相结合，以证明该结果；然而，其证明在技术上错综复杂，且高度局限于三个变量的二次情形，因此推广起来极为困难。在 [Pha25], 中，我们用投影理论方法简洁地证明了这一结果。最近，在 [LPS26],中，Liao、T. Pham 和 Shen 对支撑在L^2 上的自然测度的平滑化 $\Delta_f(A,B,C)$能量证明了一个估计。

(ii) 我们注意到， [PVdZ19]中建立了关于三元二次多项式的有限域 Elekes-Rónyai 型定理。关于有限域情形下扩张多项式问题的一些最新进展，可参见 [AC25]。

注1.10。

(i) 定理1.8 (ii) 中的维数阈值是锐的。例如，取$f(x、y、z) = x(y+z), A = \{0\}, B = C = [0,1]$。那么

$$\dim_H A + \dim_H B + \dim_H C = 2,$$

但 $\dim_H \Delta_f(A,B,C) = 0$，因此 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A,B,C)\right) = 0$。此例还表明，条件 $\dim_H A, \dim_H B, \dim_H C > 0$ 是必要的。

(ii) 定理 1.8 中，条件 f必须依赖于所有变量且不是解析特殊形式，是必要的。事实上，例如，若 $\partial_x f \equiv 0$，则 f只依赖于两个变量 y 和z。

另一方面，若 $f(x,y,z) = x + y + z$，则对任意 $0 \le \alpha \le \beta \le \gamma \le 1$，都可以找到一个紧集 $A \subset [0,1]$，使得

$$\dim_H A = \alpha, \quad \dim_H (A + A) = \beta, \quad \text{and} \quad \dim_H (A + A + A) = \gamma,$$

这由 Schmeling 和 Shmerkin 的一项结果推出 [SS10]（另见 [Fal85]）。

注 1.11。 我们还将维数扩张结果推广到了光滑函数情形。这些结果的精确表述见第 3、4 和5节。

注 1.12。 显然，若能将这些结果推广到k元函数f将十分理想；如下文所述，基础的微局部方法正是在这一设定下构建的。虽然我们的方法或许能够刻画k元实解析函数的解析特殊形式，但本文不探讨这一目标，因为典范关系和傅里叶积分算子的分析将会复杂得多。我们希望在未来的工作中再探讨这一问题。

1.2. k点构形集

我们利用傅里叶积分算子技术，将研究推广到各种k点构形集的 Falconer 型问题，证明当底层集合的豪斯多夫维数足够大时，某些类型的构形集具有正的勒贝格测度。我们首先回顾 Grafakos、Greenleaf、Iosevich 和 Palsson 在 Φ-构形集中引入的表述 [GGIP15]。

设$k,p \ge 1$，并设X_i为维数为d_i的光滑流形，其中每个指标 $1 \le i \le k$。记$X = X^1 \times \cdots \times X_k$，并令 $\dim X = \sum_{i=1}^{k} d_i = n$。

定义 1.13. 设 $\Phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}^p)$ 是一个光滑函数。假设$A_i \subset X_i$， $1 \le i \le k$，均为紧集。那么k 点 Φ构型集 的A_i 为

$$\Delta_\Phi(A_1, \dots, A_k) := \left\{ \Phi(x^1, \dots, x^k) : x^i \in A_i, 1 \le i \le k \right\} \subset \mathbb{R}^p.$$

主要目标是找出关于 Φ 的非退化条件，并确定一个维数阈值 $s_0 = s_0(\Phi) \in (0, \dim X)$，使得只要 $\sum \dim_H(A_i) > s_0$, 构型集 $\Delta_\Phi(A_1, \dots, A_k)$ 具有正的 p 维勒贝格测度。我们注意到，对于一般的光滑函数，如果没有进一步的假设，临界指数 $s_0(\Phi)$ 可能并不存在。事实上，根据惠特尼延拓定理 [Whi34], ，对于任意闭集 $K \subset \mathbb{R}^n$，都可以构造一个光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$，使得 $K = f^{-1}(0)$，从而 $\mathcal{L}^1(f(K)) = 0$。注意，K 可以是具有较大豪斯多夫维数的分形集。因此，为了获得 Falconer 型结果，需要对构形函数施加某些非退化条件。

为简单起见，我们先讨论$k = 2$ 且$p = 1$的情形，之后再讨论一般情形。我们将针对紧集陈述结果，并指出这些结果自然也适用于博雷尔情形。

在 1985 [Fal85], Falconer 提出了距离集问题，并证明：若紧集$A \subset \mathbb{R}^d$（$d \ge 2$）的豪斯多夫维数 $\dim_H A > \frac{d+1}{2}$，则其距离集 ——

$$\Delta(A) := \left\{ |x - y| : x, y \in A \right\}$$

具有正的勒贝格测度。此外，他猜想，对于$d \ge 2$，维数阈值应为$d/2$。这个猜想在所有维数下仍未解决，而且指数$d/2$已知是尖锐的。近几十年来，人们发展了多种解析和几何方法，以降低距离集 $\Delta(A)$具有正勒贝格测度所需的维数阈值。目前已知的最佳阈值由以下结果给出

$$\dim_H A > \begin{cases} \frac{5}{4}, & d = 2 \quad \text{(Guth, Iosevich, Ou, and Wang [GIOW20])} \\ \frac{d}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8d+4}, & d \ge 3 \quad \text{(Du, Ou, Ren, and Zhang [DORZ23a, DORZ23b])} \end{cases}.$$

关于距离问题中维数阈值的早期改进，可参见[Bou94、DGO+21、DIO+21、DZ19、Erd05、Wol99]。

关于 2–点 Φ构型函数的一般性结果，最早由 Eswarathasan、Iosevich 和 Taylor 在 [EIT 11], 中给出，他们证明，若 $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$d \ge 2$具有非零蒙日-安培行列式 (又称 *Phong-Stein* 旋转曲率条件)，即

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \nabla_y \Phi \\ (\nabla_x \Phi)^T & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_j} \end{bmatrix} \neq 0, \tag{1.1}$$

and $A,B \subset \mathbb{R}^d$是紧集，且 $\dim_H A + \dim_H B > d+1$，那么像集

$$\Delta_\Phi(A,B); = \{\Phi(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

具有正的勒贝格测度。对于距离集问题， Φ 是欧几里得距离函数$\Phi(x,y) := |x-y|$，其中x、$y \in \mathbb{R}^d$，而 $\Delta_\Phi(A,B) = \Delta(A,B)$是距离集。

一般而言，我们考虑一个光滑函数 $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$，其中$X \subset \mathbb{R}^{d_X}$、$Y \subset \mathbb{R}^{d_Y}$是开集，对于$d_X$、$d_Y \geq 1$。光滑函数 Φ 既不一定满足非消失曲率条件，也不一定定义度量（$d_X \neq d_Y$）。然而，人们可以预期，满足某些温和非退化条件的函数仍然具有 Falconer 型结果，即使在各变量贡献不对称的情况下也是如此。此外，自然可以预期，阈值$s_0(\Phi)$由该函数的退化阶数决定；也就是说，退化阶数越高，阈值$s_0(\Phi)$就越大。事实上，这种关系可以通过构型函数的混合海森矩阵的秩来刻画。

在这一设定下，我们的主要结果如下。

定理 1.14. 设 $X \subset \mathbb{R}^{d_X}$、$Y \subset \mathbb{R}^{d_Y}$为开集，其中 $d_X, d_Y \geq 1$。设 $\Phi \in C^\infty(X \times Y, \mathbb{R})$ 是一个光滑函数。假设

$$\nabla_x \Phi(x,y) \neq \mathbf{0}, \nabla_y \Phi(x,y) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x,y) \in X \times Y,$$

并且对某个 $r \geq 1$,

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_j}\right] \geq r, \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

假设 $A \subset X$ 且 $B \subset Y$ 是紧集。那么有以下结论：

(i) 对任意 $0 < u < 1$，若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d_X + d_Y - r + u$，则 维数$_H(\Delta_\Phi(A,B)) \geq u$。

(ii) 若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d_X + d_Y + 1 - r$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A,B)) > 0$。

(iii) 若维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d_X + d_Y + 2 - r$，则 $\Delta_\Phi(A$、$B))$ 具有非空内部。

容易看出，若 $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 满足非消失曲率条件（1.1），则秩$\left[\partial^2_{i\partial} \Phi_{xy_j}\right] = d$处处成立。定理 1.14~~的~~一个直接推论如下。

定理 1.15. 设 X、$Y \subset \mathbb{R}^d$是开集，其中 $d \geq 1$。设 $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ 是满足 *Phong-Stein* 旋转曲率条件 （1.1）的光滑函数。假设 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 是紧集。则有以下结论：

(i) 对于任意 $0 < u < 1$，若 $\dim_H A + \dim_H B > d + u$，则 $\dim_H(\Delta_\Phi(A,\ B)) \geq u$。

(ii) 若 $\dim_H A + \dim_H B > d + 1$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A, B)) > 0$。

(iii) 若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d + 2$，则 $\Delta_\Phi(A, B))$ 具有非空内部。

我们注意到，定理1.15 (ii) 得到了 Eswarathasan、Iosevich 和 Taylor 的结果 [EIT11]，他们采用傅里叶积分算子方法，将 Falconer 定理推广到满足曲率条件（1.1）的光滑度量函数类。定理 1.15 的 (i) 和 (iii) 部分则为我们提供了有关构型集豪斯多夫维数的更多信息。在 [IL19]，Iosevich-Liu 针对固定点 Φ-构型集证明了一个更强的结果，前提是 Φ 还满足 Sogge 电影曲率条件。然而， [EIT11] 和 [IL19] 的结果不适用于非对称形式的函数 $\Phi: \mathbb{R}^{d_X} \times \mathbb{R}^{d_Y} \to \mathbb{R}$，其中 $d_X \neq d_Y$。

注记 1.16。

（i）定理 1.14 将 [EIT11] 所开创的研究拓展到了更广泛的光滑函数类$\Phi: X \times Y \to \mathbb{R}$，其中 d_X和 d_Y不一定彼此相等。Mattila-Sjölin 型结果，即（iii）部分中的结果，已由 Greenleaf、Iosevich 和 Taylor[GIT21]得到。 Φ 上的非退化条件以及由此得到的L^2-Sobolev 估计都是标准的。维数阈值 $s_0(\Phi)$ 是明确的，取决于环境空间的维数以及 Φ的混合海森矩阵的秩。

在以下讨论中，我们将重点关注定理 1.14的（ii）部分：

（ii）定理 1.14 中对 Φ 的非退化条件是必要的。事实上，若 $\nabla_x \Phi \equiv 0$，或$\nabla_y \Phi \equiv 0$，则 Φ 分别不依赖于 x 或 y。若 $\operatorname{rank}\left[\partial^2_{x_i y_j} \Phi\right]$ 恒等于零，则 Φ 不含混合项 f (x)g (y)，因而无法得到正面的结果。Elekes-Rónyai 型定理中已证明了这一点，因为特殊形式 f (x, y) = h(x) +k(y) 的混合海森矩阵为零。例如，考虑 $\Phi: \mathbb{R}^{d_X} \times \mathbb{R}^{d_Y} \to \mathbb{R}, \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{k} (x_i + y_i)$，其中 $x \in \mathbb{R}^{d_X}$，$y \in \mathbb{R}^{d_Y}$。可以利用 Jarnik 定理（见 [Fal85]）构造一个紧集 $C \subset [0,1]$，使得 $\dim_H C = 1$ 且 $\mathcal{L}^1\left(\sum_{i=1}^{d_X+d_Y} C\right) = 0$。令 $A = C \times \cdots \times C \subset \mathbb{R}^{d_X}$，且 $B = C \times \cdots \times C \subset \mathbb{R}^{d_Y}$，则 $\dim_H A + \dim_H B = d_X + d_Y$，但 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A, B)) = 0$。

（iii）对于任意光滑函数 $\Phi: X \times Y \to \mathbb{R}$，我们总有秩 $\left[\partial^2_{x_i y_j} \Phi\right] \leq \min\{d_X, d_Y\}$。因此，从定理1.14 （ii）中所能期待的最佳维数阈值是

$$\dim_H A + \dim_H B > \max\{d_X, d_Y\} + 1.$$

对于许多我们感兴趣的构形函数，例如距离或点积问题（当$d_X = d_Y$时），这个界并不尖锐。然而，我们稍后将看到，在某些情况下，如果

Φ 满足更强的非退化条件，那么我们可以将这一维数阈值降低到

$$\dim_H A + \dim_H B > \frac{d_X + d_Y + 1}{2}.$$

(iv) 根据定理 1.14(ii)，当处处有 $\operatorname{rank}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial_i \partial} xy_j\right] \leq 1$ 时，可得下界

$$\dim_H A + \dim_H B > d_X + d_Y,$$

而这显然没有实际意义。因此，定理1.14 (ii)无法确保临界指数 $s_0(\Phi) \in (0, d_X + d_Y)$ 的存在。同样，若 Φ 满足更强的非退化条件，即使 $\operatorname{rank}(H_{x,y}\Phi) = 1$，我们也能得到积极结果。

当 $k \geq 2$ 且 $p \geq 1$ 时，自然会想到针对更一般几何构型提出 Falconer 型问题。这些构型包括三角形 [GI12,PR23], 单形 [GILP15,IPPS25], k链 [BIT16],体积 [EHI13, GIM15, SY25],, 以及由两两距离或点积方程组编码的图；例如参见 [BFOP25, CŁP16, IL19, ILX22, IT19, OT22], 及其中的参考文献。

在一系列三篇论文中，Greenleaf、Iosevich 和 Taylor [GIT21、GIT22、GIT24] 运用傅里叶积分算子技术，建立了一个研究一般类 k 点构形的框架。更准确地说，他们针对各种 Φ-构形得到了 Mattila-Sjölin 型结果，证明存在一个 k 阈值 $r_0(\Phi) > 0$，使得若 $\sum \dim_H A_i > r_0$,，则集合 $\Delta_\Phi(A_1, \ldots, A_k)$ 包含一个开集，即 $=1$ 具有非空内部。这类问题的研究动机来自 Mattila 和 Sjölin 的工作 [MS99], : 他们证明，若 $A \subset \mathbb{R}^d$，$d \geq 2$ 是一个满足 $\dim_H A > d_2^{+1}$ 的紧集，则距离集 $\Delta(A)$ 有非空内部。 [GIT21、GIT22、GIT24] 中的结果是通过考察支撑在 $\Delta_\Phi(A_1, \ldots, A_k)$ 上的构型测度 ν，并将构型函数 Φ 与一族线性或多线性广义 Radon 变换 $\{\mathcal{R}_t\}_{t \in \mathbb{R}^p}$联系起来而得到的。密度 $d\nu$ 的连续性是根据这族广义 Radon 变换的 L^2-Sobolev 映射性质推导出来的，由此他们得出结论： $\Delta_\Phi(A_1, \ldots, A_k)$具有非空内部。 [GIT24] 中的主要结果的一个应用，是简洁地证明 Palsson 和 Romero Acosta 关于 $\mathbb{R}^d$中三角形全等类的结果[PR23] 。关于其他几何构型的最新 Mattila-Sjölin 型结果，参见例如 [BFOP25、KPS22、GIT24、PRA25]。

遗憾的是，在某些情形下，我们感兴趣的构型函数并不满足 [EIT11] 或 [GIT21,GIT22, GIT24] 结果的假设，原因很简单：充分k k条件变得空洞，例如 $\sum \dim_H A_i > \sum d_i$。因此，对于某些函数类（包括 Elekes-Rónyai 型函数）而言，即使是 Mattila-Sjölin 型问题，这些结果也无法给出非平凡的$i=1$ $i=1$指数。尽管如此，那些论文中发展的技术构成了

本文工作的基础。为简单起见，我们考虑一个$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$上的三变量光滑函数，并设$A$、$B$、$C \subset \mathbb{R}$为紧集。定义

$$\Delta_f(A,B,C) := f(A\times B\times C) = \{f(x,y,z) : x\in A, y\in B, z\in C\}.$$

显然，f不是度量函数，因此 [EIT11] 中的结果无法应用。若应用 [GIT24], 中的定理 2.6，则集合 Δ_f (A,B,C)具有非空内点，如果

$$\dim_H A + \dim_H B + \dim_H C > \max\{2,1\} + 1 + \beta \geq 3,$$

其中 $\beta \geq 0$ 衡量相关三线性傅里叶积分算子在L^2-索伯列夫空间上的损失（若有）。这对所有 $\beta \geq 0$ 都是空洞的。

在本文中，我们研究构型测度 ν(t)的L^2 范数，而不是其密度的连续性。通过改造 [GIT21、GIT22、GIT24], 中发展的傅里叶积分算子方法，我们对一大类k–点构形得到了Falconer型结果，这些结果对上文所述解析函数的Elekes-Rónyai 问题具有引人入胜的应用。为实现这一目标，关键步骤是将2k个变量划分为两个群I、J，并将 $\int |\nu(t)|^2 dt$表示为支撑在某些A_i（i ∈I）上的Frostman 测度 μ_i的张量积，与作用于Frostman 测度μ_j（j ∈J）的张量积的傅里叶积分算子$\mathcal{T}_{IJ}$的值之间的配对。对每个划分{I, J}都这样做，并由这些傅里叶积分算子的L^2-索伯列夫映射性质，我们得到一个阈值k $\sum \dim_H(A_i) > s_0(I,J)$，它保证 $\int |\nu(t)|^2 dt$有限。由此可得i=1ν(t)关于勒贝格测度绝对连续，因而 $\mathcal{L}^p$ $(\Delta_\Phi(A_1,\ldots A_k)) > 0$。通过在微局部意义下对所有此类划分进行优化，可以降低该阈值。我们暂且推迟一般定理的陈述，转而讨论如何将我们的一般定理应用于Falconer 型函数和Elekes-Rónyai 型定理；必要的背景见第2节，一般结果的精确陈述见第3节。

我们强调，在应用中，局部（微局部）优化步骤发挥着重要作用；对于许多值得关注的构型而言，这一步极具非平凡性。事实上，这一步要求深入理解与构形函数相关的典范关系的几何性质。这是因为这些典范关系可能在全局上并非非退化，只有经过适当的局部化（微局部化）后才是非退化的（参见 [GIT24]中的各种例子）。因此，通常而言，要为构形函数给出能确保正结果的明确非退化条件颇具挑战性。然而，对于余维一的关联关系，一个关键观察是，关联关系上每个点上方恰好是一条直线，并且关联关系余法丛的开锥覆盖等价于关联关系的开覆盖。通过对关联关系进行仔细的局部化，我们能够

给出能确保余维一函数取得正结果的明确非退化条件。更多细节请参见定理 3.4。

如前几节所示，定理 1.4与定理1.8可由我们的一般结果，即定理 3.1，推出。为证明定理 1.4，出发点是研究支撑在 Δ_f(A, B)上的构型测度 ν(t)的L^2 范数。在我们一般定理的设定下，我们将 $\int|\nu$(t)$|^2$d t表示为一族与典范关系 Λ相关联的傅里叶积分算子。遗憾的是，该典范关系是退化的，因而无法应用定理3.4。然而，事实表明 Λ 以一种特定方式退化。回想一下，若f不是解析特殊形式，则辅助函数 κ(x, y)在该区域上并不恒为零。我们的分析表明，只要 κ(x, y)非零，典范关系 Λ 便是 [MT85]意义下的折叠典范关系：向左与向右的余切空间投影 π_L： Λ → T *X$_L$与 π_R： Λ → T *X$_R$至多具有惠特尼折叠型奇点。这可通过精心选取的典范关系 Λ 的参数化，并利用κ(x, y)非零这一假设来证明。由此我们得以运用损失1/6阶导数的基于L^2–的Sobolev估计 [MT85], , 进而应用定理 3.1得到结论。

现在我们转而概述定理 1.8 的证明。思路与二元函数的情形相同，但我们需要引入一个辅助函数族 $\{\mathcal{G}_i\}^3_{i=1}$，以帮助刻画特殊形式。我们需要证明的一个关键引理是：当且仅当 f 是特殊形式时，这些辅助函数才在定义域上恒等于零。据我们所知，此前尚未有人注意到这一事实。我们通过假设这些辅助函数恒等于零，并求解由此假设得到的齐次一阶偏微分方程组，证明了这一点。该方程组的解恰好就是特殊形式。得到这个引理后，我们可以假设 f 不是特殊形式，因此经过适当的局部化后，至少有一个辅助函数不为零。接着，我们证明相关的典范关系 Λ 是非退化的，从而可以使用标准的 L^2 估计，最终得到结论。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们回顾傅里叶积分算子及相关最佳L^2-索博列夫估计的背景知识。我们还将回顾证明所需的一些关于集合豪斯多夫维数、Frostman测度和索博列夫维数的基本概念与结果。在第3节中，我们详细介绍用于研究k–点构型问题的傅里叶积分算子框架，并证明针对一般构型函数的主要结果，即定理3.1，其中$k \geq 2$，且$p \geq 1$。当$p = 1$时，我们提出一些明确的非退化条件，并证明定理1.14 和1.15。第4 节和第5 节分别将第3 节的一般结果应用于研究二元和三元光滑函数的维数扩张现象。我们的Elekes-Rónyai 型结果，即定理1.4 和1.8，其证明将在

第4 节和第5节中分别给出。在第6节中，我们讨论一般结果在距离集问题一个变体中的应用，即定理6.1。最后，在第7节中，我们将对本文的主要结果作一些评述。

记号。

在全文中，对任意度量空间 X，B(x, r) 表示以 x ∈ X 为中心、半径为 r > 0 的开球。给定子集 A ⊂ X，我们分别用 Int(A) 和 A 表示其内部和闭包；而 $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$ 表示 A 的补集。两个非空紧集 A 与 B 之间的距离记为 d(A, B)，点 x 与紧集 A 之间的距离记为 d(x, A)。A 的豪斯多夫维数记为 $\dim_H A$，而子流形（或实解析子簇）Z ⊂ $\mathbb{R}^d$, d ≥ 1 的维数记为 dim Z。我们用 $\mathcal{L}^d$ 表示欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度。在 $\mathbb{R}^d$ 上具有紧支集 suppμ ⊂ A 的非零拉东测度 μ 的集合记为 $\mathcal{M}$(A)。测度 μ 的傅里叶变换定义为

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, d\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

我们记$X \lesssim Y$，如果存在常数$C > 0$使得$X \leq CY$。如果$X \lesssim Y$且$Y \lesssim X$，则记$X \approx Y$。

设 Ω为一个流形（或 $\mathbb{R}^d$），将 Ω上标准的C^∞函数空间及其紧支集子空间分别记为 $\mathcal{E}(\Omega)$和 $\mathcal{D}$(Ω)，而 $\mathcal{E}'$、 $\mathcal{D}'$ 表示它们的广义函数对偶空间。对于$p \geq 1$，将$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$记为所有光滑映射$f$: Ω → $\mathbb{R}^p$构成的空间；而$C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^p)$表示所有解析映射构成的空间。

对于 $\sigma \in \mathbb{R}$，定义 $\mathbb{R}^d$ 上阶数为 σ 的L^2−索伯列夫空间 为所有满足分布 $\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}$属于$L^2$, 的缓增广义函数$f$构成的空间，并赋予该空间范数

$$\|f\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}^d)} := \left\|\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

设 Ω为维数 dim Ω = d 的紧流形。若 $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$，则称 $f \in L^2_\sigma(\Omega)$，只要对任意坐标片 $U \subset \Omega$ 以及任意 $\psi \in C^\infty(U)$，元素 $\psi f \in \mathcal{E}'(U)$ 属于 $L^2_\sigma(U)$，其中将 U 与其在 $\mathbb{R}^d$ 上的像等同。

2. 关于微局部分析与几何测度论的背景

我们首先对所需的傅里叶积分算子理论作一简短综述，参见 Hörmander [Hör71, Hör85]；然后，我们将回顾集合维数的基本背景。在下一节中，我们将运用这些工具，研究满足某些非退化条件的一类一般构形映射的 Falconer 型与 Mattila-Sj ″olin 型问题。

2.1. 傅里叶积分算子

设 X 为维数为 d 的 C^∞ 流形。余切丛 T^*X 关于典范辛二形式 $\omega = \sum dx_j \wedge d\xi_j$（相对于任意局部坐标）是一个辛流形。$T^*X$ 的零截面 $\{\xi = 0\}$ 记为 0。子流形 $\Lambda \subset T^*X \setminus 0$ 称为锥形的，如果它对 $0 < \tau < \infty$ 在 $(x,\xi) \mapsto (x, \tau\xi)$ 下保持不变。若 Λ 光滑且为锥形，$\dim(\Lambda) = d = \frac{1}{2}\dim(T^*X)$，并且 $\omega|_\Lambda \equiv 0$，则称 Λ 为 T^*X 的锥拉格朗日子流形。

–

设 X 和 Y 分别是维数为 d_X、d_Y 的光滑流形。那么 T^*X、T^*Y 是辛流形，其典范辛二形式分别为 ω_{T^*X}、ω_{T^*Y}。那么 $\omega_{T^*X} - \omega_{T^*Y} = \sum dx_j \wedge d\xi_j - \sum dy_j \wedge d\eta_j$ 是 $T^*X \times T^*Y$ 上的差辛形式。典范关系是子流形 $\Lambda \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)$，相对于 $\omega_{T^*X} - \omega_{T^*Y}$ 是锥状拉格朗日的。

设 $p \geq 1$ 为一个整数，且 $\phi : X \times Y \times (\mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ 为一个光滑相位函数，它关于 $\theta \in \mathbb{R}^p$ 是1次正齐次的，即对于所有 $\tau \in \mathbb{R}_+$，均有 $\phi(x, y, \tau\theta) = \tau \cdot \phi(x, y, \theta)$。令 Σ_ϕ 为关于 θ 变量的 ϕ 的临界集，

$$\Sigma_\phi := \left\{(x, y, \theta) \in X \times Y \times (\mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0}) : d_\theta \phi(x, y, \theta) = 0\right\}.$$

若相位函数 $\phi(x, y, \theta)$ 满足非退化 条件，则称其为非退化的：

$$d_x \phi(x, y, \theta) \neq 0 \quad \text{and} \quad d_y \phi(x, y, \theta) \neq 0, \quad \forall (x, y, \theta) \in \Sigma_\phi,$$

and

$$\operatorname{rank}\left[d_{x,y,\theta} d_\theta \phi(x, y, \theta)\right] = p, \quad \forall (x, y, \theta) \in \Sigma_\phi.$$

这意味着 p 个微分 $\{d(d_{\theta_l}\phi)\}_{l=1}^p$ 线性无关，由此可知 Σ_ϕ 是 $X \times Y \times (\mathbb{R}^p \setminus 0)$ 的一个 C^∞ 锥子流形，其余维为 p。此外，可以验证映射

$$F : \Sigma_\phi \ni (x, y, \theta) \to (x, d_x\phi(x, y, \theta); y, -d_y\phi(x, y, \theta)) \in (T^*X \setminus \mathbf{0}) \times (T^*Y \setminus \mathbf{0})$$

是一个浸入，其像 $C_\phi := F(\Sigma_\phi)$ 是一个浸入的典范关系；称相位函数 ϕ 为 C 的参数化 ϕ。

设 $\Lambda \subset (T^*X \setminus \mathbf{0}) \times (T^*Y \setminus \mathbf{0})$ 为一个典范关系，且 $m \in \mathbb{R}$，定义 $I^m(X, Y; \Lambda)$ 为阶数为 m 的傅里叶积分算子 $A : \mathcal{E}'(Y) \to \mathcal{D}'(X)$ 类。该类由如下算子组成：它们的施瓦茨核在局部上是以下形式的振荡积分的有限和

$$K_A(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} e^{i\phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, d\theta,$$

其中 ϕ 是如上所述的非退化相位函数，用于参数化某个相对开集$C_\phi \subset \Lambda$；振幅 $a(x,y,\theta)$ 是一个阶数为 $\gamma = m - p2 + d_X+d_4$ 的符号。

对于一般的典范关系 $\Lambda \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)$，考虑自然投影$\pi_L$：$T^*X \times T^*Y \to T^*X$，以及 π_R：$T^*X \times T^*Y \to T^*Y$ 在 Λ 上的限制。为方便起见，我们仍用相同符号表示限制后的映射。可以验证，在任意点 $c_0 \in \Lambda$，均有 $\operatorname{corank}(D\pi_L)(c_0) = \operatorname{corank}(D\pi_R)(c_0)$。若在 Λ 的所有点处，$\operatorname{corank}(D\pi_L) = 0$，则称典范关系 Λ 非退化；换言之，微分 $D\pi_L$ 和 $D\pi_R$ 具有最大秩。若 $\dim X = \dim Y$，则 Λ 非退化当且仅当 π_L、π_R 是局部微分同胚，此时Λ是局部典范图，即在任意 $c_0 \in \Lambda$ 附近，Λ 等于某个典范变换的图。若 $\dim X > \dim Y$，则 Λ 非退化的条件等价于 π_L 是浸入且 π_R 是淹没。

我们将傅里叶积分算子$A \in I^m(X, Y; \Lambda)$ 的阶记为$m = m_{\text{eff}} - \frac{|d_X - d_Y|}{4}$，其中 $\mathcal{R}^\sigma_{\mathfrak{t}}$ 的有效阶定义为

$$m_{\text{eff}} := m + \frac{|d_X - d_Y|}{4}.$$

根据傅里叶积分算子的标准L^2-Sobolev估计，有如下结论。

定理 2.1 (Hörmander [Hör71, Hör85])**.** 假设 $\Lambda \subset (T^*X \setminus \mathbf{0}) \times (T^*Y \setminus \mathbf{0})$ 是一个典范关系，其中 $\dim(X) = d_X$且 $\dim(Y) = d_Y$，并且 $A \in I^{m_{eff} - \frac{|dX - dY|}{4}}(X, Y; \Lambda)$ 具有紧支撑的施瓦茨核。

(i) 若 Λ 是非退化的，则 $A : L^2_s(Y) \to L^2_{s - m_{eff}}(X)$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 均成立。此外，算子范数由振幅和相位函数的有限阶导数有界地控制。

(ii) 如果从 Λ到 X 和 Y 的空间投影都是淹没，且对于某个 q，$D\pi_L$（因此 $D\pi_R$ 也是）的余秩在 Λ 的所有点处均为 $\le q$，那么对于所有 $s \in \mathbb{R}$，$A : L^2_s(Y) \to L^2 s - m_{eff} - q_2(X)$。

对于某些退化典范关系，如果投影 π_L 和/或 π_R 以特定方式退化，那么导数损失通常小于 q/2。第一个也是最著名的结果如下，它归功于 Melrose 和 Taylor [MT85]。设 $\dim X = \dim Y = d$，则若一个典范关系 $\Lambda \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)$ 在任意退化点 $c_0 \in \Lambda$处的两侧 π_L 和 π_R 均具有惠特尼折叠奇点，就称其为折叠典范关系（也称为双侧折叠 [GS94]）。

定理 2.2 (Melrose 和 Taylor [MT85])。 若 Λ是一个折叠典范关系，且 $A \in I\,m(X,\ Y;\ \Lambda)$的施瓦茨核具有紧支撑，则对所有 $s \in \mathbb{R}$，$A : L^2_s(Y) \to L^2\,s\text{–}m\text{–}(1/6)(X)$。

2.2. 集合的维数

以下引理给出了豪斯多夫维数的一个等价定义。

引理 2.3 (Frostman 引理，定理 2.7, [Mat15])**.** 设 $0 \le s \le d$。对于博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^d$，A 的 $s-$维豪斯多夫测度为正，当且仅当存在一个测度 $\mu \in \mathcal{M}(A)$满足

$$\mu(B(x,r)) \lesssim r^s, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ r > 0. \tag{2.1}$$

特别地，

$$\dim_H A := \sup\left\{s \le d : \exists \mu \in \mathcal{M}(A) \textit{ such that } (2.1) \textit{ holds}\right\}.$$

Frostman 引理推出，对于任意指数 $0 < s < \dim_H(A)$, 都存在一个概率测度 μ 定义在 A 上，并满足（2.1）。测度 的 s能量积分 （参见 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$）为 [Mat15]

$$I_s(\mu) := \iint |x-y|^{-s}\, d\mu(x) d\mu(y) = c(n,s) \int |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\xi|^{s-n} d\xi.$$

若 μ是满足（2.1）的 Frostman测度，则 $I_t(\mu) < \infty$对所有 $t \in \in (0,s)$ 均成立。由于 μ具有紧支集，$\widehat{\mu} \in C^\omega$，因此可得

$$\mu \in L^2_{(t-d)/2}(\mathbb{R}^d).$$

当 $A \subset X$是一个$d-$维流形X的紧子集，且 $\dim_H(A) > t$时，这一结论在一般情形下同样成立。

我们回顾 [GIT22] 中关于索伯列夫空间张量积的以下初等结果。

命题 2.4。 对于 $1 \le j \le k$，设 $X\,j$ 是一个维数为 dj 的 C^∞流形，并假设 $u\,j \in L^2_{s_j,comp}(X\,j)$，$1 \le j \le k$，且每个 $s\,j \in \mathbb{R}$。那么张量积 $u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$属于 $L^2_{s,comp}(X^1 \times \cdots X\,k)$，其中 $s = k\sum j=1$ $s\,j$。

次数为$s \in \mathbb{R}$ 的 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$的索伯列夫能量为

$$\mathcal{I}_s(\mu) := \int |\widehat{\mu}(x)|^2 (1+|x|)^{s-d}\, dx.$$

当 $0 < s < d$ 时，$I_s(\mu) = \mathcal{I}_s(\mu)$。测度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 的索博列夫维数 是

$$\dim_S \mu := \sup\left\{s \in \mathbb{R} : \int |\widehat{\mu}(x)|^2 (1+|x|)^{s-d}\, dx < \infty\right\}.$$

于是我们称集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ 具有索博列夫维数 $\dim_S A \geq s$，若 A 承载一个博雷尔概率测度 μ，使得 $\dim_S \mu \geq s$。从某种意义上说，索博列夫维数越大，测度就越光滑。以下结果广为人知，参见 [Mat15]。

命题 2.5 ([Mat15，定理 5。4])。 设 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$。

(i) 若 $0 < \dim_S \mu < d$，则 $\dim_S \mu = \sup\{s > 0 : I_s(\mu) < \infty\}$。

(ii) 若 $\dim_S \mu > d$，则 $\mu \in L^2(\mathbb{R}^d)$。

(iii) 若 $\dim_S \mu > 2d$，则 μ 是连续函数。

我们还回顾 [RZ24] 中的以下结果。设 $A \subset \mathbb{R}^d$，$d \geq 1$，设 $x \in \mathbb{R}^d$，且 $\alpha > 0$。我们称 A 在 x 处具有局部维数 $\geq \alpha$，x 当 $\dim(A \cap U) \geq \alpha$ 对每个 U 作为 x 的邻域 A 的局部维数为 $< \alpha$ 于 x。

引理 2.6 ([RZ24，引理 9.2])。 设 $A \subset \mathbb{R}^d$，$d \geq 1$ 满足 $\dim_H A > 0$。则对每个 $\varepsilon > 0$，至少存在一点 $x \in A$，使得 A 具有局部维数 $\geq \dim_H A - \varepsilon$。

引理 *2.7* （ [*RZ24*，引理 *9.4*]）。设 $d \geq 1$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为连通开集，设 $g \in C^{\omega}(\Omega, \mathbb{R})$ 在 Ω 上解析且不恒为零，并设 $\varepsilon > 0$。设 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d \subset \Omega$ 为紧集，其中每个 $A_i \subset \mathbb{R}$ 具有正豪斯多夫维数。则存在一点 $a_0 = (a_1, \ldots, a_d) \in \Omega \setminus g^{-1}(0)$，使得对每个指标 i，A_i 在 a_i 处的局部维数为 $\geq \dim_H A_i - \varepsilon$，即

$$\dim_H (A_i \cap U) \geq \dim_H A_i - \varepsilon, \quad \textit{for every neighborhood } U \textit{ of } a_i. \tag{2.2}$$

3. k-点 Φ-构型集

本节首先回顾 [GIT21、GIT22、GIT24] 中发展的傅里叶积分算子技术，随后对其进行调整，以研究定理 3.1 中 (i)、(ii) 所述构型集的豪斯多夫维数或正勒贝格测度。接下来，我们将讨论余维为 $p = 1$ 时映射 的一些具体非退化条件。

3.1. 一般构型函数

设 $k \geq 2$，且 $M_i, 1 \leq i \leq k$ 是维数为 $\dim M_i = n_i$ 的光滑流形。记 k 个 $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ 的乘积为 M，则 M 是维数为 $\dim M = \sum n_i = n$ 的光滑流形。设 $i=1\Phi \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}^p)$ 是一个光滑映射，其中 $p \geq 1$。进一步假设 Φ 是一个淹没，即其全微分 $D\Phi$ 处处具有最大秩 p。

设 $A_i \subset M_i, 1 \leq i \leq k$ 为紧集，并令 $A = A_1 \times \cdots \times A_k$。则定义

$$\Delta_{\Phi}(A) = \left\{ \Phi(a^1, \ldots, a^k) : a^i \in A_i, 1 \leq i \leq k \right\}$$

为k–点-构型集，其中A_i为紧集。

k我们的目标是为 Φ 找到合适的非退化条件，并为 $\sum \dim_H A_i{}_{i=1}$ 找到一个下界，从而保证 $\mathcal{L}^p(\Delta_\Phi(A)) > 0$。更一般地，固定 $0 < u \le p$ 后，我们将为$k\sum \dim_H A_i$ 找到下界，使得 $\dim_H \Delta_\Phi(A) \ge u$。 $i=1$

为此，首先令 $X = M \times M$，并将其记作 $X = X_1 \times \cdots \times X_{2k}$，其中 $X_i = X_{k+i} = M_i$，对于 $1 \le i \le k$。记每个 X_i 的维数为 d_i，其中 $1 \le i \le 2k$，并记 X 的维数为 $d_{tot} = \sum_{i=1}^{k} d_i = 2n$。对于每个 $x \in X$，写作 $x = (x', x'') = (x^1, \ldots, x^{2k})$。定义一个光滑映射 $\Psi = \Psi_\Phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}^p)$，其定义为

$$\Psi(x', x'') := \Phi(x') - \Phi(x''), \quad \forall (x', x'') \in X.$$

令 $\phi: X \times (\mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ 为由 $\phi(x', x'', \theta) = \theta \cdot (\Phi(x') - \Phi(x''))$ 定义的光滑函数，其中 $(x', x'', \theta) \in X \times (\mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0})$。则其关于 θ 变量的临界集为

$$\begin{aligned}\Sigma_\phi &:= \{(x', x'', \theta) \in X \times (\mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0}) : d_\theta \phi(x', x'', \theta) = 0\} \\ &= \{(x', x'', \theta) \in X \times (\mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0}) : \Phi(x') = \Phi(x'')\}.\end{aligned}$$

由于 Φ 是淹没，容易看出相位函数 $\phi(x', x'', \theta)$ 是非退化的，也就是说，

$$d_{x'}\phi \neq 0, d_{x''}\phi \neq 0, \quad \forall (x', x'', \theta) \in \Sigma_\phi,$$

and

$$\operatorname{rank}\left[d_{x', x'', \theta}\, d_\theta \phi(x', x'', \theta)\right] = p, \quad \forall (x', x'', \theta) \in \Sigma_\phi.$$

因此，水平集 $Z := \Psi^{-1}(0) = \{(x', x'') \in X : \Phi(x') = \Phi(x'')\}$ 是 X的余维为 p 的光滑子流形。注意，ϕ 参数化了典范关系

$$\Lambda := N^* Z = \left\{\left(x', x'', D\phi(x', x'')^*(\theta)\right) : (x', x'') \in Z, \theta \in \mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0}\right\}.$$

令 $a(x', x'', \theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^p)$ 为一个阶数为 $\gamma = u - p$的符号，其定义为

$$a(x', x'', \theta) := \chi(x', x'')(1 + |\theta|)^{u-p}, \quad \forall (x', x'', \theta) \in X \times \mathbb{R}^p, \tag{3.1}$$

其中 $\chi: M \times M \to \mathbb{R}$ 是一个紧支撑光滑函数，使得 $\chi \equiv 1$ 在 $A \times A$ 上。定义

$$K(x', x'') := \int e^{-2\pi i \phi(x', x'', \theta)} a(x', x'', \theta)\, d\theta, \quad (x', x'') \in X. \tag{3.2}$$

于是，K是X上的傅里叶积分分布。换言之，用 Hörmander 的记号表示为:

$$K \in I^{u - p/2 - n/2}(X; N^* Z), \tag{3.3}$$

其中，阶数由振幅的阶为 $\gamma = u - p$，以及相位变量和空间变量的数量分别为p和$d_{tot} = 2n$决定，因此阶数为

$$m = \gamma + p/2 - d_{tot}/4 = u - p + p/2 - 2n/4 = u - p/2 - n/2.$$

记 $\mathcal{P}_{2k}$ 为 $\{1, \dots, 2k\}$ 的所有非平凡二分划分的集合，并将这样的划分写作 $\sigma = (\sigma_L \mid \sigma_R)$，其中 $|\sigma_L|$、$|\sigma_R| > 0$ 和 $|\sigma_L| + |\sigma_R| = 2k$。对于每个 $\sigma \in \mathcal{P}_{2k}$，记 $\sigma_L = \{i_1, \dots, i_{|\sigma_L|}\}$，以及 $\sigma_R = \{j_1, \dots, j_{|\sigma_R|}\}$，并假设$i_1 < \cdots < i_{|\sigma_L|}$且$j_1 < \cdots < j_{|\sigma_R|}$。现在，我们将变量$x^1, \dots, x^{2k}$分成左右两组，并用相同的记号$x$表示按坐标划分后的$x$版本，

$$x = (x_L; x_R) = \left(x^{i_1}, \dots, x^{i_{|\sigma_L|}}; x^{j_1}, \dots, x^{j_{|\sigma_R|}}\right).$$

相应地重新排列后的X^i笛卡尔积为

$$X_L \times X_R = \left(X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_{|\sigma_L|}}\right) \times \left(X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_{|\sigma_R|}}\right),$$

并且我们仍将其记为X。注意，这两个流形的维数分别为 $\dim X_L = d_{\sigma,L} = \sum_{i \in \sigma_L} d_i$，以及 $\dim X_R = d_{\sigma,R} = \sum_{j \in \sigma_R} d_j$。与 σ 相关的Z的坐标划分形式记为Z^σ，即：

$$Z^\sigma = \{(x_L, x_R) : \Psi(x) = 0\} \subset X_L \times R_R.$$

令 $\pi_L : Z^\sigma \to X_L$，以及 $\pi_R : Z^\sigma \to X_R$分别为向左和向右的空间投影。若Z^σ满足双纤维化条件$(DF)_\sigma$，即Z^σ的两个空间投影具有最大秩（见 [GS79、GS90、Hel65]），那么：

$$\pi_L : Z^\sigma \to X_L, \quad \text{and} \quad \pi_R : Z^\sigma \to X_R \quad \text{are submersions.} \tag{3.4}$$

容易看出，若

$$\operatorname{rank}(D_{x_L}\Psi) = p \quad \text{and} \quad \operatorname{rank}(D_{x_R}\Psi) = p$$

处处成立，则满足$(DF)_\sigma$，并且必须满足必要条件$p \le \min\{d_{\sigma,L}, d_{\sigma,R}\}$。

施瓦茨核K现在可以写成

$$K^\sigma(x_L, x_R) = \int e^{-2\pi i \phi_\sigma(x_L, x_R, \theta)} a_\sigma(x_L, x_R, \theta)\, d\theta,$$

其中，对所有 $(x_L, x_R) \in X_L \times X_R$，$\phi_\sigma(x_L, x_R, \theta) = \phi(x', x'', \theta)$，且 $a_\sigma(x_L, x_R, \theta) = a(x', x'', \theta)$，并且 $\theta \in \mathbb{R}^p$。我们还假设 ϕ_σ 是非退化的，即

$$d_{x_L}\phi_\sigma(x_L, x_R, \theta) \neq 0 \quad \text{and} \quad d_{x_R}\phi_\sigma(x_L, x_R, \theta) \neq 0$$

在集合 $\Sigma_{\phi_\sigma} = \{(x_L, x_R, \theta) \in X_L \times X_R \times \mathbb{R}^p \setminus \mathbf{0} \text{ 上: } \Psi(x_L, x_R) = 0\}$。

接下来，算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 由下式弱定义：

$$\mathcal{T}^\sigma f(x_L) := \int K^\sigma(x_L, x_R) f(x_R)\, dx_R. \tag{3.5}$$

算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 从映射 $\mathcal{D}(X_R) \to \mathcal{E}(X_L)$ 延拓到

$$\mathcal{T}^\sigma : \mathcal{E}'(X_R) \to \mathcal{D}'(X_L).$$

此外， $\mathcal{T}^\sigma$ 是一个与典范关系 Λ^σ相关联的傅里叶积分算子，其中 $\Lambda^\sigma \subset (T^*X_L \setminus \mathbf{0}) \times (T^*X_R \setminus \mathbf{0})$ 是Z^σ的扭曲余法丛，即

$$\Lambda^\sigma := (N^* Z^\sigma)' = \left\{(x_L, \xi_L;, x_R, \xi_R) : (x_L, x_R) \in Z^\sigma, (\xi_L, -\xi_R) \perp TZ^\sigma, \xi_L, \xi_R \neq \mathbf{0}\right\}.$$

按照 Hörmander 的记号， $\mathcal{T}^\sigma \in I^{u-p/2-n/2}(X_L, X_R; \Lambda^\sigma)$，其中阶数 $m = u - p/2 - n/2$ 按照（3.3）确定。于是， $\mathcal{T}^\sigma$ 的有效阶为

$$m^\sigma_{\text{eff}} = m + \frac{|d_{\sigma,L} - d_{\sigma,R}|}{4} = \frac{-\min\{d_{\sigma,L}, d_{\sigma,R}\} - p + 2u}{2}.$$

令 $\pi_L : \Lambda^\sigma \to T^*X_L$和 $\pi_R : \Lambda^\sigma \to T^*X_R$分别为将 Λ^σ 投影到余切丛T^*X_L和 T^*X_R的自然投影。若 Λ^σ 是非退化典范关系，即 $\operatorname{corank}(D\pi_L) = 0$处处成立，则由定理 2.1可知

$$\mathcal{T}^\sigma : L^2_s(X_R) \to L^2_{s - m^\sigma_{\text{eff}}}(X_L), \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}.$$

更一般地，若在 Λ^σ的所有点上 $\operatorname{corank}(D\pi_L) \le q$，则导数至多损失 $q/2$ 阶，即

$$\mathcal{T}^\sigma : L^2_s(X_R) \to L^2_{s - m^\sigma_{\text{eff}} - \frac{q}{2}}(X_L), \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}.$$

一般而言，若双纤维化条件 $(DF)_\sigma$ 成立，且对所有 $s \in \mathbb{R}$，则称算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 满足条件 $[(DF)_\sigma; \beta^\sigma]$，其中 $\beta^\sigma \ge 0$。

$$\mathcal{T}^\sigma : L^2_s(X_R) \to L^2_{s - m^\sigma_{\text{eff}} - \beta^\sigma}(X_L). \tag{3.6}$$

我们称 $\mathcal{U}$是 （锥形邻域）*conic neighborhood* 中 (x,ξ) 在 N^*Z里的一个锥形邻域，若对所有满足 $\in \mathcal{U}$ 的 (y,η)，都有 $(y,\tau\eta) \in \mathcal{U}, \forall \tau > 0$。

现在我们陈述本节的第一个主要结果。回想， $M = M_1 \times \cdots \times M_k$是一个流形，且$\dim M = n$。

定理 3.1. 设 $k \ge 2, p \ge 1, \alpha, \beta \ge 0$, 且 $0 < u < \frac{1}{2}(2n + p - \alpha - 2\beta)$. 设 $\Phi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ 为光滑映射。假设对于每个点 $(x,\xi) \in N^*Z$， 存在一个划分 $\sigma \in \mathcal{P}_{2k}$使得

$\max(d_{\sigma,L},d_{\sigma,R}) \le \alpha$，以及 (x,ξ) 的一个锥形邻域 $\mathcal{U}$，使得算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 在微局部化到 $\mathcal{U}$ 后，满足 $[(DF)_\sigma;\beta]$ 且导数损失至多为 β。

设 $A_i \subset M_i, 1 \le i \le k$ 为紧集，且每个 维数$_H A_i > 0$。

(i) *For any* $0 < u < p$, *if* $\sum_{i=1}^k \dim_H A_i > \frac{\alpha-p}{2} + u + \beta$, *then* $\dim_H(\Delta_\Phi(A)) \ge u$.

(ii) *If* $u \ge p$, *and* $\sum_{i=1}^k \dim_H A_i > \frac{\alpha+p+2\beta}{2}$, *then* $\mathcal{L}^p(\Delta_\Phi(A)) > 0$.

(iii) *If* $u > 2p$, *and* $\sum_{i=1}^k \dim_H A_i > \frac{\alpha-p}{2} + 2p + \beta$, *then* $\mathrm{Int}(\Delta_\Phi(A)) \ne \emptyset$.

注 3.2。在上述定理中，请注意 $\alpha \ge \max(d_{\sigma,L},d_{\sigma,R}) \ge n$。在应用中，我们会优化 $\sigma = (\sigma_L|\sigma_R) \in \mathcal{P}_{2k}$ 的选择，使其满足定理的假设，同时让 α 最小化 $\max\{d_{\sigma,L},d_{\sigma,R}\}$，并使 β 接近 0。

证明。令 $p \ge 1$、$u > 0$，并令 $\Phi: M \to \mathbb{R}^p$ 为满足定理假设且常数为 $\alpha,\beta \ge 0$ 的光滑映射，使得 $\alpha + 2\beta + 2u < 2n + p$。假设 $A_i \subset M_i, 1 \le i \le k$ 为紧集，且

$$\sum_{i=1}^k \dim_H A_i > \frac{\alpha-p}{2} + u + \beta.$$

因此，存在 $0 < s_i <$ 维$_H A_i, 1 \le i \le k$，使得

$$\sum_{i=1}^k s_i > \frac{\alpha-p}{2} + u + \beta. \tag{3.7}$$

由 Frostman 引理，对于每个 i，存在 $\mu_i \in \mathcal{M}(A_i)$，使得 $I_{s_i}(\mu_i) < \infty$。根据以下关系，定义一个支撑在 $\Delta_\Phi(A)$ 上的自然测度 ν

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(\mathbf{t})\, d\nu(\mathbf{t}) = \int f\big(\Phi(x^1,\dots,x^k)\big)\, d\mu_1(x^1)\dots d\mu_k(x^k), \quad \text{for } f \in C_0(\mathbb{R}^p).$$

换言之，其为 ν 在映射 $x \mapsto \Phi(x)$ 下，由 $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_k$ 推前得到的测度 .

为了证明当 $\Delta_\Phi(A)$ 具有正勒贝格测度时，条件 $u \ge p$，只需证明在条件（3.7）下，有

$$\int |\nu(\mathbf{t})|^2\, d\mathbf{t} < \infty.$$

这意味着 $\nu \in L^2(\mathbb{R}^p)$ 有一个密度，也记作 ν，它相对于勒贝格测度绝对连续。由于 ν 支撑在 $\Delta_\Phi(A)$ 上，因此得到 $\mathcal{L}^p\big(\Delta_\Phi(A)\big) > 0$，如所求。

更一般地，我们将证明，在条件 (3.7) 下，有

$$\int |\widehat{\nu}(\theta)|^2 (1+|\theta|)^{u-p}\, d\theta < \infty. \tag{3.8}$$

应用命题2.5，即可得到所需结果。

为证明（3.8），注意对 $\theta \in \mathbb{R}^p$，根据 ν的定义，有

$$\widehat{\nu}(\theta) = \int e^{-2\pi i \theta \cdot \mathbf{t}}\, d\nu(\mathbf{t}) = \int e^{-2\pi i \theta \cdot \Phi(x)}\, d\mu(x)$$

因此，由富比尼定理可得

$$\begin{aligned}
\int |\widehat{\nu}(\theta)|^2 (1+|\theta|)^{u-p}\, d\theta &= \int \Big(\iint e^{-2\pi i \theta \cdot (\Phi(x') - \Phi(x''))}\, d\mu(x')\, d\mu(x'') \Big) (1+|\theta|)^{u-p}\, d\theta \\
&= \iint \Big(\int e^{-2\pi i \phi(x', x'', \theta)}\, a(x', x'', \theta)\, d\theta \Big)\, d\mu(x')\, d\mu(x'') \\
&= \iint K(x', x'')\, d\mu(x')\, d\mu(x''),
\end{aligned}$$

其中振幅$a(x', x'', \theta) = \chi(x', x'')(1+|\theta|)^{u-p}$是阶数为 $\gamma = u - p$的符号（见（3.1））， 施瓦茨核K定义见（3.2）。

根据该定理的假设，对每个点 $(x, \xi) \in N^*Z$，存在一个划分$\sigma_l \in \mathcal{P}_{2k}$，使得 $\max\{d_{\sigma,L}, d_{\sigma,R}\} \le \alpha$，以及 (x, ξ) 的一个锥形邻域 $\mathcal{U}_l$，使得微局部化到 $\mathcal{U}_l$ 的算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 满足 (3.6)，且至多损失 β 阶导数。集合 $\{U_l\}_l$ 于是构成 N^*Z 的一个开覆盖。设 $\mathcal{U}_0$ 为一个开集，使得 $\mathcal{U}_0$ 与 N^*Z 不相交，从而将 $\{\mathcal{U}_l\}$ 补全为 $T^*X \setminus 0$ 的一个覆盖。设 $\{Q_l(x, D)\}_l$ 为 X 上从属于开覆盖 $\{\mathcal{U}\}_l$ 的标准伪微分单位分解。对每个 l，Q_l 属于 $\Psi^0 cl(X)$，即 X 上所有 0 阶经典伪微分算子的集合，且它们的主符号 $q_l(x, \xi)$ 构成 $T^*X \setminus 0$ 上的单位分解。我们可以假设和式 $\sum Q_l(x, D) = I$ 只有有限项。对每个 l，回顾 σ_l 是使得 $\mathcal{T}^{\sigma_l}$ 在 Q_l 的锥形支集上满足 (3.6) 且损失 $\le \beta$ 阶导数的划分，并将所有这样的 σ_l 所成的集合记为 $\mathcal{W}$。

现在，对每个 $\sigma \in \mathcal{W}, \sigma = (\sigma_L | \sigma_R)$，定义

$$\mu_L^\sigma = \mu_{i_1} \times \cdots \times \mu_{i_{|\sigma_L|}} \quad \text{and} \quad \mu_R^\sigma = \mu_{j_1} \times \cdots \times \mu_{j_{|\sigma_R|}}.$$

根据假设，有 $\mu^\sigma L \in L^2 s^\sigma L(X_L)$，且 $\mu^\sigma R \in L^2 s^\sigma R(X_R)$，其中 $s^\sigma L = \frac{1}{2} \sum_{i \in \sigma_L} (s_i - d_i)$ 和 $s^\sigma R = \frac{1}{2} \sum_{j \in \sigma_R} (s_j - d_j)$ 分别如此。由于 $\mathcal{T}^\sigma$ 满足带有损失 $\le \beta$ 阶导数的 (3.6)，因此有

$$\mathcal{T}^\sigma(\mu_R^\sigma) \in L^2_{s_R^\sigma - m_{\text{eff}}^\sigma - \beta}(X_L).$$

由于 $\mu^\sigma{}_L \in L_{s^\sigma{}_L}(X_L)$，若

$$s_R^\sigma - m_{\text{eff}}^\sigma - \beta + s_L^\sigma \geq 0, \tag{3.9}$$

那么配对 $\langle \mathcal{T}^\sigma \mu^\sigma{}_R, \mu^\sigma{}_L \rangle$ 是有界的。可以验证，(3.9)成立当且仅当 f

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geq \frac{\max\{d_{\sigma,L}, d_{\sigma,R}\} - p}{2} + u + \beta,$$

这由（3.7）推出，因为 $\max\{d_{\sigma,L}, d_{\sigma,R}\} \leq \alpha$。由于这对所有 $\sigma \in \mathcal{W}$ 都成立，因此可得

$$\int |\widehat{v}(\theta)|^2 (1+|\theta|)^{u-p}\, d\theta = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \langle \mathcal{T}^\sigma \mu_R^\sigma, \mu_L^\sigma \rangle < \infty$$

正如所需。这就完成了定理的证明。 □

3.2. 余维$p = 1$的情形

设$k \geq 2$，并令$U_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq k$为开子集，其中$n_i \geq 1$，并再次令$n = \sum n_i$。假设 $\Phi\colon U_1 \times \cdots \times U_k \to \mathbb{R}$是一个光滑函数。本节的目标是$i=1$为函数 Φ 推导出显式的非退化条件，其中余维$p = 1$。

3.2.1. 具有 k 个 ≥ 2的点构形。我们先介绍一些定义和记号。对于$x \in \Omega = V_1 \times \cdots \times V_k$，记$x = (x^1, \ldots, x^k)$，其中

$$x^i = \left(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i\right) \in V_i, \quad \text{for } 1 \leq i \leq k.$$

设 $E = \{i_1, \ldots, i_E\}$ 和 $F = \{j_1, \ldots, j_F\}$ 是 $\{1, \ldots, k\}$ 的非空子集，且 E 和 F 在 $\{1, \ldots, k\}$ 中的补集均非空，分别记为 E' 和 F'。记 $x_E = \left(x^{i_1}, \ldots, x^{i_E}\right)$，类似地，记 x_F、$x_{E'}$ 和 $x'F$。令 $n_E = \sum i \in E\, n_i$、$n_F = \sum j \in F\, nj$，并且

$$n(E,F) = \max\{n_E + n_F, 2n - (n_E + n_F)\}.$$

我们构造一个$n_E \times n_F$矩阵，其元素是Φ关于变量 $\left\{x^i{}_{l_i}\right\}_{i\in E}$和 $\left\{x_j{}_{l_j}\right\}_{j\in F}$的混合二阶偏导数，记作 $H_{x_E, x_F}\Phi$或 $H_{E,F}\Phi$,

$$H_{x_E,x_F}\Phi := \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{l_i}^i \partial x_{l_j}^j}\right]_{i\in E, j\in F} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{l_i}^i \partial x_1^{j_1}} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{l_i}^i \partial x_2^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{l_i}^i \partial x_{n_{j_F}}^{j_F}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{i\in E}.$$

因此，将此矩阵称为相对于 $\{E,F\}$ 的 Φ混合海森矩阵。混合海森矩阵H_{x_E}、$_{x_{E'}}\Phi$ 和 H_{x_F}、$_{x_{F'}}\Phi$ 的定义类似。

设 $\Psi(x,y) := \Phi(x) - \Phi(y)$，其中 $(x,y) \in \Omega \times \Omega$。如果 Φ 是淹没，则可推出，水平集 $Z = \Psi^{-1}(0) = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : \Phi(x) = \Phi(y)\}$ 是 $\Omega \times \Omega$ 中余维 1 的光滑子流形。我们进一步假设

$$(\nabla_{x_{E'}}\Phi, \nabla_{y_{F'}}\Phi) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0}) \quad \text{and} \quad (\nabla_{x_E}\Phi, \nabla_{y_F}\Phi) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0}) \tag{3.10}$$

在Z上。

定义3.3。设$\{E, F\}$是$\{1, \ldots, k\}$的非空子集。对于$(x, y) \in \Omega \times \Omega$，定义一个$(n_E + n_F + 1) \times (2n - n_E - n_F + 1)$矩阵

$$J_{E,F}\Phi := \begin{bmatrix} 0 & \nabla_{x_{E'}}\Phi(x) & -\nabla_{y_{F'}}\Phi(y) \\ (\nabla_{x_E}\Phi(x))^T & H_{x_E, x_{E'}}\Phi(x) & 0 \\ (\nabla_{y_F}\Phi(y))^T & 0 & H_{y_F, y_{F'}}\Phi(y) \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

对于$(x_0, y_0) \in Z$，我们称 Φ 在 $\Gamma_m(E, F)-$ 非退化 于(x_0, y_0)，如果梯度条件(3.10)成立，并且存在一个非负整数m，使得在(x_0,y_0)的一个小邻域内，余秩$(J_{E,F}\Phi) \leq m$。

下面的定理给出了函数 Φ 的明确条件，使得可以据此得到 Falconer 型结果。

定理3.4。设 $\Phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 是一个光滑函数。假设存在整数 $\alpha \geq n, m \geq 0$使得以下条件成立：对于任意$(x_0,y_0) \in Z$，存在非空子集 E，F，它们是$\{1,\ldots,k\}$ 的子集，使得 $n_{E,F} \leq \alpha$，并且 Φ 在(x_0, y_0)处是 $\Gamma_m(E, F)$−非退化的。

假设 $A_i \subset U_i, 1 \leq i \leq k$ 是紧集，且每个$\dim_H A_i > 0$。

(i) *For any* $0 < u < 1$, *if* $\sum_{i=1}^{k} \dim_H A_i > \frac{\alpha}{2} + \frac{m}{2} + \frac{2u-1}{2}$, *then* $\dim_H(\Delta_\Phi(A)) \geq u$.

(ii) *If* $\sum_{i=1}^{k} \dim_H A_i > \frac{\alpha}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$, *then* $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A)) > 0$.

(iii) *If* $\sum_{i=1}^{k} \dim_H A_i > \frac{\alpha}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{2}$, *then* $\mathrm{Int}(\Delta_\Phi(A)) \neq \emptyset$.

*k*注记 3.5。注意，在上述结果中，由于 $\sum \dim_H A_i \leq \dim \Omega = n$，对于$u > 0$，条件$\sum_{i=1}^{k} \dim_H A_i > s(E, F) + \frac{m}{2} + \frac{2u-1}{2}$意味着

$$m < \min\{n_E + n_F, 2n - (n_E + n_F)\} - 2u + 1.$$

特别地，当 $u = 1$ 时，这就变为 $m \leq \min\{n_E + n_F, 2n - (n_E + n_F)\} - 2$。

证明。 设 $\Phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 是 Ω 上的光滑函数。假设 $\alpha \geq n$，且 $m = 0$；情形 $m \geq 1$ 可用同样的论证证明。

对于 E、$F \subset \{1, \dots, k\}$，定义

$$W_{E,F} = \left\{(x, y) \in Z : \Phi \text{ is } \Gamma_0(E, F) \text{ nondegenerate at } (x, y)\right\}.$$

根据假设，$\{W_{E,F}\}$ 构成Z的一个覆盖，或者 $Z \subset \bigcup_{E,F} W_{E,F}$。注意，满足 $n_{E,F} \leq \alpha$ 的配对 $\{E, F\}$ 有限多个。

暂且固定这样一对 $\{E, F\}$，并假设 $W_{E,F} \neq \emptyset$。为方便起见，令 $X = \Omega \times \Omega$，对于 $x \in X$，记 $x = (x', x'')$，其中 $x', x'' \in \Omega$。然后重新定义 $\Psi : X \to \mathbb{R}$，令 $\Psi(x) := \Psi(x', x'') = \Phi^1(x') - \Phi^2(x'')$，对所有 $(x', x'') \in X$，其中 $\Phi^1 = \Phi^2 = \Phi$。流形 Z 可重写为 $Z = \{(x', x'') \in X : \Psi(x', x'') = 0\}$。

设 $\phi : X \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 是由 $\phi(x', x'', \theta) = \theta \cdot \Psi(x', x'')$ 定义的光滑相位函数，其中 $(x', x'', \theta) \in X \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$。可以看出，$\phi$ 参数化了典范关系

$$C_\phi := \left\{(x', \theta d_{x'} \Phi^1(x'); x'', \theta d_{x''} \Phi^2(x'')) : \Phi^1(x') = \Phi^2(x''), \theta \neq 0\right\} \subset (T^*\Omega \setminus \mathbf{0}) \times (T^*\Omega \setminus \mathbf{0}).$$

令 $\sigma_L = E \cup F$，并令 $\sigma_R = E' \cup F'$，则 $\sigma = (\sigma_L \mid \sigma_R) \in \mathcal{P}_{2k}$ 是 $\{1, \dots, 2k\}$ 的一个非平凡划分。对于 $x = (x', x'') \in X$，相对于 σ，x 的坐标划分形式记为 $x = (x_L, x_R)$，其中

$$x_L = (x'_L, x''_L) \in X_L \quad \text{and} \quad x_R = (x'_R, x''_R) \in X_R,$$

对应的划分为 $x' = (x'_L, x'_R)$ 和 $x'' = (x''_L, x''_R)$。注意，不失一般性，我们可以假设 $n_E + n_F \geq n$，因为否则可以取 E 为 E'，并取 F 为 F'。由此可得 $\dim X_L \geq \dim X_R$。

Z的坐标分块版本记为$Z^\sigma = \{(x_L, x_R) : \Psi(x_L, x_R) = 0\}$，其余法丛为

$$N^*Z^\sigma = \left\{(x_L, x_R, \theta D\Psi(x_L, x_R)) : \Phi^1(x'_L, x'_R) - \Phi^2(x''_L, x''_R) = 0, \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}.$$

与Z^σ相关的典范关系是Z^σ的扭曲余法丛，即

$$\begin{aligned}\Lambda^\sigma := (N^*Z^\sigma)' &= \left\{(x_L, \xi_L; x_R, \xi_R) : (x_L, x_R) \in Z^\sigma, (\xi_L, -\xi_R) \perp TZ^\sigma, \xi_L, \xi_R \neq \mathbf{0}\right\} \\ &= \{(x'_L, x''_L, \theta d_{x'_L}\Phi^1, -\theta d_{x''_L}\Phi^2; x'_R, x''_R, -\theta d_{x'_R}\Phi^1, \theta d_{x''_R}\Phi^2) : \\ &\qquad \Phi^1(x'_L, x'_R) = \Phi^2(x''_L, x''_R), \theta \neq 0\}.\end{aligned}$$

设 $\pi_L\colon \Lambda^\sigma \to T^*X_L$ 为余切空间投影

$$\pi_L(x_L,\xi_L,x_R,\xi_R)=(x_L,\xi_L),\quad \text{for } (x_L,\xi_L,x_R,\xi_R)\in\Lambda^\sigma.$$

为了应用定理 3.1，需要计算 $\operatorname{corank}(D\pi_L)$ 在 Λ^σ 上的取值。考虑光滑映射 $F\colon X_L\times X_R\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to(T^*X_L\setminus\mathbf{0})\times(T^*X_R\setminus\mathbf{0})$ 定义如下：

$$F(x_L',x_L'',x_R',x_R'',\theta)=\left(x_L',\,x_L'',\,\theta d_{x_L'}\Phi^1,\,-\theta d_{x_L''}\Phi^2;\,x_R',\,x_R'',\,-\theta d_{x_R'}\Phi^1,\,\theta d_{x_R''}\Phi^2\right).$$

计算可得

$$DF=\begin{bmatrix} I_{x_L'} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_{x_L''} & 0 & 0 & 0\\ \theta H_{x_L',x_L'}\Phi^1 & 0 & \theta H_{x_L',x_R'}\Phi^1 & 0 & (\nabla_{x_L'}\Phi^1)^T\\ 0 & -\theta H_{x_L'',x_L''}\Phi^2 & 0 & -\theta H_{x_L'',x_R''}\Phi^2 & (-\nabla_{x_L''}\Phi^2)^T\\ 0 & 0 & I_{x_R'} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_{x_R''} & 0\\ -\theta H_{x_R',x_L'}\Phi^1 & 0 & -\theta H_{x_R',x_R'}\Phi^1 & 0 & -(\nabla_{x_R'}\Phi^1)^T\\ 0 & \theta H_{x_R'',x_L''}\Phi^2 & 0 & \theta H_{x_R'',x_R''}\Phi^2 & (\nabla_{x_R''}\Phi^2)^T \end{bmatrix}.$$

因此，对于 $\omega\in\Lambda^\sigma$，Λ^σ 在 ω 处的切空间为

$$\begin{aligned} T_\omega\Lambda^\sigma=\{&(u_L',u_L'',\theta H_{x_L',x_L'}\Phi^1\cdot u_L'+\theta H_{x_L',x_R'}\Phi^1\cdot u_R'+\tau(\nabla_{x_L'}\Phi^1)^T,\\ &-\theta H_{x_L'',x_L''}\Phi^2\cdot u_L''-\theta H_{x_L'',x_R''}\Phi^2\cdot u_R''-\tau(\nabla_{x_L''}\Phi^2)^T;*,*,*,*):(u_L,u_R,\theta)\in\mathbb{R}^{2n+1},\\ &\nabla_{x_L'}\Phi^1\cdot u_L'+\nabla_{x_R'}\Phi^1\cdot u_R'-\nabla_{x_L''}\Phi^2\cdot u_L''-\nabla_{x_R''}\Phi^2\cdot u_R''=0\}, \end{aligned}$$

其中，我们省略了这些项，因为它们与对 π_L的分析无关。根据上述内容，要找出$D\pi_L$的核，只需解下列方程组

$$\begin{cases} u_L' & =0\\ u_{L''} & =0\\ \theta H_{x_L',x_L'}\Phi^1\cdot u_L'+\theta H_{x_L',x_R'}\Phi^1\cdot u_R'+\tau(\nabla_{x_L'}\Phi^1)^T & =0\\ -\theta H_{x_L'',x_L''}\Phi^2\cdot u_L''-\theta H_{x_L'',x_R''}\Phi^2\cdot u_R''-\tau(\nabla_{x_L''}\Phi^2)^T & =0\\ \nabla_{x_L'}\Phi^1\cdot u_L'+\nabla_{x_R'}\Phi^1\cdot u_R'-\nabla_{x_L''}\Phi^2\cdot u_L''-\nabla_{x_R''}\Phi^2\cdot u_R'' & =0 \end{cases}.$$

这等价于

$$\begin{cases} u'_L & = 0 \\ u_{L''} & = 0 \\ H_{x'_L,x'_R}\Phi^1 \cdot u'_R + \tau/\theta(\nabla_{x'_L}\Phi^1)^T & = 0 \\ H_{x''_L,x''_R}\Phi^2 \cdot u''_R + \tau/\theta(\nabla_{x''_L}\Phi^2)^T & = 0 \\ \nabla_{x'_R}\Phi^1 \cdot u'_R - \nabla_{x''_R}\Phi^2 \cdot u''_R & = 0 \end{cases}, \qquad \theta \neq 0,$$

换言之，$(u'_L, u''_L) = \mathbf{0}$ 和

$$\begin{bmatrix} H_{x'_L,x'_R}\Phi^1 & 0 & (\nabla_{x'_L}\Phi^1)^T \\ 0 & H_{x''_L,x''_R}\Phi^2 & (\nabla_{x''_L}\Phi^2)^T \\ \nabla_{x'_R}\Phi^1 & -\nabla_{x''_R}\Phi^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{R'} \\ u_{R''} \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由假设 $\operatorname{corank}(J_{E,F}\Phi) = 0$，上述矩阵在 $W_{E,F}$ 上处处具有最大秩。因此，$\operatorname{Ker}(D\pi_L) = \mathbf{0}$，且在 $\Lambda^\sigma|_{W_{E,F}}$ 上处处 $\operatorname{corank}(D\pi_L) = 0$，即将 Λ^σ 限制到 $W_{E,F}$。这意味着对于 $u > 0$，按 (3.5) 定义并局部化到 $W_{E,F}$ 的算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 满足 (3.6)，且导数无损失，即

$$\mathcal{T}^\sigma : L^2_s(X_R) \to L^2_{s-m^\sigma_{\text{eff}}}(X_L), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

注意，由假设和 (3.10) 可知，$\operatorname{rank}(D_{x_L}\Psi) = \operatorname{rank}(D_{x_R}\Psi) = 1$ 处处成立，因此双纤维化条件 $(DF)\sigma$ 成立。

因此，根据上述分析可知，对于每个点 $(x_0, y_0) \in Z$，均存在一个划分 $\sigma = (E \mid F) \in \mathcal{P}_{2k}$，使得 $\max(d_{\sigma,L}, d_{\sigma,R}) \leq \alpha$；并且存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $W_{E,F}$，使得局部化到 $W_{E,F}$ 的算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 满足 (3.6)，且导数无损失。应用定理 3.1，取

$$p = 1, \alpha, \beta = 0, M = \Omega,$$

由此得到所需结果。定理的证明至此完成。 □

3.2.2. 2点构形。 现在我们假设$k = 2$和$p = 1$。设$X \subset \mathbb{R}^{d_X}$和$Y \subset \mathbb{R}^{d_Y}$为开集，其中$d_X$、$d_Y \geq 1$，并令 $\Omega = X \times Y$。设 $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ 为光滑淹没映射。我们进一步假设

$$\nabla_x \Phi(x, y) \neq \mathbf{0}, \nabla_y \Phi(x, y) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{3.12}$$

注意到在这种情况下，除了置换之外，配对 $\{E, F\}$ 只有一种选择，即$E = \{1\}$，$F = \{2\}$。因此，矩阵 $J_{E,F}\Phi$ 更为简单，而非退化条件 $\Gamma_m(E, F)$

可以b 很容易验证。对于 $(x,\ y,\ x',\ y') \in \Omega \times \Omega$，定义一个 $(d_X + d_Y + 1) \times (d_X + d_Y + 1)$ 矩阵 ix

$$\mathcal{J}_\Phi := \begin{bmatrix} 0 & \nabla_y \Phi(x,y) & -\nabla_{x'} \Phi(x',y') \\ (\nabla_x \Phi(x,y))^T & H_{x,y}\Phi(x,y) & 0 \\ (\nabla_{y'} \Phi(x',y'))^T & 0 & H_{y',x'}\Phi(x',y') \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

其中$H_{x,y}\Phi$ 是混合海森矩阵，即，

$$H_{x,y}\Phi := \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_j} \right]_{\substack{1 \le i \le d_X \\ 1 \le j \le d_Y}}.$$

若 Φ对于 $\Gamma_m(E,F)$–对某个整数$m \ge 0$非退化（见定义3.3），我们就称 Φ为Γ_m–非退化。

给定子集$A \subset X, B \subset Y$，定义 $\Delta_\Phi(A,B) = \{\Phi(x,y) : x \in A, y \in B\}$。作为定理3.4的直接推论，我们得到如下结论。

定理 3.6. 设 $\Phi \in C^\infty(X \times Y,\ \mathbb{R})$ 是一个光滑函数。假设 Φ是 Γ_m–非退化的，其中 $m \ge 0$为某个非负整数。

设 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 是紧集，满足 维数$_H A$，维数$_H B > 0$。

(i) 对于 $0 < u < 1$，若 $dim_H A + dim_H B > d_X + d_Y + m + 2u^{-1}$，则 $dim_H(\Delta_\Phi(A,B)) \ge u$。*(ii)* 若 $dim_H A + dim_H B > d_X + d_Y + m + \frac{1}{2}$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A,B)) > 0$。*(iii)* 若 $dim_H A + dim_H B > d_X + d_Y + m + \frac{3}{2}$，则 $Int(\Delta_\Phi(A,B)) \neq \emptyset$。

注记 3.7。在定理 3.6 (ii) 中，给定一个光滑函数 $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$，对于底层集合的维数，能够确保$\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A,\ B)) > 0$的最佳维数阈值为$A \subset X$ 和$B \subset Y$，我们可以预期其为

$$\dim_H A + \dim_H B > \frac{d_X + d_Y + 1}{2}.$$

若 Φ是 Γ_0-非退化的，即在关联关系集 Z 上，$\operatorname{rank}(H_{x,y})$达到最大值且 $\det(\mathcal{J}_\Phi) \neq 0$ 处处成立，则可以达到这一下界。这一下界通常是尖锐的，正如我们关于一般集合与位于超平面上的集合之间距离的定理是尖锐的。然而，许多重要的构型函数不满足行列式非零条件，即在Z上 $\det(\mathcal{J}_f) = 0$，即使混合海森矩阵$H_{x,y}\Phi$的秩达到最大值也是如此。这些函数包括距离 $\Phi(x,\ y) = |x - y|$ 和点积 $\Phi(x,\ y) = x \cdot y$。

注意，如果 Φ 满足（3.12），并且对$r \ge 1$，秩$(H_{x,y}) \ge r$ 处处成立，那么可以看出秩$(\mathcal{J}_\Phi) \ge 2r$，这意味着余秩$(\mathcal{J}_\Phi) \le d_X + d_Y + 1 - 2r$。由定理 3.6（ii）可知，如果 $A \subset X$和

$B \subset Y$是满足下列条件的紧集

$$\dim_H A + \dim_H B > \frac{d_X + d_Y}{2} + \frac{d_X + d_Y + 1 - 2r}{2} + \frac{1}{2} = d_X + d_Y + 1 - r,$$

th中 $\mathcal{L}^1$（Δ_Φ（A，B））> 0。因此，我们得到以下结果，它重述了定理 1.14 .

定理 3.8。设 $\Phi \in C^\infty$（$X \times Y$，$\mathbb{R}$）为一个光滑函数。假设

$$\nabla_x \Phi(x,y) \neq \mathbf{0}, \nabla_y \Phi(x,y) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x,y) \in X \times Y,$$

且对于某个 $r \geq 1$,

$$\operatorname{rank}\left(H_{x,y}\right) \geq r, \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

假设 $A \subset X$ 且 $B \subset Y$ 是紧集。

(i) 对于任意 $0 < u < 1$，若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d_X + d_Y + u - r$，则 维数$_H$（Δ_Φ（A，B））$\geq u$。

(ii) 若 $\dim_H A + \dim_H B > d_X + d_Y + 1 - r$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A,B)) > 0$。

(iii) 若 $\dim_H A + \dim_H B > d_X + d_Y + 2 - r$，则 $\operatorname{Int}(\Delta_\Phi(A,B)) \neq \emptyset$。

注 3.9。我们注意到，定理 3.6 （iii）与定理 3.8 （iii）由如下局部分割优化得到，见 [GIT24，定理 2。5],但我们以显式的 $\Gamma_m(E,F)$-非退化条件（3.3）来表述。

4. 维数扩张：二元情形

在本节中，我们将应用我们的一般定理来研究两个变量的光滑函数的维数扩张现象，并为 Raz 和 Zahl 所建立的关于实解析函数的 Elekes-Rónyai型定理给出另一种证明 [RZ24]，此时底集具有较大的豪斯多夫维数。

我们首先考虑二元实光滑函数的维数扩张问题。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个开集，并令 $f \in C^\infty(\Omega)$。为方便起见，我们记 $f_x = \partial_x f$、$f_y = \partial_y f$，高阶导数也类似记作 f。在满足 $\partial_{xy} f \neq 0$ 的定义域内，定义光滑函数ρ 为

$$\rho := \frac{\partial_x f \partial_y f}{\partial_{xy} f}.$$

然后定义一个辅助函数 $\kappa(x,y)$，定义为

$$\kappa(x,y) := (\nabla f \wedge \nabla \rho) = \nabla f \wedge \nabla \left(\frac{\partial_x f \partial_y f}{\partial_{xy} f} \right).$$

如引言中所述，这个辅助函数由 [RZ24] 引入，用于衡量在点（x，y）附近，f“看起来像”某种特殊形式的程度。函数 $\kappa(x,y)$与 Blaschke 曲率密切相关；若它与 0 保持正距离，则f满足离散化能量弥散估计，作者据此证明了主要结果。在我们的情形中，辅助函数 $\kappa(x,y)$也自然出现。受此启发，对于每个光滑函数f，我们定义坏集

$$\mathcal{Z}_{2,f} := \{\partial_x f = 0\} \cup \{\partial_y f = 0\} \cup \{\partial_{xy} f = 0\} \cup \{\kappa(x,y) = \mathbf{0}\}.$$

我们注意到，$\mathcal{Z}_{2,f}$是一个闭集，但不一定是 Ω的子流形，因为我们只假设f是光滑的，而没有进一步的非退化条件；光滑函数的零点集可以是豪斯多夫维数任意大的闭分形集（见 [Whi34]）。一般而言，尽管$\mathcal{Z}_{2,f}$可能非常不规则，f在$\mathcal{Z}_{2,f}$之外表现良好，这使我们能够得到维数扩张结果。

定理 4.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开集，且 $f \in C^\infty(\Omega)$ 是光滑的。假设 $A,B \subset \mathbb{R}$ 是紧集，使得维数$_H A$,维数$_H B > 0$ 且 $A \times B \subset \Omega \setminus \mathcal{Z}_{2,f}$。

(i) 对于 $u \in (0,1)$，若维数$_H A$ +维数$_H B > \frac{2}{3} + u$，则维数$_H \Delta_f(A,B) \geq u$。

(ii) 如果 $\dim_H A + \dim_H B > \frac{5}{3}$，那么 $\mathcal{L}^1(\Delta_f(A,B)) > 0$。

在给出上述定理的证明之前，我们注意到，如果将定理 3.4 或定理 3.6 应用于两个变量的函数，那么矩阵 $J_{E,F}$（定义见 3.11）在关联关系 Z上不具有最大秩。因此，根据定理 3.4 (ii)，例如，我们将得到以下条件

$$\dim_H A + \dim_H B > \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

而这显然是空洞的。因此，仅考察混合海森矩阵的秩是不够的，我们需要定理 3.1的全部结论。我们证明，当 $\kappa(x,y)$ 非零时，傅里叶积分算子 $\mathcal{T}$（定义如（3.5）所示）与折叠典范关系相关联。这使我们能够利用目前已知的针对 L^2–的最佳 Sobolev估计。$\mathcal{T}$。

定理 *4.1* 的证明。 我们将证明第（ii）部分，第（i）部分可用相同的论证证明。不失一般性，假设存在开区间X、$Y \subset \mathbb{R}$，使得$X \times Y \subset \Omega \setminus \mathcal{Z}_{2,f}$，且$A \subset X$、$B \subset Y$是紧集。

根据该定理的假设可得

$$f_x, f_y, f_{xy}, \kappa \neq 0, \quad \forall (x,y) \in X \times Y. \tag{4.1}$$

只需证明该定理的结论对于 f 在 X ×Y 上的限制成立；按照惯例，我们仍将其记为 f。回顾定理 3.1，由于需要找到该构形的关联关系 Z，然后证明存在常数 α、$\beta \geq 0$，使得对于余法丛 N *Z 中的每一点 (z,ξ)，都存在变量的二分划分 $\sigma = (\sigma_L \mid \sigma_R)$ 以及 (z,ξ) 的一个锥形邻域 $\mathcal{U}$，使得相应的算子 $\mathcal{T}^\sigma$ 在微局部化到 $\mathcal{U}$ 后，满足条件 [(DF)$_\sigma$；β] (3.6)，且导数损失至多为 β。

我们定义光滑函数 $\Psi: X \times Y \times X \times Y \to \mathbb{R}$ 如下

$$\Psi(x, y, x', y') := f^1(x, y) - f^2(x', y'), \quad \forall (x, y), (x', y') \in X \times Y,$$

其中 $f^1 = f^2 = f$。将变量 x，y，x'，y'，按 1、2、3、4 的顺序排列，并通过σ = （$\sigma_L \mid \sigma_R$） = （14 | 32）对其进行划分。选取 σ 是为了最小化 α 与 β，在应用定理 3.1 时（参见 [GIT24] 中关于如何选择此类优化划分的其他例子）。

记 $X_L = X_R = X \times Y$，我们将变量 $\{x, y, x', y'\}$ 分成两个群 $\{x, y'\}$ 与 $\{x', y\}$，对应于 σ，并记 x_L = （x，y'） $\in X_L$，x_R = （x'，y） $\in X_R$。

根据 (4.1)，关联关系 Z := $\Psi^{-1}(0)$ = $\{(x, y'; x', y) : f(x, y) = f(x', y')\} \subset X_L \times X_R$是余维 1 的光滑流形。与我们的分析相关的典范关系是 Z 的扭曲余法丛，即，

$$\begin{aligned}\Lambda := (N^* Z)' &= \{(x_L, \xi_L; x_R, \xi_R) : (x_L, x_R) \in Z, (\xi_L, -\xi_R) \perp TZ, \xi_L, \xi_R \neq \mathbf{0}\} \\ &= \{(x, y', \theta f_x^1, -\theta f_{y'}^2; x', y, \theta f_{x'}^2, -\theta f_y^1) : f^1(x, y) = f^2(x', y'), \theta \neq 0\}.\end{aligned}$$

一般而言，π_L 与 π_R 的奇点性质可能大不相同，这一点反映在相关算子的映射性质上。我们声称，在假设（4.1）下，有如下结论。

引理 4.2。 Λ 是一个折叠典范关系，也就是说，在任意退化点 $\zeta_0 \in \Lambda$处，两个余切空间投影 π_L 和 π_R 都具有惠特尼折叠奇点。

假设这 个引理成立，那么由定理 2.2，按（$\mathcal{T}^\sigma$）定义的算子 3.5）满足

$$\mathcal{T}^\sigma : L^2_s(X_R) \to L^2_{s - m_{eff} - \frac{1}{6}}(X_L), \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}.$$

因此 $\mathcal{T}^\sigma$ 满足 [$(DF)_\sigma$；β] 其中 σ = (14 | 32)，且 β = 1/6。因此，应用定理3.1 (ii)，取$k = 2$，$p = 1$，$\alpha = 2$，$\beta = 1/6$，可得 $\mathcal{L}^1(\Delta_f(A, B)) > 0$在.....条件下

$$\dim_H A + \dim_H B > \frac{2-1}{2} + 1 + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

对于 (i) 部分，如开头所述，证明过程类似。我们应用定理3.1 (ii)，取$k = 2$，$p = 1$，$\alpha = 2$，$\beta = 1/6$，且$u \in (0, 1)$，可得 $\dim_H \Delta_f(A, B) \geq u$在.....条件下

$$\dim_H A + \dim_H B > \frac{2-1}{2} + u + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + u.$$

这就完成了该定理的证明。 □

现在我们转向引理 4.2 的证明。我们注意到辅助函数 κ 具有如下性质。定义光滑映射 $P: X \times Y \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (P_1(x, y), P_2(x, y))$，其中

$$P_1(x, y) = f(x, y) \quad \text{and} \quad P_2(x, y) = \rho(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y. \tag{4.2}$$

根据定义 $\kappa = \nabla f \wedge \nabla \rho$，由条件（4.1）可知，微分 dP在 $X \times Y$ 上处处具有非零行列式，因此映射 P 在每一点处都是局部微分同胚。更准确地说，有如下引理。

引理 4.3。令 $X, Y \subset \mathbb{R}$ 为开区间。设 $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，满足 $f_x, f_y, f_{xy}, \kappa \neq 0$ 对所有 $(x, y) \in X \times Y$ 均成立。那么对每个 $(x_0, y_0) \in X \times Y$，存在一个包含$(x_0, y_0)$ 的邻域 W，使得 $P = (f, \rho)$ 在 W 上的限制，记为 $P|_W: W \to P(W)$，是一个微分同胚。

引理 *4.2* 的证明。由对称性，只需证明在典范关系Λ的每一点处，投影 π_L 是惠特尼折叠。

为此，我们将证明，奇异点集 Σ（其中$D\pi_L$ 退化）是 Λ 中的一个余维 1 光滑曲面，行列式 $\det(D\pi_L)$ 在 Σ 上一阶消失（即其梯度非零），并且在每一点 $\zeta \in \Sigma$ 处，$D\pi_L$ 的核与切空间在基点 ζ 处的 Σ 横截，即

$$\nabla(\det(D\pi_L))_\zeta \neq 0 \quad \text{and} \quad T_\zeta \Sigma + \operatorname{Ker}(D\pi_L)_\zeta = T_\zeta \Lambda \quad \text{for } \zeta \in \Sigma; \tag{4.3}$$

（例如参见 [GG73，第三章。4]）

只需在 Λ的每一点处取局部坐标证明（4.3）即可。设 $\zeta_0 \in \Lambda$，则 ζ_0 对应于 $z_0 = (x_0, y_0', x_0', y_0) \in Z$和 $\theta_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，即

$$\zeta_0 = \left(x_0, y_0', \theta_0 f_x^1(x_0, y_0), -\theta_0 f_{y'}^2(x_0', y_0'); x_0', y_0, \theta_0 f_{x'}^2(x_0', y_0'), -\theta_0 f_y^1(x_0, y_0)\right) \in \Lambda.$$

为在 ζ_0 处找到局部坐标，我们考虑 z_0 附近的方程 $\Psi(x, y, x', y') = f^1(x, y) - f^2(x', y') = 0$。根据 (4.1)，有 $\partial_y \Psi(z_0) = \partial_y f^1(x_0, y_0) \neq 0$，由隐函数定理可知，存在一个开集 $W = W_{x_0} \times W_{y_0'} \times W_{x_0'}$，其中 W_{x_0}、$W_{y_0'}$ 和 $W_{x_0'}$ 是 x_0, y_0' 的邻域，

以及x_0' respec 分别，且存在唯一的可微函数 $\varphi\colon\ W\to\mathbb{R}$，使得 $y_0=\varphi(x_0,y_0',x_0')$ 并且

$$\Psi\left(x,\varphi(x,y',x'),x',y'\right)=f^1(x,\varphi(x,y',x'))-f^2(x',y')=0,\quad \forall (x,y',x')\in W. \tag{4.4}$$

此外，φ 的偏导数由下式给出

$$\varphi_x=-\frac{f^1_x}{f^1_y},\quad \varphi_{y'}=\frac{f^2_{y'}}{f^1_y},\quad \varphi_{x'}=\frac{f^2_{x'}}{f^1_y},\quad \forall (x,y',x')\in W. \tag{4.5}$$

因此，在z_0,附近，Z局部是 φ 的图像：$W\to\mathbb{R}$，记为$Z\varphi$。设 $\mathcal{U}_{\zeta_0}$ 为$Z\varphi$的扭曲余法丛。不失一般性，我们假设 $\theta_0>0$，并将 $\mathcal{U}^+_{\zeta_0}=\mathcal{U}_{\zeta_0}\cap\{\theta>0\}$视为 ζ_0的锥形邻域；并且通过记号的滥用，我们也将其称为 $\mathcal{U}_{\zeta_0}$。于是 $\mathcal{U}_{\zeta_0}$ 可由F参数化：$W\times(0,\infty)\to(T^*X_L\setminus\mathbf{0})\times(T^*X_R\setminus\mathbf{0})$，定义为

$$F(x,y',x',\theta)=\left(x,y',\theta f^1_x(x,\varphi(\cdot)),-\theta f^2_{y'}(x',y');x',\varphi(\cdot),\theta f^2_{x'}(x',y'),-\theta f^1_y(x,\varphi(\cdot))\right),$$

对于$(x,y',x',\theta)\in W\times(0,\infty)$。

设 $\pi_L\colon\ \Lambda\to T^*X_L$为余切空间投影，定义为

$$\pi_L(x_L,\xi_L,x_R,\xi_R)=(x_L,\xi_L),\quad \text{for } (x_L,\xi_L,x_R,\xi_R)\in\Lambda.$$

于是，复合映射 $g=\pi_L\circ F\colon W\times(0,\infty)\to T^*X_L$是 π_L 的一个局部表示，定义如下：

$$(x,y',x',\theta)\mapsto\left(x,y',\theta f^1_x\left(x,\varphi(x,y',x')\right),-\theta f^2_{y'}(x',y')\right).$$

只需证明 g 具有惠特尼折叠奇点。换言之，我们将验证（4.3），其中用 g代替 π_L，并用 $\Sigma(g)$ 代替 Σ，其中 $\Sigma(g)$ 是 g的临界点集，即

$$\Sigma(g):=\left\{(x,y',x',\theta):\det(Dg)(x,y',x',\theta)=0\right\}. \tag{4.6}$$

计算可得

$$Dg=\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_{y'} & 0 & 0\\ \theta\left(f^1_{xx}+f^1_{xy}\cdot\varphi_x\right) & 0 & \theta f^1_{xy}\cdot\varphi_{x'} & f^1_x\\ -0 & -\theta f^2_{y'y'} & -\theta f^2_{x'y'} & -f^2_{y'}\end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

其行列式等于

$$\det(Dg)=\theta\left(f^2_{x'y'}f^1_x-f^1_{xy}\varphi_{x'}f^2_{y'}\right).$$

将 $\varphi_{x'} = f^2{}_{x'} f^1_y$ 代入（4.5）中的表达式，可得

$$\det(Dg) = \theta\left(f^2_{x'y'}f^1_x - f^1_{xy}\frac{f^2_{x'}}{f^1_y}f^2_{y'}\right) = \theta\frac{f^1_{xy}f^2_{x'y'}}{f^1_y}\left(\frac{f^1_x f^1_y}{f^1_{xy}} - \frac{f^2_{x'}f^2_{y'}}{f^2_{x'y'}}\right).$$

由于$f^1 = f^2 = f$，且 $\rho = f_x f_{xy} - f_{xy}$，上述公式给出

$$\det(Dg)(x,y',x',\theta) = \theta\frac{f_{xy}\left(x,\varphi(x,y',x')\right) f_{xy}(x',y')}{f_y(x,\varphi(x,y',x'))}\cdot\left[\rho\left(x,\varphi(x,y',x')\right) - \rho(x',y')\right], \tag{4.8}$$

对于 $(x,\ y',\ x',\ \theta) \in W \times (0,\ \infty)$。根据假设（4.1），$\det(Dg)$ 当且仅当

$$\rho\left(x,\varphi(x,y',x')\right) - \rho(x',y') = 0.$$

注意到每个点（$x,\ y',\ x',\theta$）$\in \Sigma$（g）都满足以下方程组

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x,y',x')) - f(x',y') &= 0 \\ \det(Dg)(x,y',x',\theta) &= 0 \end{cases},$$

其中，第一个结论由（4.4）得到，第二个结论由 Σ（g）的定义得到。这等价于

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x,y',x')) = f(x',y') \\ \rho(x,\varphi(x,y',x')) = \rho(x',y') \end{cases} \quad \text{or} \quad P\left(x,\varphi(x,y',x')\right) = P(x',y'), \tag{4.9}$$

其中 $P = (f,\rho)$ 在 (4.2) 中定义。回顾引理 4.3，必要时限制 $W = W_{x_0} \times W^{y'_0} \times W^{x'_0}$，我们可以假设 $P|_W$ 是到其像上的微分同胚。结合 (4.9)，我们得出 $(x, y', x', \theta) \in \Sigma(g)$ 当且仅当 $x' = x, y' = \varphi(x, y', x')$，即 g 的临界集为

$$\Sigma(g) = \left\{(x,y',x,\theta) : x \in W_{x_0}, y' \in W_{y'_0}, \theta \in (0,\infty)\right\} \tag{4.10}$$

是余维 1 的子流形。

接下来，根据（4.8），我们计算

$$\begin{aligned}\partial_x(\det(Dg)) = \theta(*)\cdot\left[\rho\left(x,\varphi(\cdot)\right) - \rho(x',y')\right] \\ + \theta\frac{f_{xy}\left(x,\varphi(\cdot)\right) f_{xy}(x',y')}{f_y(x,\varphi(\cdot))}\cdot\left[\rho_x(x,\varphi(\cdot)) + \rho_y(x,\varphi(\cdot))\varphi_x(\cdot)\right],\end{aligned}$$

其中，我们省略了该项，因为它与 $*$ 的分析无关。将 $\varphi_x = -\frac{f_x}{f_{y'}}$ 由（4.5）代入上述表达式，对于每个点 $\omega = (\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{x},\ \theta) \in \Sigma(g)$，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_x\big(\det(Dg)\big)\Big|_{\omega=(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{x},\tilde{\theta})} &= \tilde{\theta}\frac{[f_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})]^2}{f_y(\tilde{x},\tilde{y})}\cdot\left[\rho_x(\tilde{x},\tilde{y}-\rho_y(\tilde{x},\tilde{y})\frac{f_x(\tilde{x},\tilde{y})}{f_y(\tilde{x},\tilde{y})}\right]\\ &= \tilde{\theta}\left[\frac{f_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})}{f_y(\tilde{x},\tilde{y})}\right]^2\cdot\left[\rho_x f_y-\rho_y f_x\right](\tilde{x},\tilde{y})\\ &= -\tilde{\theta}\left[\frac{f_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})}{f_y(\tilde{x},\tilde{y})}\right]^2\cdot\kappa(\tilde{x},\tilde{y})\\ &\neq 0,\end{aligned}$$

其中最后一行用到了假设（4.1）。由此可得

$$\nabla(\det(Dg))(\omega)\neq 0 \quad \text{for all } \omega\in\Sigma(g). \tag{4.11}$$

对于 th e 下一步，我们固定一点 $\omega = (\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{x},\theta) \in \Sigma(g)$，那么 $\Sigma(g)$ 在 ω i 处的切空间 s

$$T_\omega\Sigma(g) = \big\{(v_{x'}, v_{y'}, v_{x'}, \tau) : v_{x'}, v_{y'}, \tau\in\mathbb{R}\big\} \subset T_\omega(W\times(0,\infty)) = \mathbb{R}^4. \tag{4.12}$$

要求核(Dg)，需解 $Dg(v_x, v'_y, v_{x'}, \tau) = 0$，其中 $(v_x, v'_y, v_{x'}, \tau) \in T\omega(W\times(0,\infty))$。由 (4.7)，可得

$$\begin{cases} v_x & = 0\\ v_{y'} & = 0\\ \theta(f^1_{xx}+f^1_{xy}\varphi_x)\cdot v_x+\theta f^1_{xy}\varphi_{x'}\cdot v_{x'}+f^1_x\cdot\tau & = 0\\ \theta f^2_{y'y'}\cdot v_{y'}+\theta f^2_{x'y'}\cdot v_{x'}+f^2_{y'}\cdot\tau & = 0\end{cases}.$$

这等价于

$$\begin{cases} v_x, v_{y'} & = 0\\ \theta f^1_{xy}\varphi_{x'}\cdot v_{x'}+f^1_x\cdot\tau & = 0\\ \theta f^2_{x'y'}\cdot v_{x'}+f^2_{y'}\cdot\tau & = 0\end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} v_x, v_{y'} & = 0\\ v_{x'} & = \frac{-\tau}{\theta}\frac{f^2_{y'}}{f^2_{x'y'}}\end{cases}, \quad \theta\neq 0.$$

因此，我们有

$$\mathrm{Ker}(Dg)_\omega = \left\{\left(0,0,\frac{f_y(\tilde{x},\tilde{y})}{f_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})}\tau,\tau\right) : \tau\in\mathbb{R}\right\}. \tag{4.13}$$

由（4.12）和（4.13），利用 $f_y/f_{xy}\neq 0$ 这一事实，可知

$$T_\omega\Sigma(g)+\mathrm{Ker}(Dg)_\omega = T_\omega(W\times(0,\infty)) = \mathbb{R}^4, \tag{4.14}$$

即，核（Dg）ω与 $T_\omega\Sigma$（g）横截相交。结合（4.14）和（4.11），我们得出 $\omega\in\Sigma$（g）是一个折叠点。由于这对 Σ（g）中的每个点都成立，我们得出 g具有惠特尼折叠奇点，其折叠曲面为 Σ（g）。由于 g是 $\pi_L|_{\mathcal{U}_{\zeta_0}}$的局部表示，因此 $\pi_L|_{\mathcal{U}_{\zeta_0}}$ 在每个点 $\zeta_0\in\Lambda$都具有惠特尼折叠奇点。这就完成了引理的证明。□

接下来，我们将给出定理 1.4的证明，即关于二元实解析函数的 Elekes-Rónyai 定理。辅助函数 κ 之所以有用，原因如下（另见 [ER00、RS17]）。

引理 4.4（ [RZ24] 引理 3.3)。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为一个连通开集，且 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ 为解析的。假设 f_x、f_y 和 f_{xy} 均不在 Ω上恒等为零。那么， $\kappa(x,y)=\nabla f\wedge\nabla\rho$在 Ω上恒等为零，当且仅当 f 是解析特殊形式。

为方便读者，现将定理 1.4 重新表述如下。

定理 4.5。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为一个连通开集，且 $f\in C^\omega(\Omega)$ 为二元解析函数。则 f 要么是解析特殊形式，要么对于每一对具有正豪斯多夫维数的紧集 A、$B\subset\mathbb{R}$，满足 $A\times B\subset\Omega$，都有如下结论

(i) 对于 $u\in(0,1)$，若 $\dim_H A+\dim_H B>\frac{2}{3}+u$，则 $\dim_H\Delta_f(A,B)\geq u$。

(ii) 若 $\dim_H A+\dim_H B>\frac{5}{3}$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta_f(A,B))>0$。

证明。 我们将证明(ii)，(i)可由相同的论证得出。设 $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ 是一个非解析特殊形式的解析函数。假设 $A\subset X$且 $B\subset Y$是满足以下条件的紧集

$$\dim_H A+\dim_H B>\frac{5}{3},$$

其中 $X,Y\subset\mathbb{R}$是满足 $X\times Y\subset\Omega$的闭区间。于是由引理 4.4，可得

$$f_x\neq 0, f_y\neq 0, f_{xy}\neq 0, \text{ and } \kappa(x,y)\neq 0,\quad \forall (x,y)\in X\times Y. \tag{4.15}$$

回忆一下，我们定义

$$\mathcal{Z}_{2,f}:=\{f_x=0\}\cup\{f_y=0\}\cup\{f_{xy}=0\}\cup\{\kappa=0\}.$$

由于f是解析的，$\mathcal{Z}_{2,\ f}$是维数为 $\dim\mathcal{Z}_{2,\ f}\leq 1$的实解析簇的有限并；事实上，它是一个半解析集 [Łoj65]。令 $\delta=\frac{1}{2}(\dim_H A+\dim_H B-5/3)>0$，则根据引理 2.7，存在

存在一点（a, b）$\in \Omega \setminus \mathcal{Z}_{2,f}$使得

$$\dim_H(A\cap \tilde{X}) \geq \dim_H A - \delta/4, \quad \text{and} \quad \dim_H(B\cap \tilde{Y}) \geq \dim_H B - \delta/4, \tag{4.16}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$分别对于X和Y中a和b的任意邻域。通过选取足够小的区间$\tilde{}X \subset X$和 $\tilde{}Y \subset Y$，令 $\tilde{}A = A\cap \tilde{}X$且 $\tilde{}B = B\cap \tilde{}Y$，我们可以假设

$$\tilde{A}\times \tilde{B} \subset \Omega\setminus \mathcal{Z}_{2,f}, \quad \text{and}$$

$$\dim_H \tilde{A} + \dim_H \tilde{B} > \dim_H A + \dim_H B - \delta/2 > \frac{5}{3},$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$其中最后一行由（4.16）得出。应用定理 4.1，取 f、A和 B，可得$\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(\tilde{}A, \tilde{}B)\right) > 0$, 从而得到 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A,B)\right) > 0$如所需。至此，定理得证。

□

5. 维数扩张：三元情形

我们将讨论关于三个变量的光滑函数的维数扩张现象的结果。作为推论，我们证明了一个关于三元实解析函数的Elekes-Rónyai 型定理。

与二元情形类似，我们将首先讨论三元光滑函数的维数扩张结果。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一个开集。对$x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$定义，

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(x) &= f_3(x)f_{12}(x) - f_{13}(x)f_2(x), \\ \mathcal{G}_2(x) &= f_3(x)f_{12}(x) - f_{23}(x)f_1(x), \\ \mathcal{G}_3(x) &= f_1(x)f_{23}(x) - f_{13}(x)f_2(x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中$f_i(x) = \partial_{x_i} f(x)$，且$f_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$，$1 \leq i$，$j \leq 3$。这些函数的公共零点集随后记为$\mathcal{Z}_{3,f}$，即

$$\mathcal{Z}_{3,f} := \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{G}_i^{-1}(0) = \{x\in\Omega : \mathcal{G}_i(x) = 0, \forall 1 \leq i \leq 3\}.$$

容易看出，$\mathcal{Z}_{3,f} \supset \{x : \nabla f(x) = 0\}$，即$f$的临界集。注意到$\{\mathcal{G}_i\}_i$是光滑函数，并且若 $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j = 0$, 对某个 $1 \leq i < j \leq 3$，则 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3 = 0$。

给定紧集A，B，$C \subset \mathbb{R}$，$A\times B\times C \subset \Omega$，回顾

$$\Delta_f(A,B,C) := \left\{f(x_1,x_2,x_3) : x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C\right\}.$$

定理 5.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$为一个开集，且$f \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$。设$A_i \subset \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$为紧集，使得每个 维数$_H$ $A_i > 0$，且 $A_1\times A_2\times A^3 \subset \mathcal{Z}_3^c f$。

3(i) 若 $0 < u < 1$，且 $\sum i=1$维数$_H A_i > 1 + u$，则 维数$_H \Delta_f(A_1, A$
$_2, A_3) \geq u$。
(ii) 若 $\sum_{i=1}^{3}$维数$_H A_i > 2$，则 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A_1, A_2, A_3)\right) > 0$。

此外，若存在 $i_0 \in \{1,2,3\}$ 使得对所有 $x \in \Omega$，都有 $\nabla \mathcal{G}_{i_0}(x) \neq 0$，则在假设 $A_1 \times A_2 \times A_3 \subset \Omega$ 下，*(i)* 成立。

定理证明 *5.1*。 我们将证明 (ii) 部分，(i) 部分可用相同的论证证明。首先，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一个开集，且令 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数。假设 $A_i \subset \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3$ 是紧集，且满足 $A = A_1 \times A_2 \times A^3 \subset \mathcal{Z}_3^c$,$_f$。

为证明 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A_1, A_2, A_3)\right) > 0$，根据定理 3.4，我们首先需要找出该构形的关联关系 Z，并证明对每个点 $z \in Z$，存在非空子集E、F，它们属于 {1, 2, 3}，使得 f在 $\Gamma_m(E,F)$–处于非退化状态，且该状态在 z处成立，其中 $m \geq 0$。

我们声称 存在$i_0 \in \{1, 2, 3\}$，以及一个开立方体$U = U_1 \times U_2 \times U^3 \subset \mathcal{Z}_3^c$、$_f$，使得

$$\dim_H(A \cap U) = \dim_H A, \quad \text{and} \quad \mathcal{G}_{i_0}(x) \neq 0, \quad \forall x \in U. \tag{5.2}$$

为说明这一点，不失一般性，可假设 Ω 有界，因而 $\mathcal{G}^{-1}$ i (0)，且$\mathcal{Z}_3$和f是紧的。对每个 i，令 W $_i = \Omega \setminus$ g $^{-1}$(0)，则 A $\subset \bigcup_{i=1}^{3}W_i$。由鸽巢原理，存在某个 i$_0$，使得 dim$_H$A $\cap$W$_{i_0}$ = dim$_H$A。由于 W$_{i_0}$是开集，可将其写成开∞球的可数并：W$_{i_0}$ = $\bigcup_{j=1}$B j，其中对每个 j ≥ 0，球 B j (w j , r j) 的中心为 w j ∈W$_{i_0}$，半径 r j < $\frac{1}{4}$d(w j , g $^{-1}$(0))。再次运用鸽巢原理，存在一个球 B j$_0$(w j$_0$,r j$_0$)，使得

–

$$\dim_H(A \cap B_{j_0}) = \dim_H A.$$

设$U = U_1 \times U_2 \times U_3 \subset \mathbb{R}^3$是一个边长为 $2r_{j_0}$,、中心位于w_{j_0}的开立方体。显然，

$$B_{j_0} \subset U \subset W_{i_0} \subset \mathcal{Z}_{3,f}^c,$$

and

$$\dim_H(A \cap U) \geq \dim_H(A \cap B_{j_0}) = \dim_H A,$$

3 3 如所需。取 $A'i = A_i \cap U_i, 1 \leq i \leq 3$，则有 $\sum i=1$维$_H A'i = \sum_{i=1}$维$_H A_i$，并且在U上处处 $\mathcal{G}_{i_0} \neq 0$。

接下来，考虑所有满足E、$F \subset \{1,2,3\}$均非空，且$F = E^c = \{1,2,3\} \setminus E$，并且$|E| \geq |F|$的子集对。有三种情况：

$$(E;F) = (23;1), \quad (E;F) = (12;3), \quad (E;F) = (13;2).$$

我们选择E,F满足上述条件，是为了在应用定理3.4时获得最优维数阈值。根据定义（3.11），由于$F = E^c = E_I$，对于x、$y) \in \Omega \times \Omega$，矩阵$J_{E,F}f(x, y$的定义为

$$J_{E,F}f := \begin{bmatrix} 0 & \nabla_{x_F} f(x) & -\nabla_{y_E} f(y) \\ (\nabla_{x_E} f(x))^T & H_{x_E,x_F} f(x) & 0 \\ (\nabla_{y_F} f(y))^T & 0 & H_{y_F,y_E} f(y) \end{bmatrix}.$$

若$(E;\ F) = (2\ 3;\ 1)$，则矩阵$J_{E;F}f$变为

$$J_1 f = \begin{bmatrix} 0 & f_1(x) & -f_2(y) & -f_3(y) \\ f_2(x) & f_{12}(x) & 0 & 0 \\ f_3(x) & f_{13}(x) & 0 & 0 \\ f_1(y) & 0 & f_{12}(y) & f_{13}(y) \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

其行列式为$Q_1 = \det[J_1 f\ ]$,

$$Q_1 = -\big[f_3(x)f_{12}(x) - f_{13}(x)f_2(x)\big]\big[f_3(y)f_{12}(y) - f_{13}(y)f_2(y)\big] = -\mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_1(y). \tag{5.4}$$

类似地，对于$(E;\ F) = (1\ 3;\ 2)$和$(E;\ F) = (1\ 2;\ 3)$，对应的行列式分别为

$$Q_2 = \det[J_2 f] = -\mathcal{G}_2(x)\mathcal{G}_2(y),$$

and

$$Q_3 = \det[J_3 f] = -\mathcal{G}_3(x)\mathcal{G}_3(y), \tag{5.5}$$

分别。

令 Φ 为 f 在 U 上的限制， $\Phi = f\ |_U$: U $\to \mathbb{R}$。由 (5.2) 立即可得，对于所有 (x, y) $\in$ U $\times$U, Q_{i_0}(x, y) $\neq$0，这意味着 corank(J_{i_0}f) = 0 在 U $\times$U 上。不妨设 $i_0 = 1$，其他情形可类似处理。上述分析表明， Φ 在 Z 中的每一点 $(x_0, y_0) \in$处都是 (E；F)-非退化的，其中 (E；F) =(2 3； 1)，并且

$$Z = \{(x, y) \in U \times U : f(x) = f(y)\}.$$

应用定理 3.4，取 $\Phi = f|_U$、$\alpha = n_{E,F} = 3$ $m = 0$以及 $\{A'_i\}_i$，即可得到所需结果。更确切地说，根据定理 3.4 （ii），有 $\mathcal{L}^1$（Δ_Φ（A'_1，A'_2，A'_3））> 0，条件是

$$\sum_{i=1}^{3} \dim_H A'_i > \frac{\alpha}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

3 3 利用这一事实：$A_i \supset A'_i$，以及 $\sum_{i=1}$维数$_H A'_i = \sum_{i=1}$维数$_H A_i$，可得，如果

$$\sum_{i=1}^{3} \dim_H A_i > 2,$$

那么 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A_1, A_2, A_3)\right) > 0$，这就给出了定理的 (i) 部分。

最后，如果对于某个 $i \in \{1,2,3\}$，有 $\nabla \mathcal{G}_i(x) \neq 0$ 对所有 $x \in \Omega$ 都成立，那么 $\mathcal{Z}_{3,f}$包含于 $\mathbb{R}^3$ 中的一个超曲面内，因此维数$\mathcal{Z}_{3,f} \leq 2$。因此，如果维数$_H A > 2$，则有

$$\dim_H(A \cap \mathcal{Z}^c_{3,f}) = \dim_H A > 2.$$

因此，定理的 (i) 部分由情形 $A \subset \mathcal{Z}^c_{3,f}$得出，从而完成定理的证明。□

如引言中所述，若 $f \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$，则集合 $\mathcal{Z}_{3,f}$是实解析函数的零点集，因此具有更好的几何结构。利用这一事实，我们可以确定 Falconer 型问题中的退化函数类别为解析特殊形式（见定义1.7）。定理 1.8 由以下定理推出。

定理5.2。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为连通开集，且 $f \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$。假设 f 不是解析特殊形式，并且其所有一阶偏导数在 Ω上均不恒为零。

设 $A_i \subset \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3$，是具有正豪斯多夫维数的紧集，且满足 $A_1 \times A_2 \times A_3 \subset \Omega$.

(i) 对于 $u \in (0,1)$，若 维数$_H A_1 +$维数$_H A_2 +$维数$_H A_3 > 1 + u$，则 维数$_H \Delta_f(A_1, A_2, A_3) \geq u$。
（ii）如果$\dim_H A_1 + \dim_H A_2 + \dim_H A_3 > 2$，那么 $\mathcal{L}^1\left(\Delta_f\left(A_1, A_2, A_3\right)\right) > 0$。

回顾一下，解析函数f：$\Omega \to \mathbb{R}$ 称为解析特殊形式，如果存在一个三连通区域$W \subset \Omega \setminus \bigcup_{i=1}\{\partial_{x_i} f = 0\}$，以及单变量实解析函数$G$、$H_1, H_2,$和$H_3$，使得

$$f(x_1, x_2, x_3) = G\big(H_1(x_1) + H_2(x_2) + H_3(x_3)\big), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in W. \tag{5.6}$$

在证明定理5.2之前，我们指出，辅助函数$\{\mathcal{G}_i\}^3_{i=1}$之所以有用，是因为如下原因。

引理5.3。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个连通开集，且 $f \in C^\omega(\Omega)$ 是解析的，并且其所有一阶偏导数在 Ω上都不恒等于零。那么，对于所有$1 \le i \le 3$， $\mathcal{G}_i$ 在 Ω 上恒等于零，当且仅当 f 是解析特殊形式。

暂且假设引理 5.3 成立，我们来讨论定理 5.2的证明。

定理 *5.2* 的证明。 设 Ω是 $\mathbb{R}^3$中的连通开集，且 $f \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ 是满足定理假设的解析函数。我们将证明 (i) 部分；(ii) 部分可用相同的论证处理。设 $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}$ 是满足以下条件的紧集： $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \subset \Omega$，且 $\dim_H A > 2$。

回顾一下，由于 f 是解析的，(5.1) 中定义的函数 $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^3$ 是实解析函数，因此$\mathcal{Z}_{3,f} = \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{G}_i^{-1}(0)$ 是 Ω 的实解析子簇。若对某个指标 i， $\mathcal{G}_i \not\equiv 0$在 Ω 上成立，则由引理 2.7，对于一个固定常数 $0 < \varepsilon < \dim_H A - 2$，存在一点 $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Omega \setminus \mathcal{Z}_{3,f}$，使得对每个指标 i， A_i 的局部维数为 $\ge \dim_H A_i - \varepsilon/4$。这意味着存在一个包含 a 的开立方体 $Q = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \Omega \setminus \mathcal{Z}_{3,f}$，使得

$$\dim_H (A_i \cap I_i) \ge \dim_H A_i - \varepsilon/4, \quad \forall 1 \le i \le 3.$$

对每个指标$A'_i = A_i \cap I_i$，取i，可得$A'_1 \times A'_2 \times A'_3 \subset \Omega \setminus \mathcal{Z}_{3,f}$以及

$$\dim_H A'_1 + \dim_H A'_2 + \dim_H A'_3 \ge \dim_H A_1 + \dim_H A_2 + \dim_H A_3 - 3\varepsilon/4 > 2.$$

应用定理 5.1 (i)，取 A'_1、A'_2和 A'_3，可得 $\mathcal{L}^1(\Delta_f(A'_1, A'_2, A'_3)) > 0$，由此推出$\mathcal{L}^1\left(\Delta_f(A_1, A_2, A_3)\right) > 0$正如所需。

现在假设 $\mathcal{G}_i$在 Ω上恒等于零，其中 $1 \le i \le 3$。由引理 5.3可知$f|_W$是一个解析特殊形式，这与定理的假设矛盾。定理的证明至此完成。 □

现在转而证明引理 5.3。

引理 *5.3*的证明。 设 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个解析函数，其所有一阶偏导数在 Ω上均不恒等于零。若 f是一个解析特殊形式，则容易验证 $\mathcal{G}_i$在 Ω上恒等于零，其中 $i \le 3$。

现在假设 $\mathcal{G}_i$在 Ω上恒为零，对于 $1 \le i \le 3$，或者等价地，

$$(\partial_1 f)(\partial_{23} f) - (\partial_{13} f)(\partial_2 f) = 0, \tag{5.7}$$

$$(\partial_3 f)(\partial_{12} f) - (\partial_{13} f)(\partial_2 f) = 0, \tag{5.8}$$

$$(\partial_3 f)(\partial_{12} f) - (\partial_{23} f)(\partial_1 f) = 0, \tag{5.9}$$

对所有$x \in \Omega$。我们将证明f是解析特殊形式。

由假设f是解析的且 $\partial_i f \neq 0$ 对所有 $1 \leq i \leq 3$ 都成立，可知 s et

$$W_f := \{x \in W : \partial_i f(x) = 0 \text{ for some } i \in \{1,2,3\}\}$$

是维数为 $\dim W_f \leq 2$ 的子流形之并。因此，存在一个开集 $W' \subset \Omega \setminus W_f$，使得对于所有$x \in W'$以及所有 $1 \leq i \leq 3$，都有 $\partial_i f(x) \neq 0$。

考虑第一个方程在 W' 上的限制，利用 $\partial_2 f \neq 0$ 在 W' 上成立这一事实，我们可以将方程 (5.7) 写成

$$\frac{(\partial_1 f)(\partial_{23} f) - (\partial_{13} f)(\partial_2 f)}{(\partial_2 f)^2} = 0, \quad \forall x \in W',$$

可将其改写为

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial_1 f}{\partial_2 f}\right) = 0, \quad \forall x \in W'.$$

这意味着 $\frac{\partial_1 f}{\partial_2 f}$在$W'$上不依赖于$x_3$。因此，存在一个解析函数$a(x_1,x_2) \neq 0$ 使得

$$\partial_1 f = a(x_1, x_2)\partial_2 f, \quad \forall x \in W'. \tag{5.10}$$

类似地，由方程 (5.8) 和 (5.9)，我们断言存在解析函数 $b(x_2,x_3) \neq 0, c(x_1,x_3) \neq 0$ 使得对所有 $x \in W'$

$$\partial_2 f = b(x_2, x_3)\partial_3 f, \tag{5.11}$$

$$\partial_1 f = c(x_1, x_3)\partial_3 f. \tag{5.12}$$

将 (5.11) 代入 (5.10)，得到如下结果

$$\partial_1 f = a(x_1, x_2)\partial_2 f = a(x_1, x_2)b(x_2, x_3)\partial_3 f, \quad \forall x \in W'.$$

将其与 (5.12) 比较，可得

$$c(x_1, x_3) = a(x_1, x_2)b(x_2, x_3), \quad \forall x \in W'.$$

注意，左边的函数 $c(x_1, x_3)$ 依赖变量 $x_1, x_3,$，而不依赖 x_2。在右边，$a(x_1,\cdot)$ 和 $b(\cdot, x_3)$ 在某个非空区间 I 上依赖变量 x_2。因此，存在一个开球 $\mathcal{B} \subset W'$，使得 a和b具有如下形式

$$a(x_1, x_2) = \tilde{a}_1(x_1)\tilde{a}_2(x_2), \quad b(x_2, x_3) = \frac{1}{\tilde{a}_2(x)} b_3(x_3), \quad \forall x \in \mathcal{B},$$

其中 $\tilde{a}1, \tilde{a}_2, b_3$ 是关于一个变量的非零解析函数。方程（5.10）和（5.11）变为

$$\partial_1 f = \tilde{a}_1(x_1)\tilde{a}_2(x_2)\partial_2 f \quad \text{and} \quad \partial_2 f = \frac{1}{\tilde{a}_2(x_2)} b_3(x_3)\partial_3 f, \quad \forall x \in \mathcal{B}.$$

这些方程 构成一个齐次一阶偏微分方程组，也就是说， s,

$$\begin{cases} a_1(x_1)\partial_1 f - a_2(x_2)\partial_2 f = 0 \\ a_2(x_2)\partial_2 f - a_3(x_3)\partial_3 f = 0 \end{cases}, \qquad \forall x \in \mathcal{B},$$

其中 $a_1(x_1) = \tilde{} \frac{1}{a_1(x_1)}$、$a_2(x_2) = \tilde{a}_2(x_2)$，以及 $a_3(x_3) = b_3(x_3)$ 均为非零解析函数。利用特征线法求解上述方程组，可得 f 的形式。

断言 5.4. 存在解析函数 $G_0, H_1, H_2, H_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以及一个开集 $\tilde{W} \subset \mathcal{B}$，使得

$$f(x_1, x_2, x_3) = G_0(H_1(x_1) + H_2(x_2) + H_3(x_3)), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \tilde{W}. \tag{5.13}$$

不失一般性，经平移后，假设 $\mathcal{B} = B(0, r)$，其中 $r > 0$。令 L_1, L_2 为微分算子

$$L_1 = a_1(x_1)\partial_1 + a_2(x_2)\partial_2, \quad L_2 = a_2(x_2)\partial_2 + a_3(x_3)\partial_3,$$

并考虑 $\mathcal{B}$ 上的偏微分方程组：

$$L_1(u) = 0, \tag{5.14}$$

$$L_2(u) = 0. \tag{5.15}$$

对于 $s \in \mathbb{R}^3$，我们也记作 $s = (s_1, s_2, s_3)$，其中 $s_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3$。考虑 (5.14)，并定义向量场 V_1 在 $\mathcal{B}$ 上的定义如下

$$V_1(s) = (a_1(s_1), a_2(s_2), 0), \quad \forall s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{B}.$$

注意，曲面 $S = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{B} : s_1 = 0\}$ 对 L_1 而言是非特征的。事实上，对于任意点 $s \in S$，由于 $a_1(s_1) \neq 0$，$V_1(s)$ 不与 S 在 s 处相切。令 $\phi : S \to \mathbb{R}$ 为 S 上 f 的限制，即

$$\phi(s) = f(s), \quad \forall s \in S.$$

根据存在唯一性定理，存在方程（u 5.14）的一个解 $u = \phi$，定义在 S 上，并具有给定初值。接下来，我们考虑方程（5.14）的特征曲线，即满足以下常微分方程组的参数曲线 $x(t)$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = a_2(x_2), \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

容易看出，由最后一个方程可知，每条特征曲线 $x(t)$ 都位于平面 $H_c = \{(x_1,x_2,x_3) : x_3 = c\}$ 中，其中 $c \in \mathbb{R}$ 为某个常数。对于这些积分曲线中的每一条，有

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_1(x_1)}{a_2(x_2)},$$

其中 a_1 和 a_2 均非零且为解析的。由此可得

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1)} - \frac{dx_2}{a_2(x_2)} = 0.$$

对两边积分，并令 $G(x_1) = \int_{x0}^{1} ds\, a_1(s)$，$H(x_2) = \int_{x0}^{2} d\eta\, a_2(\eta)$，可得

$$G(x_1) - H(x_2) = C,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$为某个常数。由于特征曲线上满足上述方程的每一点，对于每个$s = (0, s_2,s_3) \in S$，均有

$$G(0) - H(s_2) = C \quad \Longrightarrow \quad H(s_2) = -C = H(x_2) - G(x_1), \tag{5.16}$$

对于特征曲线上经过s的所有 (x_1,x_2,x_3)。

转到方程（5.15），定义向量场V_2 于 $\mathcal{B}$ 上：

$$V_2 = (0, a_2(x_2), a_3(x_3)), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{B}.$$

与前一种情形一样，曲面 $\tilde{S} = \{(s_1,s_2,s_3) \in \mathcal{B} : s_3 = 0\}$ 对 L_2 是非特征的。令 $\tilde{\phi} : \tilde{S} \to \mathbb{R}$ 为 f 在 $\tilde{S}$ 上的限制。于是，根据存在唯一性定理，存在方程 (5.15) 的一个解 u，其在 $\tilde{S}$ 上具有给定的初值 $\tilde{u} = \tilde{\phi}$。考虑相对于方程 (5.15) 的特征曲线 $\tilde{x}(\tilde{t})$，它们满足

$$\frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{t}} = a_2(x_2), \quad \frac{d\tilde{x}_3}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_3(x_3).$$

令

$$H(\tilde{x}_2) = \int_0^{\tilde{x}_2} \frac{d\eta}{a_2(\eta)}, \quad K(\tilde{x}_3) = \int_0^{x_3} \frac{d\tilde{\eta}}{a_3(\tilde{\eta})},$$

并求解

$$\frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_3} = \frac{a_2(\tilde{x}_2)}{a_3(\tilde{x}_3)},$$

可以看出，存在$C' \in \mathbb{R}$，使得每条特征曲线都满足

$$H(\tilde{x}_2) - K(\tilde{x}_3) = C'.$$

˜因此，对于每个点 ˜$s = (\tilde{}s1, \tilde{}s_2, 0) \in S$，都有

$$H(\tilde{s}_2) = C' = H(\tilde{x}_2) - K(\tilde{x}_3), \tag{5.17}$$

对于经过 ˜s 的特征曲线上的所有 ($\tilde{}x1, \tilde{}x2, \tilde{}x_3$)。

现在我们将上述所有计算结合起来，得出 f 具有所需形式。˜回顾一下，根据存在唯一性定理，f =u = ˜u 在原点的一个小邻域 W 中，并且在上述特征曲线 x(s, t) 和 ˜x(˜s, ˜t) 上为常数。选取一个小区间˜ ˜I ⊂ℝ，其中心在原点，使得 {0} ×I ×{0} ⊂S ∩S ∩W 。对于 $s_2 \in$I，有 s =(0, s_2,0) ∈S，并且 f =u 在经过 s 的特征曲线 x(s, t) 上不变，记为

$$\gamma_{s_2} := \{(x_1(s,t), x_2(s,t), 0) : t \text{ small}\}.$$

由关系式（5.16），可得

$$\gamma_{s_2} = \{(x_1, \tilde{s}_2, 0) : H(\tilde{s}_2) - G(x_1) = H(s_2)\} \subset \tilde{S} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \tag{5.18}$$

˜由于该曲线包含在 S 中，对于每个点 ˜$s = (x1, \tilde{}s_2, 0) \in \gamma_{s_2}$，函数 f = ˜u 在经过 ˜s 的特征曲线 ˜x(˜s, ˜t) 上不变，记为

$$\gamma_{s_2,\tilde{s}} := \left\{(x_1, \tilde{x}_2(\tilde{s},\tilde{t}), \tilde{x}_3(\tilde{s},\tilde{t})) : \tilde{t} \text{ small}\right\} \subset \{x_1\} \times \mathbb{R}^2.$$

利用（5.17），$\gamma_{s_2,\tilde{}s}$ 可由以下式子确定

$$\gamma_{s_2,\tilde{s}} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{W} : H(x_2) - K(x_3) = H(\tilde{s}_2)\right\}. \tag{5.19}$$

由（5.18）和（5.19）可知，对每个 $s_2 \in I$，函数 f在.....上保持不变

$$\begin{aligned}
\Lambda_{s_2} &:= \bigcup_{\tilde{s} \in \gamma_{s_2}} \gamma_{s_2,\tilde{s}} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{W} : H(x_2) - K(x_3) - G(x_1) = H(s_2)\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{W} : H^{-1}(H(x_2) - K(x_3) - G(x_1)) = s_2\right\},
\end{aligned}$$

其中最后一行用到了 H可逆这一事实。定义 $\psi(s_2)$ =f(0, s_2,0)，其中 $s_2 \in I$，则ψ 是解析的。以上讨论表明

$$f(x_1, x_2, x_3) = \psi\big(H^{-1}(H(x_2) - K(x_3) - G(x_1))\big), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \tilde{W}.$$

令 $G_0 = \psi \circ H^{-1}$、$H_1 = -G$、$H_2 = H$和 $H_3 = -K$，可得

$$f(x_1, x_2, x_3) = G_0\big(H_1(x_1) + H_2(x_2) + H_3(x_3)\big), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \tilde{W},$$

如（5.13）所述。这就完成了该引理的证明。 □

本节中，我们将一般定理应用于距离集问题的一个变体。给定A、$B \subset \mathbb{R}^d$，A与B之间的距离集为

$$\Delta(A,B) = \{|x-y| : x \in A, y \in B\}.$$

定理 6.1. 设 $d \geq 2$。令 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ 为一个光滑超曲面。假设 $A \subset \mathbb{R}^d$ 和 $B \subset \mathcal{S}$ 是博雷尔集。

(i) 对于 $u \in (0,1)$，若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d-1+u$，则 维数$_H(\Delta(A, B)) \geq u$。

(ii) 若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta(A, B)) > 0$。

其中，$\mathcal{L}^1$ 表示 1–维勒贝格测度。

注记 6.2。

(i) 我们注意到，当 $\mathcal{S}$ 为超平面且 A、$B \subset \mathcal{S}$ 时，该结果由 Falconer 定理推出。

(ii) 定理 6.1 是 [Pha25], 中结果的推广，并且当 $\mathcal{S}$ 为仿射超平面时，第 **(ii)** 部分的下界是尖锐的（参见 [Pha25] 中的尖锐性示例）。然而，对于曲面而言，定理中的维数阈值是否尖锐仍是一个悬而未决的问题。

设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$、$d \geq 2$ 为光滑流形。对于 $z \in \mathcal{S}$，记 $T_z\mathcal{S}$为 $\mathcal{S}$ 在 z 处的切空间，记 $T\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{S}$ 的切丛。所有 $\mathcal{S}$ 的仿射切空间的并为

$$\tilde{T}\mathcal{S} := \bigcup_{z \in S} (z + T_z\mathcal{S}).$$

注意，$\tilde{T}\mathcal{S} \neq T\mathcal{S}$。此外，如果 $\mathcal{S}$ 为超平面，则 $\tilde{T}\mathcal{S} = \mathcal{S}$。

We 首先证明，定理 6.1 的结论在集合 A 远离 $\tilde{T}\mathcal{S}$ 时成立。

定理 6.3。 设 $d \geq 2$，且 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个光滑超曲面。设 $A \subset \mathbb{R}^d \setminus \tilde{T}\mathcal{S}$，$B \subset \mathcal{S}$ 为紧集，满足 维数$_H A$，维数$_H B$ > 0。

(i) 对于 $u \in (0,1)$，若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d-1+u$，则 维数$_H \Delta(A, B) \geq u$。

(ii) 若 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> d$，则 $\mathcal{L}^1(\Delta(A, B)) > 0$。

证明。 我们将证明 **(ii)** 部分，**(i)** 部分可用类似的论证证明。根据定理 3.6，我们需要找到一个合适的光滑函数 Φ，并证明 Φ 是 Γ_m-非退化的，其中 $m \geq 0$。

不失一般性，假设 $\mathcal{S}$ 是由光滑映射 ψ 参数化的超曲面：$U \to \mathbb{R}^d$，其中 $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 是一个开集，且 ψ 处处满足秩 $(D_u\psi) = d-1$。假设 $A \subset X = \mathbb{R}^d \setminus \overline{T\mathcal{S}}$ 和 $B' \subset U$ 是紧集，并令 $B = \psi(B')$。

令 $\Phi: X \times U \to \mathbb{R}$ 是由下式定义的光滑函数

$$\Phi(x,u) := \sum_{i=1}^{d} \big(x_i - \psi_i(u)\big)^2, \quad \forall (x,u) \in X \times U.$$

则 $\Delta_\Phi(A, B') = \{\Phi(x,u) : x \in A,\ u \in B'\}$。由于 $(0,\infty) \mapsto (0,\infty)$，$r \mapsto \sqrt{r}$ 在远离原点的紧集上是双利普希茨的，因此只需证明 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A,B')) > 0$，进而推出 $\mathcal{L}^1(\Delta(A,B)) > 0$。

鉴于 定理 3.6，对于 $(x,u),(x',u') \in X \times U$，$2d \times 2d$ 矩阵 $\mathcal{J}_\Phi$（见 (3.13)）可表示为

$$\mathcal{J}_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \nabla_u\Phi(x,u) & -\nabla_{x'}\Phi(x',u') \\ (\nabla_x\Phi(x,u))^T & H_{x,u}\Phi(x,u) & 0 \\ (\nabla_{u'}\Phi(x',u'))^T & 0 & H_{u',x'}\Phi(x',u') \end{bmatrix}_{2d\times 2d}. \tag{6.1}$$

计算可得

$$\nabla_x\Phi = 2(x-\psi(u)), \quad \nabla_u\Phi = 2(D_u\psi)^*(x-\psi(u)), \quad H_{x,u}\Phi = -2D_u\psi.$$

将其代入（6.1），可得

$$\mathcal{J}_\Phi = 2\cdot \begin{bmatrix} 0 & (D_u\psi)^*(x-\psi(u)) & -(x'-\psi(u')) \\ (x-\psi(u))^T & -D_u\psi & 0 \\ [(D_{u'}\psi)^*(x'-\psi(u'))]^T & 0 & -(D_{u'}\psi)^T \end{bmatrix}_{2d\times 2d}.$$

该矩阵的行列式 $\det(\mathcal{J}_\Phi)$ 满足

$$|\det(\mathcal{J}_\Phi)| = 2\left|\left(\det\begin{bmatrix}(x-\psi(u))^T & -D_u\psi\end{bmatrix}_{d\times d}\cdot \det\begin{bmatrix}(x'-\psi(u'))^T & -D_{u'}\psi\end{bmatrix}_{d\times d}\right)\right|.$$

注意，对于每个 $u \in U$，由于秩 $D_u\psi = d-1$，行列式

$$\det\begin{bmatrix}(x-\psi(u))^T & -D_u\psi\end{bmatrix}_{d\times d} = 0$$

当且仅当

$$x - \psi(u) \in T_{\psi(u)}\mathcal{S} = \left\{D_u\psi(\theta) : \theta \in \mathbb{R}^{d-1}\right\},$$

或者等价地，$x \in \psi(u) + T_{\psi(u)}\mathcal{S}$。

根据假设，对于所有 $(x,u) \in X \times U$，都有 $x \notin \psi(u) + T_{\psi(u)}\mathcal{S}$，因此 $\det(\mathcal{J}_\Phi) \neq 0$ 在 $X \times U \times X \times U$ 上处处成立。这意味着 $\operatorname{corank}(\mathcal{J}_\Phi) = 0$，且 Φ 在如下意义下是 Γ_0–非退化的

定理 3.6。应用定理 3.6 (ii) 并取 $d_X = d$, $d_Y = d-1$ 以及 $m = 0$，我们得出，若

$$\dim_H A + \dim_H B' > \frac{d+d-1}{2} + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = d,$$

于是 $\mathcal{L}^1(\Delta_\Phi(A, B')) > 0$。定理的证明至此完成。 □

注意，若存在一个超平面 P，使得 $\dim_H(A \cap P) = \dim_H A$，则定理 6.1 可由 [Pha25] 推出。因此，我们可以假设，对于 $\mathbb{R}^d$ 中任意超平面 P，都有 $\dim_H(A \cap P) < \dim_H A$。于是，定理 6.1 可由定理 6.3 和以下引理推出。直观地说，我们可以将 $\mathcal{S}$ 限制在一个足够小的帽上，使得满足定理 6.3 的假设。

引理6.4。设 $d \geq 2$, $\alpha > 0$，且 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个光滑超曲面。假设 $A \subset \mathbb{R}^d$ 和 $B \subset \mathcal{S}$ 是具有正豪斯多夫维数的紧集，且 维数$_H A$ +维数$_H B$ $> \alpha$。设对于任意仿射超平面 P，都有维数$_H(A \cap P) <$维数$_H A$。那么存在开集 $U, V \subset \mathbb{R}^d$和 $\varepsilon > 0$，使得 $U \subset \mathbb{R}^d \setminus \tilde{T}(\mathcal{S} \cap V)$,

$$\dim_H(A \cap U) \geq \dim_H A - \varepsilon, \quad \dim_H(B \cap V) \geq \dim_H B - \varepsilon,$$

且 维数$_H(A \cap U)$ +维数$_H(B \cap V) > \alpha$。

证明。设 $\varepsilon > 0$ 满足 $0 < \varepsilon < \min\{\dim_H A + \dim_H B - \alpha, \dim_H B, \dim_H A\}$。由于 $\dim_H B > 0$，由引理 2.6，存在 $z_0 \in \mathcal{S}$ 使得

$$\dim_H(B \cap B(z_0, r)) \geq \dim_H B - \varepsilon/4, \quad \forall r > 0.$$

记 $T_{z_0}\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{S}$ 在z_0, 处的切空间，并令$P_0 = z_0 + T_{z_0}\mathcal{S}$。根据假设，有 $\dim_H(A \cap P_0) < \dim_H A$。因此，存在$x_0 \in A$和$c > 0$使得

$$\dim_H(A \cap B(x_0, r)) \geq \dim_H A - \varepsilon/4, \quad \forall r > 0,$$

且 x_0到 P_0的距离大于 c，即 d $(x_0, P_0) >$c。记 $y_0 \in P_0$为 x_0 到 P_0的正交投影。选取足够小的 $0 < r_1 <$ c 100，使得对于所有 z $\in$V $= B(z_0, r_1) \cap \mathcal{S}$，都有 d $(y_0, z + T_z\mathcal{S}) <$c 100。容易看出

$$d(x_0, (z + T_z\mathcal{S})) > \frac{c}{2}, \quad \forall z \in B(z_0, r_1).$$

取 $0 < r_2 < c/4$，并令 $U = B(x_0, r_2)$。那么，由上述计算可得

$$x \notin z + T_z\mathcal{S}, \quad \forall x \in U, z \in V.$$

这意味着 $U \subset \mathbb{R}^d \setminus \tilde{T}(\mathcal{S} \cap V)$ 如所需。此外，

$$\dim_H(A \cap U) + \dim_H(B \cap V) \geq \dim_H A + \dim_H B - \varepsilon/2 > \alpha.$$

至此完成了该引理的证明。 □

7. 最后的评论

本文仅关注定理 3.1 在余维数 $p = 1$情形下的应用$p > 1$ 的显式非退化条件更难给出。针对一些值得关注的特定几何构形问题，获得更优的维数阈值似乎更为可行，我们希望在后续工作中探讨这一问题。不过，值得指出的是，这需要深入理解相关傅里叶积分算子的典范关系，而通过对所有可能的划分进行优化来寻找最优维数阈值$\sigma \in \mathcal{P}_{2k}$将是困难的。

我们注意到，定理 3.4(ii)中的维数阈值一般无法降低，因为我们关于距离集问题和三元函数的应用都是尖锐的，即定理1.8 (ii)和6.1 (ii)。有趣的是，定理1.4(ii)中的维数阈值是否也是尖锐的。

最后，正如引言中所指出的，用我们的方法刻画k–元解析函数的解析特殊形式将会复杂得多。例如，在定理3.6中，可能需要考察$\{1, .., k\}$的所有可能非空子集E、F，并研究秩$(J_{E,F}\Phi)$以刻画退化函数；当$k \geq 4$时，这可能会很有挑战性。

致谢

本文是作者在罗切斯特大学博士论文的一部分。作者感谢Alex Iosevich和Allan Greenleaf富有洞见的讨论、鼓励与一贯的支持。

参考文献

[AC25] Nuno Arala 和 Sam Chow。有限域上多项式的扩张性质。*Finite Fields Appl.*, 108:论文编号 102687, 14, 2025.[BFOP25] Tainara Borges、Benjamin Foster、Yumeng Ou 和 Eyvindur Palsson。固定距离集与树集的非空内点。*arXiv:2503.15709*, 2025.[BIT16] Michael Bennett、Alex Iosevich 和 Krystal Taylor。薄子集中的有限链。 $\mathbb{R}d$。*Anal. PDE*, 9(3):597–614, 2016.[Bou94] Jean Bourgain。豪斯多夫维数与距离集。*Israel J. Math.*, 87(1-3):193–201, 1994.[Bou03] Jean Bourgain。关于 Erd˝os-Volkmann 猜想和 Katz-Tao 环猜想。*Geom.Funct. Anal.*, 13(2):334–365, 2003.[Bou10] Jean Bourgain。离散化和积问题与投影定理。*J. Anal. Math.*, 112:193–236, 2010.

[CŁP16] Vincent Chan、Izabella Łaba 和 Malabika Pramanik。稀疏集中的有限构形。J. Anal. Math., 128:289–335, 2016.[DGO+21] Xiumin Du、Larry Guth、Yumeng Ou、Hong Wang、Bobby Wilson 和 Ruixiang Zhang。加权限制估计及其在 Falconer 距离集问题中的应用。Amer. J. Math., 142(1):175–211, 2021.[DIO+21] Xiumin Du、Alex Iosevich、Yumeng Ou、Hong Wang 和 Ruixiang Zhang。偶数维中 Falconer 距离集问题的改进结果。Math. Ann., 380(3):1215–1231, 2021.[DO26] Ciprian Demeter 和 William O'Regan。新的离散化多项式扩张器与关联估计。arXiv:2601.01264, 2026.[DORZ23a] Xiumin Du、Yumeng Ou、Kevin Ren 和 Ruixiang Zhang。高维 Falconer 距离集问题的新进展。arXiv:2309.04103, 2023.[DORZ23b] Xiumin Du、Yumeng Ou、Kevin Ren 和 Ruixiang Zhang。加权精细解耦估计及其在 Falconer 距离集问题中的应用。arXiv:2309.04501, 2023.[DZ19] Xiumin Du 和 Ruixiang Zhang。高维薛定谔极大函数的尖锐 L^2 估计。Ann. of Math., 189(3):837–861, 2019.[EHI13] M. Burak Erdo˘gan、Derrick Hart 和 Alex Iosevich。多参数投影定理及其在和积问题和欧几里得空间中的有限点构型中的应用。载于《调和分析及其应用新进展》，Springer Proc. Math. Stat. 第 25 卷，第 93–103 页。Springer，纽约，2013.[EIT11] Suresh Eswarathasan、Alex Iosevich 和 Krystal Taylor。傅里叶积分算子、分形集与正则值定理。Adv. Math., 228(4):2385–2402, 2011.[ER00] György Elekes 和 Lajos Rónyai。关于多项式和有理函数的一个组合问题。J. Com- bin. Theory Ser. A, 89(1):1–20, 2000.[Erd05] M. Burak Erdo˘gan。双线性傅里叶扩张定理及其在距离集问题中的应用。Int. Math. Res. Not., 2005(23):1411–1425, 2005.[ES83] Paul Erd˝os 和 Endre Szemerédi。关于整数的和与积。载于《纯数学研究》，第 213–218 页。Birkhäuser，巴塞尔，1983年.[ES12] György Elekes 和 Endre Szabó。如何找到群？（以及如何在 Erd˝os 几何中使用它们？）。Combina- torica, 32(5):537–571, 2012.[Fal85] Kenneth J. Falconer。关于距离集的豪斯多夫维数。Mathematika, 32(2):206–212, 1985.[GG73] Martin Golubitsky 和 Victor Guillemin。《稳定映射及其奇点》，数学研究生教材第 14 卷。Springer-Verlag，纽约-海德堡，1973年.[GGIP15] Loukas Grafakos、Allan Greenleaf、Alex Iosevich 和 Eyvindur Palsson。多线性广义 Radon 变换与点构形。Forum Math., 27(4):2323–2360, 2015.[GI12] Allan Greenleaf 和 Alex Iosevich。由欧几里得平面的子集确定的三角形、相关双线性算子及其在离散几何中的应用。Anal. PDE, 5(2):397–409, 2012.[GILP15] Allan Greenleaf、Alex Iosevich、Bochen Liu 和 Eyvindur Palsson。从群论视角看 Erd˝os-Falconer 问题与 Mattila 积分。Rev. Mat. Iberoam., 31(3):799–810, 2015.[GIM15] Allan Greenleaf、Alex Iosevich 和 Mihalis Mourgoglou。由欧几里得空间子集确定的体积。Forum Math., 27(1):635–646, 2015.[GIOW20] Larry Guth、Alex Iosevich、Yumeng Ou 和 Hong Wang。平面中的 Falconer 距离集问题。Invent. Math., 219(3):779–830, 2020.[GIT21] Allan Greenleaf、Alex Iosevich 和 Krystal Taylor。具有非空内点的构形集。J. Geom. Anal., 31(7):6662–6680, 2021.

[GIT22] Allan Greenleaf、Alex Iosevich 和 Krystal Taylor。具有非空内点的 k–点构形集。Mathematika，68(1):163–190，2022。[GIT24] Allan Greenleaf、Alex Iosevich 和 Krystal Taylor。通过微局部分割优化得到构形集的非空内点。Math. Z.，306(4):66，2024。[GS79] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg。积分几何中的一些问题及微局部分析中的相关问题。Amer. J. Math.，101(4):915–955，1979。[GS90] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg。几何渐近。数学调查与专著。美国数学会，1990。[GS94] Allan Greenleaf 和 Andreas Seeger。具有折叠奇点的傅里叶积分算子。J. Reine Angew. Math.，455:35–56，1994。[Hel65] Sigurdur Helgason。欧几里得空间、紧致双点齐性空间和格拉斯曼流形上的 Radon变换。Acta Math.，113(1):153–180，1965。[Hör71] Lars Hörmander。傅里叶积分算子。I。Acta Math.，127(1-2):79–183，1971。[Hör85] Lars Hörmander。线性偏微分算子的分析，III 和 IV。Springer-Verlag，柏林 - 海德堡，1985。[IL19] Alex Iosevich 和 Bochen Liu。固定点距离问题、切片测度与局部光滑估计。Trans. Amer. Math. Soc.，371(6):4459–4474，2019。[ILX22] Alex Iosevich、Bochen Liu 和 Yakun Xi。微局部解耦不等式与黎曼流形上的距离问题。Amer. J. Math.，144(6):1601–1639，2022。[IPPS25] Alex Iosevich、MINH-QUY PHAM、Thang Pham 和 Chun-Yen Shen。定点单形及其与抛物面上集合乘积的联系。Indiana Univ. Math. J.，74(3):647–668，2025。[IT19] Alex Iosevich 和 Krystal Taylor。薄子集中的有限树。 $\mathbb{R}$d。载于 Alexey Karapetyants、Vladislav Kravchenko 和 Elijah Liflyand（编），算子理论与调和分析的现代方法，第 51–56 页，Cham，2019。Springer International Publishing。[KPS22] Doowon Koh、Thang Pham 和 Chun-Yen Shen。关于积集的 Mattila-Sjölin距离定理。Mathematika，68(4):1258–1267，2022。[KPS24] Doowon Koh、Thang Pham 和 Chun-Yen Shen。三变量中的 Falconer型函数。J. Funct. Anal.，286(4):110246，2024。[Łoj65] Stanisław Łojasiewicz。半解析集。IHES，1965。[LPS26] Sung-Yi Liao、Thang Pham 和 Chun-Yen Shen。关于乘积 Frostman测度的二次映像的 L^2 估计。arXiv:2601.09582，2026。[Mat15] Pertti Mattila。傅里叶分析与豪斯多夫维数。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2015。[MS99] Pertti Mattila 和 Per Sjölin。距离测度与距离集的正则性。Math. Nachr.，204:157–162，1999。[MT85] Richard B. Melrose 和 Michael E. Taylor。凸障碍物附近的峰值散射与修正的基尔霍夫近似。Adv. Math.，55(3):242–315，1985。[OS23] Tuomas Orponen 和 Pablo Shmerkin。关于 Furstenberg集的豪斯多夫维数及平面中的正交投影。Duke Math. J.，172(18):3559–3632，2023。[OSW25] William O’Regan、Pablo Shmerkin 和 Hong Wang。离散化投影定理的简单证明。arXiv:2511.21656，2025。[OT22] Yumeng Ou 和 Krystal Taylor。分形情形下的有限点构形与正则值定理。Indiana Univ. Math. J.，71(4):1707–1761，2022。

[Pha25] Minh-Quy Pham。关于 Falconer型函数与距离集问题。arXiv:2510.15118，2025。[PR23] Eyvindur Ari Palsson 和 Francisco Romero Acosta。关于三角形的 Mattila-Sjölin定理。J. Funct. Anal.，284(6):Paper No. 109814，20，2023。[PRA25] Eyvindur Ari Palsson 和 Francisco Romero Acosta。低维单形的 Mattila-Sjölin定理。Math. Ann.，391(1):1123–1146，2025。[PVdZ19] Thang Pham、Le Anh Vinh 和 Frank de Zeeuw。三变量扩张多项式与高维不同距离。Combinatorica，39(2):411–426，2019。[RS17] Orit E. Raz 和 Micha Sharir。平面中单位面积三角形的数量：主题与变体。Combinatorica，37(6):1221–1240，2017。[RSdZ16] Orit E. Raz、Micha Sharir 和 Frank de Zeeuw。在笛卡尔积上消失的多项式：重新审视Elekes-Szabó定理。Duke Math. J.，165(18):3517–3566，2016。[RSdZ18] Orit E. Raz、Micha Sharir 和 Frank de Zeeuw。四维中的Elekes-Szabó定理。Israel J. Math.，227(2):663–690，2018。[RSS16] Orit E. Raz、Micha Sharir 和 József Solymosi。在网格上消失的多项式：重新审视 Elekes-Rónyai 问题。Amer. J. Math.，138(4):1029–1065，2016。[RST20] Orit E. Raz 和 Zvi Shem-Tov。扩张多项式：将Elekes-Rónyai定理推广到 d 个变量。Combinatorica，40(5):721–748，2020。[RW23] Kevin Ren 和 Hong Wang。平面中的 Furstenberg集估计。arXiv:2308.08819，2023。[RZ24] Orit E. Raz 和 Joshua Zahl。关于非线性投影的例外参数维数及离散化Elekes-Rónyai定理。Geom. Funct. Anal.，34(1):209–262，2024。[Shm23] Pablo Shmerkin。Bourgain投影定理的一个非线性版本。J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，25(10):4155–4204，2023。[SS10] Jörg Schmeling 和 Pablo Shmerkin。关于迭代和集的维数。载于《分形及相关领域的最新发展》，Appl. Numer. Harmon. Anal.，第 55–72 页。Birkhäuser Boston，Boston，MA，2010。[SSdZ13] Ryan Schwartz、József Solymosi 和 Frank de Zeeuw。Elekes 和 Rónyai 结果的推广。J. Combin. Theory Ser. A，120(7):1695–1713，2013。[SW25] Pablo Shmerkin 和 Hong Wang。Furstenberg集的维数与 Bourgain投影定理的推广。Anal. PDE，18(1):265–278，2025。[SY25] Pablo Shmerkin 和 Alexia Yavicoli。关于由 $\mathbb{R}d$ 的子集确定的单纯形体积。Ann. Fenn. Math.，50(1):97–108，2025。[SZ24] Jozsef Solymosi 和 Joshua Zahl。利用邻近性改进Elekes-Szabó型估计。J. Combin. Theory Ser. A，201:Paper No. 105813，9，2024。[Tao15] Terence Tao。大特征有限域上的扩张多项式，以及可定义集的正则性引理。Contrib. Discrete Math.，10(1):22–98，2015。[Whi34] Hassler Whitney。在闭集上定义的可微函数的解析延拓。Trans. Amer. Math. Soc.，36(1):63–89，1934。[Wol99] Thomas Wolff。测度的傅里叶变换的圆周平均衰减。Int. Mat. Res. Not.，1999(10):547– 567，1999。[WZ25] Hong Wang 和 Joshua Zahl。凸集的并的体积估计，以及三维中的 Kakeya集猜想。arXiv:2502.17655，2025。[Z18] Frank de Zeeuw。Elekes-Rónyai型问题综述。载于《直观几何的新趋势》，Bolyai Soc. Math. Stud. 第 27 卷，第 95–124 页。János Bolyai Math. Soc.，布达佩斯，2018。

数学系，罗切斯特大学，罗切斯特，纽约州 14627。

电子邮箱地址：qpham3@ur.rochester.edu, quypham.math@gmail.com