arXiv:2603.03588v1 [math.AG] 3 Mar 2026

QDLT FANO 型模型的对偶复形与强完全正则性

刘继豪与 KONSTANTIN LOGINOV

Abstract. 我们引入双有理强完全正则性与强完全正则性，这是（相对）Fano 型对的两个数值不变量。它们借助 qdlt Fano 型模型的若干变体以及约化边界的对偶复形的维数来定义，并可视为 Shokurov 完全正则性的 Fano 型精细化。我们建立这些不变量的基本性质，并阐明其与出现在 K 稳定性中的 qdlt Fano 型模型之间的关系。特别地，我们证明：任一具有极大双有理强完全正则性的对都是 1-补的，并且双有理强完全正则性或强完全正则性发生跳跃的阈值满足升链条件。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 3. 强完全正则性 4. 补 5. 强完全正则性阈值的升链条件 参考文献 5
7
18
22
24

1. Introduction

在整篇论文中，我们始终在复数域 $\mathbb{C}$上工作。

正则度与完全正则性的概念由Shokurov在研究三维对数正则奇点的分类以及补的有界性时引入[Sho00, 7.9与7.11]。在某些参考文献中（参见 [Mor24a]），由于术语的滥用，完全正则性也被称为正则度；在本文中我们区分这两者，并将正则度记为“reg”，将完全正则性记为“Reg”。精确的定义请读者参见定义3.3。粗略地说，正则度（相应地，完全正则性）描述形如$(X/Z, B)$或$(X/Z \ni z, B)$的对数Calabi–Yau（相应地，$\mathbb{R}$-补）对的结构。此处$\pi\colon X \to Z$是一个收缩，$z \in Z$是一个点，并且$K_X + B \sim_{\mathbb{R}, Z} 0$（相应地，对某个 $B^+ \geq B$有$K_X + B^+ \sim_{\mathbb{R}, Z} 0$）位于 z的一个邻域之上。特别地，当 $Z = z$ 是一个闭点时，正则度适用于（潜在的）Calabi–Yau对(X, B)。当 $\pi = \mathrm{id}_X$ 且 $z = x$ 是 X的一个闭点时，正则度（相应地，完全正则性）适用于对数典范（相应地，KLT奇点）奇点$(X \ni x, B)$。

正则度和完全正则性均取值于以下范围内的 $[-1, d-1]$，其中 d =维数 X。在 [FMP25], 中，Figueroa、Moraga 和 Peng 为奇点（即当 $\pi = \mathrm{id}_X$时）引入了（完全）余正则性（记作 Coreg），其定义为

$$\mathrm{Coreg} := d - 1 - \mathrm{Reg},$$

从而 Coreg $\in \{0, \ldots, d\}$。考虑余正则性的一个动机是，不同维数中具有相同余正则性的对往往对某些数值满足可比的界

Date:2026年3月5日。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14E30, 14B05。

Key words and phrases. 对偶复形。正则度。补集。1

不变量。这一概念后来在 [Mor24a] 中被推广到一般相对情形（参见[Mor24a，注记 2.2]之前的段落）。关于利用正则度、完全正则性和/或余正则性对对数典范奇点与对数卡拉比–丘对进行分类的相关工作，见 [Asc+23、FM23、GLM23、Mor23、ALP24、BF24、BL24、dS24、Mor24b、EFM24、HLS24、LMV24、LZ24、EJM25、FFMP25、FMP25、FMM25、LPT25、MM25、MYY25、Zha25] 及其中的参考文献。

尽管完全正则性很有用，但仅凭完全正则性有时过于粗略，无法区分具有截然不同几何行为的奇点或对。我们用以下例子来说明这一现象。

例 1.1. Klt 曲面奇点分为 A、D 和 E 型。完全正则性可以区分 E 型：E 型奇点的完全正则性为 0，而 A 型和 D 型奇点的完全正则性均为 1。然而，尽管 A 型和 D 型的几何性质不同，这个不变量却无法将它们区分开来：A 型奇点是环面的，而 D 型奇点则不是。

区分它们的一种方法是借助 复杂度 [BFMZ18]：任何 A 型奇点都允许一个复杂度为 0 的结构，而环境空间为 D 型的任何对数典范对，其复杂度至少为 1。另见 [MM25、MS25]。另一种方法是考察补：A 型奇点是 1-补的，而 D 型奇点则不是。我们将在下一个例子中进一步讨论这一点。

例 1.2. 众所周知，具有最大完全正则度（等价地，余正则性为 0）的奇点要么是 1-补，要么是 2-补（参见 [Asc+23，FFMP25]）。然而，并非所有这类奇点都是 1-补（例如 D型曲面奇点）。这给刻画环面奇点带来了障碍：每个环面奇点都存在一个具有最大正则度的 1-补。

实际上，许多通过完全正则性和对偶复形刻画托里克簇的结果（参见 [Mor24a，MM25]）因此需要转而考虑二对一覆盖，这实际上将 D型现象约化为 A型。然而，在不通过覆盖来刻画托里克结构时，这并不理想。

例 1.3. 在 [ALP24], 中，第二作者与 Avilov 和 Przyjalkowski 研究了光滑 del Pezzo曲面（另见 [Mor24a]）和 Fano 三维簇的完全正则性。已知光滑 del Pezzo曲面的余正则性为 0，当且仅当其次数为 ≥ 2（[Mor24a，定理 3.1], [ALP24，命题 2.3]）。对于光滑Fano三维簇，在 105 个族中，有 100 个族的一般成员具有最大完全正则度；此外，在这 100 个族中，有 92 个族的每个成员都具有最大完全正则度 [ALP24，定理 0.1]。这表明，完全正则性往往不足以有效地区分 Fano 簇，因为其中大多数都具有最大完全正则度。

受这些局限性的启发，我们引入了两种针对 Fano 型簇几何性质的完全正则性改进形式，分别称为双有理强完全正则性和强完全正则性。

定义 1.4（强完全正则性）：设 (X, B) 是一个对，且 $\pi\colon X \to Z$ 是一个收缩。$(X/Z, B)$ 的一个双有理 *qdlt Fano* 型模型（简称QF_{bir}模型）是一个对 $(Y/Z, B_Y)$，连同一个在 Z 上的双有理映射 g，满足以下条件。

（1）g^{-1} 不收缩任何除子，且 $B_Y \geq g_*^{-1}B$。（2）(Y, B_Y) 是 qdlt。（3）$-(K_Y + B_Y)$ 是丰沛的/Z。（4）任何满足 $\operatorname{mult}_D B_Y = 0$ 的 g-例外素除子 D 都不包含 (Y, B_Y) 的任何对数典范中心。

此外，若 g是态射，则我们称 $(Y/Z, B_Y)$ 是 $(X/Z, B)$ 的 *qdlt Fano* 型模型 （简称*QF* 模型）。我们定义 双有理强完全正则性 （相应地，强完全

正则性）的 $(X/Z, B)$ 由

$$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z,\ B) := \max\left\{-1,\ \dim\ \mathcal{D}(Y,\ B_Y)\ \middle|\ (Y/Z,\ B_Y) \text{ 是 } (X/Z,\ B) \text{ 的 QF 双有理模型}\right\}$$

$$\left(\text{分别地，}\ \mathrm{SReg}(X/Z,\ B) := \max\left\{-1,\ \dim\ \mathcal{D}(Y,\ B_Y)\ \middle|\ (Y/Z,\ B_Y) \text{ 是 } (X/Z,\ B) \text{ 的 QF 模型}\right\}\right)$$

其中，$\mathcal{D}(Y,\ B_Y)$ 表示 $(Y,\ B_Y)$ 的对偶复形，参见 [dFKX17，定义 8, 35]。

我们将 $(X/Z, B)$ 的双有理强余正则性（分别为强余正则性）定义为

$$\dim X - 1 - \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \quad (\text{resp. } \dim X - 1 - \mathrm{SReg}(X/Z, B)).$$

类似地，我们可以为形如 $(X/Z \ni z,\ B)$ 的对定义（双有理）强完全正则性和强余正则性，其中 $Z \ni z$ 是一个芽。具体定义见 3.3 定义。

定义 1.4 的提出受 K 稳定性的启发。当 g 是一个双有理态射时，满足上述 (1-3) 的数据 $(Y, \lfloor B_Y \rfloor)$ 与 *qdlt Fano* 型模型 的概念一致，见 [XZ25，定义 3。5]。我们的定义有两处细微但实用的不同：我们允许双有理映射（而不只是态射），并施加额外的技术条件 (4)。

下面解释条件 (4) 的作用。条件 (4) 旨在排除非本质的例外除子：它们对边界不可见，却仍会与对数典范分层相互作用。具体而言，若 D 是 g-例外的且 $\mathrm{mult}_D B_Y = 0$，则 D 不会对对偶复形 $\mathcal{D}(Y, B_Y)$ 作出贡献；然而，若 D 包含一个对数典范中心，它就可能影响对数典范分层在双有理变换下的行为，尤其会阻碍将模型约化为更刚性的模型（约化方法见[XZ25，命题 3.6(2)]）。条件 (4) 确保所有对数典范中心都由 qdlt 边界涵盖（因而也由对偶复形涵盖），且这种涵盖方式在我们后续使用的双有理运算下保持稳定。当我们希望将 qdlt Fano 型模型与更强、结构更丰富的模型联系起来时，这一点尤为重要；这类模型体现了 *Koll´ar* 模型（参见 [XZ25，定义 3。7]），并作为 plt 爆破的推广，在稳定退化定理中发挥核心作用。

虽然 Koll´ar 模型在 [XZ25] 的局部奇点情形中定义（通常为 $\pi = \mathrm{id}_X$ 且 Z 仿射），但我们的目标也要求研究整体情形（Z 一个点），更一般地说，还要研究相对情形。在这些背景下，允许双有理映射（而不只是双有理态射）是很自然的，而附加条件 (4) 则为表述和构造 Koll´ar 模型的类比提供了恰当的框架。请注意，当 $\pi = \mathrm{id}_X$ 时，由于 g 是一个映射/Z，它自动就是一个态射。关于相应的构造（约化 QF 模型、QAA 模型和 QAG 模型），请参见定义3.15、3.20和3.21；这些构造将在我们的论证中反复使用。

我们还要强调，我们的定义旨在研究附属于（双有理）qdlt Fano 型模型的对偶复形的结构。这一视角与局部 K 稳定性的最新进展相契合：qdlt Fano 型模型上的对数典范位对应于 *Koll´ar* 赋值，其含义见 [LX24，定义 1。2] 并对应于特殊赋值，其含义见 [XZ26, 32]；另见[Che25]。人们预期，这些对数典范位及其相关的对偶复形具有更丰富的内在结构；参见 [LX24，问题 1.5、猜想 1。8] 以及 [XZ26，问题 35]。从这一角度看，条件 (4) 可视为一项便利的要求，确保对偶复形准确捕捉相关的对数典范几何，并在证明所需的约化过程中保持良好性质。

现在让我们比较（双有理）强完全正则性与完全正则性。与完全正则性相比，（双有理）强完全正则性因定义 1.4(3) 中的丰沛性条件而兼具优势与局限。尤其是，$\mathrm{QF}^{(\mathrm{bir})}$ 模型的存在会迫使 X 具有 Fano 型（引理 3.18）。因此，强完全正则性不太适合全面研究 Calabi–Yau 簇或严格对数典范奇点（即非 KLT 奇点的对数典范奇点）。另一方面，强完全正则性尤其适用于 Fano 型簇和 klt 奇点。例如，它能够区分 A 型与 D 型的曲面奇点：（双有理）强完全

正则度为 A 型奇点的 1，而任意 D 型奇点的（双有理）强完全正则度为 0。

本文研究（双有理）强完全正则性的基本性质（详见第3 节）。更重要的是，我们证明了两个结果，揭示了这些不变量的内在行为。

最大强完全正则性与补。 如上所述，任何具有最大完全正则度的对，要么是 1-补，要么是 2-补 [Asc+23，FFMP25]。对于最大强完全正则性，我们得到一个更精确的结论。

定理 1.5。 设$(X/Z \ni z, B)$ 为一对满足以下条件的对象

$$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, B) \geq \dim X - 1 - \dim z.$$

那么$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, B)$ =维数 $X-1$–维数 z，并且存在1-补$(X/Z \ni z, B^+)$，它是$(X/Z \ni z, B)$ 的补，满足

$$\mathrm{reg}(X/Z \ni z, B^+) = \dim X - 1 - \dim z.$$

特别地，$(X/Z \ni z, B)$ 是1-补。

值得一提的是，定理1.5 对 B的系数没有任何限制。这与最大完全正则度的情形不同；在该情形中，假设 B 具有标准系数（参见 [FFMP25，定理 4]）。

强完全正则性阈值的升链条件。设 $(X/Z, B)$ 是一个对数典范对，且 $D \geq 0$ 是定义在 X 上的一个 $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子。考虑

$$\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(t) := \mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B + tD), \qquad t \geq 0.$$

于是，$\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(t)$ 关于 t 单调不增，因此研究 $\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(t)$ 发生跳跃的阈值是自然的。我们通过以下定义将其形式化。

定义 1.6。 设 $d > n \geq 0$ 为两个整数。设 $(X/Z, B)$ 是一个维数为 d 的对，且 $D \geq 0$ 是定义在 X 上的一个 $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子。相对于 $(X/Z, B)$，D 的第 n 个（双有理）强完全正则性阈值为

$$\mathrm{SRegt}_n^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B; D) := \inf\{\, t \geq 0 \mid \mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B + tD) < n\},$$

约定空集的下确界为 $+\infty$。

我们证明这些阈值满足升链条件。

定理 1.7. 设 d 为正整数，且 $\Gamma \subset [0, +\infty)$ 为 *DCC* 集。则存在仅依赖于 d 与 Γ 的 *ACC* 集 Γ'，满足如下条件。

设 $(X/Z, B)$ 为维数 d 的对，且 $D \geq 0$ 为 X上的 $\mathbb{R}$-*Cartier* $\mathbb{R}$-除子。假设 B 与 D 的系数属于 Γ。则对任意满足 $0 \leq n < d$的整数 n，我们有

$$\mathrm{SRegt}_n^{\mathrm{bir}}(X/Z, B; D) \in \Gamma' \quad \textit{and} \quad \mathrm{SRegt}_n(X/Z, B; D) \in \Gamma'.$$

我们指出，一个类似的陈述，即（相对）Fano 型簇上完全正则性阈值的升链条件，已证明于 [HLS19，定理 8。25]。这应区别于“固定余正则性下对数典范阈值的升链条件”，见 [FMP25，定理 1]。定理 1.7也可视为对数典范阈值升链条件的类似结果，参见 [HMX14，定理 11]，以及 $\mathbb{R}$- 补集阈值的升链条件 [HLS24，定理 512]，[Sho20，定理 21]。

论文结构。 本文的组织结构如下。第 2 节回顾本文其余部分将用到的预备知识。第 3 节建立强完全正则性的基本性质。第4 节证明具有最大强完全正则性的对是 1-补的（定理 1.5）。第5 节证明强完全正则性阈值满足升链条件（定理 1.7）。

致谢。 本研究得到中国国家重点研发计划 #2024YFA1014400 资助。第二作者的工作在斯捷克洛夫国际数学中心完成，并得到俄罗斯联邦科学和高等教育部（协议编号：075-15-2022-265）和西蒙斯基金会的资助。作者感谢 Eduardo Alves da Silva 提供的有益讨论。

2. Preliminaries

本节确定记号，并汇集本文中将用到的一些标准事实。我们采用[Sho92、KM98、BCHM 10] 中的极小模型纲领标准记号和术语，并在文中直接使用。

2.1. **基本记号**。

定义 2.1. 称 $f\colon X \to Z$ 为一种收缩，若它是满足以下条件的射影态射： $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$.

定义 2.2. 设 $X \to Z$ 是正规拟射影簇之间的收缩，且D 是 X上的一个 $\mathbb{R}$-除子。 D 的稳定基点集 $/Z$ 定义为

$$\mathbf{B}(D/Z) := X \bigcap \left(\bigcap_{0 \le D' \sim_{\mathbb{R},Z} D} \operatorname{Supp} D' \right).$$

增广基点集 $/Z$ D 定义为

$$\mathbf{B}_+(D/Z) := \mathbf{B}((D - \epsilon A)/Z)$$

对于任意丰沛$/Z$ 除子 A 上的 X 以及任意 $0 < \epsilon \ll 1$。众所周知，$\mathbf{B}_+(D/Z)$ 是一个扎里斯基闭子集，且与 A [BCHM10，定义 3.51]中所选取的对象无关。

记号 2.3. 设 X 是一个正规拟射影簇，且 D 是 X上的一个 $\mathbb{R}$-除子。记$D = \sum d_i D_i$ ，其中 D_i 是互不相同的素因子。对于任意实数 a，我们将 $D^{=a}$（分别将 $D^{<a}$、 $D^{\ge a}$）记为

$$\sum_{i\colon d_i = a} d_i D_i \left(\text{resp.} \sum_{i\colon d_i < a} d_i D_i, \sum_{i\colon d_i \ge a} d_i D_i \right).$$

对于任意 $D' = \sum d_i' D_i$，我们将其记为

$$D \wedge D' := \sum \min\{d_i, d_i'\} D_i \quad \text{and} \quad D \vee D' := \sum \max\{d_i, d_i'\} D_i.$$

记号 2.4. 设 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$ 是正规拟射影簇之间的双有理映射。我们用 Exc(h) 表示支集为 ϕ的例外轨迹的余维一部分的约化除子。

记号 2.5。 我们用 $\dim \emptyset = -1$ 表示。

记号 2.6。 对于任意集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}$，我们用 Γ 表示 $\bar{\Gamma}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的闭包。

2.2。 **对**。

定义 2.7。 一个子对 （分别为对）$(X/Z \ni z, B)$由正规拟射影簇之间的收缩 $\pi\colon X \to Z$、一个（不一定是闭的）点 $z \in Z$，以及一个 $\mathbb{R}$-除子 B （分别为 $B \ge 0$）组成，使得 $K_X + B$ 是 $\mathbb{R}$-Cartier。若 $Z \ni z$ 无关紧要，则可以省略它，并称 (X, B) 为子对（分别为对）。若对于任意点 $z \in Z$，$(X/Z \ni z, B)$ 都是子对（分别为对），则称 $(X/Z, B)$ 为子对（分别为对）。

设 $(X,\ B)$ 为一个子对。对于任意射影双有理态射 $h\colon X' \to X$ wit h

$$K_{X'} + B' = h^*(K_X + B)$$

以及 X' 上的任意素除子 D，我们用 $a(D,X,B) := 1 - \mathrm{mult}_D B'$ 表示 D 关于 (X,B) 的对数不一致度。(X,B) 的非 klt 位（分别为对数典范位）是指 X 上的一个素除子，满足 $a(D,X,B) \leq 0$（分别为 $= 0$）。(X,B) 的非 klt 中心是指 (X,B) 的一个非 klt 位在 X 上的中心。(X,B) 的所有非 klt 中心的并称为 (X,B) 的非 klt 轨迹，记作 $\mathrm{Nklt}(X,B)$。

我们称 (X, B) 是对数典范（分别地，具有KLT奇点）的，如果对于任意位于X之上的素除子 D，$a(D, X, B) \geq 0$（分别地，> 0）。我们称 (X, B) 是纯对数终端 的，如果对于任意例外的素除子 D，$a(D, X, B) > 0$。我们称 (X, B) 是$qdlt$ 的，如果 (X, B) 是对数典范的，并且存在一个开子集 $U \subset X$，使得

- U 包含 (X, B) 的任意对数典范中心的一般点，并且
- $(U, B|_U)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的对数环面嵌入

（参见 [dFKX17，定义 35]）。

定义 2.8。设 (X, B) 和 (X', B') 是两个子对，且 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$ 是一个双有理映射。若对于 ϕ 的任意不定点消解 $p\colon W \to X$ 和 $q\colon W \to X'$，我们都有

$$p^*(K_X + B) = q^*(K_{X'} + B').$$

定义 2.9。设 $\pi\colon X \to Z$ 是正规拟射影簇之间的一个收缩，且 $z \in Z$ 是一个（不一定闭的）点。

若 $-(K_X + B)$ 丰沛，则称一对 $(X/Z, B)$ 为 法诺 （分别地，称为 卡拉比-丘）。我们称 X/Z 为 *Fano* 型，如果存在一个 KLT奇点法诺对 $(X/Z, \Delta)$；我们也称 X 为*Fano* 型 $/Z$。

如果存在一个 KLT奇点对 (X, Δ)，则称 X 为 潜在 *klt* 。

定义 2.10。设 $(X/Z, B)$ 为一对，且 n 为正整数。$(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{R}$-补集是一个对数典范卡拉比-丘对 $(X/Z, B^+)$，满足 $B^+ \geq B$。$(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-补集是 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{R}$-补集 $(X/Z, B^+)$，且 B^+ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子；注意此时我们自动得到 $K_X + B^+ \sim_{\mathbb{Q},Z} 0$，参见 [HLS24，引理 5.3]。$(X/Z, B)$ 的一个 n-补集是一个对数典范卡拉比-丘对 $(X/Z, B_n)$，满足 $n(K_X + B_n) \sim_Z 0$，并且

$$nB_n \geq \lfloor (n+1)B^{<1} \rfloor + nB^{=1}.$$

$(X/Z, B)$ 的单调 补集 n 是 $(X/Z, B)$ 的 n-补集，同时也是 $(X/Z, B)$ 的 $\mathbb{Q}$-补集。如果 $(X/Z, B)$ 有一个 $\mathbb{R}$-补集（分别地，n-补集），则称 $(X/Z, B)$ 是 $\mathbb{R}$-补集的（分别地，n-补集的）。

设 $(X/Z \ni z, B)$ 是一对，其收缩为 $\pi\colon X \to Z$。$(X/Z \ni z, B)$ 的一个 $\mathbb{R}$-补集（分别地，n-补集、单调 n-补集）是指一对 $(X/Z \ni z, B^+)$，使得 $\left(\pi^{-1}(U)/U, B^+|_{\pi^{-1}(U)}\right)$ 是某个开邻域 U 中 z 的 $\mathbb{R}$-补集（分别地，n-补集、单调 n-补集），其中 Z 上的 $\left(\pi^{-1}(U)/U, B|_{\pi^{-1}(U)}\right)$。如果 $(X/Z \ni z, B)$ 有一个 $\mathbb{R}$-补集（分别地，n-补集），则称 $(X/Z \ni z, B)$ 是 $\mathbb{R}$-补集的（分别地，n-补集的）。

2.3. **相对中山-扎里斯基分解**。

定义 2.11。设 $\pi\colon X \to U$ 是正规拟射影簇之间的射影态射，D 是伪有效/U $\mathbb{R}$-卡蒂尔 $\mathbb{R}$除子，定义在 X上；并设 P 是 X上的素除子。我们按照 $\sigma_P(X/U, D$中的定义，将 [LX25，定义 31] 视为 $\sigma_P(X/U, D)$ 中的一个数来定义 $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$。我们定义

$$N_\sigma(X/U, D) = \sum_Q \sigma_Q(X/U, D)Q$$

其中求和遍历 X 上的所有素因子，并将其视为系数取自 $[0, +\infty$ 的除子形式和） $\cup \{+\infty\}$。

3. 强完全正则性

本节旨在发展研究（双有理）强完全正则性所需的基本工具。尽管这些不变量是通过在（双有理）qdlt Fano 型模型上取最大值来定义的，但要有效运用它们，就需要对这些模型进行若干技术性改进。具体而言，我们将引入 约化 （双有理）qdlt Fano 型模型，以便控制约化边界及其对偶复形；我们还将引入 *qdlt* 反丰模型，这类模型更适合用于极小模型纲领论证，也可视为 Koll´ar 模型的一种推广，其含义见 [XZ25，定义 3。7]。这些改进将在第4 节和5节的主要定理证明中反复使用。

3.1. 定义与变体。 本小节中，我们将确定（双有理）qdlt Fano 型模型的术语，并回顾正则度、完全正则性及其强变体的定义。

定义 3.1。 设 $(X/Z, B)$ 为一个对。$(X/Z, B)$ 的一个 QF^{bir} 模型 具有如下形式g：$(Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$，其中 g 是一个双有理映射，且满足以下条件。

(1) g 不提取任何除子，且 $B_Y \geq g_*^{-1}B$。(2) $(Y/Z, B_Y)$ 是一个 qdlt 对。(3) $-(K_Y + B_Y)$ 是丰沛的$/Z$。(4) 任意 g-例外素除子 D 使得 $\operatorname{mult}_D B_Y = 0$ 不经过 (Y, B_Y) 的任何对数典范中心。

我们也称$(Y/Z,\ B_Y)$为与 g相关联的$(X/Z,\ B)$的QF双有理 模型。此外，若 g是一个态射，则称 g: $(Y,\ B_Y) \to (X,\ B)$是$(X/Z,\ B)$的QF 模型，并称$(Y/Z,\ B_Y)$为与 g相关联的$(X/Z,\ B)$的QF 模型。

注 3.2。 在定义3.1中，“QF$^{(\text{bir})}$”代表“（双有理）qdlt 法诺”。我们采用这种简化记法，因为“qdlt 法诺型模型”这一说法太长了。

请注意，定义 3.1 中对 QF 模型的定义与 [XZ25，定义 3.5],略有不同，$Y/Z,\ B_Y^{=1}$用（Y/Z, B_Y）代替了（ [XZ26, 32]。由于条件 (4)，我们的定义与$Y,\ B_Y$也略有不同。另一方面，在实际应用中，必须确保所考虑的双有理映射在 ([XZ25，命题 3.6(2)]）的对数典范中心的一般点附近是同构的；然而，我们最常遇到的 QF^{bir} 模型满足 $B_Y = g_*^{-1}B + \operatorname{Exc}(g)$，也就是说，它们是约化 QF^{bir} 模型，我们将在后文介绍这种模型（定义 3.15）。因此，加入条件 (4) 是自然的。

定义3.3。 有关.....的定义，请参阅 [dFKX17，定义 8] 。对于任意光滑簇上的约化简单正交除子，其对偶复形 $\mathcal{D}(\Delta)$ Δ 。

设 $(X/Z, B)$ 是一个对数典范子对。设 $f\colon W \to X$ 是 (X, B) 的一个对数消解，并记

$$K_W + B_W = f^*(K_X + B)$$

在 z 的一个邻域上。我们记

$$\operatorname{reg}(X, B) := \dim \mathcal{D}\left(B_W^{=1}\right)$$

为（ X, B）的正则度。我们还记 $\operatorname{reg}(X/Z, B) := \operatorname{reg}(X, B)$，并称 $\operatorname{reg}(X/Z, B)$ 为 $(X/Z, B)$ 的正则度。该值定义良好，且与所选的 f无关，因为 $\mathcal{D}(B_W^{=1})$ 的分片线性同胚类不依赖于 f 的选择（参见 [dFKX17，定理 1, 28]）。

设 $(X/Z \ni z, B)$ 是一个带收缩 $\pi\colon X \to Z$ 的子对。若 $(X/Z \ni z, B)$ 是对数典范的，则记 $\operatorname{reg}(X/Z \ni z, B)$ 为所有满足 $(\pi^{-1}(U)\ B|_{\pi^{-1}(U)})$ 对数典范的 z 的开邻域 U 上 $\operatorname{reg}(\pi^{-1}(U)/U, B|_{\pi^{-1}(U)})$ 的下确界。

设 $(X/Z, B)$ 为一对。我们记

$\operatorname{Reg}(X/Z,\ B) := \max\{-1, \operatorname{reg}(X,\ B^+) \mid (X/Z,\ B^+)$ 是 $(X/Z,\ B)\}$ 的一个 $\mathbb{R}$-补集

$(X/Z,\ B)$ 的完全正则性 。我们用以下符号表示

$$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z,B) := \max\{-1, \mathrm{reg}(Y,B_Y) \mid (Y/Z,B_Y) \text{ is a } \mathrm{QF}^{\mathrm{bir}} \text{ model of } (X/Z,B)\}$$

and

$$\mathrm{SReg}(X/Z,B) := \max\{-1, \mathrm{reg}(Y,B_Y) \mid (Y/Z,B_Y) \text{ is a QF model of } (X/Z,B)\}$$

的 双有理强完全正则性和强完全正则性分别为 $(X/Z,B)$。注意，由于 (Y,B_Y) 是 qdlt，$\mathrm{reg}(Y, B_Y)$ 是对偶复形 $\mathcal{D}(B_Y^{=1})$ 的维数，其定义见 [dFKX17中引理 36]之前的段落。我们定义

$$\mathrm{SCoreg}^{\mathrm{bir}}(X/Z,B) := \dim X - 1 - \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z,B)$$

and

$$\mathrm{SCoreg}(X/Z,B) := \dim X - 1 - \mathrm{SReg}(X/Z,B)$$

分别为 $(X/Z,B)$ 的双有理强余正则性和强余正则性。设 $(X/Z \ni z,B)$ 是一个对。我们用以下符号表示

$$\mathrm{Reg}(X/Z \ni z,B)$$
$$:= \max\{-1, \mathrm{reg}(X/Z \ni z,B^+) \mid (X/Z \ni z,B^+) \text{ is an } \mathbb{R}\text{-complement of } (X/Z \ni z,B)\}$$

$(X/Z \ni z,B)$ 的完全正则性。我们用以下符号表示

$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z,B) := \max\{-1, \mathrm{reg}(V/U \ni z,B_V) \mid (V/U,B_V)$ 是 $(\pi^{-1}(U)/U, B|_{\pi^{-1}(U)})\}$ 的一个 QF 双有理模型

and

$$\mathrm{SReg}(X/Z \ni z,B)$$
$$:= \max\{-1, \mathrm{reg}(V/U \ni z,B_V) \mid (V/U,B_V) \text{ is a QF model of } (\pi^{-1}(U)/U, B|_{\pi^{-1}(U)})\}$$

分别为 $(X/Z \ni z,B)$ 的双有理强完全余正则性和强完全余正则性，其中 U 遍历 Z 中 z 的所有开邻域。我们定义

$$\mathrm{SCoreg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z,B) := \dim X - 1 - \dim z - \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z,B)$$

and

$$\mathrm{SCoreg}(X/Z \ni z,B) := \dim X - 1 - \dim z - \mathrm{SReg}(X/Z \ni z,B)$$

其 双有理完全正则性和$X/Z \ni z$、 B的完全正则性，分别为。

我们指出，在某些参考文献中（参见[Mor24a]），完全正则性和完全余正则性仅针对这样的对（$X/Z,B$）或（$X/Z \ni z,B$）定义：其中 B 是一个 $\mathbb{Q}$-除子，并且只考虑 $\mathbb{Q}$-补，而非 $\mathbb{R}$-补。下面的引理表明，定义3.3 与其他参考文献中完全正则性和余正则性的定义是一致的。

引理 3.4。设（X/Z、 B）是一个对，且 B 是一个 $\mathbb{Q}$-除子。那么

$$\mathrm{Reg}(X/Z,B) = c_{\mathbb{Q}} := \max\{-1, \mathrm{reg}(X,B^+) \mid (X/Z,B^+) \textit{ is a } \mathbb{Q}\textit{-complement of } (X/Z,B)\}.$$

证明。由于任意的 $(X/Z,B)$ 的 $\mathbb{Q}$-补都是 $(X/Z,B)$ 的 $\mathbb{R}$-补，因此 $c_{\mathbb{Q}} \leq \mathrm{Reg}(X/Z,B)$。接下来，我们证明 $c_{\mathbb{Q}} \geq \mathrm{Reg}(X/Z,B)$，这就意味着该引理成立。不妨设 $\mathrm{Reg}(X/Z,B) \geq 0$。那么存在 $(X/Z,B)$ 的一个 $\mathbb{R}$-补 $(X/Z,B^+)$，使得 $\mathrm{reg}(X,B^+) = \mathrm{Reg}(X/Z,B)$。记 $B^+ = \sum_{i=1}^m b_i B_i$，其中 B_i 是 B^+ 的不可约分支。令 $\boldsymbol{v}_0 := (b_1, \ldots, b_m)$，并令 $V \ni \boldsymbol{v}_0$ 为 $\boldsymbol{v}_0$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的有理包络。对任意 $\boldsymbol{v} := (v_1, \ldots, v_m)$，令 $B(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^m v_i B_i$。

根据 [HLS24，引理 5.3 和 5.4]，以及 [HLS24，定理 5.6]，，存在 V 的一个开子集$U \ni \boldsymbol{v}_0$，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in U$，$(X/Z, B(\boldsymbol{v}))$ 都是对数典范的，$K_X + B(\boldsymbol{v}) \sim_{\mathbb{R},Z} 0$，并且 (X, B^+) 的任意对数典范位都是 $(X, B(\boldsymbol{v}))$ 的对数典范位。特别地，

$$\operatorname{reg}(X, B^+) \leq \operatorname{reg}(X, B(\boldsymbol{v}))$$

对任意 $\boldsymbol{v} \in U$。由于 B是一个 $\mathbb{Q}$-除子，必要时缩小 U，我们可以假设对任意 $\boldsymbol{v} \in U$ 都有 $B(\boldsymbol{v}) \geq B$。取 $\boldsymbol{v}_1 \in U \cap \mathbb{Q}^m$，则 $(X/Z, B(\boldsymbol{v}_1))$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-补。我们有

$$\operatorname{Reg}(X/Z, B) = \operatorname{reg}(X, B^+) \leq \operatorname{reg}(X, B(\boldsymbol{v}_1)) \leq c_{\mathbb{Q}}.$$

引理得证。 □

3.2. **比较完全正则性**。本小节研究（双有理）强完全正则性的基本性质，并在二者均有定义的情形下，将（双有理）强完全正则性与 Shokurov 完全正则性进行比较。我们从如下引理开始，该引理表明双有理强完全正则性与强完全正则性总可由 $\mathbb{R}$-补得到。

引理 3.5. 设 $(X/Z, B)$ 为一个对，且 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 为 $(X/Z, B)$ 的一个 QF^{bir} 模型。则存在 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{R}$-补 $(X/Z, B^+)$，使得

$$\operatorname{reg}(X, B^+) = \operatorname{reg}(Y, B_Y).$$

证明。令 $p\colon W \to Y$和 $q\colon W \to X$为 g的不定点消解。由于 $-(K_Y + B_Y)$是丰沛的$/Z$，存在 $0 \leq H_Y \sim_{\mathbb{R},Z} -(K_Y + B_Y)$，使得 $(Y, \Delta_Y := B_Y + H_Y)$ 是对数典范的，且$\mathcal{D}(Y, \Delta_Y) = \mathcal{D}(Y, B_Y)$。令 $\Delta := g_*\Delta_Y$，并记

$$0 \sim_{\mathbb{R},Z} p^*(K_Y + \Delta_Y) =: q^*(K_X + \Delta) + E.$$

则 E 是例外的$/X$。应用两次负性引理可得 $E = 0$，因此 (Y, Δ_Y) 和 (X, Δ) 是 crepant 的。由于 $\Delta \geq g_*B_Y \geq B$，我们有

$$\operatorname{reg}(Y, B_Y) = \operatorname{reg}(Y, \Delta_Y) = \operatorname{reg}(X, \Delta)$$

取 $B^+ := \Delta$即可得到该引理。 □

命题 3.6。 设 $(X/Z, B)$（分别地，$(X/Z \ni z, B)$）是一个对。则

$$\dim X - 1 \geq \operatorname{Reg}(X/Z, B) \geq \operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \geq \operatorname{SReg}(X/Z, B).$$

$$\Big(\textit{resp.}\ \dim X - 1 - \dim z \geq \operatorname{Reg}(X/Z, B) \geq \operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \geq \operatorname{SReg}(X/Z, B).\Big)$$

证明。由于任意对的 QF 模型也是一个 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型，我们有

$$\operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \geq \operatorname{SReg}(X/Z, B) \quad \Big(\text{resp. } \operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, B) \geq \operatorname{SReg}(X/Z \ni z, B)\Big).$$

根据引理 3.5，我们有

$$\operatorname{Reg}(X/Z, B) \geq \operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \quad \Big(\text{resp. } \operatorname{Reg}(X/Z \ni z, B) \geq \operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, B)\Big).$$

对于光滑簇 Y 上的任意简单正规交叉除子 D，D 的任意层都是 D 中 $\leq \dim Y - 1$ 个不可约分支的交集；对于任意收缩 $f\colon Y \to Z$ 和点 $z \in Z$，任何满足 $z \in f(V)$ 的 D 的层都是 D 中 $\leq \dim Y - 1 - \dim z$ 个不可约分支的交集。因此，根据完全正则性的定义，$\operatorname{Reg}(X/Z, B) \leq \dim X - 1$（相应地，$\operatorname{Reg}(X/Z \ni z, B) \leq \dim X - 1 - \dim z$）。命题得证。□

推论 3.7。 设 $(X/Z, B)$ 是一个满足 $\operatorname{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \geq 0$ 的对。那么 (X, B) 是对数典范的。

证明。由命题 3.6，$\operatorname{Reg}(X/Z, B) \geq 0$，故 $(X/Z, B)$ 是 $\mathbb{R}$-补的，因此是对数典范的。 □

命题3.6 中的不等式何时取等，仍然是一个值得探讨的问题。我们提出以下问题：

问题 3.8。 设 $(X/Z, B)$ 是一对。我们是否总有 $\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) = \mathrm{SReg}(X/Z, B)$?

下面的例子展示了问题3.8的一些微妙之处。粗略地说，问题3.8的关键困难出现在出现反翻转或瘤翻时。本质上，这是因为瘤翻不保持qdlt性质（参见 [Fuj17，例3.13。9], [Has20，第 4]节）。

例3.9。 设(Y, B_Y)是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘dlt对，且 $f\colon Y \to Z$ a $(K_Y + B_Y)$-翻转收缩，使得(Y, B_Y)的一个对数典范中心 V包含于 f的翻转轨迹中。设$f^+\colon X \to Z$是与双有理映射 $g\colon Y \dashrightarrow X$相关的 f的翻转，并设 $B := \phi_* B_Y$。

考虑对$(X/Z, B)$。我们有 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$是$(X/Z, B)$的QF ^{bir}模型，因此$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \geq 0$。现在假设存在一个QF模型 $h\colon (W, B_W) \to (X, B)$，它是$(X/Z, B)$的模型。令 $B' := h_* B_W$。由于 $-(K_W + B_W)$是丰沛的，根据负性引理，我们有

$$K_W + B_W = h^*(K_X + B') + F$$

对于某个 $F \geq 0$，使得 $\mathrm{Exc}(h) = \mathrm{Supp}\ F$。

我们有 $B' \geq B$。我们声称 $K_X + B'$ 是数值有效的/Z。为此，令 B'_Y 为 B' 在 Y 上的严格变换。于是 $B'_Y \geq B_Y$。若 $K_X + B'$ 不是数值有效的/Z，则 $K_Y + B'_Y$ 不丰沛/Z，因此 g 是 $(K_Y + B'_Y)$-正的。令 D 为 (Y, B_Y) 的一个对数典范位，使得中心$_Y D = V$，于是我们有

$$0 = a(D, Y, B_Y) \geq a(D, Y, B'_Y) > a(D, X, B') \geq a(D, W, B_W) \geq 0,$$

这是不可能的。这表明 $-F$ 丰沛/Z。特别地， h 不可能是恒等态射。

一个特别有趣的情形是，相关的收缩 $X \to Z$ 为恒等态射。这正是迄今为止所有关于QF 模型的相关研究 [LX24、Che25、XZ25、XZ26]主要关注的情形，因为相应的 K稳定性理论只研究 klt 奇点的潜在对数典范位的对偶复形。在这种情形下，双有理强完全正则性等同于强完全正则性。

命题3.10. 设 (X, B) 为一个对。则 $\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/X, B) = \mathrm{SReg}(X/X, B)$。

证明。 这由以下事实得出：$(X/X, B)$ 的任意双有理 QF 模型也是 $(X/X, B)$ 的 QF 模型。 □

类似地，问题 3.8 在 $\dim X = 2$ 时有肯定的回答。

命题 3.11. 设 $(X/Z, B)$ 为一个对，使得 $\dim X = 2$。则 $(X/Z, B)$ 的任意 *QF*^{bir} 模型均为 $(X/Z, B)$ 的 *QF* 模型。特别地，$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) = \mathrm{SReg}(X/Z, B)$。

证明。 设 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 为 $(X/Z, B)$ 的 QF^{bir} 模型。由于 g不提取任何除子且 $\dim X = 2$，故 g是一个态射。因此 $g\colon (Y, B_Y) \to (X, B)$ 是 $(X/Z, B)$ 的 QF 模型。命题得证。 □

另一方面，一般来说，完全正则性与（双有理）强完全正则性通常并不相同。以下例子可以说明这一点。

例 3.12。 设 $X \ni x$ 是一个 D型曲面奇点。那么 $\mathrm{Reg}(X \ni x, 0) = 1$，因为它不是例外的。然而，$\mathrm{SReg}(X \ni x, 0) = 0$。为此，注意到 D型奇点是弱例外的，并且只有一个 Koll´ar 分量，因此它只有一个约化 QF 模型（见下文定义 3.15），其正则度为 0。由命题 3.11，$\mathrm{SReg}(X \ni x, 0) = \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X \ni x, 0) = 0$。

我们以考察以下命题来结束本小节。这是一个简单的观察，但它表明，双有理强完全正则性是一种在极小模型纲领下保持不变的双有理不变量。

命题 3.13. 设$(X/Z, B)$是一个对，且 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$是一个不提取任何除子的双有理映射$/Z$（分别地，双有理态射$/Z$），并且 $K_{X'}+\phi_*B$ 是 $\mathbb{R}$-*Cartier* 的。那么，$(X/Z, B)$的任意 *QF*^{bir}模型（分别地，*QF* 模型）都是$(X'/Z, \phi_*B)$的 *QF*^{bir} 模型（分别地，*QF* 模型）。特别地，

$$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) \leq \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X'/Z, \phi_*B) \quad (resp.\ \mathrm{SReg}(X/Z, B) \leq \mathrm{SReg}(X'/Z, \phi_*B)).$$

证明。 这立即由 QF^{bir} 模型和 QF 模型的定义得出。 □

由此立即可知，双有理强完全正则性是小修改下的不变量。特别地，双有理强完全正则性在翻转和小 $\mathbb{Q}$-阶化下保持不变。

推论 3.14。 设$(X/Z, B)$是一个对，且 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$是一个小双有理映射$/Z$，使得$K_{X'}+\phi_*B$ 是 $\mathbb{R}$-卡蒂尔的。那么

$$\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) = \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X'/Z, \phi_*B).$$

证明。 将命题3.13 应用于 ϕ和 ϕ^{-1}即可得出。 □

3.3. **约化（双有理）qdlt Fano 型模型**。 在定义 3.1中，QF B_Y 模型的边界$^{(\mathrm{bir})}$ 只需满足 $B_Y \geq g_*^{-1}B$，因此 B_Y没有规范的选取。为便于后续的若干论证（尤其是涉及对偶复形有界性结果的论证），我们希望将 B_Y规范化。本小节旨在引入 约化 QF$^{(\mathrm{bir})}$模型，并证明可以利用它们计算（双有理）强完全正则性。我们先给出以下定义：

定义 3.15. 设 $(X/Z, B)$ 是一个对，且 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 QF$^{(\mathrm{bir})}$ 模型。若满足以下条件，则称 $(Y/Z, B_Y)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个约化 QF$^{(\mathrm{bir})}$ 模型

$$B_Y \geq g_*^{-1}B + \mathrm{Exc}(g).$$

本小节的目标是证明以下定理：

定理 3.16. 设$(X/Z, B)$是一个对，且 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$是$(X/Z, B)$的一个 *QF*$^{(\mathrm{bir})}$ 模型。那么，存在$(X/Z, B)$ 的一个约化 *QF*$^{(\mathrm{bir})}$ 模型 $h\colon (X', B') \dashrightarrow (X, B)$，满足以下条件。

(1) (Y, B_Y) 的任意对数典范位都是 (X', B') 的对数典范位，而 (X', B') 的任意对数典范位都是 (Y, B_Y) 的对数典范位，并且 $\mathcal{D}(Y, B_Y)$ 与 $\mathcal{D}(X', B')$ 分片线性同胚。*(2)* X' 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。*(3)* 诱导的双有理映射 $\phi\colon Y \dashrightarrow X'$ 不提取任何除子，并且

$$\mathrm{Exc}(\phi) = \mathrm{Exc}(g) - B_Y^{=1} \wedge \mathrm{Exc}(g).$$

在证明定理 3.16之前，我们先证明以下几个有用的引理。第一个引理表明，某些小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化会保留 QF$^{(\mathrm{bir})}$ 模型的结构，必要时可对边界作变更：

引理 *3.17.* 设 $(X/Z, B)$ 是一对，且 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 *QF*$^{(\mathrm{bir})}$ 模型。那么存在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化 $h\colon W \to Y$，它在 (Y, B_Y) 的任意对数典范中心的一般点附近都是同构的；并且存在一对 (W, B_W)，使得 $g \circ h\colon (W, B_W) \dashrightarrow (X, B)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 *QF*$^{(\mathrm{bir})}$ 模型，(Y, B_Y) 的任意对数典范位都是 (W, B_W) 的对数典范位，而 (W, B_W) 的任意对数典范位都是 (Y, B_Y) 的对数典范位，并且 $\mathcal{D}(W, B_W) \cong \mathcal{D}(Y, B_Y)$。

证明。根据 [dFKX17，引理 36]，，存在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化 $h\colon W \to Y$，它在 (Y, B_Y) 的任意对数典范中心的一般点附近是同构。令 $K_W + C_W := h^*(K_Y + B_Y)$。那么，$(Y, B_Y)$ 的任意对数典范位都是 (W, C_W) 的对数典范位，而 (W, C_W) 的任意对数典范位都是 (Y, C_Y) 的对数典范位，并且 $\mathcal{D}(W, C_W) \cong \mathcal{D}(Y, B_Y)$。

我们有， $-(K_W + C_W)$ 是大/Z 且数值有效/Z，而 $\mathbf{B}+(-(K_W + C_W)/Z)$ 不包含 (W, C_W) 的任何对数典范中心，因此存在 $E \geq 0$ 于 W 上，使得 $-(K_W + C_W + E)$ 是丰沛的/Z，并且 $\mathcal{D}(W, C_W + E) = \mathcal{D}(W, C_W)$。我们可以取 $B_W := C_W + E$。□

第二个引理表明，任何具有非负双有理强完全正则性的对，其环境簇都是 Fano 型。正如我们在引言中提到的，这说明（双有理）强完全正则性更适用于 Fano 型簇。

引理 3.18。 设 $(X/Z, B)$ 是一个对。假设 $g : (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是$(X/Z, B)$的一个 QF^{bir} 模型。那么， Y 和 X 在 Z上都是 *Fano* 型。

证明。 设 $H_Y := -(K_Y + B_Y)$。由于 (Y, B_Y) 是 qdlt，且 $-(K_Y + B_Y)$ 是丰沛的/Z，由 [XZ25, 引理 2.3], , 存在一个 KLT奇点对 (Y, Δ_Y)，使得

$$K_Y + B_Y + H_Y \sim_{\mathbb{R},Z} K_Y + \Delta_Y$$

且 Δ_Y是大除子/Z。特别地， Y在 Z上是 Fano 型。令 $p : W \to Y$和 $q : W \to X$为 g的不定点消解。令 $\Delta := g_*\Delta_Y$。由于 g 没有抽取任何除子，我们有 Δ 是大除子/Z。我们可以写成

$$0 \sim_{\mathbb{R},Z} p^*(K_Y + \Delta_Y) =: q^*(K_X + \Delta) + E.$$

于是 E 是例外的/X。通过两次应用负性引理，我们得到 $E = 0$。因此（X, Δ）是KLT奇点，并且 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R},Z} 0$，所以 X 在 Z上是Fano 型。□

现在我们准备证明定理 3.16。

定理 *3.16* 的证明。 由引理 3.17，在可能将 Y 替换为一个小的 $\mathbb{Q}$-因子化并相应地替换 B_Y 之后，我们可以假设 Y 是 $\mathbb{Q}$-因子的。由引理 3.18， Y/Z 是Fano 型。我们令 $F := \text{Exc}(g) - B_Y^{=1} \wedge \text{Exc}(g)$。由于 Y/Z 是Fano 型，当（$Y/Z, B_Y$）是（$X/Z, B$）的QF 双有理 （相应地QF）模型时，我们可以运行一个 F-极小模型纲领/Z（相应地 F-极小模型纲领/X），该过程终止于与双有理映射 ϕ: $Y \dashrightarrow X'$ 以及双有理映射（相应地态射） h: $X' \to X$相关联的模型 X'。

我们将证明 ϕ 和 h，连同 B' （我们将在后文构造），满足我们的要求。定理3.16(2) 得以满足，因为 X' 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。

设 $A_Y := -(K_Y + B_Y)$。则 A_Y是丰沛的/Z，因此我们可以选取 $0 \leq H_Y \sim_{\mathbb{R},\ Z} A_Y$使得 $(Y,\ \Delta_Y := B_Y + H_Y)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，且 $\mathcal{D}(Y,\ \Delta_Y) = \mathcal{D}(Y,\ B_Y)$。设 $H := g_*H_Y$。设p: $W \to Y$和 q: $W \to X$是 g 的不定点消解，则我们有

$$p^*(K_Y + \Delta_Y) = q^*(K_X + B + H).$$

由于 F 是例外的/X，由 [LX25，引理 3.4(2)],

$$\begin{aligned} N_\sigma(Y/Z, F) &= N_\sigma(Y/Z, K_Y + \Delta_Y + F) = \beta_* N_\sigma(W/Z, p^*(K_Y + \Delta_Y) + \beta^* F) \\ &= \beta_* N_\sigma(W/Z, q^*(K_X + B + H) + \beta^* F) = \beta_*\beta^* F = F. \end{aligned}$$

因此，由 [LMX24，引理 2。25]（分别由 [Bir12，引理 3。3]），被 ϕ收缩的除子恰好是 F 的不可约分支，且 $\phi_* F = 0$。这意味着定理 3.16(3)。

由于 (Y, Δ_Y) 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，且 $\mathcal{D}(Y, \Delta_Y) = \mathcal{D}(Y, B_Y)$，由定义3.1的条件 (4) 可知，Supp F不包含 (Y, Δ_Y) 的任何对数典范中心。因此，对任意 $0 < \epsilon \ll 1$，$(Y, \Delta_Y + \epsilon F)$ 都是$\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，且 $\mathcal{D}(Y, \Delta_Y + \epsilon F) = \mathcal{D}(Y, B_Y)$。由于 $K_Y + \Delta_Y \sim_{\mathbb{R},Z} 0$, ϕ 也是一个 $(K_Y + \Delta_Y + \epsilon F)$-MMP/$Z$ 的步骤序列，因此

$$(X', \Delta' := \phi_*\Delta_Y) = (X', \phi_*(\Delta_Y + \epsilon F))$$

是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt。由于 (Y, Δ_Y) 和 (X', Δ') 是 crepant，根据 [dFKX17，命题 11，推论 38], $\mathcal{D}(Y, \Delta_Y)$ 与 $\mathcal{D}(X', \Delta')$ 分片线性同胚。此外，对于 X 上的任意素除子D， D 是 (Y, Δ_Y) 的一个对数典范位，当且仅当 D 是 (X', Δ') 的一个对数典范位。

由于 H_Y是丰沛的$/Z$，我们有$\mathbf{B}+(H_Y/Z) = \emptyset$。特别地，$\mathbf{B}+(H_Y/Z)$ 不包含 $(Y, \Delta_Y + \epsilon F)$ 的任何对数典范中心。根据（qdlt 版本的） [BCHM10，引理 3.10.11(2)],，我们有$\mathbf{B}+(\phi_* H_Y/Z)$ 不包含 (X', Δ') 的任何对数典范中心。因此，我们可以写成

$$\phi_* H_Y \sim_{\mathbb{R},Z} C' + H'$$

其中 H'是丰沛的$/Z$， $C' \geq 0$，且 Supp C'不包含（X'， Δ'）的任何对数典范中心。因此，我们可以找到 $0 < \delta \ll 1$，使得（X'， $\Delta' + \delta C'$）为 qdlt，且 $\mathcal{D}$（X'， Δ'）$= \mathcal{D}$（X'， $\Delta' + \delta C'$）。令

$$B' := \phi_* B_Y + (1-\delta)\phi_* H_Y + \delta C',$$

于是 $\Delta' + \delta C' \geq B'$，因此（$X'$， B'）为 qdlt，并且

$$\mathcal{D}(X', B') = \mathcal{D}(B'^{=1}) = \mathcal{D}(\Delta'^{=1}) = \mathcal{D}(X', \Delta').$$

因此， $\mathcal{D}$（Y， B_Y）与 $\mathcal{D}$（X'， B'）分片线性同胚；对于任意位于 X之上、 D 的素除子D，它是（Y， B_Y）的对数典范位，当且仅当 D 是（X'， B'）的对数典范位。这意味着定理3.16（1）。

接下来只需验证 h: （X'， B'） $\dashrightarrow$（X， B）是（X/Z， B）的 $\mathrm{QF}^{(\mathrm{bir})}$ 模型。为此，我们验证定义3.1（1）–（4）对于 h: （X'， B'） $\dashrightarrow$（X， B）。定义3.1（1）满足，因为

$$B' \geq \phi_* B_Y \geq \phi_* g_*^{-1} B = h_*^{-1} B$$

因为 ϕ 不提取任何除子。由上文讨论可知，定义 3.1(2) 成立。我们有

$$-(K_{X'} + B') \sim_{\mathbb{R},Z} \delta H'$$

是丰沛的$/Z$，从而定义 3.1(3) 成立。最后，定理 3.16(3) 蕴含定义 3.1(4)，因为任意 h-例外素除子 D 都是 $B'^{=1}$ 的一个不可约分支。定理得证。□

定理3.16 的一个直接推论是下述关于补的有界性的命题，它将 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型的对偶复形保持为一个子复形。

命题 3.19. 设 d 为正整数， $\Gamma \subset [0,1]$ 为实数的 *DCC* 集。则存在仅依赖于 d 与 Γ 的正整数 N，满足下列条件。

设 $(X/Z, B)$ 为一对，使得 $\dim X = d$ 且 $B \in \Gamma$。并且设 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 为 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型。则对任意点 $z \in Z$，必要时将 Z收缩到 z的一个邻域后，存在 $(X/Z, B)$ 的一个 N-补 $(X/Z, B^+)$，使得 $(Y/Z, B_Y)$ 的任意对数典范位都是 $(X/Z, B^+)$ 的对数典范位，并且 (X, B^+) 的任意对数典范位在 Z 中的像包含 z。特别地，

$$\mathrm{reg}(X/Z \ni z, B^+) \geq \mathrm{reg}(Y/Z \ni z, B_Y).$$

此外，若 $\Gamma \subset \bar{\mathbb{Q}}$，则我们可以取 $B_Y^+ \geq B_Y$。

证明。由定理 3.16，我们不妨假设 Y 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，且 $(Y/Z, B_Y)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个与 g 相关联的约化 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型。令 $C_Y := g_*^{-1}B + \mathrm{Exc}(g)$，则 $B_Y \geq C_Y$ 且$C_Y \in \Gamma \cup \{1\}$。由 [HLS24，定理 1.5], 在 z 的一个邻域上，存在一个仅依赖于 d 和 Γ 的正整数 N，使得 $(Y/Z, C_Y)$ 有一个 N-补集 $(Y/Z, B_Y^+)$。此外，由 [FM20，定理 1.2], ，若 $\Gamma \subset \mathbb{Q}$，则我们可以取 $B_Y^+ \geq C_Y$。

设 $B^+ := g_* B_Y^+$，则在 z 的某个邻域上，(X, B^+) 和 (Y, B_Y^+) 是 crepant 的，因此 $N(K_X + B^+) \sim 0$在 z 的某个邻域上成立，并且 $(X/Z \ni z, B^+)$ 是 $(X/Z \ni z, B)$ 的一个 N-补集。此外，若 $\Gamma \subset \mathbb{Q}$，则我们可以取 $B^+ \geq B$。我们有，(Y, B_Y) 的任意对数典范位都是 (Y, C_Y) 的对数典范位，因此也是 (Y, B_Y^+) 的对数典范位，进而也是 (X, B^+) 的对数典范位。推论得证。□

3.4. **qdlt 反丰模型与双有理强完全正则性。** 在研究（双有理）强完全正则性阈值，尤其是在第 5 节证明升链条件时，使用在极小模型纲领下表现良好的模型很有帮助。着眼于定理 3.16，我们引入 *qdlt* 反良对数极小模型 和*qdlt* 反丰模型，其构造思路源自 Shokurov 的极大模型 [Sho20，构造 2]。qdlt 反丰模型也可以看作 Koll´ar 模型的一种 Fano 型类比；这类模型出现在 K 稳定性研究中；参见注 3.22。

定义 3.20 （Qdlt 反良对数极小模型）。设 $(X/Z, B)$ 是一个对。qdlt 反良对数极小模型 （简称 *QAG* 模型） ϕ: (X, B) $\dashrightarrow (X', B')$ 由 $(X/Z, B)$ 得到，由一个双有理映射 $/Z$ ϕ: $X \dashrightarrow X'$ 和一个满足以下条件的对 $(X'/Z, B')$ 构成。

(1) $B' = \phi_*(B \vee L)$ $+\mathrm{Exc}(\phi^{-1})$，其中 L 是 X 上的某个约化除子。

(2) 对于 X 上任意一个例外的素除子 D $/X'$，我们有

$$0 < a(D, X', B') < 1 - \mathrm{mult}_D(B \vee L).$$

特别地，$a(D, X', B') < a(D, X, B) \leq 1$，并且 L 的任何不可约分支都不会被 ϕ 收缩。(3) (X', B') 是 qdlt，$-(K_{X'} + B')$ 是半丰的$/Z$，且$\mathbf{B}+(-(K_{X'} + B')/Z)$ 不包含 (X', B') 的任何对数典范中心。

我们也称 $(X'/Z,\ B')$ 是与 $(\phi,\ L)$ 相关联的 $(X/Z,\ B)$ 的 QAG 模型。

定义 3.21 （Qdlt 反丰极小模型）。设 $(X/Z,\ B)$ 是一个对。$(X/Z,\ B)$ 的*qdlt* 反丰模型 （简称*QAA* 模型） ϕ: $(X,\ B)$ $\dashrightarrow (X',\ B')$ 由一个双有理映射$/Z\phi$: $X \dashrightarrow X'$ 以及满足以下条件的对 $(X'/Z,\ B')$ 组成。

(1) $B' = \phi_*(B \vee L)$ $+\mathrm{Exc}(\phi^{-1})$，其中 L 是 X 上的某个约化除子。

(2) 对于 X 上任意例外的素除子 D $/X'$，有

$$0 < a(D, X', B') \leq 1 - \mathrm{mult}_D(B \vee L),$$

并且若 $a(D,\ X',\ B') = 1$，则 $\mathrm{center}_{X'} D$ 不是 $(X',\ B')$ 的对数典范中心。特别地，$a(D,\ X',\ B')$ $\leq a(D,\ X,\ B) \leq 1$，且 L 的任何不可约分支都不会被 ϕ 收缩。(3) $(X',\ B')$ 是 qdlt，且 $-(K_{X'} + B')$ 是丰沛的$/Z$。

我们也称 $(X'/Z, B')$ 是与 (ϕ, L) 相关联的 $(X/Z, B)$ 的 QAA 模型。

注 3.22. 考虑如下情形：π: $X \to Z$ 是恒等态射，X 是仿射的，且 (X, B) 是 Kawamata 对数终端对。此时，与 $(\phi, 0)$ 相关联的 $(X/X, B)$ 的 QAA 模型无非是 [XZ25 定义 3.7] 意义下的 Koll´ar 模型。注意，当 π 是恒等态射时，任何 Koll´ar 模型都是约化 QF 模型，因而也是 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型。然而，$X \neq Z$ 情形与 $X = Z$有显著差异。事实上，$(X/Z, B)$ 的 QAA 模型 $(X'/Z, B')$ 未必是 $(X/Z, B)$ 的 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型，因为相伴的双有理映射 $g := \phi^{-1}$: $X' \dashrightarrow X$ 可能会抽出除子。

在本节的其余部分，我们证明 QAA 模型、QAG 模型与 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型之间存在对应关系，并且这种对应保持对偶复形的结构。特别地，我们将证明如下定理：

定理 3.23. 设 $(X/Z, B)$ 为一个对。则

$$\begin{aligned}\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z, B) &= \sup\{\mathrm{reg}(X', B') \mid (X'/Z, B') \textit{ is a QAG model of } (X/Z, B)\} \\ &= \sup\{\mathrm{reg}(X', B') \mid (X'/Z, B') \textit{ is a QAA model of } (X/Z, B)\}.\end{aligned}$$

我们首先建立 QAA 模型与 QAG 模型之间的对应关系。

命题 3.24. 设$(X/Z, B)$ 是一个对数典范对，且 L 是 X上的约化除子。

(1) 设 $(X'/Z, B')$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 *QAG* 模型，它与 (ϕ, L) 和 $f\colon X' \to Y$ 丰模型/Z *of* $-(K_{X'}+B')$ 相关联。那么 $(Y/Z, B_Y := f_*B')$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 *QAA* 模型，它与 $(f\circ\phi, L)$ 相关联。*(2)* 设 $(Y/Z, B_Y)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 *QAA* 模型，它与 (ψ, L) 相关联。那么存在一个射影双有理态射 $f\colon X' \to Y$，满足以下条件：*(a)* X' 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。*(b)* 被 f 收缩的除子恰为满足 $\mathrm{center}_X D$是一个除子且 $a(D, X, B) = a(D, Y, B_Y)$ 的素除子 D 。特别地，$(X'/Z, B')$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 *QAG* 模型，它与 $(f^{-1}\circ\psi, L)$ 相关联，其中

$$K_{X'} + B' := f^*(K_Y + B_Y).$$

证明。 (1) 由于 $\mathbf{B}+(-(K_{X'}+B')/Z)$ 不包含 (X', B') 的任何对数典范中心，因此 f 在 (X', B') 的任一对数典范中心的一般点附近是同构。(1) 得证。

(2) 根据 [dFKX17，引理 36]，，存在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化 $\tau\colon Y' \to Y$，它在 (Y, B_Y) 的任一对数典范中心的一般点附近是同构。根据 [BCHM10，推论 1.4.3]，，存在一个双有理态射 $f'\colon X' \to Y'$，使得 X' 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，并且被 f' 收缩的除子恰好是满足 $\mathrm{center}_X D$ 为除子且 $a(D, X, B) = a(D, Y, B_Y)$ 的素除子 D 。

由于 $\mathrm{Exc}(f')$ 的纯余维为 1（参见 [BCHM10，引理 3.6.2(3)]），且不包含 (Y, B_Y) 的任何对数典范位，因此 f' 在 (Y, B_Y) 的任意对数典范中心的一般点上是同构（参见 [Kol13，推论 4.42(3)]）。因此 $f := \tau\circ f'$ 在 (Y, B_Y) 的任意对数典范中心的一般点上是同构。令

$$K_{X'} + B' := f^*(K_Y + B_Y),$$

那么 (X', B') 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，$-(K_{X'}+B')$ 是半丰的/Z，且 $\mathbf{B}+(-(K_{X'}+B')/Z)$ 不包含 (X', B') 的任何对数典范中心。根据我们的构造，$(X'/Z, B')$ 是与 $(f^{-1}\circ\psi, L)$ 相关联的 $(X/Z, B)$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘 QAG 模型。(2) 得证。□

接下来, 我们证明，任意 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型都会诱导出一个保持对偶复形的 QAG 模型。

引理 3.25. 设$(X/Z, B)$ 是一个对数典范对，且 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是$(X/Z, B)$的一个 *QF*^{bir} 模型。则存在一个与$(\phi, L := g_*B_Y^{=1})$ 相关联的$(X/Z, B)$ 的 $\mathbb{Q}$-因子化 *QAG* 模型$(X'/Z', B')$ ，满足以下条件。

(1) 对任意 ϕ^{-1}-例外素除子 D，中心$_Y D$ 是 $B_Y^{=1}$的一个不可约分支。*(2)* (Y, B_Y) 的任意对数典范位都是(X', B') 的对数典范位，而(X', B') 的任意对数典范位都是(Y, B_Y)的对数典范位；并且 $\mathcal{D}(Y, B_Y)$ 与 $\mathcal{D}(X', B')$ 分片线性同胚。

证明。 由定理 3.16，我们可以假设 $(Y/Z, B_Y)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶化约化 QF 双有理 模型。令

$$C_Y := g_*^{-1}(B \vee L) + \mathrm{Exc}(g),$$

那么 $B_Y \geq C_Y$且 $B_Y^{=1} = C_Y^{=1}$。令 $A_Y := -(K_Y + B_Y)$，则存在 $0 \leq H_Y \sim_{\mathbb{R}} A_Y$，使得 $(Y, \Delta_Y := B_Y + A_Y)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶化 qdlt，且

$$\mathcal{D}(Y, \Delta_Y) = \mathcal{D}(Y, B_Y) = \mathcal{D}(Y, C_Y).$$

令 $G_Y := \Delta_Y - C_Y$。那么 $G_Y \geq 0$，并且对任意 $0 < \epsilon \ll 1$，$(Y, \Delta_Y + \epsilon G_Y)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶化 qdlt，且 $\mathcal{D}(Y, \Delta_Y + \epsilon G_Y) = \mathcal{D}(Y, C_Y)$。我们有

$$K_Y + \Delta_Y + \epsilon G_Y \sim_{\mathbb{R}, Z} \epsilon G_Y \quad \text{and} \quad K_Y + C_Y \sim_{\mathbb{R}, Z} -G_Y.$$

因此，我们可以对某个 $0 < \epsilon \ll 1$ 运行 $(K_Y + \Delta_Y + \epsilon G_Y)$-极小模型纲领/$Z$，这也是一个 $-(K_Y + C_Y)$-极小模型纲领/Z，并以 $(X'/Z, \Delta' + \epsilon G')$ 的良好极小模型终止；该模型与双有理映射/Z $\psi\colon Y \dashrightarrow X'$和 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$相关联，其中 Δ'和 G'分别是 Δ_Y和 G_Y在 X' 上的像。令 B' 为 C_Y 在 X'上的像。我们将证明$\phi\colon (X, B) \dashrightarrow (X', B')$ 满足我们的要求。

由于 ψ 不抽取任何除子，对于任意 ϕ^{-1}-例外素除子 D，中心$_Y D$ 是例外的/X，因此中心$_Y D$ 是 Exc(g)⊂ $C_Y^{=1} = B_Y^{=1}$的一个不可约分支。这就推出了 (1)。由于 $(Y,\ \Delta_Y + \epsilon G_Y)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，$(X',\ \Delta' + \epsilon G')$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt。我们有

$$\mathcal{D}(Y, B_Y) = \mathcal{D}(Y, \Delta_Y)$$

and

$$\mathcal{D}(X', B') = \mathcal{D}(B'^{=1}) = \mathcal{D}(\Delta'^{=1}) = \mathcal{D}(X', \Delta').$$

此外，ψ 是（$K_Y+\Delta_Y$）-平凡的，因此（Y,Δ_Y）和（X',Δ'）是 crepant 的。因此，对于 X上的任意素除子D，D 是（Y,Δ_Y）的对数典范位，当且仅当 D 是（X',Δ'）的对数典范位。此外，根据[dFKX17，命题 11、推论 38]，$\mathcal{D}$（X',Δ'）和 $\mathcal{D}$（Y,Δ_Y）是分片线性同胚的。这就证明了（2）。

接下来只需证明（$X'/Z, B'$）是与（ϕ, L）相关联的（ $\mathbb{Q}$）-阶乘 QAG 模型（$X/Z, B$）。 X' 的 $\mathbb{Q}$-阶乘性显然成立。我们有

$$B' = \psi_*(g_*^{-1}(B \vee L) + \mathrm{Exc}(g)) = \phi_*(B \vee L) + \mathrm{Exc}(\phi^{-1})$$

由于 ψ 不提取任何除子。这意味着定义3.20（1）。

由于 τ 是一个 $-$（$K_Y + C_Y$）-极小模型纲领步骤序列，对于 X 上的任意在/X'处为例外的素除子 D，我们有

$$1 - \mathrm{mult}_D(B \vee L) = 1 - \mathrm{mult}_D\, g_* C_Y = a(D, Y, C_Y) > a(D, X', B') \geq 0.$$

此外，如果 $a(D,\ X',\ B') = 0$，那么

$$a(D, X', \Delta') = a(D, X', \Delta' + \epsilon G') = 0,$$

因此

$$a(D, Y, B_Y + \epsilon G_Y) = a(D, Y, \Delta_Y) = 0.$$

因此 $a(D,\ Y,\ C_Y) = 0$，矛盾。因此 $a(D,\ X',\ B') \geq 0$，这蕴含定义3.20(2)。根据上述讨论，($X',\ B'$) 是 qdlt，且 $-(K_{X'} + B')$ 是半丰/Z。由于

$$G_Y = H_Y + (B_Y - C_Y)$$

并且 H_Y是丰沛的/Z，B+(G_Y/Z) 不包含 (Y, B_Y) 的任何对数典范中心。由于 $\mathcal{D}(Y, \Delta_Y + \epsilon G_Y) = \mathcal{D}(Y, B_Y)$，B+($G_Y/Z$) 不包含 ($Y, \Delta_Y + \epsilon G_Y$) 的任何对数典范中心。由于 ψ 是一个 ($K_Y + \Delta_Y + \epsilon G_Y$)-极小模型纲领/$Z$步骤序列，根据（qdlt 版本的） [BCHM10，引理 3.10.11(2)], B+(G'/Z) 不包含 ($X', \Delta' + \epsilon G'$) 的任何对数典范中心，因此

$$\mathbf{B}_+(G'/Z) = \mathbf{B}_+(-(K_{X'} + B')/Z)$$

不包含 ($X', \Delta' + \epsilon G'$) 的任何对数典范中心。由于 $0 < \epsilon \ll 1$,

$$\mathcal{D}(X', \Delta' + \epsilon G') = \mathcal{D}\left((\Delta' + \epsilon G')^{=1}\right) = \mathcal{D}(\Delta'^{=1}) = \mathcal{D}(X', \Delta'),$$

这蕴含定义 3.20(3)。引理得证。 □

最后，我们证明任意 QAG 模型诱导一个保持对偶复形的 QF^{bir} 模型。结合引理3.25，我们建立 QAG 与 QF^{bir} 模型之间的双侧对应。我们首先证明下述引理。

引理 3.26. 设 $(X/Z, B)$ 为一个对，且 $(X'/Z, B')$ 为 $(X/Z, B)$ 的与(ϕ, L)相关联的 *QAG* 模型。设 $p\colon W \to X'$与 $q\colon W \to X$为 ϕ 的不定点消解。则

$$p^*(K_{X'} + B') = q^*(K_X + B) + F$$

对于某个 $F \geq 0$ 使得 $q_*F = L - B \wedge L + P$对于某个 $P \geq 0$ 使得 $\mathrm{Supp}\, P = \mathrm{Exc}(\phi)$。

证明。我们可以写成 $q_*F = P + Q$ 其中，P的所有不可约分支均为 ϕ-例外，且 Q 的任何不可约分支都不是 ϕ-例外。根据定义3.20(1)，$Q = L - B \wedge L \geq 0$。根据定义3.20(2)，$P \geq 0$ 且 $\operatorname{Supp} P \supset \operatorname{Exc}(\phi)$。因此 $q_*F \geq 0$。由于

$$-F \sim_{\mathbb{R},X} -p^*(K_{X'} + B')$$

是半丰的$/X$，根据负性引理，$F \geq 0$。 □

引理 3.27。设$(X/Z, B)$ 是一个对数典范对，L 是 X上的一个约化除子，并且$(X'/Z, B')$ 是与$(X/Z, B)$ 相关联的(ϕ, L)的一个 *QAG* 模型。那么存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘约化 QF^{bir} 模型g：$(Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 的$(X/Z, B)$，满足以下条件。

(1) 相关联的双有理映射 ψ：$Y \dashrightarrow X'$ 是一个态射，ψ 不提取任何除子，并且 $\psi_* B_Y = B'$。*(2)* 任意 ψ-例外素除子都不是 (X', B') 的对数典范位。*(3)* (Y, B_Y) 的任意对数典范位都是 (X', B') 的对数典范位，而 (X', B') 的任意对数典范位都是 (Y, B_Y) 的对数典范位，并且 $\mathcal{D}(Y, B_Y)$ 与 $\mathcal{D}(X', B')$ 分片线性同胚。*(4)* $B_Y \geq g_*^{-1}(B \vee L) + \mathit{Exc}(g)$。

证明。根据 [dFKX17，引理 36]，，可能将(X', B')替换为一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化后，我们可以假设 X' 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。令 q：$X' \to V$为 $-(K_{X'} + B')$ 的丰模型$/Z$，且 $B_V := q_* B'$。由于 $\mathrm{B}(-(K_{X'} + B')/Z)$ 不包含(X', B')的任何对数典范中心，故 q 在(X', B')任意对数典范中心的一般点附近是同构。对于 X上的任意素因子 D，若其对 $/X'$是例外的，则有

$$0 < a(D, X', B') < a(D, X, B) \leq 1.$$

根据 [BCHM10，推论 1.4。3]，存在一个射影双有理态射 ψ：$Y \to X'$使得 Y 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，且 $\operatorname{Exc}(g)$ 是所有满足以下条件的素因子的并集：D 在 X 上且对其是例外的$/X'$。根据我们的构造，相关的双有理映射 g：$Y \dashrightarrow X$ 不抽取任何除子，而包含于 $\operatorname{Exc}(g)$ 中的素因子恰好就是包含于 $\operatorname{Exc}(\phi^{-1})$ 中的素因子。令

$$K_Y + C_Y := \psi^*(K_{X'} + B').$$

根据 [BCHM10，引理 3.6.2(3)]，，$\operatorname{Exc}(\psi)$ 具有纯余维 1，且不包含 (X', B') 的任何对数典范位。因此，对于 (Y, C_Y) 的任意对数典范中心的一般点，ψ 在其附近是同构，因为对于 (X', B') 的任意对数典范中心的一般点 η，$p^{-1}(\eta)$ 的任意不可约分支都是 (Y, C_Y) 的对数典范中心（参见 [Kol13，推论 4.42(3)]）。特别地，(Y, C_Y) 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，且$q \circ \psi$ 在 (Y, C_Y) 的任意对数典范中心的一般点附近是同构。因此，我们可以在 Y 上找到$R \geq 0$，使其为反丰沛的$/V$，且 $\operatorname{Supp} R$ 不包含 (Y, C_Y) 的任何对数典范中心。由于 $-(K_V + B_V)$ 是丰沛的 $/Z$，适当缩放 R 后，我们可以假设

$$(q \circ p)^*(-(K_V + B_V)) - R = -(K_Y + C_Y + R)$$

是丰沛的$/Z$，$(Y, B_Y := C_Y + R)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶化的 qdlt，并且

$$\mathcal{D}(Y, B_Y) = \mathcal{D}(Y, C_Y) = \mathcal{D}\left(C_Y^{=1}\right).$$

我们证明，g：$(Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶化约化 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型。对于 Y 上的任意例外$/X$ 素除子 D，$\psi_* D$ 是一个素除子且为例外$/X$，因此

$$\operatorname{mult}_D B_Y = \operatorname{mult}_{\psi_* D} B' = 1.$$

对于 上任意 D 素除子，$/X$根据引理3.26，

$$\operatorname{mult}_D B_Y \geq \operatorname{mult}_D C_Y = 1 - a(D, Y, C_Y) = 1 - a(D, X', B') \geq 1 - a(D, X, B) = \operatorname{mult}_{g_* D} B.$$

因此，g：$(Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶化约化 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型。

最后，我们证明 (1-4)。(1)(2) 直接由我们的构造得出。由于 (Y, C_Y) 和 (X', B') 是 crepant，(Y, C_Y) 的任意对数典范位都是 (X', B') 的对数典范位，而 (X', B') 的任意对数典范位都是 (Y, C_Y) 的对数典范位。此外，由 [dFKX17，命题 11，推论 38]，$\mathcal{D}(Y, C_Y)$ 以及

$\mathcal{D}(X', B')$ 分片线性同胚。由于 $\mathcal{D}(Y, B_Y) = \mathcal{D}(Y, C_Y)$，我们得到 (3)。由于 ϕ 不会收缩 L的任何不可约分支，并且

$$\psi_* B_Y = B' \geq \phi_* L,$$

我们有 $g_* B_Y \geq L$。由于 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘约化 $\mathrm{QF}^{\mathrm{bir}}$ 模型 $(X/Z, B)$，因此得到 (4)。引理得证。□

定理 *3.23* 的证明。这是命题 3.24 和引理 3.25及3.27 的直接推论。□

本节的结果将在后续各节中定理 1.5 和定理1.7 的证明中反复使用。

4. Complements

本节旨在证明，具有极大双有理强完全正则性的对是 1-补的。更准确地说，我们将在本节证明以下定理：

定理 4.1. 设 d 为正整数。假设 $(X/Z \ni z, B)$ 是一个维数为d 的对数典范对，且满足 $\mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, B) = d - 1 - \dim z$。

则存在一个 1-补 $(X/Z \ni z, B^+)$，它是 $(X/Z \ni z, B)$ 的补，使得

$$\mathrm{reg}(X/Z \ni z, B^+) = d - 1 - \dim z.$$

特别地，$(X/Z \ni z, B)$ 是 1-补的。

定理 4.1 揭示了（双有理）强完全正则性与完全正则性之间的本质区别：最大完全正则度的对只能保证是 1-补或 2-补的 [Asc+23, Mor24a], 而具有最大双有理强完全正则性的对总是 1-补的。

为证明定理4.1，我们先给出以下命题。

命题 4.2. 假设：

(1) $(X/Z \ni z, B)$ 是一个具有收缩 $\pi\colon X \to Z$ 的对数典范对。*(2)* $-(K_X + B)$ 是数值有效的$/Z$。*(3)* (X, C) 是纯对数终端的。*(4)* $\{C\} \geq \{B\}$。*(5)* $-(K_X + C)$ 是大$/Z$ 且数值有效的$/Z$。*(6)* B 的非零系数为 $\geq \frac{1}{2}$。*(7)* $S = C^{=1} \subset B^{=1}$。*(8)* $z \in \pi(S)$。*(9)* $K_S + B_S := (K_X + B)|_S$，以及 *(10)* $(S/Z, B_S^+)$ 是 $(S/Z, B_S)$ 的一个 *1*-补。

于是存在 $X/Z \ni z, B^+$ 的一个 1-补()，它是 $X/Z \ni z, B$ 的()，使得

$$(K_X + B^+)|_S = K_S + B_S^+$$

在 z的某个邻域上。

证明。命题的证明与 [PS01，命题 6 类似。2] (但我们不能直接应用它，因为 (X, B) 可能不是纯对数终端的)；同时也与 [Bir19，命题 6 类似。7] (但我们对 B 的系数限制要弱得多)。为方便读者，我们在此给出完整证明。

设 $g\colon W \to X$ 是 $(X, B + C)$ 的对数消解，

$$-N_W := K_W + B_W := g^*(K_X + B), \qquad K_W + C_W := g^*(K_X + C),$$

且 $S_W := g_*^{-1} S$。令 $T_W := B_W^{=1}$和 $\Delta_W := B_W - T_W$。必要时，对于某个 $0 < \epsilon \ll 1$，用 $\epsilon C + (1-\epsilon)B$替换 C，我们可以假设 $||B_W - C_W||$ 足够小。特别地，我们可以假设：

- 支撑 $C_W \supset$ 支撑 B_W 且支撑 $C \supset$ 支撑 B。
- 对于 Δ_W 的任意分支 D，
$$-1 < \operatorname{mult}_D(C_W - \Delta_W + \{2\Delta_W\}) < 1.$$
- 对于 T_W 的任意不可约分支 D，$\operatorname{mult}_D C_W > 0$。
- Fo对于 C_W 中不是 B_W 的不可约分支的任意不可约分支 D，
$$-1 < \operatorname{mult}_D C_W < 1.$$

我们令 W 上满足以下条件的唯一魏尔除子为 P_W：

- $\operatorname{mult}_{S_W} P_W := 0$。
- 对于 W 上的任意素除子 D，满足 $D \neq S_W$，有
$$\operatorname{mult}_D P_W := -\operatorname{mult}_{D_W} \lfloor C_W + \Delta_W - \lfloor 2\Delta_W \rfloor \rfloor .$$

断言 4.3。 P_W 是一个约化除子，而 P_W 是例外的/X。

证明。 首先证明 P_W 是一个约化除子。我们只需证明对于 W上的任意素除子 D，$\operatorname{mult}_D P_W \in \{0,1\}$。不妨设 $D \neq S_W$。于是
$$\operatorname{mult}_D P_W = -\operatorname{mult}_D \lfloor C_W - \Delta_W + \{2\Delta_W\} \rfloor .$$
如果 D 是 T_W的一个不可约分支，则 D 不是 Δ_W 的不可约分支，而是 $C_W^{\geq 0}$ 的不可约分支。由于 $\left\lfloor C_W^{\geq 0} \right\rfloor = S_W$，$\operatorname{mult}_D C_W \in (0,\ 1)$，因此
$$\operatorname{mult}_D P_W = -\operatorname{mult}_D \lfloor C_W \rfloor = 0.$$
如果 D 是 Δ_W的一个不可约分支，那么由于
$$-1 < \operatorname{mult}_D(C_W - \Delta_W + \{2\Delta_W\}) < 1,$$
我们有 $\operatorname{mult}_D P_W \in \{0,1\}$。如果 D 是 C_W的一个不可约分支，但不是 Δ_W的不可约分支，那么由于 $D \neq S_W$，$-1 < \operatorname{mult}_D C_W < 1$，所以 $\operatorname{mult}_D P_W \in \{0,1\}$。

接下来我们证明 P_W 是例外的/X。对于 P_W 的任意非例外不可约分支 D /X，我们有
$$1 = \operatorname{mult}_D P_W = -\operatorname{mult}_{g_* D} \lfloor C - B + \{2B\} \rfloor .$$
因此 g_*D 是 C 或 B 与 $g_*D \neq S$的一个不可约分支。如果 g_*D 不是 B的不可约分支，则
$$1 = -\operatorname{mult}_{g_* D} \lfloor C \rfloor = 0,$$
矛盾。如果 g_*D 是 $\lfloor B \rfloor$的一个不可约分支，则
$$1 = -\operatorname{mult}_{g_* D} \lfloor C - B \rfloor = 1 - \operatorname{mult}_{g_* D} C,$$
因此 $\operatorname{mult}_{g_* D} C = 0$，而这是不可能的，因为 $\operatorname{Supp} C \supset \operatorname{Supp}\ B$。如果 g_*D 是 $\{B\}$的一个不可约分支，则由于 $\{C\} \geq \{B\}$，
$$1 = -\operatorname{mult}_{g_* D} \lfloor (C - B) + \{2B\} \rfloor \leq 0,$$
矛盾。因此， P_W 是例外的/X。 □

命题的证明*4.2* （续）。由于 S 是正规的，诱导的双有理态射$g|_{S_W}$： $S_W \to S$ 是一个双有理收缩。因此，
$$-N_W|_{S_W} = (K_W + B_W)|_{S_W} = g|_{S_W}^*(K_S + B_S).$$
设 $R_S := B_S^+ - B_S$。由于 $B \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$，由伴随公式（参见 [Kol+92, 推论 16.7]），$B_S \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$。由于 $(S/Z,\ B_S^+)$ 是 $(S/Z,\ B_S)$ 的 1-补，$R_S \geq 0$。设 $R_{S_W} := g|_{S_W}^* R_S$，则 $R_{S_W} \geq 0$，并且
$$N_W|_{S_W} \sim g|_{S_W}^*(K_S + B_S^+) - g|_{S_W}^*(K_S + B_S) = R_{S_W}.$$

由于 $(W,\ \mathrm{Supp}\ B_W \cup \mathrm{Supp}\ C_W)$ 是对数光滑的，且 S_W 既不是 Δ 的不可约分支，也不是 P_W 的不可约分支，因此我们可以定义 $\Delta_{S_W} := \Delta|_{S_W}$, $P_{S_W} := P_W|_{S_W}$,

$$L_W := -K_W - T_W - \lfloor 2\Delta_W \rfloor, \quad \text{and} \quad G_{S_W} := R_{S_W} + \Delta_{S_W} - \lfloor 2\Delta_{S_W} \rfloor + P_{S_W}.$$

于是我们有

$$(L_W + P_W)|_{S_W} \sim G_{S_W}.$$

特别地，G_{S_W} 是一个魏尔除子。因此，对于 G_{S_W}的任意不可约分支 Q，我们有

$$\mathrm{mult}_Q G_{S_W} \geq \mathrm{mult}_Q(\Delta_{S_W} - \lfloor 2\Delta_{S_W} \rfloor) = \mathrm{mult}_Q(-\Delta_{S_W} + \{2\Delta_{S_W}\}) \geq -\mathrm{mult}_Q \Delta_{S_W} > -1,$$

因此 $G_{S_W} \geq 0$。我们定义

$$\Lambda_W := C_W + \Delta_W - \lfloor 2\Delta_W \rfloor + P_W.$$

根据我们对 P_W的构造,

$$\Lambda_W = S_W + \sum_{D \neq S_W} \mathrm{mult}_D\{C_W + \Delta_W - \lfloor 2\Delta_W \rfloor\}$$

其中求和遍历 W 上所有属于 C_W 或 B_W 的不可约分支的素因子 D。特别地，$(W,\ \Lambda_W)$ 对数光滑、纯对数终端且 $\lfloor \Lambda_W \rfloor = S_W$。我们有

$$\begin{aligned} L_W + P_W - S_W &= N_W + \Delta_W - \lfloor 2\Delta_W \rfloor + P_W - S_W \\ &= N_W + \Lambda_W - C_W - S_W \\ &= K_W + (\Lambda_W - S_W) + (-(K_W + C_W) + N_W). \end{aligned}$$

令 $h : = \pi \circ g$。由于 $(W,\ \Lambda_W - S_W)$ 具有 KLT奇点，且 $-(K_W + C_W) + N_W$是大/Z且数值有效/Z，由相对川俣–维耶消失定理的一个版本（参见 [KMM87，定理 1-2-5]或[Fuj17，定理 3.2。9]），

$$R^1 h_* \mathcal{O}_W(L_W + P_W - S_W) = 0$$

由正合列

$$0 \to \mathcal{O}_W(L_W + P_W - S_W) \to \mathcal{O}_W(L_W + P_W) \to \mathcal{O}_{S_W}((L_W + P_W)|_{S_W}) \to 0,$$

我们可推得

$$R^i h_* \mathcal{O}_W(L_W + P_W) \to R^i h_* \mathcal{O}_{S_W}((L_W + P_W)|_{S_W})$$

是满射，因此存在 W 上的 $G_W \geq 0$，使得 $G_W|_{S_W} = G_{S_W}$ 且 $G_W \sim_Z L_W + P_W$。

令 G: $= g_* G_W$。由断言 4.3，P_W是例外的/X。由于 B的系数为$\geq \frac{1}{2}$，we have

$$G \sim_Z g_* L_W = -K_X - \lfloor B \rfloor - \lfloor \{2B\} \rfloor = -K_X - \mathrm{Supp}\, B.$$

因此 $K_X + \mathrm{Supp}\, B + G \sim_Z 0$。令

$$R_W := G_W - P_W - \Delta_W + \lfloor 2\Delta_W \rfloor.$$

Then

$$R_W \sim_Z L_W - \Delta_W + \lfloor 2\Delta_W \rfloor = N_W \sim_{\mathbb{R},X} 0.$$

此外，$R_W|_{S_W} = R_{S_W}$根据 G_{S_W} 的定义。令 $R : = g_* R_W$。由断言 4.3，

$$R = G - \{B\} + \lfloor \{2B\} \rfloor = G + \mathrm{Supp}\{B\} - \{B\}.$$

由于 $R_{S_W} = g|^*_{S_W} R_S$，我们有 $R_S = R|_S$，因此

$$K_S + B_S^+ = (K_X + B + R)|_S.$$

由伴随公式的反演,

$$(X, B^+ := B + R = \mathrm{Supp}\, B + G)$$

在 S附近是对数
典范。

假设 (X, B^+) 在 z的邻域上不是对数典范。则存在实数$0 < \delta \ll 1$，使得在 z 的邻域上 $(X, (1-\delta)B^+ + \delta C)$ 不是对数典范，且在 S附近是对数典范。特别地，$\mathrm{Nklt}(X, aB^+ + (1-a)C) \cap \pi^{-1}(z) \neq \emptyset$。但是

$$-(K_X + (1-\delta)B^+ + \delta C) = -(1-\delta)(K_X + B^+) - \delta(K_X + C) \sim_{\mathbb{R}} -\delta(K_X + C)$$

是大/Z 且数值有效/Z。这与 Shokurov-Koll´ar 连通性原理矛盾 . □

引理 4.4。 假设定理 *4.1* 在维数 $\leq d-1$中成立。

设 $(X/Z \ni z, B)$ 是一个维数为 d 的对，使得 (X, B) 是 *qdlt*，$-(K_X + B)$ 是丰沛/Z，B 的非零系数为 $\geq \frac{1}{2}$，并且

$$\mathrm{reg}(X/Z \ni z, B) = \dim X - 1 - \dim z.$$

那么 $(X/Z \ni z, B)$ 有一个单调的 1-补集。

证明。 根据 [dFKX17，引理 36]，，存在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化 $h\colon X' \to X$ 它在 (X, B) 的任意对数典范中心的一般点附近是同构。记 $K_{X'} + B' := h^*(K_X + B)$，则我们可以写成

$$-(K_{X'} + B') = A_k + \frac{1}{k}E$$

对任意正整数 k，其中 A_k 是丰沛的/Z $\mathbb{R}$-除子，$E \geq 0$，且 $\mathrm{Supp}\, E$ 不包含 (X', B') 的任何对数典范中心。取 $n \gg 0$，则 $\left(X', B' + \frac{1}{n}E'\right)$ 是 qdlt，且 $\mathcal{D}\left(X', B' + \frac{1}{n}E\right) = \mathcal{D}(X', B')$。将 Z 缩小至 z 的一个邻域后，我们可以假设 z 包含在 $\lfloor B' \rfloor$ 在 Z 上任意一个不可约分支的像中。设 S' 为$\lfloor B' \rfloor$的一个不可约分支。那么我们可以选取 $0 < \epsilon \ll \frac{1}{n}$ 使得

$$-\left(K_{X'} + B' - \epsilon\left(\lfloor B' \rfloor - S'\right) + \frac{1}{n}E\right)$$

是丰沛的/Z。设

$$C' := B' - \epsilon\left(\lfloor B' \rfloor - S'\right) + \frac{1}{n}E \quad \text{and} \quad S := h_*S',$$

并令 $\pi' := X' \to Z$ 为相应的收缩。于是根据我们的构造:

- $(X'/Z, B')$ 是一个对数典范对，其相应的收缩为 $\pi'\colon X' \to Z$。
- $-(K_{X'} + B')$ 数值有效/Z。
- (X', C') 是纯对数终端。
- $\{C'\} = \left\{B' + \frac{1}{n}E\right\} \geq \{B'\}$。
- $-(K_{X'} + C')$ 丰沛/Z，因此是大/Z 且数值有效/Z。
- B 的非零系数为 $\geq \frac{1}{2}$，因此 B' 的非零系数为 $\geq \frac{1}{2}$。
- $S' = \lfloor C' \rfloor \subset \lfloor B' \rfloor$。
- $z \in \pi'(S')$。

Let

$$K_{S'} + B_{S'} := (K_{X'} + B')|_{S'} \quad \text{and} \quad K_S + B_S := (K_X + B)|_S,$$

于是我们有

$$K_{S'} + B_{S'} = h|^*_{S'}(K_X + B_S).$$

由于 $-(K_X + B)$是丰沛的/Z 且(X, B)是qdlt，由 [XZ25，引理3。11]，S 与 $B^{=1}$ 在 z的某个邻域上相交。因此，(S, B_S)是qdlt，$-(K_S + B_S)$是丰沛的/Z，并且

$$\dim \mathcal{D}(S, B_S) = \dim \mathcal{D}\left(B_S^{=1}\right) = \dim S - 1 - \dim z$$

在 z的某个邻域上。因此

$$\mathrm{reg}(S/Z \ni z, B_S) = \dim S - 1 - \dim z.$$

回顾一下，我们假设定理 4.1 在维数 $\leq d-1$上成立。因此，我们可以将 S缩小到 z的一个邻域，使得 $(S/Z, B_S)$ 有一个 1-补 $(S/Z, B_S^+)$。根据命题

4.2，$(X'/Z \ni z, B')$ 有一个 1-补 $(X'/Z \ni z, B'^{+})$。令 $B^{+} := h_* B'^{+}$，则 $(X/Z \ni z, B^{+})$ 是 $(X/Z \ni z, B)$ 的一个 1-补。由于 B 的非零系数为 $\geq \frac{1}{2}$，$(X/Z \ni z, B^{+})$ 是 $(X/Z \ni z, B)$ 的一个单调 1-补。引理得证。□

定理的证明 *4.1*。可能将 X 替换为一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化后，我们可以假设 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。令 $C := B^{\geq \frac{1}{2}}$。由命题 3.6，

$$d - 1 - \dim z \geq \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, C) \geq \mathrm{SReg}^{\mathrm{bir}}(X/Z \ni z, B) = d - 1 - \dim z,$$

且 $(X/Z \ni z, C)$ 的任意 1-补都是 $(X/Z \ni z, B)$ 的 1-补。因此，可能将 B 替换为 C 后，我们可以假设 B 的所有非零系数均为 $\geq \frac{1}{2}$。由定理3.23，可能将 Z 缩小到 z 的一个邻域后，存在一个 QAA 模型 $(X'/Z, B')$，对应于 $(X/Z, B)$，并与 (ϕ, L) 相关联，其中某个约化除子 L 满足

$$\mathrm{reg}(X'/Z \ni z, B') = \mathrm{reg}(X'/Z, B') = d - 1 - \dim z.$$

由引理 4.4 和维数归纳，可能将 Z 缩小到 z 的一个邻域后，存在一个单调 1-补 $(X'/Z, B'^{+})$，它是 $(X'/Z, B')$ 的 1-补。令 $G' := B'^{+} - B'$ 并令 $p\colon W \to X'$ 和 $q\colon W \to X$ 为 ϕ 的不定点消解。由引理 3.26，

$$p^*(K_{X'} + B') = q^*(K_X + B) + F$$

对某个 $F \geq 0$。令 $G := q_*(F + p^*G')$，则 $G \geq 0$ 以及 $(X, B^{+} := B + G)$ 和 $(X', B' + G')$ 是 crepant。因此，$(X/Z, B^{+})$ 是 $(X/Z, B)$ 的一个 1-补，并且

$$\mathrm{reg}(X/Z \ni z, B^{+}) = \mathrm{reg}(X'/Z \ni z, B'^{+}) = d - 1 - \dim z.$$

定理得证。□

定理 *1.5* 的证明。由定理 4.1 和命题3.6可得。□

5. ACC for strong complete regularity threshold

本节旨在证明（双有理）强完全正则性阈值（定义 1.6）满足升链条件。我们先给出一个基本观察，说明这些阈值总能取到：

命题 5.1。设 $d > n \geq 0$ 是两个整数。设 $(X/Z, B)$ 是一个维数为 d 的对，并且 $D \geq 0$ 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-*Cartier* $\mathbb{R}$-除子。假设

$$t := \mathrm{SRegt}_n^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B; D) \in (0, +\infty).$$

那么，要么 $t = \mathrm{lct}(X, B; D)$，要么 $\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B + tD) < n$。

证明。我们可以假设 $t < \mathrm{lct}(X, B; D)$，但 $\mathrm{SRegt}^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B; D) \geq n$。根据引理 3.17，存在一个 $\mathrm{QF}^{(\mathrm{bir})}$ 模型 $g\colon (Y, B_Y) \dashrightarrow (X, B + tD)$ of $(X/Z, B + tD)$，使得 Y 是 $\mathbb{Q}$-factorial 且 $\mathrm{reg}(Y, B_Y) \geq n$。令 D_Y 为 D 在 Y 上的严格变换。由于 $t < \mathrm{lct}(X, B; D)$，$\mathrm{Supp}\, D \subset \mathrm{Supp}\{B + tD\}$，因此

$$\mathrm{Supp}\, D_Y \subset \mathrm{Supp}\{B_Y\} = \mathrm{Supp}\{B_Y + E\}.$$

因此，我们可以选取 $0 < \epsilon \ll 1$，使得 $(Y, \Delta_Y := B_Y + \epsilon D_Y)$ 是 qdlt，且 $-(K_Y + \Delta_Y)$ 是丰沛的/Z。我们有

$$g\colon (Y, \Delta_Y) \dashrightarrow (X, B + (t + \epsilon)D)$$

这是 $(X/Z, B + (t + \epsilon)D)$ 的一个 $\mathrm{QF}^{(\mathrm{bir})}$ 模型，因此

$$\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B + (t + \epsilon)D) \geq \mathrm{reg}(Y, \Delta_Y) \geq \mathrm{reg}(Y, B_Y) = n.$$

因此，$\mathrm{SRegt}_n^{(\mathrm{bir})}(X/Z, B; D) \geq t + \epsilon$，矛盾。□

本节的目标是证明以下定理。

定理 1.7 的证明。假设该定理不成立。那么对于任意正整数 i，存在一个对 $(X_i/Z_i, B_i)$，其维数为 d，以及一个整数 n_i，使得 $0 \leq n_i < d$，且存在一个$\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子 D_i 在 X_i上，使得 B_i，$D_i \in \Gamma$，但

$$t_i := \mathrm{SRegt}_n^{(\mathrm{bir})}(X_i/Z_i, B_i; D_i)$$

严格递增。可能需要取一个子序列，我们可以假设，对于任意 i 和 $n: = n_i$ 都是常数。根据 lc 阈值的 ACC，[HMX14，定理 1。1]，可能需要取一个子序列，我们可以假设，对于任意 i，$t_i < \mathrm{lct}(X_i, B_i; D_i)$。令 $t := \lim_{i\to+\infty} t_i$。那么我们可以选取一个实数序列 $\{s_i\}_{i=1}^{+\infty}$，使得 s_i 严格递增，$s_i < t_i$ 对每个 i 均成立，且 $\lim_{i\to+\infty} s_i = t$。于是

$$\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(X_i/Z_i, B_i + s_iD_i) \geq n$$

对于任意 i。根据定理 3.16，对于每个 i，存在一个约化除子 L_i 在 X_i 以及一个 $\mathbb{Q}$-因子约化 QF $^{(\mathrm{bir})}$ 模型

$$g_i \colon (Y_i, \Delta_{Y_i} := B_{Y_i} + s_iD_{Y_i} + R_i) \dashrightarrow (X_i, B_i + s_iD_i)$$

属于 $(X_i/Z_i,\ B_i + s_iD_i)$，使得 Y_i 是 $\mathbb{Q}$-因子的，并且 $\mathrm{reg}(Y_i,\ B_{Y_i}) \geq n$，其中

$$B_{Y_i} := g_{i,*}^{-1}(B_i \vee L_i) + E_i$$

对于某个约化除子 L_i on X_i and g_i-例外约化除子 E_i, $D_{Y_i} := g_i^{-1}{}_{,*}D_i$, and $R_i \geq$0。我们有 $(Y_i/Z_i, \Delta_{Y_i})$ 是 $\mathbb{R}$-补集，因此 $(Y_i/Z_i, B_{Y_i}+s_iD_{Y_i})$ 是 $\mathbb{R}$-补集。根据引理 3.18，Y_i/Z_i 是 Fano 型。由 $\mathbb{R}$-补集阈值的升链条件（HLS24，定理 5.12]，），可能在取子列后，我们有 $(Y_i/Z_i,\ B_{Y_i} + tD_{Y_i})$ 是 $\mathbb{R}$-补集。令

$$\left(Y_i/Z_i, B_{Y_i}^+ := B_{Y_i} + tD_{Y_i} + G_i\right)$$

为 $(Y_i/Z_i, B_{Y_i} + tD_{Y_i})$ 的一个 $\mathbb{R}$-补集。取 $0 < u_i \ll t - t_i$。考虑

$$(Y_i/Z_i, C_i := B_{Y_i} + ((1-u_i)t + u_is_i)D_{Y_i} + (1-u_i)G_i + u_iR_i)\,.$$

那么：

(1) g_i 不抽取任何除子且 $C_i \geq g_i^{-1}{}_*(B_i + t_iD_i)$。

(2) 由于

$$K_{Y_i} + C_i \sim_{\mathbb{R},Z_i} (1-u_i)\left(K_{Y_i} + B_{Y_i}^+\right) + u_i(K_{Y_i} + \Delta_{Y_i}) \sim_{\mathbb{R},Z_i} u_i(K_{Y_i} + \Delta_{Y_i})$$

是丰沛的$/Z_i$。此外，(Y_i, C_i) 的任一对数典范位都是 (Y_i, Δ_{Y_i}) 的对数典范位，因此 (Y_i, C_i) 是 qdlt。

(3) 任意满足 $\mathrm{mult}_D C_i = 0$ 的 g_i-例外素除子 D，使得 $\mathrm{mult}_D \Delta_{Y_i} = 0$，因此 D 不经过 (Y_i, Δ_{Y_i}) 的任何对数典范中心，进而 D 不经过 (Y_i, C_i) 的任何对数典范中心。

因此，

$$g_i \colon (Y_i, C_i) \dashrightarrow (X_i, B_i + t_iD_i)$$

是 $(X_i, B_i + t_iD_i)$ 的一个 $\mathrm{QF}^{(\mathrm{bir})}$ 模型。因此

$$\mathrm{SReg}^{(\mathrm{bir})}(X_i/Z_i, B_i + t_iD_i) \geq \mathrm{reg}(Y_i, C_i) = \mathrm{reg}(Y_i, \Delta_{Y_i}) \geq n.$$

这与命题 5.1 相矛盾。 □

References

[Asc+23] *Moduli of boundary polarized Calabi-Yau pairs* 2307 06522 K. Ascher、D. Bejleri、H. Blum、K. DeVleming、G. Inchiostro、Y. Liu 和 X. Wang，，arXiv：。。[ALP24] A. Avilov、K. Loginov 和 V. Przyjalkowski，，Commun. Number Theory Phys. 18（2024），第 3 期，509–577。[Bir12] C. Birkar，，Publ. Math. IH´ES 115（2012），325–368。[Bir19] C. Birkar，，Ann. of Math. (2), 190（2019），345–463。[BCHM 10] *Existence of minimal models for varieties of log general type* **23** 2010 2, 405 468 C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. M Kernan，，J. Amer. Math. Soc.（），第 – 期。[BL24] H. Blum 和 Y. Liu，，arXiv:2407.00850。[BF24] L. Braun 和 F. Figueroa，，，arXiv:2401.01315。[BFMZ18] M. Brown、J. McKernan、R. Svaldi 和 H. Zong，，Duke Math. J. 167（2018），第 5 期，923–968。[Che25] Z. Chen，，arXiv:2510.10737。[dS24] E. A. da Silva，（$\mathbb{P}^3$，D），arXiv:2402.13970。[dFKX17] T. de Fernex、J. Koll´ar 和 C. Xu，，《高维代数几何：为川又雄二郎教授六十华诞而作》，Adv. Stud. Pure Math. 74（2017），日本数学会，东京，103–129。[EFM24] J. Enwright、F. Figueroa 和 J. Moraga，，arXiv:2404.05878。[EJM 25] *Symmetries of Fano varieties* 2025 819, L. 89 133 Esser、L. Ji 和 J. Moraga，，J. Reine Angew. Math.（），第 – 期。[ELY25] J. Enwright、J. Li 和 J. I. Y´a˜nez，，arXiv:2504.17369。[FFMP25] F. Figueroa 、 S. Filipazzi 、 J. Moraga 和 J. Peng，，Forum Math. Sigma 13（2025），论文编号 e39。[FM23] F. Figueroa 和 J. Moraga，，arXiv:2302.11790。[FMP25] F. Figueroa、J. Moraga 和 J. Peng，，Doc. Math. 30（2025），第 1 期，183–218。[FMM25] S. Filipazzi、M. Mauri 和 J. Moraga，，Algebra Number Theory 19（2025），第 2 期，383–413。[FM20] S. Filipazzi 和 J. Moraga，（δ，n），Doc. Math. 25（2020），1953–1996。[Fuj17] O. Fujino，，MSJ Memoirs 35（2017），日本数学会，东京。[GLM23] C. Gachet、J. Moraga 和 Z. Liu，，arXiv:2312.03981。[HMX14] C. D. Hacon、J. McKernan 和 C. Xu，，Ann. of Math. (2) 180（2014），第 2 期，523–571。[HLS19] J. Han、J. Liu 和 V. V. Shokurov，，arXiv:1903.04338。[HLS24] J. Han、J. Liu 和 V. V. Shokurov，，Peking Math. J.（2024）。[Has20] K. Hashizume，，Internat. J. Math. 31（2020），第 13 期，2050103。[KMM87] Y. Kawamata、K. Matsuda 和 K. Matsuki，，《代数几何：仙台（1985）》，283–360，Adv. Stud. Pure Math.，10（1987），North-Holland，阿姆斯特丹。[Kol13] J. Koll´ar，，Cambridge Tracts in Math. 200（2013），剑桥大学出版社。[Kol+92] J. Koll´ar 等，，Ast´erisque 211（1992）。[KM98] J. Koll´ar 和 S. Mori，，Cambridge Tracts in Math. 134（1998），剑桥大学出版社。[LMX24] J. Liu、F. Meng 和 L. Xie，，arXiv:2404.01559。[LX25] J. Liu 和 L. Xie，，Peking Math. J.（2025），第 8 期，299–349。[LX24] Y. Liu 和 C. Xu，，中国科学：数学（2024）。[LMV24] K. Loginov、J. Moraga 和 A. Vasilkov，，arXiv:2407.09420。

[LPT25] K. Loginov、V. Przyjalkowski 和 A. Trepalin, *G-Coregularity of del Pezzo Surfaces*, 《Steklov 数学研究所学报》329（2025）, 117–147。[LZ24] K. Loginov 和 Z. Zhang, *Birational invariants of volume preserving maps*, arXiv:2410.05036。[MM25] M. Mauri 和 J. Moraga, *Birational complexity and dual complexes*, 《伦敦数学学会会刊》（第3辑）131（2025）, 第2期, 论文编号 e70073。[Mor23] J. Moraga, *Minimal log discrepancies of regularity one*, 《国际数学研究通知》（2023）, 第18期, 15976–16014。[Mor24a] J. Moraga, *Coregularity of Fano varieties*, 《几何学专论》218（2024）, 第2期, 论文编号40, 共55页。[Mor24b] J. Moraga, *Birational complexity and conic fibrations*, arXiv:2403.17251。[MS25] J. Moraga 和 R. Svaldi, *A geometric characterization of toric singularities*, 《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）195（2025）, 论文编号 103620。[MYY25] J. Moraga、J. I. Y´a˜nez 和 W. Yeong, *Polarized endomorphisms of Fano varieties with complements*, 《国际数学研究通知》（2025）, 第8期, 1–18。[PS01] Y. Prokhorov 和 V. V. Shokurov, *The first main theorem on complements: from global to local*, 《数学消息》65（2001）, 第6期, 1169–1196。[Sho92] V. V. Shokurov, *Threefold log flips*, 附有 Y. Kawamata 撰写的英文附录, 《俄罗斯科学院消息·数学辑》56（1992）, 第1期, 105–203（附录作者: Y. Kawamata）。[Sho00] V. V. Shokurov, *Complements on surfaces*, 《数学科学杂志》（纽约）102（2000）, 第2期, 3876–3932。[Sho20] V. V. Shokurov, *Existence and boundedness of n-complements*, arXiv:2012.06495。[XZ25] C. Xu 和 Z. Zhuang, *Stable degenerations of singularities*, J. Amer. Math. Soc. 38（2025）, 第3期, 585–626。[XZ26] C. Xu 和 Z. Zhuang, *Open problems in K-stability of Fano varieties*, arXiv:2601.15576。[Zha25] O. Zhakupov, *On smooth Fano threefolds with coregularity zero*, 《欧洲数学杂志》11（2025）, 文章编号84。

Department of Mathematics, Peking University, No. 5 Yiheyuan Road, Haidian District, Peking100871, China*Email address*: liujihao@math.pku.edu.cn

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences Moscow Russia. , , ,
Laboratory of AGHA Moscow Institute of Physics and Technology.
Email address: loginov@mi-ras.ru