arXiv:2603.03601v1 [math.CO] 4 Mar 2026

可控图同构与距离正则化图余谱性的逻辑方面

Aida Abiad*† Anuj Dawar‡ Octavio B. Zapata-Fonseca§

摘要

我们研究可控图的同构和距离正则化图的余谱性（已知这类图是距离正则图或距离双正则图）与逻辑可定义性的关系。尽管这类图中上述等价关系的大多数刻画都具有代数和谱论的风格，本文引入一阶逻辑工具，对若干已有结果加以拓展和统一。

1 引言

可控图和距离正则化图这两类图是代数组合学、可控性及其他领域中的重要研究对象。关于这类图的大多数已知刻画都具有代数和谱论的风格，参见例如 [6, 12, 16, 18]。本文首次运用一阶逻辑研究这类图。

Godsil 和 Shawe-Taylor 引入了距离正则化图[14]，将其作为距离正则图和广义多边形的共同推广，并证明距离正则化图必定是距离正则图或距离双正则图。本文证明，余谱距离正则化图无法通过计数三变量一阶逻辑 C^3 加以区分。事实上，这一结果也适用于 Fiol 和 Garriga 引入的所谓伪距离正则化图 [10, 8], ，因为已知它们是距离正则图或距离双正则图 [9]。我们的第一个主要刻画推广了 Dawar、Severini 和 Zapata 关于强正则图的此类先前结果 [7, 命题 8], ，以及 Manˇcinska、Roberson 和 Varvitsiotis 关于距离正则图的结果

*a.abiad.monge@tue.nl，荷兰埃因霍温理工大学数学与计算机科学系

†比利时布鲁塞尔自由大学数学与数据科学系

‡anuj.dawar@cl.cam.ac.uk，英国剑桥大学计算机科学与技术系§ octavioz@ciencias.unam.mx，墨西哥国立自治大学理学院数学系

Manˇcinska、Roberson 和 Varvitsiotis [19, 定理 7.6], ，将其推广到更一般的距离正则化图类。

在过去几十年里，可控图也受到了广泛关注。Godsil 和 Severini [13]提出了可控图，以研究图上的连续时间量子游走。O'Rourke 和 Touri [20] 证明，几乎所有图都是可控的。这里我们证明，在计数型二变量一阶逻辑 C^2 下无法区分的可控图是同构的，从而推广了 [7, 11, 19, 22]中的结果。

本文结构如下。第 2 节给出所需的定义和预备结果。第 3 节证明可控图这一类图的图同构刻画。第 4 节给出距离正则化图余谱性的刻画。

2 预备知识

2.1 图的一阶逻辑

我们采用图语言，因此其中有一个二元关系符号E ，它被解释为图$\Gamma = (X, E)$ 顶点集 X 上的邻接关系。该语言还包含变量 $x, y, z, \ldots$，用于指代图中的任意顶点。我们允许使用由标准联结词和量词构成的常见逻辑符号： $\neg$（“非”）、 $\vee$（“或”）、 $\wedge$（“且”）、 $\rightarrow$ （“蕴含”）、 $\leftrightarrow$ （“当且仅当”）、 $\exists$ （“存在”）和 $\forall$ （“对所有”）。由于我们只考虑没有自环或重边的无向图，邻接关系是自反的反面且具有对称性，因此这些语句

$$\forall x \neg E(x, x)$$
$$\forall x \forall y (E(x, y) \leftrightarrow E(y, x))$$

在我们所有的图中都成立。如果句子 ϕ 在图 Γ 中成立，那么我们称 Γ 满足 ϕ ，并记作 $\Gamma \models \phi$。

对于任意正整数 k，我们用 C^k 表示一阶逻辑的一个片段，其中只有 k 个不同的变量，但允许使用计数量词：因此，对于每个正整数 i，我们都有一个量词 $\exists^{\geq i}$。其语义定义如下：若至少有 i 个不同的顶点可以代入变量 x ，使公式 φ 成立，则 $\exists^{\geq i} x \varphi$ 在 Γ 中成立。我们用 $\exists^{=i} x \phi$ 作为公式 $\exists^{\geq i} x \phi \wedge \neg \exists^{\geq i+1} x \phi$ 的简写，该公式断言恰好存在 i 个满足 ϕ 的顶点。例如，若 d 是非负整数，则 $\Gamma \models \forall x \exists^{=d} y E(x, y)$ 当且仅当 Γ 是一个 d-正则图。因此，我们说， d-正则这一性质可在逻辑 C^2 中定义。

如果两个图 Γ 和 Δ 满足完全相同的 C^k-句子，即对于 C^k中的所有句子 ϕ ，$\Gamma \models \phi$ 当且仅当 $\Delta \models \phi$ ，我们就称它们是 C^k-等价的 （记作$\Gamma \equiv_{C^k} \Delta$）。如果两个图对于某个 $k \geq 2$是 C^{k+1}-等价的，那么（特别地）这两个图就是 C^k-等价的。

2.2 迭代度数序列

给定图 $\Gamma = (X, E)$和顶点 $x \in X$，令 $d(x)$表示与 x 在 Γ中相邻的顶点数。Γ 的度数序列是多重集$d(\Gamma) = \{d(x) \mid x \in X\}$。类似地，$x$ 在 Γ中的迭代度按归纳方式定义为 $d_0(x) = d(x)$，且 $d_r(x) = \{d_{r-1}(y) \mid y \in \Gamma(x)\}$ 对每个 $r > 0$都成立。Γ 的迭代度数序列是多重集 $D_\Gamma = \{d_r(\Gamma) \mid r \geq 0\}$，其中$d_0(\Gamma) = d(\Gamma)$，且 $d_r(\Gamma) = \{d_{r-1}(x) \mid x \in X\}$ 对 $r > 0$成立。

求一个图的迭代度数序列的过程有若干广为采用的名称；它被称为规范标记、颜色细化、朴素顶点分类或一维 *Weisfeiler–Leman* 算法。Immerman 与 Lander 证明，C^2-等价是具有相同迭代度数序列的充要条件（见 [15, 定理 4.8.1]）。

定理 2.1 ([15])**.** 两个图是 C^2-等价的，当且仅当它们具有相同的迭代度数序列。

两个具有相同顶点数和相同度的正则图必然具有相同的迭代度数序列。例如，若 Γ是两个三角形的不交并，而 Δ 是长度为 6 的圈，则 Γ 与Δ 都有 6 个顶点且度为 2，因此它们的迭代度数序列相同。

2.3 分数同构

设 $\Gamma = (X, E)$ 为一个有限图。Γ 的邻接矩阵是由顶点集 X 索引的方阵A，其元素 A_{xy} 定义为：若顶点 x 与 y 相邻则为 $A_{xy} = 1$，否则为 $A_{xy} = 0$。

实矩阵 S 称为双随机矩阵，如果其所有元素均非负，且每一行和每一列的元素之和都为 1。Birkhoff–von Neumann 定理指出，所有 $n \times n$ 双随机矩阵构成一个紧凸集，其极点为置换矩阵。若两个图 Γ 和 Δ的邻接矩阵分别为 A 和 B，且存在一个双随机矩阵 S 使得 $SA = BS$，则称这两个图分数同构。

定理 2.2 ([21])**.** 两个图分数同构，当且仅当它们具有相同的迭代度数序列。

2.4 图谱

设 Γ 是一个有限图，其邻接矩阵为 A。根据定义，矩阵 A是对称的，即 $A^\top = A$。因此，它的所有特征值均为实数。Γ 的谱是 A 的所有特征值按其重数计数得到的多重集。如果两个图具有相同的谱，则称它们余谱。

定理 2.3 ([7])**.** 如果两个图是 C^3-等价的，那么它们是余谱的。

一般而言，余谱性不足以作为 C^3-等价的充分条件。例如，完全二分图 $K_{1,4}$ 与 4-圈 C_4 和一个顶点 K_1 的不交并 $C_4 + K_1$ 互为余谱，但并非 C^3-等价。事实上，可以用一个断言存在孤立顶点的 C^3 句子将它们区分开：$K_{1,4} \not\models \exists x \forall y \neg E(x,y)$ 和 $C_4 + K_1 \models \exists x \forall y \neg E(x,y)$。

此外，如果只允许使用两个变量，余谱性也不是必要条件：6-圈 C_6 和两个三角形的 $2K_3$ 不交并 K_3 并非余谱图，而且无法通过任何使用两个不同变量和计数量词的句子加以区分（例如参见 [15, 第 4.7节]）。

即使允许使用超过三个变量，计数量词也必不可少：对于每个正整数 $k \geq 3$，都存在一对非同构图，它们不是余谱图，且无法通过任何使用k 个不同变量但不使用计数量词的句子加以区分 [7, 命题 4]。

2.5 相干配置

集合 X 上的一个**相干配置**是由 X 上的二元关系组成的集合 $\Pi = \{R_1, \ldots, R_s\}$，满足以下条件：

(i) $\{R_1, \ldots, R_s\}$ 是 $X \times X$的一个划分；

(ii) 存在 $\{1, \ldots, s\}$ 的一个子集 H，使得$\bigcup_{h \in H} R_h = \{(x, x) \mid x \in X\}$；

(iii) 对每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，都存在一个 $j \in \{1, \ldots, s\}$，使得若 $(x, y) \in R_i$，则 $(y, x) \in R_j$；

(iv) 对每个 $i, j, k \in \{1, \ldots, s\}$，都存在一个非负整数 $p_{ij}(k)$，使得若 $(x, y) \in R_k$，则满足 $(x, z) \in R_i$ 且 $(z, y) \in R_j$ 的元素 $z \in X$ 的数量等于 $p_{ij}(k)$。

数 $p_{ij}(k)$ 称为相干配置 Π 的**交数**。关系的数量 s 称为 Π 的**秩**。

X 上所有相干配置的集合按细化构成偏序：若每个 $R \in \Theta$ 都包含于某个 $S \in \Lambda$，则称 Θ **细化** Λ。

2.5.1 图的相干配置

设 $\Gamma = (X, E)$ 是一个图，$\Pi_\Gamma = \{R_1, \ldots, R_s\}$ 是满足上述条件 (i)–(iv) 的一组 X 上的二元关系，并且

(v) 存在 $\{1, \ldots, s\}$ 的一个子集 G，使得 $\bigcup_{g \in G} R_g = E$。

则 Π_Γ 是 X 上唯一的极大相干配置，使得 E 是 Π_Γ 中某些关系的并集。

二维 *Weisfeiler–Leman* 算法 是一种高效的过程，可针对任意有限图计算 Π_Γ Γ。该过程如下所述。设 f_0

是定义在 $X \times X$ 上的函数，定义为

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } (x,y) \in E, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $r \geq 0$，定义多重集 $f_{r+1}(x,y) = \{(f_r(x,z)\ f_r(z,y)) \mid z \in X\}$，并令$\Pi_r$为 $X \times X$的划分，使得当且仅当 $f_r(x,y) = f_r(u,v)$时，(x,y)与 (u,v)属于同一部分。（注意，如果 (x,y)与 (u,v)处于不同的相互距离 $d(x,y) \neq d(u,v)$，则 $f_1(x,y) \neq f_1(u,v)$。）当 $\Pi_r = \Pi_{r+1}$时，令 $\Pi_\Gamma = \Pi_r$。

图1展示了对 8-圈 C_8 应用此算法得到的相干配置。在此情形下，划分中的所有关系都是对称的。

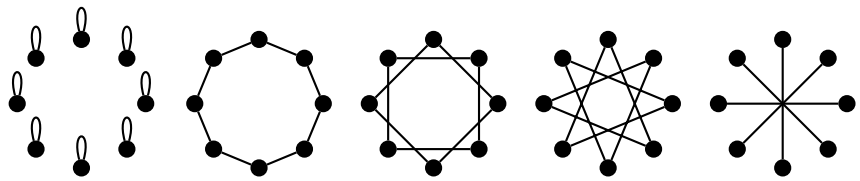


图1：由 8-圈确定的秩为 5 的相干配置。

2.5.2 交数等价

若两个相干配置 Π 和 Π 的交数分别为$p_{ij}(k)$和 $\bar{p}_{ij}(k)$，且它们的秩 s相同，并且交数也相同（指标可作置换），则称它们交数等价：

$$p_{ij}(k) = \bar{p}_{ij}(k)$$

对所有的 $i,\ j,\ k \in \{1,\ldots,s\}$。

Cai、F¨urer 和 Immerman 有一项经典结果，将图的 C^3-等价与通过二维 Weisfeiler–Leman 算法得到的相干配置之间的交数等价联系起来（例如，参见[4,定理 5.2]）。在我们的语境中，恰当的表述如下。

定理 2.4 ([4])。 两个图是 C^3-等价的，当且仅当它们具有交数等价的相干配置。

3 可控图的同构

可控图理论由 Godsil 在 [12], 中建立，其中猜想：在 n 个顶点上的图中，可控图所占的比例当 $n \to \infty$时趋于 1。后来，O'Rourke 和 Touri [20] 证实，几乎所有图都是可控的。在本节中我们证明，若两个可控图是 C^2-等价的，则这两个图同构。

3.1 可控图

具有 n 个顶点、邻接矩阵为A 的图 $\Gamma = (X, E)$的游走矩阵 是 $n \times n$ 矩阵

$$W_\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & A\mathbf{1} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{1} \end{bmatrix},$$

其中$\mathbf{1}$ 表示全 $\mathbf{1}$ 向量。若 $X = \{1, \ldots, n\}$，游走矩阵 W_Γ 的 ij 项表示图 Γ 中从顶点 i 出发、长度为 $j-1$ 的游走数量。若图的游走矩阵可逆，则称该图为可控的 。

若 Γ 是度为 d 的正则图，则 $A\mathbf{1} = d\mathbf{1}$；这意味着 W_Γ 的秩为 $\mathbf{1}$。因此，可控图不可能是正则图。

我们还注意到，若 P 是与 A 可交换的置换矩阵，则对于 $0 \le i \le n-1$ 有 $PA^i\mathbf{1} = A^iP\mathbf{1} = A^i\mathbf{1}$，从而 $PW_\Gamma = W_\Gamma$；这意味着当 W_Γ 可逆时，$P = I$ 。因此，可控图的唯一自同构是恒等映射。

3.2 游走等价

若两个图对所有 $i \ge 0$ 都具有相同数量的长度为 i 的游走，则称它们游走等价 。

引理 3.1。 如果两个图是 C^2-等价的，那么它们是游走等价的。

证明。 根据定理 2.1 和定理 2.2， C^2-等价的图是分数同构的。设 Γ 和 Δ 分别是邻接矩阵为 A 和 B的图。由于邻接矩阵的 i 次幂的元素之和等于图中长度为 i 的游走数，因此， $\mathbf{1}^\top A^i\mathbf{1}$ 是 Γ 中长度为 i 的游走数，而 $\mathbf{1}^\top B^i\mathbf{1}$ 是 Δ 中长度为 i 的游走数。如果 Γ和 Δ 是分数同构的，那么存在一个双随机矩阵 S，使得 $SA = BS$ ，从而

$$\mathbf{1}^\top A^i\mathbf{1} = \mathbf{1}^\top SA^i\mathbf{1} = \mathbf{1}^\top B^iS\mathbf{1} = \mathbf{1}^\top B^i\mathbf{1}. \qquad \square$$

引理 3.2。 如果图 Γ和 Δ是 C^2-等价的，那么存在一个置换矩阵 P使得 $PW_\Gamma = W_\Delta$。

证明。 对于每个 $h \ge 1$ 和 $i \ge 0$，我们定义一个 C^2-公式 $\phi_i^h(x)$，断言存在恰好 h 条从顶点 x出发、长度为 i 的游走。对于任意顶点x，从 x出发恰好存在一条长度为 0 的游走，因此令 $\bot$ 为任意假命题，令 $\top$ 为任意真命题，并通过对 i进行归纳来定义 C^2-公式 $\phi_i^h(x)$。如果 $i = 0$，那么

$$\phi_0^0(x) := \bot, \qquad \phi_0^1(x) := \top \qquad \text{and} \qquad \phi_0^h(x) := \bot \quad \text{for } h > 1.$$

现在，如果 $i = 1$，那么

$$\phi_1^0(x) := \forall y \neg E(x, y) \qquad \text{and} \qquad \phi_1^h(x) := \exists^{=h} y E(x, y) \quad \text{for } h > 0.$$

对于 $i > 1$，我们定义

$$\phi^0_{i+1}(x) := \forall y(E(x,y) \to \phi^0_i(y)),$$

并且如果 $h > 0$，则

$$\phi^h_{i+1}(x) := \bigvee_{(h_1^{a_1},\ldots,h_r^{a_r})\in H} [(\bigwedge_{j=1}^{r} \exists^{=a_j} y\ \phi_i^{h_j}(y)) \wedge \exists^{\geq a} y E(x,y)],$$

其中 H 表示 h 的所有整数分拆的集合（即 $h_j \geq 0$、 $a_j \geq 1$ 和$h = \sum_{j=1}^{r} a_j h_j$），并且 $a = \sum_{j=1}^{r} a_j$。

我们注意到，在所有这些定义中，我们使用的不同变量不超过两个。

根据定义， $\Gamma \models \phi_i^h(x)$当且仅当在 Γ中存在 h 条从顶点 x出发、长度为 i 的游走。

由于 Γ 与 Δ 是 C^2-等价的，存在 Γ 的一个顶点 x，使得 $\Gamma \models \phi_i^h(x)$当且仅当存在 Δ 的一个顶点 $\bar{x}$，使得 $\Delta \models \phi_i^h(\bar{x})$。因此，映射$x \mapsto \bar{x}$ 是集合 $\{x \in V_\Gamma \mid \Gamma \models \phi_i^h(x)\}$ 与 $\{\bar{x} \in V_\Delta \mid \Delta \models \phi_i^h(\bar{x})\}$之间的一个双射。由于一个图的游走矩阵的行由图的顶点索引，由此可知上述双射确定了一个置换矩阵P，使得 $PW_\Gamma = W_\Delta$。 □

3.3 同构与 C^2-等价

邻接矩阵为 A 的图的补图 是邻接矩阵为 $J - I - A$的图。若两个图及其补图分别余谱，则称这两个图广义余谱 。广义余谱的必要条件是游走等价。由 [12, 推论 3.2]可知，对于可控图，这一条件也是充分的。

定理 3.1 ([12])**.** 两个可控图游走等价，当且仅当它们广义余谱。

若两个可控图 Γ和 Δ 的邻接矩阵分别为 A 和 B，且它们广义余谱，则矩阵 $Q = W_\Delta W_\Gamma^{-1}$ 满足 $QAQ^\top = B$ 和$Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$ （见 [12, 引理 6.1]）。我们将利用这一观察证明下一个结果。

定理 3.2. 两个可控图 Γ 和 Δ同构，当且仅当它们是 C^2-等价的。

证明。 </style}设 A 和 B 分别为 Γ 和 Δ的邻接矩阵。假设Γ 和 Δ 是 C^2等价的。根据引理 3.1， Γ和 Δ 游走等价。由定理 3.1可知， Γ 和 Δ 广义余谱。于是矩阵$Q = W_\Delta W_\Gamma^{-1}$ 满足 $QAQ^\top = B$ 和 $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$。由引理 3.2可知，存在一个置换矩阵 P，使得 $PW_\Gamma = W_\Delta$。因此

$$Q = W_\Delta W_\Gamma^{-1} = PW_\Gamma W_\Gamma^{-1} = P,$$

因此 $PAP^\top = B$。由此， Γ和 Δ同构，这就证明了该定理，因为对于任意 $k > 0$，同构图都是 C^k等价的。 □

4 距离正则化图的余谱性

距离正则化图要么是距离正则图，要么是距离双正则图[14]。本节将证明，由余谱距离双正则图确定的相干配置是交数等价的，见下文定理 4.2。由此可得，若两个距离正则化图余谱，则这两个图是 C^3等价的。

4.1 距离正则化图

给定一个图 $\Gamma = (X, E)$ 和一个顶点 $x \in X$，令 $\Gamma_i(x)$ 表示在 Γ 中与 x 距离为 $i \geq 0$ 的顶点集合。若 Γ 是一个直径为 d 的连通图，对于任意两个满足 $y \in \Gamma_i(x)$ 的顶点 $x, y \in X$，我们定义

$$\begin{aligned} c_i(x,y) &= |\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)|, \\ a_i(x,y) &= |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)|, \\ b_i(x,y) &= |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)|, \end{aligned}$$

其中，当 $i = 0$ 时，$c_i(x, y) = 0$。若顶点 x 是**距离正则化的**，则称其为距离正则化顶点，如果数值 $c_i(x, y)$ $a_i(x, y)$ 和 $b_i(x, y)$ 不依赖于 $\Gamma_i(x)$ 中顶点 y 的选取；此时我们分别将它们记为 $c_i(x)$ $a_i(x)$ 和 $b_i(x)$。

一个**距离正则化图** 是一个连通图，其中每个顶点都是距离正则化的。若 Γ 是直径为 d 的距离正则化图，则数组

$$\iota(x) = \begin{bmatrix} 0 & c_1(x) & \cdots & c_{d-1}(x) & c_d(x) \\ a_0(x) & a_1(x) & \cdots & a_{d-1}(x) & a_d(x) \\ b_0(x) & b_1(x) & \cdots & b_{d-1}(x) & 0 \end{bmatrix}$$

称为顶点 x 的**交数数组**。

4.1.1 距离正则图

距离正则图是一种距离正则化图，其中所有顶点都具有相同的交数数组。如果 Γ是直径为 d的距离正则图，则数值 $c_i(x)$ $a_i(x)$和 $b_i(x)$分别记为 c_i， a_i和 b_i ($0 \leq i \leq d$)。根据定义， Γ 是 k-正则图，对于所有 i，均有 $k = b_0$ 和 $a_i = k - b_i - c_i$。文献中对直径为 d 的距离正则图的交数数组所采用的记号是

$$\iota = \{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}.$$

例如，可参见 Brouwer、Cohen 和 Neumaier 的专著 [2]。

设 $\Gamma = (X, E)$ 是一个直径为 d 的距离正则图。对于 $i \geq 0$，我们在 X 上定义对称关系 R_i，如下所示:

$$R_i = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) = i\}.$$

那么，对于 $i > d$， $R_i = \emptyset$；对于所有 i， j， $R_i \cap R_j = \emptyset$。此外，

$$R_0 \cup R_1 \cup \cdots \cup R_d = X \times X$$

因此， $\{R_0, R_1, \ldots, R_d\}$ 是 $X \times X$的一个划分。此外，我们有$R_0 = \{(x,\ x) \mid x \in X\}$ 且 $R_1 = E$。由于 Γ 是距离正则的，存在数 $p_{ij}(k)$，使得对所有$(x,\ y) \in R_k$，

$$|\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)| = p_{ij}(k).$$

因此， $\Pi_\Gamma = \{R_0, R_1, \ldots, R_d\}$ 是 Γ的相干配置。

下一个结果指出， Π_Γ 的交数 $p_{ij}(k)$可由 Γ的交数数组确定（参见引理 4.1.7 [2], ）。

引理 4.1 ([2])。

$$p_{i0}(k) = \delta_{ik}, \qquad p_{0j}(k) = \delta_{jk},$$

$$p_{i1}(k) = \begin{cases} c_i & \text{if } k = i+1, \\ a_i & \text{if } k = i, \\ b_i & \text{if } k = i-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$p_{ij+1}(k) = \frac{1}{c_{j+1}}[p_{i-1j}(k)b_{i-1} + p_{ij}(k)(a_i - a_j) + p_{i+1j}(k)c_{i+1} - p_{ij-1}(k)b_{j-1}].$$

4.1.2 距离双正则图

距离双正则图是一种二部距离正则化图，其中二部划分同一类中的所有顶点具有相同的交数数组。若 $\Gamma = (X,\ E)$是一个二部划分为$(X',\ X'')$的距离双正则图，则其交数数组为

$$\iota' = \{b'_0, \ldots, b'_{d'-1}; c'_1, \ldots, c'_{d'}\} \quad \text{and} \quad \iota'' = \{b''_0, \ldots, b''_{d''-1}; c''_1, \ldots, c''_{d''}\}$$

其中 $d' = \max\{d(x,y) \mid x \in X', y \in X\}$ 且 $d'' = \max\{d(x,y) \mid x \in X'', y \in X\}$。根据定义， Γ 是 (k,ℓ)-半正则的，其中 $k = b'_0$ 且 $\ell = b''_0$。此外，对于所有$i \geq 0$，我们有

$$b'_i + c'_i = \begin{cases} k & \text{if } i \text{ is even}, \\ \ell & \text{if } i \text{ is odd}, \end{cases} \quad \text{and} \quad b''_i + c''_i = \begin{cases} \ell & \text{if } i \text{ is even}, \\ k & \text{if } i \text{ is odd}. \end{cases}$$

图 2 展示了一个非距离正则的距离双正则图示例。该图是完全图 K_4 的细分。它是距离双正则图，其交数数组为

$$\iota' = \{3, 1, 2; 1, 1, 2\} \quad \text{and} \quad \iota'' = \{2, 2, 1, 1; 1, 1, 2, 2\}.$$

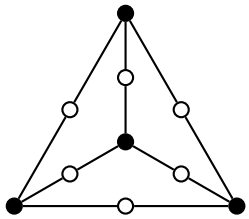


图 2：一个不是距离正则的距离双正则图。

4.2 余谱性

距离双正则图的交数组由其谱和半正则度决定，反之亦然（见 [17, 定理 2.7.2]）。

定理 4.1 ([17])**.** 设 Γ 与 Δ 为距离双正则图，并设 ι'_Γ、ι''_Γ与 ι'_Δ、ι''_Δ 为其交数组。则 Γ 与 Δ 是余谱的且具有相同的半正则度，当且仅当 $\iota'_\Gamma = \iota'_\Delta$ 与 $\iota''_\Gamma = \iota''_\Delta$。

该结果与下一引理共同表明，余谱的距离双正则图具有相同的交数组。

引理 4.2. 设 Γ 为一个二部的 (k,ℓ)-半正则图，且 Δ 为一个二部的 (k,ℓ)-半正则图。若 Γ 与 Δ 是余谱的且 $k \neq k$ 或 $\ell \neq \ell$，则 $k = \ell$ 与 $\ell = k$。

证明。 设 $\Gamma = (X, E)$ 是一个二部的 (k,ℓ)-半正则图，其二部划分为 (X', X'')，并设 $p = |X'|$ 和 $q = |X''|$。 Γ 的邻接矩阵 A 可写为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & N \\ N^\top & 0 \end{bmatrix},$$

其中， N 是一个矩阵，其行和列分别以 X' 和 X'' 中的顶点为索引。若用 $\mathbf{1}$ 表示一个适当维数且各坐标均为 1 的向量，则可得 $N\mathbf{1} = k\mathbf{1}$ 和 $N^\top\mathbf{1} = \ell\mathbf{1}$，因此 $k\ell$ 是 $NN^\top$ 和 $N^\top N$ 的特征值。由于

$$A^2 = \begin{bmatrix} NN^\top & 0 \\ 0 & N^\top N \end{bmatrix},$$

由此可见， $k\ell$ 是 A^2 的特征值，因而 $\sqrt{k\ell}$ 和 $-\sqrt{k\ell}$ 都是 A 的特征值。由于 $\mathbf{1}$ 的所有项均为正数，根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理， $\sqrt{k\ell}$ 是 A 的最大特征值。

设 Γ 与 Δ 均具有谱 $\theta_0^{m_0}, \ldots, \theta_d^{m_d}$，其中 $\theta_0 > \cdots > \theta_d$，且指数 m_i 表示特征值 θ_i 的重数。则

$$\theta_0 = \sqrt{k\ell} = \sqrt{\bar{k}\bar{\ell}}, \tag{1}$$

从而

$$k\ell = \bar{k}\bar{\ell}. \tag{2}$$

假设 Δ 具有二部划分 (X', X'')，其中 $|X'| = \bar{p}$ 且 $|X''| = \bar{q}$。重数之和等于顶点数，特征值的平方和等于边数的两倍。于是

$$p + q = \sum_{i=0}^{d} m_i = \bar{p} + \bar{q} \tag{3}$$

and

$$kp = \ell q = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{d} \theta_i^2 = \bar{k}\bar{p} = \bar{\ell}\bar{q}. \tag{4}$$

现在不失一般性地假设 $\ell \neq \ell$。由 2 和 3，得到 $k\ell(p + q) = k\ell(\bar{p} + \bar{q})$。然后利用 4，得到

$$kp\ell + k\ell q = \bar{k}\bar{p}\bar{\ell} + \bar{k}\bar{\ell}\bar{q} = kp\bar{\ell} + \bar{k}\ell q.$$

再次由 4 可知

$$kp(\ell - \bar{\ell}) = \ell q(\bar{k} - k) = kp(\bar{k} - k),$$

因此 $0 \neq \ell - \ell = k - k$。然后再次利用 2，得到

$$(\ell - \bar{\ell})\ell = (\bar{k} - k)\ell = \bar{k}\ell - k\ell = \bar{k}\ell - \bar{k}\bar{\ell} = \bar{k}(\ell - \bar{\ell}),$$

因此 $\ell = k$。于是 $\ell\ell = k\ell = k\ell$，所以 $\ell = k$。 □

现在我们看到，对于距离双正则图，余谱性等价于具有相同的交数数组。

推论 4.1. 两个距离双正则图余谱，当且仅当它们具有相同的交数组。

证明。 如果 Γ 和 Δ 是余谱的距离双正则图，那么引理 4.2 表明 Γ和 Δ 具有相同的半正则度。因此，根据定理 4.1， Γ和 Δ 具有相同的交数组。反过来，如果两个距离双正则图具有相同的交数组，那么定理 4.1表明它们是余谱的。

□

4.3 交等价与 C^3-等价

一般而言，相干配置由一组有向图构成。有时其中一些图是无向的。例如，K_4 的细分的相干配置如图 3所示。

设 $\Gamma = (X, E)$ 为一个具有二部划分 (X', X'') 的距离双正则图，并设 $d' = \max\{d(x, y) \mid x \in X', y \in X\}$ 以及 $d'' = \max\{d(x, y) \mid x \in X'', y \in X\}$。对于 $i \geq 0$，我们在 X 上如下定义关系 R_i', R_i''

$$R_i' = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in X',\ d(x, y) = i\},$$

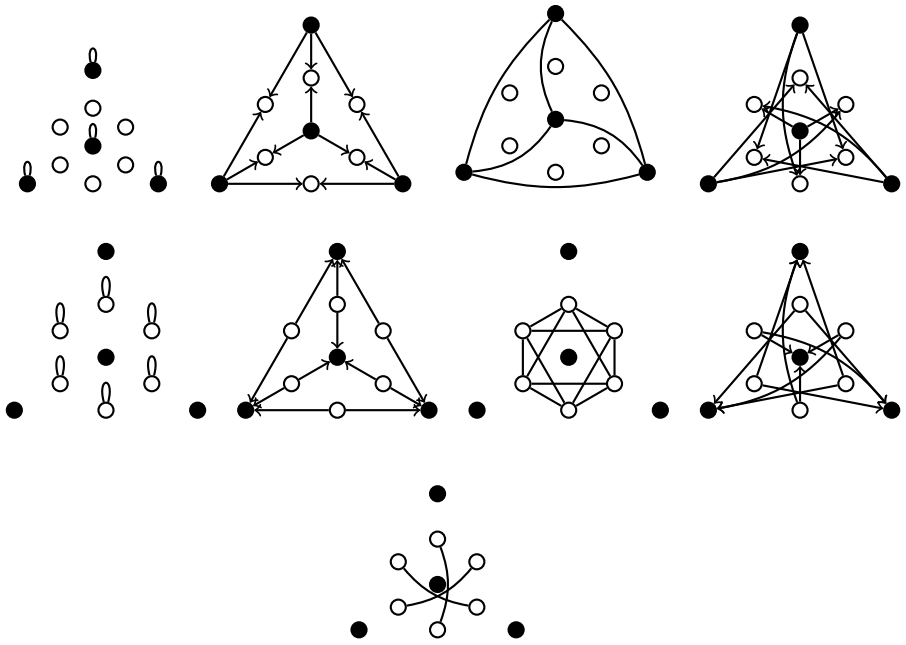


图 3：由完全图 K_4 的细分所确定的秩 9 相干配置。

$$R_i'' = \{(x,y) \in X \times X \mid x \in X'',\ d(x,y) = i\}.$$

那么，对于 $i > d'$， $R_i' = \emptyset$；对于 $i > d''$， $R_i'' = \emptyset$。显然，对于所有 i， j， $R_i' \cap R_j' = \emptyset$ 且 $R_i'' \cap R_j'' = \emptyset$。由于 $X' \cap X'' = \emptyset$，那么对于所有 i， j， $R_i' \cap R_j'' = \emptyset$。此外，

$$R_0' \cup R_1' \cup \cdots \cup R_{d'}' = X' \times X,$$

$$R_0'' \cup R_1'' \cup \cdots \cup R_{d''}'' = X'' \times X.$$

由于 $X' \cup X'' = X$，那么 $\{R_0', \ldots, R_{d'}', R_0'', \ldots, R_{d''}''\}$ 是 $X \times X$ 的一个划分。此外，$R_0' = \{(x, x) \mid x \in X'\}$，且 $R_0'' = \{(x, x) \mid x \in X''\}$，因此 $R_0' \cup R_0'' = \{(x, x) \mid x \in X\}$。由于 Γ 是二部的，那么 R_{2i}' 和 R_{2i}'' 是对称的，而对所有 i，$(x,y) \in R_{2i+1}'$ 当且仅当 $(y,x) \in R_{2i+1}''$。特别地，$R_1' \cup R_1'' = E$。最后，由于 Γ 是距离双正则的，存在数值 $p_{ij}'(k)$ 和 $p_{ij}''(k)$，使得对于所有满足 $d(x, y) = k$ 的 (x,y)，我们有

$$|\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)| = \begin{cases} p_{ij}'(k) & \text{if } x \in X', \\ p_{ij}''(k) & \text{if } x \in X'' \end{cases}$$

（例如，参见 [1, 引理 3.10]）。因此， $\Pi_\Gamma = \{R_0', \ldots, R_{d'}', R_0'', \ldots, R_{d''}''\}$ 是 Γ的相干配置。

Π_Γ 的交数 $p_{ij}'(k)$ 和 $p_{ij}''(k)$ 可以根据距离双正则图 Γ 的交数组递归计算（参见[17,引理 6.3.1]）。

引理 4.3 17 。([ ])

$$p_{i0}'(k) = \delta_{ik}, \qquad p_{0j}'(k) = \delta_{jk},$$

$$p_{i1}'(k) = \begin{cases} c_i' & \text{if } k = i+1, \\ b_i' & \text{if } k = i-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$p_{ij+1}'(2k) = \frac{1}{c_{j+1}'}[p_{i-1j}'(2k)b_{i-1}' + p_{i+1j}'(2k)c_{i+1}' - p_{ij-1}'(2k)b_{j-1}'],$$

$$p_{ij+1}'(2k+1) = \frac{1}{c_{j+1}''}[p_{i-1j}'(2k+1)b_{i-1}' + p_{i+1j}'(2k+1)c_{i+1}' - p_{ij-1}'(2k+1)b_{j-1}''].$$

Similarly,

$$p_{i0}''(k) = \delta_{ik}, \qquad p_{0j}''(k) = \delta_{jk},$$

$$p_{i1}''(k) = \begin{cases} c_i'' & \text{if } k = i+1, \\ b_i'' & \text{if } k = i-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$p_{ij+1}''(2k) = \frac{1}{c_{j+1}''}[p_{i-1j}''(2k)b_{i-1}'' + p_{i+1j}''(2k)c_{i+1}'' - p_{ij-1}''(2k)b_{j-1}''],$$

$$p_{ij+1}''(2k+1) = \frac{1}{c_{j+1}'}[p_{i-1j}''(2k+1)b_{i-1}'' + p_{i+1j}''(2k+1)c_{i+1}'' - p_{ij-1}''(2k+1)b_{j-1}'].$$

因此，如果两个距离双正则图具有相同的交数组，那么它们的相干配置就是交数等价的，进而这两个图是 C^3-等价的。

定理 4.2。 两个距离双正则图 Γ 和 Δ 余谱，当且仅当它们是 C^3-等价的。

证明。 若 Γ 和 Δ 余谱，则由推论 4.1 可知， Γ 和 Δ 具有相同的交数数组。由引理 4.3 可知，相干配置 Π_Γ 和 Π_Δ 具有相同的交数，因此它们交数等价。根据定理 2.4，由于 Π_Γ 和 Π_Δ 交数等价，因此 Γ和 Δ 是 C^3-等价的。反过来同样成立，因为我们已有定理 2.3。

□

对于距离正则图，Manˇcinska、Rober- son 和 Varvitsiotis 证明了一个类似的结果（参见 [19, 定理 7.6]）。为强调其与逻辑可定义性的联系，我们将他们的结果表述如下。

定理 4.3 （[19]）。 两个距离正则图余谱，当且仅当它们是 C^3-等价的。

正如我们之前提到的，Godsil 和 Shawe-Taylor 在 [14] 中证明，除了距离正则图或距离双正则图之外，不存在其他距离正则化图。

定理 4.4 ([14])。 距离正则化图要么是距离正则图，要么是距离双正则图。

因此，下一个结果可直接得出。

定理 4.5。 两个距离正则化图余谱当且仅当它们是 C^3-等价的。

致谢

这项工作始于2022年2月在德国举行的逻辑与随机离散结构 Dagstuhl 研讨会期间。作者谨向研讨会组织者致谢。本工作的初步版本发表于第十二届拉丁美洲算法、图与优化研讨会（LAGOS 2023）的论文集。

Aida Abiad 由荷兰研究理事会通过资助项目 VI.Vidi.213.085 予以支持。
Octavio Zapata 的研究部分由墨西哥研究理事会通过资助项目 SNII 620178 予以支持。

参考文献

[1] M. van den Akker，《距离双正则图》，硕士论文，埃因霍温理工大学，1990。

[2] A.E. Brouwer、A.M. Cohen 和 A. Neumaier，《距离正则图》，施普林格出版社，柏林，1989。[3] A.E. Brouwer 和 W.H. Haemers，《图谱》，施普林格，纽约，2012。[4] 蔡进一、M. F¨urer 和 N. Immerman，图识别所需变量数量的最优下界，Combinatorica 12（1992），389–410。[5] E.R. van Dam 和 W.H. Haemers，图谱刻画的发展，离散数学 309（2009），576–586。[6]E.R. van Dam 和 W.H. Haemers，若干距离正则图的谱刻画，代数组合杂志 15（2002），189–202。[7] A. Dawar、S. Severini 和 O. Zapata，图谱的描述复杂性，纯粹与应用逻辑年刊 170（2019），993—1007。[8] M.A. Fiol，论伪距离正则性，线性代数及其应用 323（2001），145–165。[9]M.A. Fiol，伪距离正则化图是距离正则图或距离双正则图，线性代数及其应用 437（2012），2973–2977。[10]M.A. Fiol、E. Garriga，从局部邻接多项式到局部伪距离正则图，《组合理论杂志B辑》71(2)（1997），162–183。[11] M. F¨urer，论组合不变量和谱不变量的作用，线性代数及其应用 432（2010），2373–2380。[12] C. Godsil，图中的可控子集，组合学年刊 16（2012），733–744。[13] C. Godsil 和 S. Severini，图上的量子动力学控制，物理评论A 81（2010），052316。[14] C.D. Godsil 和 J. Shawe-Taylor，距离正则化图是距离正则图或距离双正则图，《组合理论杂志B辑》43（1987），14–24。[15] N. Immerman 和 E. Lander，图的描述：图典范化的一阶方法，载于《复杂性理论回顾》，第59–81页，施普林格，纽约，1990。[16] S. Lato，二部半正则图的谱Moore界，SIAM离散数学杂志 37（2023），315–331。[17] S. Lato，《距离双正则图与正交多项式》，博士论文，滑铁卢大学，2023。[18] F. Liu 和 J. Siemons，揭示图的游走矩阵，代数组合杂志 55（2022），663–690。

[19] L. Manˇcinska、D.E. Roberson 和 A. Varvitsiotis，《图同构：物理资源、优化模型与代数刻画》，*Mathematical Programming* **205**（2024），617–660。[20] S. O'Rourke 和 B. Touri，《关于 Godsil 提出的可控随机图猜想》，*SIAM* 控制与优化杂志**54**（2016），3347–3378。[21] M.V. Ramana、E.R. Scheinerman 和 D. Ullman，《图的分数同构》，离散数学**132**（1994），247–265。[22] G. Rattan 和 T. Seppelt，《Weisfeiler–Leman 与图谱》，载于 *ACM-SIAM* 离散算法年会论文集（*SODA*），第 2268–2285 页，SIAM，2023。