arXiv:2603.03634v1 [math.PR] 4 Mar 2026

通过圈矩阵研究非平衡马尔可夫链的方法

Cruzde laRosa M.A. & Guerrero-Poblete F.墨西哥大都会自治大学，伊斯塔帕拉帕校区。墨西哥城，墨西哥。marko@xanum.uam.mx
poblete@xanum.uam.mx

摘要

与 [4], 中讨论的量子情形类似，本文提出一种图论方法，用于研究马尔可夫链的非平衡性质。我们证明，与该链的相互作用图相关联的关联矩阵的核（由环构成）同每行元素之和为零的反对称矩阵空间同构。本文的主要贡献是引入所谓的圈矩阵，它们构成描述非平衡状态的矩阵空间的一组基。

关键词：相互作用图；非平衡；圈矩阵；循环矩阵。

数学主题分类代码：60J27。

1 引言

连续时间马尔可夫链的研究是随机过程理论中的一个核心课题。马尔可夫链中的平衡已得到广泛研究；然而，与之对应的非平衡迄今为止研究得还不够充分。

众所周知，平衡等价于细致平衡条件。非平衡 由属于 $\mathcal{M}$ 反对称矩阵空间且各行元素之和为零的一个矩阵给出。

类似于 [4], 中所考察的量子情形，本研究提出了一种图论方法，用于研究马尔可夫链的非平衡性质。我们证明，相互作用

图的关联矩阵的核与空间 $\mathcal{M}$ 同构。为了更好地描述表示非平衡的矩阵，按基来表示它会更方便。由于关联矩阵的核由环生成，我们给出 $\mathcal{M}$ 的一个基，该基由环在此同构下的像构成；这样的矩阵称为圈矩阵。

在建立环与非平衡之间的关系后，我们将注意力集中于一些具有内在研究价值的环，即哈密顿环。我们给出了一条生成其中一部分环的规则，即我们称为 k-哈密顿环 的环；在此基础上，我们引入了马尔可夫链的 k-非平衡概念，并证明这些环在同构映射下的像是循环矩阵酉群中元素之间的差。最后，我们完整描述了 1-非平衡不变分布。

本文组织如下：在第2节中，我们回顾马尔可夫链的标准记号，定义连续时间马尔可夫链的非平衡概念和相互作用图。在第3节中，我们引入 k-非平衡和圈矩阵的概念。在第4节中，我们给出 1-非平衡不变分布的显式形式，并以一个四状态链的例子作结。

2 非平衡马尔可夫链与相互作用图

按照马尔可夫链理论中的标准定义，我们用 q_{ij} 表示生成矩阵 Q的矩阵元素，用 π_i 表示不变分布 π的第 i个元素。请记住，当且仅当 $\pi Q = 0$ 时，分布 π 是不变的，且无穷小生成元满足（见 [10]）。

1. $q_{ij} \geq 0$ for all $i \neq j$.
2. $q_{ii} = -\sum_{j:j\neq i} q_{ij}$ for all $i \in S$.

其中 S 是状态空间。接下来给出连续时间马尔可夫链的细致平衡定义。

定义 1 给定一个连续时间马尔可夫链 $\{X_t\}_{t\geq 0}$，其状态空间为 S，无穷小生成元为 Q，不变分布为 π。若对所有 $i \neq j$ 都成立，则称该链满足细致平衡条件，

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \tag{2.1}$$

等价地，细致平衡意味着对所有 $i \neq j$、 $\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji} = 0$ 都成立。这些量称为流。众所周知，平衡和细致平衡这两个条件是等价的，更多详情请参见 [11] 。

从现在起，我们假设状态空间 S 的基数为 N，并且对所有 $i \neq j$ ，都有 $q_{ij} > 0$。因此，条件 $\pi Q = 0$ 等价于（见 [5]）

$$\sum_{i \neq j} (\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji}) = 0, \qquad \forall j \in S. \tag{2.2}$$

记 $J_{ij} := (\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji})$，并注意到 $J_{ji} = -J_{ij}$，方程 (2.2) 等价于

$$\sum_{i=1}^{j-1} J_{ij} - \sum_{i=j+1}^{N} J_{ji} = 0 \qquad \forall j \in S. \tag{2.3}$$

记 Π 为一个对角矩阵，其对角元素为 $\Pi_{i,i} = \pi_i$。显然，细致平衡条件 (2.1) 可写成如下矩阵形式：

$$\Pi Q - (\Pi Q)^t = 0 \tag{2.4}$$

由于平衡等价于流均为零，反之（非平衡）则意味着至少有一个流不为零；形式化地说：

定义 2 给定一个连续时间马尔可夫链 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ，其有限状态空间为 S，无穷小生成矩阵为 Q ，不变分布为 π，当且仅当满足以下条件时，我们称其为非平衡马尔可夫链：

$$\Pi Q - (\Pi Q)^t = D, \qquad D \neq 0. \tag{2.5}$$

正如预期的那样，上面的矩阵 D 并非任意矩阵，而是具有某些性质，下面将提及其中一些。

引理1 式 (2.5) 中的矩阵 D 满足

i) $D^t = -D$, *i.e., it is antisymmetric.*

ii) $\sum_j D_{ij} = 0, \ \forall i \in S.$

证明 1 项 i)

$$D_{ij}^t = \pi_j q_{ji} - \pi_i q_{ij} = -(\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji}) = -D_{ij}$$

条目 ii）由条目 i）和方程（22）得出。

2.1 相互作用图

“相互作用图”这一概念最初是为弱耦合极限型的量子马尔可夫半群引入的, [1], 后来又用于 [5] 连续时间马尔可夫链。具体而言，给定一个有限状态空间为 S、无穷小生成元为 Q的马尔可夫链 $\{X_t\}_{t\geq 0}$，相互作用图定义为有向图 $G(V,\ E)$，其中 $V=S$且 $E=\{(i,\ j)\in S\times S:\ i<j\}$。

注意，根据我们的假设，$q_{ij}>0$ 对所有 $i\neq j$，相互作用图是完全的；因此它有 $\binom{N}{2}$ 条边。相互作用图的关联矩阵将记为 Γ；在由边（i,j）索引的列中，该矩阵在第 i行取 -1，在第 j行取1，其余情形为0。就任何排序目的而言，我们将使用字典序；对于该序，由下式给出的函数 θ_N:
$E\to\{1,\dots,\binom{N}{2}\}$

$$\theta(i,j)=S(i)+j-i,\quad \text{where } S(i):=\sum_{t=1}^{i-1}(N-t)=(i-1)\big(N-\frac{i}{2}\big)$$

是递增且双射的（详见 [6] ）。

我们将电流向量定义为向量 $J\in\mathbb{R}^{|E|}$，其分量恰好是（2.3）中的流 J_{ij}，即 $J=$（$J_{12},\cdots,J_{N-1\,N}$）^{t}。一个关键事实（其证明可见于 [5], ）是 $\pi Q=0$ 当且仅当 $\Gamma J=0$。众所周知，图中的环属于其关联矩阵的核，见 [3]。由于环的最小长度为三，为简单起见，我们寻找这种长度的环，以构成关联矩阵的核的一组基。我们将用 $C_{(i,j,k)}$ 表示连接顶点 i,j,k的环。

另一个众所周知的事实是，具有 N 个顶点的图所对应的关联矩阵的秩为 $N-p$，其中 p 是连通分量的数量（见 [2]）。因此，如果该图是完全图，即具有 $\binom{N}{2}$ 条边，那么其秩为 $N-1$ 维，故其核的维数为 $\binom{N-1}{2}$。

下面的定理给出了 $Ker(\Gamma)$ 的一个基（证明见 [6] ）。

定理1 令 $\mathcal{C}:=\big\{C_{(i,i+1,i+1+j)}:\quad 1\leq i\leq N-2,\ 1\leq j\leq N-(i+1)\big\}$ 为一组最短环；对于 $r\in\{1,2,\dots,\binom{N}{2}\}$，其坐标为

$$C_{(i,i+1,i+1+j)}(r)=\begin{cases}1 & if \quad r=(i-1)(N-\frac{i}{2})+1,\\ & or \quad r=i(N-\frac{i+1}{2})+j,\\ -1 & if \quad r=(i-1)(N-\frac{i}{2})+j+1,\\ 0 & other\ case.\end{cases}\tag{2.6}$$

那么 $\mathcal{C}$ 是 $Ker(\Gamma)$的一组基。

3 k-非平衡

作为刻画时间连续马尔可夫链中非平衡分布的第一步，由于 Γ 矩阵的核由环组成，我们将重点关注其中一些本身具有有趣性质的类型；欧拉环和哈密顿环便是其中的一些。接下来，为了处理这类环，我们给出一条生成它们的规则。从现在起，我们将使用记号 $[i] := i \, mod \, N$。

定义 3 我们将由序列 $[k]$、$[2k]$、.....、$[Nk]$、$[k]$构成的路径称为***k*-**闭合路径 。此外，若该路径是一个环（不重复顶点的闭合路径），则称其为 k-环，并记为C_k。

事实上， k-闭合路径并不总是 k-环；例如，对于 $N = 6$ 和$k = 2$，序列 $[2], [4], [6], [8], [10], [12], [2]$ 是一条2-闭合路径，但不是2-环。下面的命题给出了使闭合路径成为环、进而成为哈密顿圈的条件，即图中的每个顶点恰好被访问一次。

命题 1 *k*-闭合路径 $[k]$、$[2k]$、.....、$[Nk]$、$[k]$ 是哈密顿圈，当且仅当 $gcd(k, N) = 1$。

证明2 众所周知，循环群 $\mathbb{Z}/\, N\mathbb{Z}$，即集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$连同运算 $i \cdot j := [i + j]$，具有 ψ（N）个生成矩阵，其中 ψ 是欧拉函数，且 $k \in \mathbb{Z}/\, N\mathbb{Z}$ 是该群的生成矩阵当且仅当gcd（k， N） $= 1$。因此，状态空间 $S = \{1, 2, \ldots, N\} = \{[k], [2k], \ldots, [Nk]\}$，即序列 $[k]$， $[2k]$， .....， $[Nk]$， $[k]$ 访问每个顶点，且每一条边都互不相同，所以该*k*序列是一个哈密顿圈。

3.1 圈矩阵

由于非平衡由（2.5）给出，其中矩阵 D 满足引理1中的性质，为了通过 D 的结构更深入地理解非平衡，我们将指出 Ker（Γ）与行和为零的反对称矩阵空间具有相同的维数，因而彼此同构。所有分量均等于1的向量将记为**1**，即**1** $:=$（**1**，.....，**1**）^{t}。

定理2 设 $\mathcal{M} := \{A : \ A^t = -A, \, A\mathbf{1} = 0\}$ 为行和为零的 $N \times N$ 阶反对称实矩阵空间，则$dim(\mathcal{M}) = \binom{N-1}{2}$。

证明 3 设 $W = \{A_{N\times N} : A^t = -A\}$ 为反对称实矩阵空间。已知 $dim(W) = \binom{N}{2} = {}^{N}(N-1)\,2$。考虑线性映射 $T: W \to \mathbb{R}^N$,~~其定义为~~ $T(A) = A\mathbf{1}$。注意到 $kerT = \{A : A^t = -A,\ A\mathbf{1} = 0\} = \mathcal{M}$，因此， $\mathcal{M}$ 和 $ker(T)$ 的维数相同。根据维数定理， $dim(ker(T)) = dim(W) - dim(ImT)$。我们将证明 $ImT = \mathbf{1}^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^N : \langle x, \mathbf{1}\rangle = 0\}$ ，并且由于 $dim(\mathbf{1}^{\perp}) = N - 1$, 我们将得出

$$dim(\mathcal{M}) = \binom{N}{2} - (N-1) = \binom{N-1}{2}.$$

令 $A\mathbf{1} \in ImT$，则 $\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1}\rangle = \langle A^t\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \langle -A\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = -\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1}\rangle$. 。因此，$\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1}\rangle = 0$，也就是说， $A\mathbf{1} \in \mathbf{1}^{\perp}$，这证明了一个包含关系。对于另一个方向，令 $x \in \mathbf{1}^{\perp}$，我们要证明存在 $A \in W$，使得 $T(A) = A\mathbf{1} = x$。 A的一种可能取法是

$$A_{i,j} = \begin{cases} -x_j & for\ i = 1,\ 2 \le j \le N \\ x_j & for\, j = 1,\ 2 \le i \le N \\ 0 & other\ case \end{cases} \tag{3.1}$$

显然，它满足 $A = -A^t$ 和 $A\mathbf{1} = x$。证明至此完成。

考虑函数 ϕ : $span(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}$，定义如下:

$$\phi(C) = M, \qquad \text{where} \quad M_{i,j} = \begin{cases} C(\theta(i,j)) & \text{if}\, i < j \\ -C(\theta(j,i)) & \text{if}\, i > j \end{cases} \tag{3.2}$$

显然， ϕ 是线性的，并且 $\phi(C) = 0$ 当且仅当对所有 $i < j$，都有 $C(\theta(i, j)) = 0$；这意味着没有边属于环 C，也就是说，它是环 0，因此 ϕ 是单射。又因为 $\mathcal{M}$ 和 $Ker(\Gamma)$ 的维数相同， ϕ 是满射，因而是一个同构。

定义 4 对于任意环 C，矩阵 $M = \phi(C)$ 称为环矩阵。

特别地，对于 $1 \le i \le N-2$和 $1 \le j \le N-(i+1)$，我们将 $M_{i,\ i+1,\ i+1+j}$ 记作环 $C_{i,\ i+1,\ i+1+j}$在 ϕ下的像；这类矩阵的元素为 $(M_{i,\ i+1,\ i+1+j})_{mn}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad (m,n) \in \{(i,i+1),(i+1,i+1+j),(i+1+j,i)\} \\ -1 & \text{if} \quad (m,n) \in \{(i+1,i),(i+1+j,i+1),(i,i+1+j)\} \\ 0 & \text{other case.} \end{cases} \tag{3.3}$$

由于集合 $\mathcal{C}$ 是 $Ker(\Gamma)$的一组基，矩阵集合 $\{M_{i,i+1,i+1+j}:\ 1\leq i\leq N-2,\ 1\leq j\leq N-(i+1)\}$ 是 $\mathcal{M}$的一组基；因此，方程 (2.5) 可写为

$$\Pi Q-(\Pi Q)^t=\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{N-(i+1)}d_{i,i+1,i+1+j}M_{i,i+1,i+1+j} \tag{3.4}$$

其中 $d_{i,i+1,i+1+j}\in\mathbb{R}$。

3.2 循环矩阵

在确定了 $Ker(\Gamma)$ 与 $\mathcal{M}$ 同构之后，我们将寻找 C_k 在空间 $\mathcal{M}$ 中的对应物，即 $\phi(C_k)$。$\phi(C_k)$ 与循环矩阵之间存在一种有趣的关系。回顾一下，阶为 N 的循环矩阵记作 $circ(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1})$，它是一个方阵，每一行都是前一行的循环置换，即

$$circ(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{N-1}):=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{N-1}\\ \alpha_{N-1} & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{N-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_0\end{pmatrix}$$

已知矩阵集合 $\{\Lambda,\ldots,\Lambda^N\}$（其中 $\Lambda=circ(0,1,0,...,0)$）构成一个酉循环群，同时也是循环矩阵空间的一组基，即

$$circ(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{N-1})=\alpha_0 I+\alpha_1\Lambda+\alpha_2\Lambda^2+\cdots+\alpha_{N-1}\Lambda^{N-1}$$

并且 $(\Lambda^k)^{-1}=(\Lambda^k)^*=\Lambda^{N-k}$ （进一步讨论请参见 [9] ）。

注意，对于所有 $1\leq k\leq N$，$(\Lambda^k-(\Lambda^k)^t)\in\mathcal{M}$，因为它是反对称的，且 $\sum_j\left(\Lambda^k-(\Lambda^k)^t\right)_{ij}=0$，这显然可由

$$(\Lambda^k)_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } j=[i+k]\\ 0 & \text{other case}\end{cases}$$

and

$$\left(\Lambda^k-(\Lambda^k)^t\right)_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } j=[i+k]\\ -1 & \text{if } i=[j+k]\end{cases} \tag{3.5}$$

另一方面，由于 $\Lambda^k-\Lambda^{N-k}=-(\Lambda^{N-k}-\Lambda^k)$，只需考虑集合 $\{\Lambda^k-(\Lambda^k)^t:\ 1\leq k\leq\ell\}$ 其中 ℓ 满足 $N=2\ell$ 或 $N=2\ell+1$。

下面的命题指出，C_k 在 ϕ 下的像正是上述所描述的差异。

命题 2 设 C_k 是一个 k-哈密顿圈，则 $\phi\left(C_k\right) = \Lambda^k - \left(\Lambda^k\right)^t$。

证明 *4* 由于环 $C_k = [k], [2k], \ldots, [Nk], [k]$ 是哈密顿的；该环的边序列为 $([k], [2k])$ $\ldots, ([Nk], [(N+1)k]) = \{([ik], [(i+1)k]) : \ 1 \leq i \leq N\}$，因此，环 C_k 在其第 r 个条目中取 *1*，当 $[ik] < [(i+1)k]$ 且 $\theta([ik], [(i+1)k]) = r$ 时，也就是说，边 $([ik], [(i+1)k])$ 沿预定方向经过；当 $[(i+1)k] < [ik]$ 且 $\theta([(i+1)k], [ik])$ $= r$ 时，该环取 -1 ，也就是说，边 $([ik], [(i+1)k])$ 沿相反方向经过；其他情况下取 *0*。现在， $[ik] < [(i+1)k]$ 当且仅当 $[(i+1)k] \leq N$，也就是说，$i \leq N-k$ 且 $[(i+1)k] < [ik]$ 当且仅当 $i > N-k$，因此

$$C_k(r) = \begin{cases} 1 & if\ \theta([ik], [(i+1)k]) = r,\ for\ 1 \leq i \leq N-k \\ -1 & if\ \theta([(i+1)k], [ik]) = r,\ for\ N-k+1 \leq i \leq N \\ 0, & other\ case \end{cases}$$

因此

$$\phi(C_k)_{i,j} = \begin{cases} C_k(\theta(i,j)),\ for\ i<j \ = \begin{cases} 1 & if\ j = [i+k],\ 1 \leq i \leq N-k \\ -1 & if\ i = [j+k],\ N-k+1 \leq j \leq N \end{cases} \\ -C_k(\theta(j,i)),\ for\ i>j \ = \begin{cases} -1 & if\ i = [j+k],\ 1 \leq j \leq N-k \\ 1 & if\ j = [i+k],\ N-k+1 \leq i \leq N \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & if \quad j = [i+k] \\ -1 & if \quad i = [j+k] \end{cases} \tag{3.6}$$

即为 (3.5)。

上述结果引出如下定义。

定义 5 设为一具有有限状态空间 S、无穷小生成元 Q以及不变分布 π的连续时间马尔可夫链，我们称 π 为k-非平衡不变分布，如果

$$\Pi Q - (\Pi Q)^t = d\big(\Lambda^k - (\Lambda^k)^t\big) \tag{3.7}$$

对某个不为零的 $d \in \mathbb{R}$ 。

这类不变分布已在量子情形中被考虑（见 $[6]$），其中 (3.7) 的右端取形式 $d\sum_{k=1}^{l}\left(\Lambda^k - (\Lambda^k)^t\right)$，这些不变测度称为 均匀且完全非平衡。

矩阵方程 (3.7) 的元素为

$$(\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji})_{ij} = \begin{cases} d & \text{if } j = [i+k] \\ -d & \text{if } i = [j+k] \\ 0 & \text{other case.} \end{cases} \tag{3.8}$$

在下一节中，我们将描述满足 $k = 1$ 的 (3.7) 的马尔可夫链的不变分布。

4 1-非平衡不变分布

本节将明确描述 1-非平衡不变分布。由于 $\Lambda - \Lambda^t$ 是反对称的，只需考虑 (3.7) 的上半部分，即对于 $i < j$，我们有

$$\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji} = \begin{cases} d & \text{if } j = [i+k] \text{ and } 1 \le i \le N-1 \\ -d & \text{if } i = [j+k] \text{ and } j > N-k \\ 0 & \text{other case} \end{cases} \tag{4.1}$$

因此，对于 $k = 1$，系统 (4.1) 的形式为

$$\begin{pmatrix} q_{1,2} & -q_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{2,3} & -q_{3,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{N-1,N} & -q_{N,N-1} \\ q_{1,N} & \cdots & \cdots & 0 & -q_{N,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{N-1} \\ \pi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d \\ -d \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

为简便起见，我们将上述系统简称为 $\Delta \pi^t = \bar{d}$。

引理 2 矩阵 Δ 在 (4.2) 中的行列式为

$$det(\Delta) = q_{1,N} \prod_{i=1}^{N-1} q_{i+1,i} - q_{N,1} \prod_{i=1}^{N-1} q_{i,i+1} \tag{4.3}$$

证明 5 沿第一列进行拉普拉斯展开，并注意到在这样的展开中，我们首先得到一个上三角矩阵，后面接着一个下三角矩阵，因此

$$det(\Delta) = -q_{1,2} \prod_{i=2}^{N-1} q_{i,i+1} q_{N,1} + (-1)^{N+1} q_{N,1} \prod_{i=1}^{N-1} q_{i+1,i} (-1)^{N-1}.$$

化简后得到该结果。

注 1 由于非平衡假设， $det(\Delta) \neq 0$；由于 $det(\Delta) = 0$ 意味着 $\frac{q_{N\ 1}}{q_1}$,, $_N = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{q_{i+1}}{,q_{i\ i+1}}$,，即环的 *Kolmogorov* 可逆性判据 C_1 *(参见 [7])*。

接下来，我们考虑系统 (4.1) 以及分布条件 ($\sum \pi_i = 1$),

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ q_{1,2} & -q_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{2,3} & -q_{3,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{N-1,N} & -q_{N,N-1} \\ q_{1,N} & \cdots & \cdots & 0 & -q_{N,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{N-1} \\ \pi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ \vdots \\ d \\ -d \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

上述系统的$(N+1) \times (N+1)$ 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ q_{1,2} & -q_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & d \\ 0 & q_{2,3} & -q_{3,2} & \cdots & 0 & d \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{N-1,N} & -q_{N,N-1} & d \\ q_{1,N} & \cdots & \cdots & 0 & -q_{N,1} & -d \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

注 2 注意到，上述矩阵的秩至少为 N，因为子式 $\Delta_{1,\ N+1}$ 正好是 (4.2) 中的矩阵 Δ。

定理 3 给定一个具有有限状态空间S、生成矩阵 Q 和1-非平衡不变分布 π 的连续时间马尔可夫链，即

$$\Pi Q - (\Pi Q)^t = d(\Lambda - \Lambda^t) \tag{4.6}$$

那么， π 的坐标为

$$\pi_1 = \Big(1 + d\sum_{n=2}^{N}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{q_{i+1,i}}\prod_{j=i+1}^{n-1}\frac{q_{j,j+1}}{q_{j+1,j}}\Big)\Big(1 + \sum_{n=2}^{N}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{q_{i,i+1}}{q_{i+1,i}}\Big)^{-1},$$

对于 $2 \leq n \leq N$

$$\pi_n = \pi_1 \prod_{i=1}^{n-1}\frac{q_{i,i+1}}{q_{i+1,i}} - d\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{q_{i+1,i}}\prod_{j=i+1}^{n-1}\frac{q_{j,j+1}}{q_{j+1,j}} \tag{4.7}$$

且使 π 保持不变的唯一值 d，其形式为

$$d = \frac{(-1)^{N+1}\Delta_{1,N+1}}{\sum_{i=2}^{N}(-1)^{N+1+i}\Delta_{i,N+1} - \Delta_{N+1,N+1}}, \tag{4.8}$$

其中$\Delta_{j,\ k}$ 是(4.5)中增广矩阵的子式。

证明 6 由于该分布是 *1*-非平衡的，因此满足(4.2)，即

$$\begin{aligned} \pi_n q_{n,n+1} - \pi_{n+1} q_{n+1,n} &= d, \quad for\ n = 1, \ldots, N-1 \\ \pi_1 q_{1,N} - \pi_N q_{N,1} &= -d \end{aligned} \tag{4.9}$$

消去上面第一个方程后，可得

$$\pi_{n+1} = \pi_n \frac{q_{n,n+1}}{q_{n+1,n}} - \frac{d}{q_{n+1,n}}$$

递推可得，

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= \pi_n \frac{q_{n,n+1}}{q_{n+1,n}} - \frac{d}{q_{n+1,n}} = \left(\pi_{n-1}\frac{q_{n-1,n}}{q_{n,n-1}} - \frac{d}{q_{n,n-1}}\right)\frac{q_{n,n+1}}{q_{n+1,n}} - \frac{d}{q_{n+1,n}} \\ &= \cdots = \pi_1 \prod_{i=1}^{n-1}\frac{q_{i,i+1}}{q_{i+1,i}} - d\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{q_{i+1,i}}\prod_{j=i+1}^{n-1}\frac{q_{j,j+1}}{q_{j+1,j}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

利用分布条件

$$1 = \pi_1\Big(1 + \sum_{n=2}^{N}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{q_{i,i+1}}{q_{i+1,i}}\Big) - d\sum_{n=2}^{N}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{q_{i+1,i}}\prod_{j=i+1}^{n-1}\frac{q_{j,j+1}}{q_{j+1,j}},$$

消去上面的方程后，可得 π_1的表达式。最后，为了确定使 π 成为不变分布的 d 的唯一取值，我们按如下步骤进行。

为了使向量 $(1, d, \ldots, d, -d)^t$ 属于增广矩阵 (4.5)的秩，必须使其行列式等于零。因此沿着 $N+1$ 列展开，得到

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{N+2}\Delta_{1,N+1} + d\sum_{i=2}^{N}(-1)^{N+1+i}\Delta_{i,N+1} - d(-1)^{N+1+N+1}\Delta_{N+1,N+1} \\ &= (-1)^{N+2}\Delta_{1,N+1} + d\Big(\sum_{i=2}^{N}(-1)^{N+1+i}\Delta_{i,N+1} - \Delta_{N+1,N+1}\Big) \end{aligned} \tag{4.11}$$

即，$(-1)^{N+1}\Delta_{1,N+1} = d\Big(\sum_{i=2}^{N}(-1)^{N+1+i}\Delta_{i,N+1} - \Delta_{N+1,N+1}\Big)$。根据注释(2)，$\Delta_{1,N+1} \neq 0$，且根据假设 $d \neq 0$，那么$\Big(\sum_{i=2}^{N}(-1)^{N+1+i}\Delta_{i,N+1} - \Delta_{N+1,N+1}\Big) \neq 0$；因此，消去 d 后即可得到结果。

我们以一个例子结束。

例1 让我们考虑四状态马尔可夫链，其无穷小生成元为

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}, \qquad q_{ii} = -\sum_{j:j\neq i} q_{ij}.$$

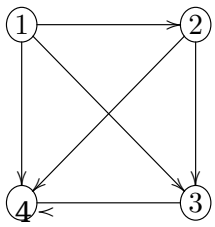

图1：相互作用图。

其关联矩阵具有如下形式

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

根据(2.6)， $Ker(\Gamma)$ 的一组基是环的集合 $\{C_{(1,2,3)}, C_{(1,2,4)}, C_{(2,3,4)}\}$，其中

$$C_{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{(1,2,4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{(2,3,4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

并且，根据上文的讨论， $\mathcal{M}$的一组基是圈矩阵的集合

$$M_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{1,2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{2,3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果该链具有1非平衡分布，则它满足(4.6)，其中$\Lambda - \Lambda^t =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

注意，$\Lambda - \Lambda^t = M_{1,\ 2,\ 4} + M_{2,\ 3,\ 4}$。

结论与展望

我们引入了圈矩阵的概念，用它们的线性组合来表示矩阵 D，该矩阵描述马尔可夫链中的非平衡。当 D 取 $d\,\phi(C_1)$的形式时， k非平衡不变分布已得到完整描述，其中 C_1 是一个哈密顿圈。

下一步是明确描述 k 大于1时的 k非平衡不变分布。此外，我们还计划将这一分析扩展到更一般且足够有趣的环，以及它们的线性组合，以描述相应的非平衡不变分布。

参考文献

[1] Accardi, L., Fagnola, F. 和 Quezada, R. 关于非平衡统计力学中的三个新原理及弱耦合极限型马尔可夫半群。无限维分析、量子概率及相关主题。第19卷。第2期。2016。

[2] Busacker, R. 和 Saaty, T. 有限图与网络：应用导论。McGraw-Hill。美国。1965。[3] Chartrand, G.、Lesniak, L. 和 Zhang, P.图与有向图。CRC出版社，泰勒-弗朗西斯集团有限责任公司。佛罗里达州博卡拉顿。美国。2016。[4] Cruz-de-la-Rosa, Marco 和 Guerrero-Poblete, Fernando。弱耦合极限型马尔可夫生成元相互作用图的分解。开放系统与信息动力学。第32卷，第2期。2025。世界科学出版社。[5] Cruz-de-la-Rosa, Marco 和 Guerrero-Poblete, Fernando。*Kolmogorov* 可逆性判据：线性代数视角。墨西哥数学会通报。2025。审稿中。[6] Cruz-de-la-Rosa, Marco、Guerrero-Poblete, Fernando 和 García, Julio。与欧拉回路相关的弱耦合极限型量子马尔可夫半群的均匀且完全非平衡不变态。开放系统与信息动力学。第28卷，第2期。2021。世界科学出版社。[7]Durrett, Richard。概率论：理论与例题。加利福尼亚州，Wadsworth。1991。[8]Durrett, R. 随机过程基础。纽约，施普林格出版社。1999。[9]Ingleton, A. 循环矩阵的秩。伦敦数学会杂志。第s1-31卷。第4期。1956。第445-460页。https://doi.org/10.1112/jlms/s1-31.4.445。[10] Norris, J.R. 马尔可夫链。剑桥大学出版社。英国。1997。[11]Stroock, W. Daniel。马尔可夫过程导论。柏林，施普林格出版社。2005。