arXiv:2603.03636v1 [math.AG] 4 Mar 2026

具有孤立奇点的簇的余维一上同调 Chow 群

DIOSEL L´OPEZ-CRUZ

Abstract. 我们计算了具有孤立奇点的簇的若干特定上同调 Chow 群例子。对于高维簇，若与正规交叉除子相关联的对偶复形可缩，我们便计算其余维一的上同调 Chow 群。对于三维簇，我们考虑对偶复形的一个较弱条件，即 $H^2(\Gamma(E)) = 0$。

1. 引言

对于拟射影簇 X 在域 k上，高阶 Chow 群由代数循环定义。在 [2], Bloch 定义了其循环复形 $\mathcal{Z}^r(X, \bullet)$, 并将高阶 Chow 群 $\mathrm{CH}^r(X, m)$ 定义为这些循环复形的 m^{th}-同调。高阶 Chow 群的一项基本性质是它们与动机上同调之间的联系：

$$\mathrm{CH}^r(X, m) \otimes \mathbb{Q} \cong H^{2r-m}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(r)),$$

若 X 光滑 [12, 定理 19.1]。在奇异情形下，高阶 Chow 群不构成上同调理论，而构成 Borel-Moore 同调。Hanamura 在 [9] 中，利用奇点消解（立方超分解）和循环复形，通过迭代构造给出了上同调版本。这两种理论在光滑情形下相同，但一般而言，Hanamura 对上同调高阶 Chow 群的构造与 Friedlander-Voevodsky 以 cdh 拓扑定义的动机上同调相同 [5]。设 X 是域 k 上一个允许奇点消解的奇异拟射影簇。按照 [8] 的定义，半单纯超分解 $a\colon\ X_\bullet \to X$ 是由光滑概形 X_p（$0 \le p \le n$）组成的半单纯概形，并带有某些 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，以及态射 $d_{p,\,i}\colon\ X_p \to X_{p-1}$（$0 \le i \le p$），这些态射称为面映射：

$$X_\bullet = \left\{ \cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_2 \;\substack{\xrightarrow{d_{2,0}}\\ \xrightarrow{-d}\\ \xrightarrow{d_{2,2}}}\; X_1 \;\substack{\xrightarrow{d_{1,0}}\\ \xrightarrow{d_{1,1}}}\; X_0 \right\} \xrightarrow{a} X$$

使得 $d_{p,\,i} \circ d_{p+1,\,i} = d_{p,\,i} \circ d_{p+1,\,i+1}$，其中有 $0 \le i \le p$。该半单纯超分解诱导出一个第四象限双复形

$$\mathcal{Z}^r(X_\bullet, \bullet) : \mathcal{Z}^r(X_0, \bullet) \xrightarrow{d^*} \mathcal{Z}^r(X_1, \bullet) \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} \mathcal{Z}^r(X_n, \bullet)$$

其中在第 p 个位置，我们有 X_p 的 Bloch 循环复形，而水平微分 $d^* := \sum (-1)^i d_i^*\colon\ \mathcal{Z}^r(X_p,\ -q) \to \mathcal{Z}^r(X_{p+1},\ -q)$ 是拉回的交错和。X 的上同调循环复形 $\mathcal{Z}^r(X_\bullet,\ \bullet)^*$ 是上述双复形的总复形，而上同调 ***Chow*** 群（或动机上同调）定义为该复形的 m^{th} 同调：$\mathrm{CHC}^r(X,\ m) = H_m\big(\mathcal{Z}^r(X_\bullet,\ \bullet)^*\big)$。存在一个相应的谱序列

$$E_1^{p,q}(r) := \mathrm{CH}^r(X_p, -q) \Rightarrow \mathrm{CHC}^r(X, -p-q)$$

它不依赖于半单纯超分解 $a\colon\ X_\bullet \to X$ [9] 的选择。设 X 是一个维数为 $d \ge 3$ 的正规簇（则奇异轨迹 X_{sing} 的余维为 ≥ 2）。a 的奇点消解

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14C25, 14F42, 14F43.*Key words and phrases.* 循环复形，高阶 Chow 群，立方超分解，上同调 Chow 群。

沿着 X_{sing} 进行奇点消解会导出一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} E = p^{-1}(X_{\text{sing}}) & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X_{\text{sing}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

其中， p 是双有理真映射， E 是正规交叉除子。X 的上同调循环复形为：

$$\mathcal{Z}^r(X,\bullet)^* = \text{Cone}\big\{\mathcal{Z}^r(\widetilde{X},\bullet) \oplus \mathcal{Z}^r(X_{\text{sing}},\bullet)^* \ \to \ \mathcal{Z}^r(E,\bullet)^*\big\}[-1].$$

于是，我们得到一个 Chow 上同调群的正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \text{CHC}^r(X,m) \longrightarrow \text{CH}^r(\widetilde{X},m) \oplus \text{CHC}^r(X_{\text{sing}},m) \longrightarrow \text{CHC}^r(E,m) \longrightarrow \cdots$$

回顾一下，当 X 光滑时，Bloch 高阶 Chow 群在负次数时消失。在余维 $r=1$下，我们有 [2]:

$$\text{CH}^1(X,m) = \begin{cases} \text{Pic}(X), & m=0 \\ \Gamma(X,\mathcal{O}_X^*), & m=1 \\ 0, & m>1. \end{cases}$$

这一事实意味着，对于任意簇 X，$\text{CHC}^1(X,\ m)\ = 0$ 适用于 $m>1$ (命题 3.1)。该群通常不会在负次数时消失。本文将重点研究余维一情形下的上同调 Chow 群。具体而言，我们将回顾维数为 $n\geq 3$ 的复射影簇 X（特别关注 $n=3$），其奇异轨迹的维数为 X_{sing} 零（孤立奇点）时的情形。本文证明的主要结果如下：

定理 *1.1*。（=定理 *3.8*）设 X 是复数域 $\mathbb{C}$ 上具有孤立奇点的三维不可约射影簇，并且与正规交叉除子 E 相关联的对偶复形满足 $H^2(\Gamma)\ =0$。则对于 $m\neq -2$、-1、*0*、*1*，有 $\mathit{CHC}^1(X,\ m)\ =0$，$\mathit{CHC}^1(X,\ 1)\ =\mathbb{C}^*$，并且存在一个正合序列

$$0 \longrightarrow \text{CHC}^1(X) \longrightarrow \text{CH}^1(\widetilde{X}) \longrightarrow \text{CHC}^1(E) \longrightarrow \text{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0$$

在高维情形下，我们有：

定理 1.2。（=命题3.9）设 E 是正规簇 X 上的一个维数为 d 的简单正规交叉除子，其相关联的对偶复形为 $\Gamma(E)$ 可缩。则：

$$\text{CHC}^1(E,m) = \begin{cases} \mathbb{C}^*, & \text{if } m=1 \\ H^{-m}(\text{CH}^1(E^{[\bullet]})), & \text{if } -d+2\leq m\leq 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 *1.3*。（=定理 *3.10*）设 X 是复数域上的维数为 d 的复射影簇，具有孤立的奇-˜点 X_{sing}。设 $p\colon X\to X$ 是一个奇点消解，使得相关联的对偶复形 $\Gamma(E)$ 是可缩的。则对于 $m=1$、*0*、-1、*.....*、$d-1$，$\mathit{CHC}^1(X,\ m)\ \neq 0$，$\mathit{CHC}^1(X,\ 1)\ =\mathbb{C}^*$，并且存在一个正合序列：

$$0 \longrightarrow \text{CHC}^1(X) \longrightarrow \text{CH}^1(\widetilde{X}) \longrightarrow \text{CHC}^1(E) \longrightarrow \text{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0$$

2. Preliminaries

Chow 上同调群（或动机上同调）由 [9]利用立方超分解[8], 和高阶循环复形 [2]引入。这是将高阶 Chow 群推广到奇异簇的一种上同调性推广。本节将简要概述动机上同调的构造。

2.1. **半单纯超分解的构造**。 在本文中，我们将计算具有孤立奇点的完备奇异簇的动机上同调群。基本思路是将这些上同调表示为光滑射影簇的上同调群。经典方法由 Deligne 在 Hodge III [4], 中提出，采用所谓的单纯分解。本文将使用半单纯分解。回顾一下，**半单纯概形** $X_\bullet$ 是一族概形$\{X_p\}_{p\in\mathbb{Z}_{\geq -1}}$，连同态射$d_{p,\ i}$: $X_p \to X_{p-1}$，对 $0 \leq i \leq p$，称为面映射

$$X_\bullet = \left\{ \cdots \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} X_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{2,0}} \\ \xrightarrow{-d} \\ \xrightarrow[d_{2,2}]{} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{1,0}} \\ \xrightarrow[d_{1,1}]{} \end{array} X_0 \xrightarrow{d_{0,0}} X_{-1} \right\}$$

使得 $d_{p,i}\circ d_{p+1,i} = d_{p,i}\circ d_{p+1,i+1}$ 且 $0 \leq i \leq p$。它是半单纯的，因为它只考虑面态射，此处退化映射无关紧要。通过对 $d_{j,i}$ 的任意序列进行复合，其中 $j = 0, 1, \ldots, p$，存在唯一的态射:

$$a_p \colon X_p \to X_{-1}.$$

构造单纯分解的 Deligne 方法的一种替代，是使用 Navarro-Aznar 的立方超分解 [8], ，其主要技术优势在于所得半单纯概形是有限的，并由原奇异簇的维数所界定。立方超分解通过对 Hironaka 奇点消解的递归过程得到（这构成该递推的基础） [11]。设X 为允许奇点消解的域 k 上的奇异拟射影簇，其奇异轨迹为 X_{sing}。则存在如下形式的图表:

$$\begin{array}{ccc} E = p^{-1}(X_{\text{sing}}) & \xrightarrow{j} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X_{\text{sing}} & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

~其中 X 光滑， p 是双有理真态射， E 是正规交叉除子。第一步$X^1_\bullet \to X$ 也称为**2-分解** [8] （ [12] 中的抽象爆破），而 X_{sing}、 E 的维数低于 X。此外，该图诱导出与 X相关的半单纯分解的第一步:

$$X_1 = E \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \xrightarrow[q]{} \end{array} X_0 = \widetilde{X} \sqcup X_{\text{sing}} \xrightarrow{(p,i)} X.$$

若 E 和 X_{sing} 光滑，则该图定义了 X的立方超分解。由于一般而言 E 和 X_{sing} 可能有奇点，但它们的维数都小于 X，因此我们必须遵循递归过程，将簇 E 和 X_{sing} （经过约化过程）替换为由更低维的光滑簇构成的图$X^2_\bullet \to X^1_\bullet \to X$ （应用奇点消解或相容形式的 2-分解）。这一递归

$$X^r_\bullet \to \cdots \to X^2_\bullet \to X^1_\bullet \to X,$$

其中 $X^{n+1}_\bullet$是 $X^n_\bullet$ 的 2-分解，它提供了一种构造 X的立方超分解的方法，详情见 [8]。立方超分解 $X_\bullet = \text{red}(X^1_\bullet, X^2_\bullet, \ldots\ldots, X^r_\bullet) \to X$在 [8, 定义 I.2. 的意义下，通过约化（red）定义。12] 自然地定义了一个半单纯概形 [6, 2。1.6], 其中第 p 个分量为

$$X_p = \coprod_{|\alpha|=p+1} X_\alpha,$$

并且面态射是由立方超分解诱导的那些

$$X_\bullet = \left\{ \cdots \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} X_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{-d_1} \\ \xrightarrow[d_2]{} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow[d_1]{} \end{array} X_0 \right\} \xrightarrow{a} X.$$

为此，我们有一个更合适的定义:

定义 2.1. [14, 9.1] 设 X 为一个复代数簇。 X 的一个**半单纯超分解**是一个半单纯概形 a: $X_\bullet \to X$ 在 X 上增广，使得:

– X_p 是光滑拟射影簇，– 态射 a_p: $X_p \to X$ （由复合给出）是真的，并且

– a: $X_\bullet \to X$ 具有上同调下降性质，即对 X上的任意阿贝尔层 $\mathcal{F}$，态射$\mathcal{F} \to Ra_*a^*\mathcal{F}$ 是拟同构。

该半单纯超分解的**长度** 定义为满足 $X_p \neq \emptyset$ 的最大 p 。

命题 2.2。 设 X 是 $\mathbb{C}$上的一个维数为 d且具有孤立奇点 X_{sing}的射影簇。存在一个半单纯超分解 $X_\bullet \to X$，使得维数 $X_p \leq d-p$。

˜证明。 构造的第一步是考虑一个奇点消解 p: $X \to X$，使得$p^{-1}(X_{\text{sing}}) = E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ 是一个具有光滑分支且任意阶交均光滑的正规交叉除子。这诱导出一个交换方块，其关联的半单纯概形为

$$E \rightrightarrows X_0 = \widetilde{X} \sqcup X_{\text{sing}} \longrightarrow X$$

并具有上同调下降的性质。在我们的情形中， X_{sing} 是光滑的，继续对 E进行消解。 E 的一个半单纯超分解可通过取

$$E^{[t]} := \coprod_{|I|=t+1} E_I = \coprod (E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t}),$$

面态射 $d_{t,\ j}$: $E^{[t]} \to E^{[t-1]}$ 由包含映射诱导

$$E_{i_0} \cap E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_t} \ \hookrightarrow \ E_{i_0} \cap E_{i_1} \cap \cdots \cap \widehat{E_{i_j}} \cap \cdots \cap E_{i_t}$$

配以 $0 \leq j \leq t$，由此得到一个在 E 上增广的半单纯概形 $E^{[\bullet]} \to E$:

$$\cdots \ \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\ E^{[2]} \rightrightarrows E^{[1]} \rightrightarrows E^{[0]} \longrightarrow E.$$

上同调 下降。这个过程定义了 X的一个完全半单纯超分解:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} E^{[1]} & \rightrightarrows & E^{[0]} & & \\ & & \downarrow & & \\ & & E & \rightrightarrows & \widetilde{X} \sqcup X_{\text{sing}} \longrightarrow X \end{array}$$

$$\cdots \ \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\ X_2 = E^{[1]} \rightrightarrows X_1 = E^{[0]} \rightrightarrows X_0 = \widetilde{X} \sqcup X_{\text{sing}} \longrightarrow X$$

在这种情况下，若 $t > d$，则 dim $X_t =$ dim $E^{[t-1]} = \emptyset$；一般而言，dim $X_t =$ dim $E^{[t-1]} \leq d - t$。 □

利用 [8, I.2.15；I.6。9]可以证明，每个复代数簇 X 都存在一个具有上同调下降性质的半单纯超分解，使得 dim $X_p \leq$ dim $X - p$，其长度不超过 X的维数。在 [3], Carlson 使用多面体版本，得到了与 Navarro-Aznar 的巴塞罗那学派所得结果非常相似的结果。立方超分解最直接的应用，是将最初定义在光滑簇范畴上的上同调函子扩展到任意簇的一般范畴 [7]。

2.2. **Hanamura 的上同调 Chow 群**。 作为 Guill´en- Navarro [7]，延拓判据的一项应用，我们有如下构造。设 X 是域 k 上一个允许奇点消解的拟射影簇，并考虑 a: $X_\bullet \to X$ 是它的半单纯超分解。对于半单纯概形中的每个 X_p，取其 Bloch 循环复形 $\mathcal{Z}^r(X_p, \bullet)$（如 [2], 中所述），并构造一个第四象限双复形:

$$\mathcal{Z}^r(X_\bullet)^* := \left[\mathcal{Z}^r(X_0, \bullet) \xrightarrow{d^*} \mathcal{Z}^r(X_1, \bullet) \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} \mathcal{Z}^r(X_p, \bullet) \xrightarrow{d^*} \cdots\right]$$

其垂直微分 ∂_B: $\mathcal{Z}^r(X_p, -q) \to \mathcal{Z}^r(X_p, -q-1)$ 来自 Bloch 循环复形；水平微分则由 $d^* = \sum(-1)^i d_i^*$: $\mathcal{Z}^r(X_p, -q) \to \mathcal{Z}^r(X_{p+1}, -q)$ 给出，即拉回的交错和。于是，这个双复形可表示为:

$$\mathcal{Z}_0^{p,q}(r) := \mathcal{Z}^r(X_p, -q); \quad p \geq 0, \quad q \leq 0.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{Z}^r(X_0) & \xrightarrow{d^*} & \mathcal{Z}^r(X_1) & \xrightarrow{d^*} & \mathcal{Z}^r(X_2) & \longrightarrow \\
\uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & \\
\mathcal{Z}^r(X_0,1) & \xrightarrow{d^*} & \mathcal{Z}^r(X_1,1) & \xrightarrow{d^*} & \mathcal{Z}^r(X_2,1) & \longrightarrow \\
\uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & \\
\mathcal{Z}^r(X_0,2) & \xrightarrow{d^*} & \mathcal{Z}^r(X_1,2) & \xrightarrow{d^*} & \mathcal{Z}^r(X_2,2) & \longrightarrow \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\end{array}$$

我们将 $\mathcal{Z}^r(X,\bullet)^*$ 记作它的全复形

$$\mathcal{Z}^r(X,\bullet)^* := \mathrm{Tot}\big(\mathcal{Z}^r(X_\bullet)^*\big) = \mathrm{Tot}\big(\mathcal{Z}^r(X_0,\bullet) \xrightarrow{d^*} \mathcal{Z}^r(X_1,\bullet) \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} \mathcal{Z}^r(X_p,\bullet) \xrightarrow{d^*} \cdots\big)$$

我们称其为**上同调循环复形**：X。

注 2.3。在 Hanamura 的构造中，人们选择适当的可容许子复形，使得拉回 d^* 是良定义的 [9]。关于上同调循环复形的主要结果是：在导出范畴中，它在同构意义下与超分解的选择无关 [9, 定理 I]。

定义 2.4。 [9, 定义 2.4] 对于拟射影簇 X，我们定义

$$\mathrm{CHC}^r(X,m) := H^{-m}(\mathcal{Z}^r(X_\bullet)^*)$$

X的**上同调 Chow 群**（或动机上同调）。

根据 Guill´en-Navarro 的延拓判据 [7, 定理 2.1，5], 许多适用于光滑簇的性质都可以通过递归地使用奇点消解推广到任意簇。高阶 Chow 群函子 $\mathrm{CH}^r(-,m)\colon \mathbf{Sm}(k) \to \mathbf{Ab}$ 可自然延拓为反变函子：

$$\mathrm{CHC}^r(-,m)\colon \mathbf{QuProj}(k) \to \mathbf{Ab}.$$

因此，如果 X 光滑，则 $\mathrm{CHC}^r(X,m) = \mathrm{CH}^r(X,m)$。此外，还存在一个第四象限谱序列

$$E_1^{p,q}(r) := H^q\big(\mathcal{Z}^r(X_p,\bullet)\big) = \mathrm{CH}^r(X_p,-q) \Rightarrow H^{p+q}\big(\mathrm{Tot}\big(\mathcal{Z}^r(X_\bullet,\bullet)\big)\big) = \mathrm{CHC}^r(X,-p-q)$$

其中 $X_p = \coprod_{|\alpha|=p+1} X_\alpha$。若 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的射影奇异簇，其奇异轨迹为 X_{sing}，考虑奇点消解 $p\colon \widetilde{X} \to X$ 使得 $E = p^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ 是一个正规交叉除子。采用上述记号以及命题 2.2中的记号，与半单纯超分解 $E^{[\bullet]} \to E$ [13, 命题 5。1]:

$$E_1^{a,b}(r) := \mathrm{CH}^r(E^{[a]},-b) \;\Rightarrow\; \mathrm{CHC}^r(E,-a-b); \qquad a \geq 0, \quad b \leq 0.$$

注 2.5。请注意记号上的细微差异：对于 Hanamura 的上同调 Chow 群，我们使用 $\mathrm{CHC}^*(-,m)$；对于 Bloch 高阶 Chow 群，我们使用 $\mathrm{CH}^*(-,m)$。这是 [9] 原本使用的记号。

3. Computations: codimension one

设 X 是一个维数为 d、奇异轨迹为 X_{sing} 的复拟射影代数簇。考虑如下奇点消解的交换方块：

$$\begin{array}{ccc}
E = p^{-1}(X_{\mathrm{sing}}) & \longrightarrow & \widetilde{X} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_{\mathrm{sing}} & \longrightarrow & X.
\end{array}$$

X 的上同调循环复形为

$$\mathcal{Z}^r(X,\bullet)^* = \mathrm{Cone}\big\{\mathcal{Z}^r(\widetilde{X},\bullet) \oplus \mathcal{Z}^r(X_{\mathrm{sing}},\bullet)^* \to \mathcal{Z}^r(E,\bullet)^*\big\}[-1] \tag{1}$$

如果 X_{sing} 和 E 是光滑的，我们有如下形式的长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{CH}^r(E,m+1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^r(X,m) \longrightarrow \mathrm{CH}^r(\widetilde{X},m) \oplus \mathrm{CH}^r(X_{\mathrm{sing}},m) \longrightarrow \cdots$$

与上述方形相关联。如果 E 和 X_{sing} 不光滑，则上述图表可以扩展为如下形式的立方超分解 $X_\bullet \to X$

$$\begin{array}{ccccc} E_\bullet & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{\text{sing}\bullet} & \longrightarrow & X_{\text{sing}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

其中（$E_\bullet \to X_{\text{sing}\bullet}$）是（$E \to X_{\text{sing}}$）的超分解。超分解 $E_\bullet$ 和 $X_{\text{sing}\bullet}$ 的长度都严格小于 $X_\bullet$，而复形（1）在动机上同调群上导出一个梅耶-维托里斯型正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{CHC}^r(X,m) \longrightarrow \mathrm{CH}^r(\widetilde{X},m) \oplus \mathrm{CHC}^r(X_{\text{sing}},m) \longrightarrow \mathrm{CHC}^r(E,m) \longrightarrow \cdots$$

这里，X 是光滑的，因此 $\mathrm{CHC}^r(X,\ m) = \mathrm{CH}^r(X,\ m)$，并且由于余维方面的原因，这些群在负次数时消失。若 X 是一个维数为 d 的正规簇，则 $\mathrm{codim}(X_{\text{sing}}) \geq 2$，并且

$$\mathrm{CHC}^r(X_{\text{sing}},m) = 0, \quad \text{if} \quad -m > d - \mathrm{codim}(X_{\text{sing}}) - r = \dim(X_{\text{sing}}) - r$$

根据命题 3.4。这一构造表明，可以根据超分解中出现的光滑分支，递归地计算 X 的动机上同调。具体而言，考虑一个光滑簇 X，以及奇异簇 X_{sing} 和 E的超分解。回顾一下，对于余维一的情形，当 X 光滑且不可约时，S. Bloch [2]证明了：

$$\mathrm{CH}^1(X,m) \cong H^{2-m}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(1)) = \begin{cases} \mathrm{Pic}(X), & m=0 \\ \Gamma(X,\mathcal{O}_X^*), & m=1 \\ 0, & m>1. \end{cases} \tag{2}$$

在奇异情形下，我们有如下结果：

命题 3.1. $\mathrm{CHC}^1(X,m) = 0$ 对于 $m \geq 2$。

证明。设 $X_\bullet \to X$ 为 X 的立方超分解。该结果通过对超分解的长度应用归纳法得到。对于 $r=1$，考虑一个 2-分解

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\text{sing}} & \longrightarrow & X. \end{array}$$

其具有光滑分支。于是，我们有上同调 Chow 群的正合序列：

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,2) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X},2) \oplus \mathrm{CH}^r(X_{\text{sing}},2) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E,2) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1) \longrightarrow \cdots$$

由（2），$\mathrm{CH}^1(Y,m) = 0$ 对于 $m \geq 2$ 如果 Y 是光滑的。 □

一般而言，$\mathrm{CHC}^1(X,m)$ 在负次数上可以非零。曲线的余维数 1 上同调 Chow 群是熟知的，可见于 [10, 命题 1.1，1.2]。对于正规曲面，亦可见于 [10, 命题 2.1，2.2]。这里我们将作一概述以说明若干性质。回想一下，正规曲面的奇点是孤立的。

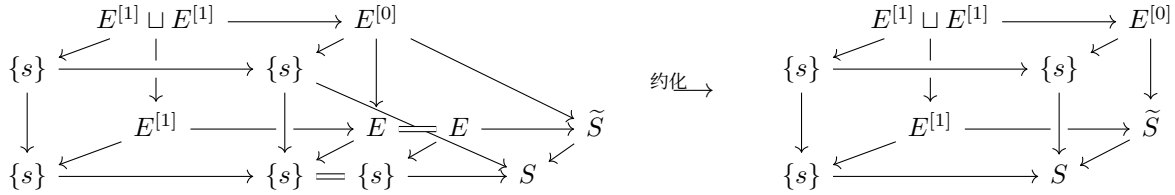
例 3.2。 设 S 是一个奇异轨迹 $S_{\text{sing}} = \{s\}$ 为孤立奇点的射影曲面。S 的 2-分解由下图给出：

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(s) = E & \longrightarrow & \widetilde{S} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \{s\} & \longrightarrow & S \end{array}$$

其中 $E=\bigcup_{i=1}^{N}E_i$ 是一个简单正规交叉除子，其分支既不可约又是射影的。与 S 相关联的上同调循环复形为

$$\mathcal{Z}^r(S,\bullet)^*=\mathrm{Cone}\big\{\mathcal{Z}^r(\widetilde{S},\bullet)\oplus\mathcal{Z}^r(\{s\},\bullet)\to\mathcal{Z}^r(E_\bullet)^*\big\}[-1].$$

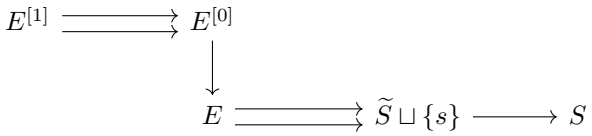
在这种情况下，该过程将对 S 的动机上同调的研究归结为研究正规交叉除子 E。设 $\{E_i\}_{i=1}^N$ 是 E的不可约分支，且 $E_{ij}=E_i\cap E_j$ 对 $i<j$。设 $E^{[0]}:=\coprod E_i$ 是 E的奇点消解，且 $E^{[1]}:=\coprod_{i<j}E_{ij}$。面态射如例2.2中所示。对于 S，其立方超分解为：



及其相应的半单纯超分解

$$S_2=E^{[1]}\sqcup E^{[1]}\rightrightarrows S_1=E^{[1]}\sqcup E^{[0]}\sqcup\{s\}\rightrightarrows S_0=\widetilde{S}\sqcup\{s\}\sqcup\{s\}\longrightarrow S.$$

尽管考虑该超分解的一种更有效的方法是省略某些项 s:



$$S_2=E^{[1]}\rightrightarrows S_1=E^{[0]}\rightrightarrows S_0=\widetilde{S}\sqcup\{s\}\longrightarrow S$$

可以证明，所得的上同调循环复形是拟同构的。与 E 相关联的上同调循环复形为

$$\mathcal{Z}^r(E,\bullet)^*=\mathrm{Cone}^\bullet\big\{\mathcal{Z}^r(E^{[0]},\bullet)\xrightarrow{d^*}\mathcal{Z}^r(E^{[1]},\bullet)\big\}[-1].$$

与 E 相关联的**对偶图** $\Gamma(E)$ 是一个图，其顶点对应于分量 E_i，边对应于 E_{ij}。所得图 Γ 是连通的，因为 E 是连通的。与 $\Gamma(E)$ 相关联的链复形是一个由两项组成的同调复形：

$$C_\bullet(\Gamma):C_1(\Gamma)\xrightarrow{\partial}C_0(\Gamma),$$

其中 $C_0(\Gamma)=\mathbb{Z}[E_i]$，$C_1(\Gamma)=\mathbb{Z}[E_{ij}]$，微分将 E_{ij} 映到 E_j-E_i。同调很容易描述：由于 Γ 是连通的，$H_0(\Gamma)=\mathbb{Z}$，且 $H_1(\Gamma)=\mathbb{Z}^{e-v+1}$（其中 $e=$为边数，$v=$为顶点数，取值于 Γ）。特别地，如果 Γ 是一棵树，那么 $H_1(\Gamma)=0$。上同调链复形 $C^\bullet(\Gamma)$ 是复形δ：$C^0(\Gamma)\to C^1(\Gamma)$，其中 $C^i(\Gamma)=\mathrm{Hom}(C_i(\Gamma)\ \mathbb{Z})$，且 δ 是 ∂的对偶。明确地说，$C^0(\Gamma)=\mathbb{Z}[e_i]$（分别地，$C^1(\Gamma)=\mathbb{Z}[E_{ij}]$）是由 $\{e_i\}$（分别由 $\{e_{ij}\}$）生成的自由 $\mathbb{Z}$-模，其中 $\{e_i\}$ 对偶于 $\{E_i\}$（$\{e_{ij}\}$ 对偶于$\{E_{ij}\}$），并且

$$\delta(e_i)=\sum_{i<j}e_{ij}-\sum_{l<i}e_{li}.$$

由于 $\mathrm{CH}^1(E^{[0]},1)=C^0(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^*$ 和 $\mathrm{CH}^1(E^{[1]},1)=C^1(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^*$，因此 $\delta\otimes1$: $C^0(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^*\to C^1(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^*$ 可识别为 d^*: $\mathrm{CH}^1(E^{[0]},1)\to\mathrm{CH}^1(E^{[1]},1)$。回想一下，CH 复数域 $^1(E,n)=H^{-n}(\mathcal{Z}^1(E,\bullet)^*)$，并且我们有如下形式的长正合列：

$$0\longrightarrow{}^{\text{CH复数域}}_{1(}E,1)\longrightarrow\mathrm{CH}^1(E^{[0]},1)\xrightarrow{d^*}\mathrm{CH}^1(E^{[1]},1)\longrightarrow\mathrm{CHC}^1(E)\longrightarrow\mathrm{CH}^1(E^{[0]})\longrightarrow0.$$

根据 [10, 命题 1。3], $\mathrm{CHC}^1(E,m)=0$ 对 $m\neq0$，1 和 $\mathrm{CHC}^1(E,1)=\mathbb{C}^*$，存在一个正合序列

$$0\longrightarrow H^1(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^*\longrightarrow\mathrm{CHC}^1(E)\longrightarrow\mathrm{CH}^1(E^{[0]})\longrightarrow0$$

根据定义， S在余维一处的上同调 Chow 群为：$\mathrm{CHC}^1(S,\ m)\ = H^{-m}(\mathcal{Z}^1(S,\ \bullet)^*)$。这给出一个长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(S,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{S},1)\oplus\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(S)$$

$$\longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{S}) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(S,-1) \longrightarrow 0$$

根据 [10, 命题 2。1], 若 S 是定义在 $\mathbb{C}$上的不可约正规射影曲面，则 $\mathrm{CHC}^1(S,\ m)\ = 0$对于 $n\neq -1,\ 0,\ 1$, $\mathrm{CHC}^1(S,\ 1)\ = \mathbb{C}^*$，且存在一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(S) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{S}) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(S,-1) \longrightarrow 0$$

3.1. 三维簇的动机上同调。设 X 是一个维数为 3 的复奇异射影簇（三维簇），其奇异轨迹为 X_{sing}。设 p: $\widetilde{X}\to X$ 是 X 的去奇点化，使得 $E=p^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ 是一个正规交叉除子。先假设 X_{sing} 是一条连通光滑曲线，且 E 是一个连通光滑曲面。那么我们有如下形式的半单纯超分解:

$$X_1 = E \rightrightarrows X_0 = \widetilde{X}\sqcup X_{\mathrm{sing}} \xrightarrow{a} X,$$

其上同调循环复形为

$$\mathcal{Z}^r(X_\bullet)^* = \mathrm{Cone}\big\{\mathcal{Z}^r(\widetilde{X},\bullet)\oplus\mathcal{Z}^r(X_{\mathrm{sing}},\bullet)\to\mathcal{Z}^r(E,\bullet)\big\}[-1].$$

在余维 $r=1$ 中，我们有一个长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X},\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}})\oplus\Gamma(X_{\mathrm{sing}},\mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{sing}}}) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}^*_E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X)$$

$$\longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X})\ \oplus\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}}) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,\ -1) \longrightarrow 0.$$

在（2）的识别下，上述序列给出如下结果:

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1) \longrightarrow \mathbb{C}^*\oplus\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X)$$

$$\longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X})\oplus\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}}) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0.$$

命题3.3。 在上述条件下，我们有$\mathrm{CHC}^1(X,m)\ =\ 0$，其中 $m\ \neq\ -1,0,1$，且$\mathrm{CHC}^1(X,1)\ =\mathbb{C}^*$。此外

$$\mathrm{CHC}^1(X) = \mathrm{Ker}\{\mathrm{CH}^1(\widetilde{X})\oplus\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}})\ \to\ \mathrm{CH}^1(E)\},$$

and

$$\mathrm{CHC}^1(X,-1) = \mathrm{Coker}\{\mathrm{CH}^1(\widetilde{X})\oplus\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}})\ \to\ \mathrm{CH}^1(E)\}.$$

证明。 这直接由上述正合序列得出。 □

现在假设 $X_{\mathrm{sing}}=\{x\}$ 是一个孤立奇点，并考虑 X 的一个 2-分解:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \{x\} & \longrightarrow & X. \end{array}$$

通过对 $E\to X_{\mathrm{sing}}$ 进行去奇点化，这个去奇点化过程可扩展为一个立方超分解；但在这种情况下，X_{sing} 是非奇异的，因此该过程通过对 E 进行 2-分解继续。根据定义，$\mathrm{CHC}^r(X,\ m)$ 是该复形的 m^{th}-同调

$$\mathcal{Z}^r(X_\bullet)^* := \mathrm{Cone}\{\mathcal{Z}^r(\widetilde{X},\bullet)\oplus\mathcal{Z}^r(\{x\},\bullet)\to\mathcal{Z}^r(E_\bullet)^*\}[-1].$$

由于 $\widetilde{X}$和 X_{sing}均为光滑，因此 $\mathrm{CHC}^1(\widetilde{X},m)\ =\mathrm{CH}^1(\widetilde{X},m)$ 且 $\mathrm{CHC}^1(X_{\mathrm{sing}},m)\ =\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}},m)$，并且在负次数时消失。根据命题 3.1，回忆可知 $\mathrm{CHC}^1(X,m)\ =0$ for $m>1$。此外，对于任意类型的奇点，我们都有以下结果。

命题 3.4。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$上的一个维数为 d的射影簇。则

$$\mathrm{CHC}^r(X,m)=0$$

当且仅当 $r>d+m$。

证明。设 $X_\bullet\to X$ 是长度为 r的立方超分解，我们对 r 使用递归法，由此归结为情形 $r=1$。在此情形下，令 X_{sing} 为 X的奇异轨迹，并考虑由奇点消解给出的下图：

$$\begin{array}{ccc} E=p^{-1}(X_{\mathrm{sing}}) & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X_{\mathrm{sing}} & \longrightarrow & X. \end{array}$$

根据假设，立方超分解的长度为一，因此 X_{sing} 和 E 是光滑的。相应的半单纯概形为：

$$X_\bullet=\left\{\ X_1=E \rightrightarrows X_0=\widetilde{X}\sqcup X_{\mathrm{sing}}\ \right\}\xrightarrow{a} X \tag{3}$$

这在上同调 Chow 群中诱导出一个长正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{CH}^r(X_1,m+1)\longrightarrow \mathrm{CHC}^r(X,m)\longrightarrow \mathrm{CH}^r(X_0,m)\longrightarrow \mathrm{CH}^r(X_1,m)\longrightarrow\cdots$$

由于 $\dim(X_1=E)<d$，由维数考虑可知 $\mathrm{CH}^r(X_1,\ m+1)=0$。类似地，$\sim X_0=X\sqcup X_{\mathrm{sing}}$在范围 $r>m+d$内对 $\mathrm{CHC}^r(X,\ m)$ 没有贡献，因此得证。若 E和 X_{sing}不光滑，则分别对二者取 2-解，并得出 $\mathrm{CHC}^r(E,\ m)=0$且 $\mathrm{CHC}^r(X_{\mathrm{sing}},\ m)=0$。由归纳法可得结论。□

~与 X 相关的第一个超分解为：$E \rightrightarrows X_0=\widetilde{X}\sqcup X_{\mathrm{sing}} \to X$. 综合以上所有结果可知，若 $m<-1$，则 $\mathrm{CHC}^1(E,\ m)=0$，并且对于 $m<-2$，$\mathrm{CHC}^1X,\ m)=0$，因此我们得到一个长正合列

(4)

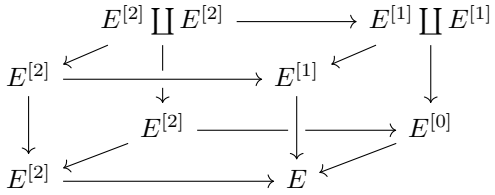
$$0\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1)\longrightarrow \mathrm{CH}^1(X_0,1)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,1)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X)\longrightarrow \mathrm{CH}^1(X_0)$$

$$\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1)\longrightarrow 0\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-1)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-2)$$

第一个观察是，$\mathrm{CHC}^1(E,\ -1)\cong \mathrm{CHC}^1(X,\ -2)$。为了计算 X 在余维 1 和次数 -2下的上同调 Chow 群，考虑如下情形。设 $E=\bigcup_{i=1}^N E_i$ 是一个简单正规交叉除子，且每个分支都是不可约的射影曲面。设 $E_{ij}=E_i\cap E_j$ 是 E的任意两个不可约分支的交集，则交集 E_{ij} 是曲线，而 $E_{ijl}=E_i\cap E_j\cap E_l$ 是点。令 $E^{[1]}:=\coprod_{i<j}E_{ij}$，以及 $E^{[2]}:=\coprod_{i<j<l}E_{ijl}$。$E$ 的奇点消解为：

$$\begin{array}{ccc} E^{(1)}\coprod E^{(1)} & \longrightarrow & E^{[0]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^{(1)} & \longrightarrow & E \end{array}$$

其中 $E^{(0)}:=E_1\cup\cdots\cup E_N=E$，而 $E^{[0]}:=\coprod E_i$ 是 $E^{(0)}$的典范去奇点化。这里，$E^{(1)}$ 是 E 的各分支两两交的并；E 是 E 的奇异轨迹，其逆像可识别为 $E^{(1)}\coprod E^{(1)}$。一般而言，$E^{(t)}:=\bigcup(E_{i_0}\cap\cdots\cap E_{i_t})$，于是 $E^{[t]}$ 是 $E^{(t)}$的典范奇点消解。在我们的情形中，与 E 相关联的立方超分解为：



其半单纯概形在 E 上增广:

$$E^{[2]} \coprod E^{[2]} \rightrightarrows \left(E^{[2]} \coprod E^{[2]}\right) \coprod \left(E^{[1]} \coprod E^{[1]}\right) \rightrightarrows E^{[2]} \coprod E^{[1]} \coprod E^{[0]} \longrightarrow E$$

这个半单纯超分解是冗余的，一个更高效的单纯方案是 :

$$E^{[2]} = \coprod (E_i \cap E_j \cap E_l) \rightrightarrows E^{[1]} = \coprod (E_i \cap E_j) \rightrightarrows E^{[0]} = \coprod E_i \longrightarrow E.$$

则与 E 相关联的上同调循环复形为:

$$\mathcal{Z}^r(E, \bullet)^* := \mathrm{Tot}^\bullet \left\{ \mathcal{Z}^r(E^{[0]}, \bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^r(E^{[1]}, \bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^r(E^{[2]}, \bullet) \right\}.$$

根据定义， E 的动机上同调为 $\mathrm{CHC}^r(E, m) = H^{-m}\left(\mathcal{Z}^r(E, \bullet)^*\right)$。为计算这些群，我们将采用如下一般方法 [1, 15, 16]: 考虑 X的奇点消解

$$\begin{array}{ccc} E = p^{-1}(X_{\mathrm{sing}}) & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X_{\mathrm{sing}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

其中 $E = \bigcup_{i=1}^N E_i$ 是一个简单正规交叉除子，我们还假设每个交 $E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t}$都是不可约的 [15]。现在我们将把一个单纯复形与 E 相关联，该单纯复形描述 E 的不同分支如何相交。

定义 3.5。 [15, 设 1] $E = \bigcup_{i=1}^N E_i$ 为一个简单正规交叉除子。与 E 相关联的**对偶复形**$\Gamma(E)$按如下方式构造: 对于 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，每个不可约分支所对应的（$l+1$）重交 $E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_l}$都有一个 l维胞腔。

0-单形对应于 E的不可约分支 E_i 。1-单形（边）对应于交 $E_{ij} = E_i \cap E_j$。若 X 是曲面，则 $\Gamma(E)$ 是与消解 $\sim p$: $X \to X$相关联的对偶图。从这个意义上说，对偶复形的概念推广了对偶图的概念。一般而言，$\Gamma(E)$ 是一个 CW复形；当且仅当所有交 $E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t}$ 均不可约$\sim$[15, 时，它才是一个单纯复形。对于另一个消解 p': $X' \to X$，我们有不同的对偶复形 $\Gamma(E)$ 和 $\Gamma(E')$。但是根据 [15, 定理 1], ，所得复形 $\Gamma(E)$ 和 $\Gamma(E')$ 具有相同的同伦类型。若 E是一个简单正规交叉除子，且其中每个 $E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t}$ 都不可约，则称$\Gamma(E)$具有不可约交。于是得到以下技术引理:

引理 3.6。 设 E 是具有不可约交的简单正规交叉除子，则复形 $\mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]}, 1)$ 与对偶复形 $\Gamma(E)$上的链复形 $C^\bullet(\Gamma) \otimes \mathbb{C}^*$ 重合。

证明。 记 $E^\bullet{}_{,1}{}^{-1}(1) := \mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]}, 1)$ 为由余维 1 且次数为 1 的高阶 Chow 群给出的复形。回忆一下，若 Y 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇，则 $\mathrm{CH}^1(Y, 1) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*) \cong (\mathbb{C}^*)^{\pi_0(Y)}$。设 E 为一个正规交叉除子，其关联的对偶复形为 $\Gamma(E)$，其中 $E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t} \neq \emptyset$，且 $E^{[t]} = \coprod_{i_0 < \cdots < i_t} E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t}$。那么，层 $\mathcal{O}^*_{E^{[t]}}$ 可分解为如下形式

$$\mathcal{O}^*_{E^{[t]}} = \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_t} \mathcal{O}^*_{E_{i_0} \cap \cdots \cap E_{i_t}}.$$

Thus

$$E_1^{t,-1}(1) = \mathrm{CH}^1(E^{[t]}, 1) = \Gamma(E^{[t]}, \mathcal{O}^*_{E^{[t]}}) = \bigoplus_{\{i_0, \ldots, i_t\} \in \Gamma} \mathbb{C}^* \cong C^t(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*,$$

其中 $C^t(\Gamma) = \mathbb{Z}^{\#\{i_1, \ldots, i_t:\ E_{i_1, \ldots, i_t}\}}$。与 E 相关联的复形 $E^\bullet{}_{,1}{}^{-1}(1)$ 为

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E^{[0]}, 1) \xrightarrow{d^*} \mathrm{CH}^1(E^{[1]}, 1) \xrightarrow{d^*} \cdots \xrightarrow{d^*} \mathrm{CH}^1(E^{[d-2]}, 1) \xrightarrow{d^*} \mathrm{CH}^1(E^{[d-1]}, 1) \longrightarrow 0$$

其中， d^* 是面映射的拉回的交错和。因此，它等价于链复形

$$0 \longrightarrow C^0(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\delta \otimes 1} C^1(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\delta \otimes 1} \cdots \xrightarrow{\delta \otimes 1} C^{d-2}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\delta \otimes 1} C^{d-1}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$$

与对偶复形 $\Gamma(E)$ 相关。 □

回到三维簇的情形，我们有以下结果。

命题 3.7。设 E 是一个定义在维数为 3 的簇 X 上的连通简单正规交叉除子，且其交不可约，关联的对偶复形为 $\Gamma(E)$，满足 $H^2(\Gamma)=0$。则对于 $m\neq -1$，有 $\mathrm{CHC}^1(E,m)=0$，0，1，$\mathrm{CHC}^1(E,1)=\mathbb{C}^*$，并且存在一个正合序列：

$$0\longrightarrow H^1(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^*\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E)\longrightarrow E_2^{0,0}(1)\longrightarrow 0.$$

证明。考虑半单纯概形 $e\colon\ E^{[\bullet]}\to E$ 在 E 上增广，则有第四象限谱序列：

$$E_1^{t,m}(1):=\mathrm{CH}^1(E^{[t]},-m)\implies \mathrm{CHC}^1(E,-t-m).$$

该谱序列的 E_1 页可表示为

$$E_1^{0,0}(1)\xrightarrow{d_1^{0,0}} E_1^{1,0}(1)\longrightarrow 0\longrightarrow 0$$

$$E_1^{0,-1}(1)\xrightarrow{d_1^{0,-1}} E_1^{1,-1}(1)\xrightarrow{d_1^{1,-1}} E_1^{2,-1}(1)\longrightarrow 0$$

这里 $E^{2,0}_1(1)=\mathrm{CH}^1(E^{[2]})=0$，这是由余维原因所致，因为 $\dim E^{[2]}=0$ 且 $E^{[t]}=\emptyset$ 对于 $t>2$。微分由面映射的拉回的交错和给出。更明确地说

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{CH}^1(E^{[0]}) & \xrightarrow{d_1^{0,0}} & \mathrm{CH}^1(E^{[1]}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0\\
& & \searrow^{d_2^{0,0}} & & & & \\
\mathrm{CH}^1(E^{[0]},1) & \xrightarrow[d_1^{0,-1}]{} & \mathrm{CH}^1(E^{[1]},1) & \xrightarrow[d_1^{1,-1}]{} & \mathrm{CH}^1(E^{[2]},1) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

根据引理 3.6，三项复形 $E^{\bullet,-1}_1(1)$ 等价于计算 $\Gamma(E)$ 的上同调的上链复形。于是，E_2-页的底部是对偶复形的上同调，即 $E_2^{t,-1}(1)\cong H^t(\Gamma(E),\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^*$。在 E_2-页上存在一个可能非零的微分，即 $d_2^{0,0}\colon \mathrm{Ker}(d_1^{0,0})\to\mathrm{Coker}(d_1^{1,-1})$。但 $H^2(\Gamma)=0$，这意味着 $d_1^{1,-1}$ 是满射，因此 $d_2^{0,0}=0$，并且我们有 $E_2^{2,-1}=E_\infty^{2,-1}$。于是，该谱序列化为如下形式的短正合序列：

$$0\longrightarrow E_2^{2,-1}(1)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-1)\longrightarrow E_2^{1,0}(1)\longrightarrow 0$$

但是 $E_2^{2,-1}(1)=\mathrm{Coker}(d_1^{1,-1})=0$，因此 $\mathrm{CHC}^1(E,-1)\cong E_2^{1,0}(1)=\mathrm{Coker}\big(\mathrm{CH}^1(E^{[0]})\to\mathrm{CH}^1(E^{[1]})\big)$。在零次情形下，我们有以下正合序列：

$$0\longrightarrow E_2^{1,-1}(1)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E)\longrightarrow E_2^{0,0}(1)\longrightarrow 0$$

这些是唯一非零的项。证明至此完成。 □

X 的完全半单纯超分解为

$$\begin{array}{ccccc}
E^{[2]} & \rightrightarrows & E^{[1]} & \rightrightarrows & E^{[0]}\\
& & & & \downarrow\\
& & & & E\ \rightrightarrows\ X_0=\widetilde{X}\sqcup X_{\mathrm{sing}}\longrightarrow X
\end{array}$$

$$X_3=E^{[2]}\ \substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\ X_2=E^{[1]}\ \substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\ X_1=E^{[0]}\ \substack{\rightarrow\\ \rightarrow}\ X_0=\widetilde{X}\sqcup X_{\mathrm{sing}}\longrightarrow X$$

定理 3.8. 设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的三维不可约射影簇，且具有孤立奇点。假设，对于与简单正规交叉除子 E 相关联的对偶复形 $\Gamma(E)$，有 $H^2(\Gamma(E))=0$。那么，对于 $m\neq -2,-1$，0、1，有 $CHC^1(X,1)=\mathbb{C}^*$，且 $CHC^1(X,m)=0$，并且存在一个正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X)\longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X})\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E)\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1)\longrightarrow 0$$

证明。 根据命题3.7 及先前的结果，长正合列（4）可化为以下正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1) \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X})$$

$$\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-2) \longrightarrow 0$$

由于光滑簇的高阶 Chow 群在负次数时消失，且 $\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}}) = 0$，因此推论立即成立。□

此类簇的例子可见于 [16, 定理 2。2]。

3.2. 高维簇。设 X 是一个维数为 d、具有孤立奇点 X_{sing} 的复射影代数簇。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}},1) = \Gamma(X_{\mathrm{sing}}, \mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{sing}}}) = (\mathbb{C}^*)^{\oplus\ \#(X_{\mathrm{sing}})}.$$

设 $p\colon \widetilde{X} \to X$ 是 X 的一个奇点消解，使得 $E = p^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ 光滑。那么， X 的半单纯超分解由下图给出：

$$X_1 = E \rightrightarrows X_0 = \widetilde{X} \sqcup X_{\mathrm{sing}} \longrightarrow X.$$

因此，谱序列 $E^{p,\ q}_1(1) := \mathrm{CH}^1(X_p,\ -q) \Rightarrow \mathrm{CHC}^1(X,\ -p-q)$ 定义了一个复形

$$E_1^{\bullet,q}(1)\ :\ 0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X_0,-q) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X_1,-q)$$

当 $q=-1$，0 时。于是我们得到一个长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X},\mathcal{O}^*_{\widetilde{X}}) \oplus \Gamma(X_{\mathrm{sing}},\mathcal{O}^*_{X_{\mathrm{sing}}}) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}^*_E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X)$$

$$\longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0.$$

在一般情形下，若 E 是简单正规交叉除子（非光滑的），则上同调循环复形为

$$\mathcal{Z}^r(X,\bullet)^* := \mathrm{Cone}^\bullet\big[\mathcal{Z}^r(\widetilde{X},\bullet) \oplus \mathcal{Z}^r(X_{\mathrm{sing}},\bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}^r(E,\bullet)^*\big][-1].$$

回忆一下，对超分解应用归纳法可知，$\mathrm{CHC}^1(X,\ m) = 0$ 若 $m \geq 2$ 由命题3.1可知。特别地，我们有一个长正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X},1) \oplus \mathrm{CH}^1(X_{\mathrm{sing}},1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X)$$

$$\longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-d+2) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-d+1) \longrightarrow 0$$

因此，对于 $m<0$，我们有 $\mathrm{CHC}^1(E,m) \cong \mathrm{CHC}^1(X,m-1)$。一般而言，由命题 3.4 可知，若 $1>$，则 $\mathrm{CHC}^1(X,m) = 0$。接下来我们要考察群 $\mathrm{CHC}^1(E,m)$ 集中在哪些次数上。考虑与简单正规交叉除子 E 相关联的半单纯超分解 $E^{[\bullet]} \to E$。于是$E^{[t]} = \emptyset$ 当 $t>$ 时，$\dim\ X-1$；否则 $\dim\ E^{[t]} = \dim\ X-1-t$。相关联的谱序列为

$$E_1^{t,m}(1) := \mathrm{CH}^1(E^{[t]},-m) \Rightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-t-m)$$

其中 $E^{\bullet,\ m}_1(1)$ 是复数域上的 $\mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]},-m)$；具体而言

$$E_1^{\bullet,m}(1)\colon 0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E^{[0]},-m) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E^{[1]},-m) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(E^{[2]},-m) \longrightarrow \cdots$$

对于 $m = 0, -1$。谱序列的第 E_1 页为

$$\begin{array}{ccccccccccccc} E_1^{0,0} & \xrightarrow{d_1^{0,0}} & E_1^{1,0} & \xrightarrow{d_1^{1,0}} & E_1^{2,0} & \xrightarrow{d_1^{2,0}} & \cdots & \longrightarrow & E_1^{d-3,0} & \xrightarrow{d_1^{d-3,0}} & E_1^{d-2,0} & \longrightarrow 0 & \longrightarrow 0 \\ & \searrow^{d_2^{0,0}} & & & & & & & & & \searrow^{d_2^{d-3,0}} & & & \\ E_1^{0,-1} & \xrightarrow[d_1^{0,-1}]{} & E_1^{1,-1} & \xrightarrow[d_1^{1,-1}]{} & E_1^{2,-1} & \xrightarrow[d_1^{2,-1}]{} & \cdots & \longrightarrow & E_1^{d-3,-1} & \xrightarrow[d_1^{d-3,-1}]{} & E_1^{d-2,-1} & \xrightarrow[d_1^{d-2,-1}]{} & E_1^{d-1,-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中第二页上的微分为 $d^{t,02}: E^{t,02}(1) \to E^{t+2,2}{}^{-1}(1)$，其中 $t = 0, 1, \ldots\ldots, d-3$。

命题 3.9。设 E 是正规簇 X 上的一个具有不可约交的简单正规交叉除子，其维数为 d，对应的对偶复形 $\Gamma(E)$ 可缩。则：

$$\mathrm{CHC}^1(E,m) = \begin{cases} \mathbb{C}^*, & \text{if } m = 1 \\ H^{-m}(\mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]})), & \text{if } -d+2 \le m \le 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。由引理 3.6，谱序列的 E_1页为：

$$\begin{array}{c|ccccccc} m & & & & & & & \\ 0 & \mathrm{CH}^1(E^{[0]}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(E^{[1]}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(E^{[d-2]}) & \longrightarrow 0 & \longrightarrow 0 \\ \hline -1 & C^0(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^* & \longrightarrow & C^1(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^* & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & C^{d-2}(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^* & \longrightarrow C^{d-1}(\Gamma)\otimes\mathbb{C}^* & \longrightarrow 0 \end{array} \quad t$$

而 $E^{t,02}(1)$ 正是复形 $E^{\bullet,01}(1) = \mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]})$ 在次数 t 上的上同调，即 $E^{t,02}(1) = H^t(\mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]}))$，其中 $t = 0, 1, \ldots\ldots, d-2$。由于 $\Gamma(E)$ 可缩，复形 $E^{\bullet,2}{}^{-1} \cong H^t(\Gamma(E)\ \mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^*$ 为：

$$E_2^{0,-1}(1) \longrightarrow E_2^{1,-1}(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1^{d-2,-1}(1) \longrightarrow E_1^{d-2,-1}(1) \longrightarrow 0$$

是正合的，并且 $E^{t,2}{}^{-1}(1) \neq 0$ 仅在 $t = 0$ 中成立。于是，正合序列：

$$E_2^{d-3,0}(1) \longrightarrow E_2^{d-1,-1}(1) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E,-d+2) \longrightarrow E_2^{d-2,0}(1) \longrightarrow 0$$

诱导出一个同构 $\mathrm{CHC}^1(E, -d+2) \cong E^{d-2,01}(1)$，一般而言 $\mathrm{CHC}^1(E, m) \cong H^{-m}(\mathrm{CH}^1(E^{[\bullet]}))$。最后，$\mathrm{CHC}^1(E, 1) \cong E^{0,2}{}^{-1}(1) = \mathbb{C}^*$。□

本命题中考虑的条件不同于命题 3.7 中使用的条件。那里，假设稍弱，因为它只要求 $H^2(\Gamma) = 0$ 是可缩的。尽管在这里，只要求同调为零也足够，但在某些情况下，这等价于要求复形 $\Gamma(E)$ 是可缩的 [16,定理 3。1]。最后，我们有以下结果：

定理 3.10. 设 X 为维数 d的复射影簇，具有孤立奇点 X_{sing}。设p: $\widetilde{X} \to X$ 为奇点消解，使得 $E = p^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ 为具有不可约交的简单正规交叉除子，且相伴的对偶复形 $\Gamma(E)$ 可缩。则$\mathrm{CHC}^1(X, m) \neq 0$ 对 $m = 1, 0, -1, \ldots\ldots, d-1$，$\mathrm{CHC}^1(X, 1) = \mathbb{C}^*$，并且存在正合序列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(E) \longrightarrow \mathrm{CHC}^1(X,-1) \longrightarrow 0.$$

4. Acknowledgements

´首先，我要感谢 Pedro Luis del Angel 将我引入这些课题。感谢 Alexey Beshenov 和 Omar Antol´ın-Camarena 在本研究的最后阶段与我交流并提出建议。我还要感谢一路上帮助过我的所有人：Jaime Hern´andez、Daniel Duarte 和 Eric Yen-Yo Chen。最后，我要感谢 SECIHTI 及其“Estancias Posdoctorales por M´exico”项目，让我有机会继续开展研究。我还要感谢“Instituto de Matem´aticas-UNAM”给予我的热情接待。

References

[1] D. Arapura、P. Bakhtary 和 J. W-lodarczyk, *The combinatorial part of the cohomology of a singular variety*, 2009。

[2] *Algebraic cycles and higher K-theory* **61** 1986 3, 267 304 852815 S. Bloch, , 《数学进展》 （）, 第–期。

[3] *Polyhedral resolutions of algebraic varieties* **292** 1985 MR J. A. Carlson, , 《美国数学会汇刊》 （）, 第2期, 595–612。MR808740

[4] **44** 1974 5 77 0498552 P. Deligne, *Théorie de Hodge. III*, 《高

[5] *Bivariant cycle cohomology* 等科学研究所数学出版物》 （）, –。MR E. M. Friedlander 和 V. Voevodsky, , 《循环、转移与动机同调理论》, 2000年, 第138–187页。MR1764201[6] F. Guill´en, *Une relation entre la filtration par le poids de Deligne et la filtration de Zeeman*, 《Compositio Mathematica》**61** （1987）, 第2期, 201–227。MR882975[7] F. Guill´en 和 V. Navarro-Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, 《高等科学研究所数学出版物》 **95** 2002 1 91 1953190 （）, –。MR F. Guillen、V. Navarro-Aznar、P. Pascual Gainza 和 F. Puerta,

[8] ´ *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*, 《数学讲义》, 第1335卷, 施普林格出版社, 柏林, 1988年。本文集收录了1982年在巴塞罗那举行的霍奇-德利涅理论研讨会论文。MR972983[9] M. Hanamura, *Homological and cohomological motives of algebraic varieties*, 《数学发明》**142** （2000）, 第2期, 319–349。MR1794065

[10] *Chow cohomology groups of algebraic surfaces* **21** 2014 3, 479 493 3272025 , , 《数学研究快报》 （）, 第–

[11] *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I II* 期。MR H. Hironaka, , , 《数学年刊》 （2） **79** 1964 109 203 199184 （）, –。MR C. Mazza、V. Voevodsky 和 C. Weibel,

[12] *Lecture notes on motivic cohomology*, 《克莱数学专著》, 第2卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗德岛州; 克莱数学研究所, 剑桥, 马萨诸塞州, 2006 2242284 。MR V. Navarro-Aznar, , ,

[13] *Sur la théorie de Hodge des variétés algébriques à singularités isolées* 1985 272 307 第–页。《微分系统与奇点》 （卢米尼, 1983 804059 ）。MR , , 《数学发明》

[14] *Sur la théorie de Hodge-Deligne* **90** 1987 1, 11 76 906579 （）, 第–期。MR D. A. Stepanov, , 《数学科学进展》

[15] *A remark on the dual complex of a resolution of singularities* **61** （2006）, 第1期（367）, 185–186。MR2239783[16] ,

A note on resolution of rational and hypersurface singularities **136** 2008 8, , 《美国数学会会刊》 （）, 2647 2654 2399025 第–期。MR

Instituto de Matemáticas-CU, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México 04510, México.*Email address*: diosel@im.unam.mx