面向机器学习的连续物理系统自适应感知

Felix Köster[1*] Atsushi Uchida[1†]

[1]埼玉大学信息与计算机科学系，日本埼玉县埼玉市樱区下大久保255号，338–8570，2026年3月5日

arXiv:2603.03650v1 [cs.LG] 4 Mar 2026

摘要

物理动力系统可被视为天然的信息处理器：其系统会保存、变换并分散输入信息。这一视角促使我们不仅从这类系统生成的数据中学习，还要学习如何以提取给定任务最有用信息的方式对其进行测量。我们提出一种从动力系统中进行自适应信息提取的通用计算框架，其中可训练注意力模块同时学习在何处探测系统状态，以及如何组合这些测量以优化预测性能。作为具体实例，我们以由偏微分方程支配的时空场作为底层动力学来实现这一思想，不过该框架同样适用于任何状态可被采样的系统。我们的结果表明，自适应空间感知显著提高了在典型混沌基准测试上的预测准确率。本工作将注意力增强储备池计算视为一种更广泛范式的特例：神经网络作为可训练的测量装置，用于从物理动力系统中提取信息。

1 引言

动力系统能够自然地处理信息：其轨迹会保留、转换并扩散有关外部输入的信息。这一思想通过信息处理能力（IPC）的概念得以形式化；该概念量化了动力系统与固定输出层耦合时，重构其过去输入函数的能力 [1]。将动力学视为信息储备池，催生了直接利用状态演化进行预测和控制的计算范式。

储备池计算（RC）是一个典型示例。它使用高维循环动力系统作为固定的非线性特征生成器，并且仅训练简单的读出层 [2, 3, 4, 5, 6]。RC 的计算效率可能很高，因为只需优化读出层；它也非常适合时间序列预测、模式识别和分类 [2, 4], ，同时也适用于硬件实现。RC 已在种类繁多的物理平台上得到演示，包括电子延迟系统 [3, 7], 、光子储备池 [3, 8], 、自旋电子器件 [5], 、软体机器人 [9], 和纳米结构材料 [6]。这些示例表明，许多复杂介质都可以用作信息处理系统。

然而，经典储备池计算有一个关键局限：其读出是静态的。储备池状态通过固定的线性映射投影为输出，这种做法可能过于受限，无法充分利用状态空间中的非线性信息，尤其是在多尺度或混沌状态下。已有若干方法试图缓解这种僵化，例如优化读出超参数 [10, 11] ，或注入控制信号以引导预测 [12]。然而，这类策略往往需要针对具体任务进行调优、依赖教师强制，或无法稳]健地迁移到不同的动力学状态。

与此同时，机器学习引入了自适应特征选择机制。注意力会根据其当前上下文 [13, 14]动态地重新加权表示。基于这一思想，注意力增强储备池计算（AERC）用一个小型神经网络取代静态线性读出，该网络在每个时间步 [15]计算状态相关权重。这使得单个经过训练的模型能够表示多个吸引子，并在无需重新训练的情况下在它们之间切换，这对自主多功能性至关重要。

在这项工作中，我们提出一种更广泛的视角：不再只调整读出权重，而是直接学习测量过程本身。我们提出一个用于从动力系统中进行可训练信息提取的框架，其中神经接口既学习在何处测量系统状态，也学习如何组合所得测量值以进行预测。我们提出自适应传感注意力增强储备池计算（ASAERC）这一概念，它与经典的传感器布置和实验设计相关；后者通过选取一小组传感器来重建或监测空间状态。例如，数据驱动的稀疏传感器布置方法会选择固定测量位置，以便在学习得到的低维基底中实现准确的状态重建 [16], ；信息论方法则在高斯过程模型下，通过最大化互信息来选择固定的传感器集合 [17]。与这些主要采用离线静态方案的方法不同，

*联系邮箱：felixk@mail.saitama-u.ac.jp
†联系邮箱：auchida@mail.saitama-u.ac.jp

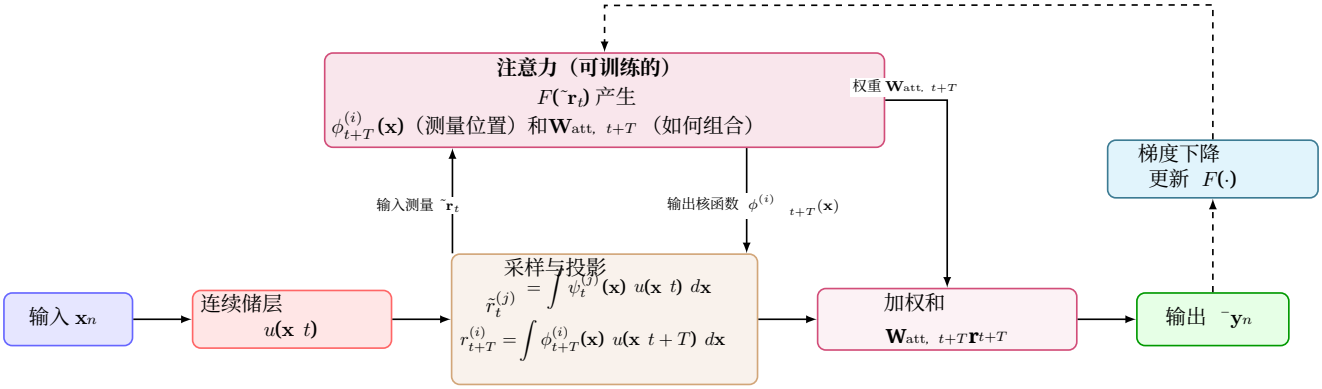


图 1：自适应感知注意力增强储层计算机（ASAERC）的流程图。输入驱动一个固定的连续储层。通过测量核 $\psi^{(j)}_t(\mathbf{x})$，在固定位置对储层进行测量，所得的 N_{fix} 状态 $\tilde{r}_t$ 被送入注意力模块。可训练注意力模块输出参数化核函数 $\phi^{(i)}_{t+T}(\mathbf{x})$，以指导采样，并输出注意力权重 $\mathbf{W}_{\text{att},\ t+T}$ 以组合采样特征。加权组合产生 $\bar{\mathbf{y}}_n$，梯度下降（虚线所示路径）则更新注意力模块。梯度不会通过 PDE储层传播。

ASAERC 学习一种状态条件化、时变的测量算子：感知核 $\{\phi^{(i)}_{t+T}\}$ 由当前的固定测量值 $\tilde{\mathbf{r}}_t$在线生成，以直接最小化预测损失。

我们的方法也与深度学习中的可学习采样模块相关，例如空间变换网络 [18]和可变形卷积 [19]，，它们自适应地重采样特征图，从而将计算集中于与任务相关的区域。关键区别在于，ASAERC将感知视为与外部连续动力系统的接口：我们学习在何处探测，以及如何组合对固定储备池场 $u(\mathbf{x},\ t)$的测量，同时明确避免通过储备池动力学进行反向传播。这将注意力增强储备池计算重新表述为一种更广泛范式的特例，在该范式中，神经网络充当连续物理系统的可训练测量装置。

我们在一组异构的混沌系统上展示了ASAERC的一步超前预测，这些系统涵盖连续时间流、离散映射以及一个时滞微分方程。在所有系统中，与经典储备池计算和固定传感器注意力基线相比，自适应感知提高了预测准确率，这支持了如下观点：学习在何处测量 可以与学习如何组合 测量同样重要。

2 结果

2.1 方案概述

图 1 总结了 ASAERC 流程。标准化的离散时间输入 $\mathbf{x}_n$ 驱动一个固定的连续储备池场 $u(\mathbf{x},\ t)$。在每个时间步，通过核函数 $\{\psi^{(j)}_t\}$ 采集固定测量值 $\tilde{\mathbf{r}}_t$，并将其输入可训练注意力模块。以 $\tilde{\mathbf{r}}_t$为条件，该模块输出如下内容：(i) 自适应测量核函数 $\{\phi^{(i)}_{t+T}\}$，用于指定稍后探测场的位置；(ii) 注意力权重 $\mathbf{W}_{\text{att},t+T}$，用于将由此产生的测量值组合成离散预测 $\bar{\mathbf{y}}_n$。只有注意力模块通过梯度下降进行优化；储备池动力学不参与求导（图 1 中的虚线箭头）。

作为 ASAERC 的一个具体实例，我们使用定义在矩形区域 $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ 上的二维扩散型场 $u(\mathbf{x},\ t)$，该场由输入信号 $f(I)$ 通过空间局域源驱动：模型由如下偏微分方程（PDE）描述

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(I), \tag{1}$$

采用齐次狄利克雷边界条件 $u = 0 \text{on } \partial\Omega$。该场在均匀网格上离散化，并使用稳定的显式格式向前进行时间积分（见方法部分）。

在每个步骤中，我们从场中获得两组标量观测。首先，在静态位置采集一组固定的 N_{fix} 测量值$\tilde{\mathbf{r}}_t \in \mathbb{R}^{N_{\text{fix}}}$（作为注意力模块的输入）。以 $\tilde{\mathbf{r}}_t$为条件，网络输出包括：(i) N 自适应测量位置和 (ii) 注意力权重，由此生成自适应状态 $\mathbf{r}_{t+T} \in \mathbb{R}^N$，再将其线性组合以得到预测 $\bar{\mathbf{y}}_t = \mathbf{W}_{\text{att},t+T}\mathbf{r}_{t+T}$。非网格位置处的场值通过双线性插值获得（见方法部分）。

我们在一个由八种典型非线性系统组成的异构数据集上，评估 ASAERC 的一步超前预测任务表现：五种连续时间系统（洛伦兹系统 [20]，罗思勒系统 [21]，范德波尔振子 [22]，杜芬振子 [23]，和双摆 [24]）、两种离散映射（逻辑映射 [25],埃农映射 [26]），以及一个时滞微分方程（麦基–格拉斯系统 [27]）。这将我们早期针对离散系统的 AERC 研究 [28]扩展到了范围更广、类型更多样的基准测试套件。连续时间系统通过数值方法进行积分，所有轨迹都重采样为相同长度，以供训练和评估。所有系统的采样参数汇总于方法部分。

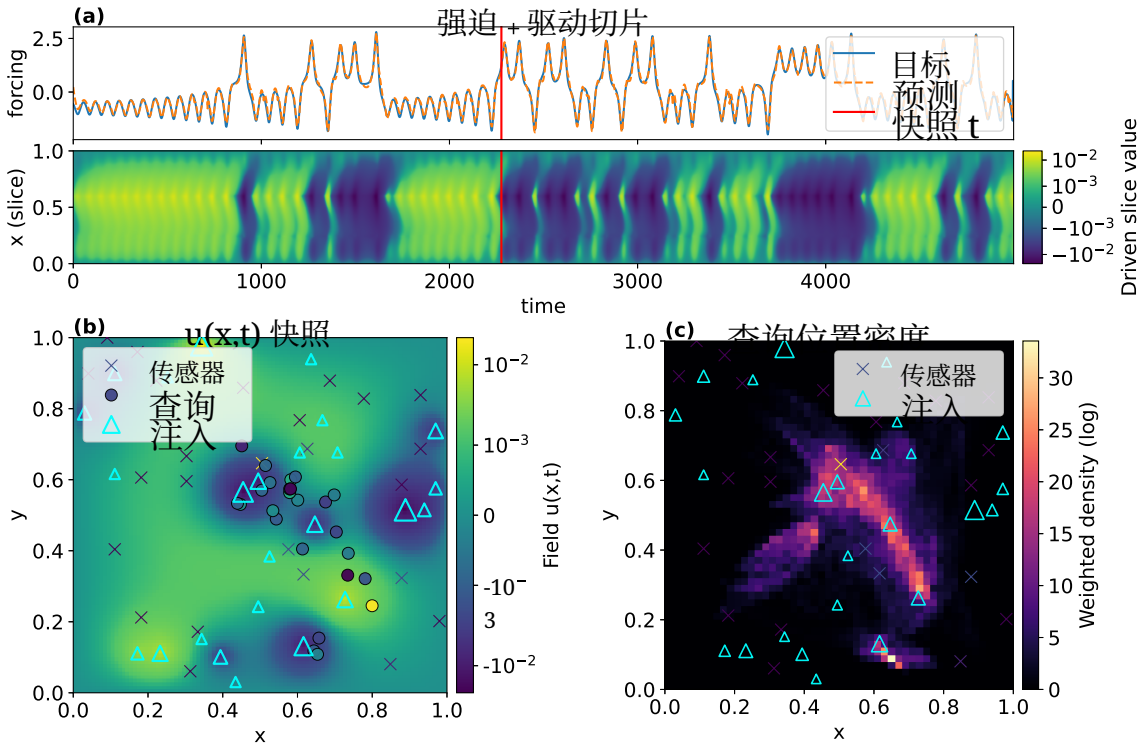


图2：**ASAERC行为示意图**。 (a) 在洛伦兹吸引子上，预测时间序列示例（橙色虚线）与真实值（蓝色实线）的比较。(b) PDE储备池场 $u(\mathbf{x}\ t^{\star})$的快照，其中包含固定注入点（浅蓝色三角形）、固定测量点（注意力输入，叉号）$\tilde{r}_t^{(j)} = \int_\Omega \psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\ u(\mathbf{x}\ t)\ d\mathbf{x}$, 以及叠加的动态测量位置（注意力输出） $r_{t+T}^{(j)} = \int_\Omega \phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})\ u(\mathbf{x}\ t+T)\ d\mathbf{x}$,。自适应传感器（蓝色圆圈）聚集在动态活跃区域周围，展示了网络将注意力集中于信息丰富的空间位置的能力。(c) 注意力输出位置的直方图，呈现出一种复杂图案，即洛伦兹吸引子在测量过程上的非线性投影。

2.2 ASAERC 的定性行为

我们首先通过一个具体示例，说明 ASAERC 如何执行自适应感测。如图 1 所示，归一化输入 $\mathbf{x}_n$ 驱动连续储备池场 $u(\mathbf{x}\ t)$，该场通过核函数 $\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})$在 N_{fix} 固定位置进行测量。可训练注意力模块 $F(\mathbf{r}_t)$接收 N_{fix} 测量状态 $\tilde{r}_t^{(j)}$ 。处理这些输入后，该模块选取 N 测量位置 $\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})$，我们将其称为查询；由此得到一组新的 N 测量状态 $r_{t+T}^{(j)}$，并通过状态相关权重 $\mathbf{W}_{\text{att},t+T}$组合这些样本。此处， T考虑了注意力模块处理信息以及通过 $\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})$测量设备执行测量所需的时间。注意力模块通过梯度下降算法进行训练，该算法不需要储备池的任何信息。

图 2 展示了由洛伦兹系统驱动的代表性模拟中的这一过程。储备池的设置见方法部分第 4.7 节。图 2(a) 展示了对一个洛伦兹坐标进行开环一步超前预测的一个短片段。预测轨迹 $\hat{x}(n)$（橙色虚线）紧密跟随真实值 $x(n)$（蓝色实线），表明感测到的储备池状态包含足够的信息，可实现准确的短期预测。下方面板绘制了在相同时间窗口内穿过二维储备池场 $u(\mathbf{x}\ t)$ 的一条对角一维切片，直接展示了洛伦兹强迫如何在 PDE 基底中产生具有结构的时空活动。

图 2(b) 展示了代表性时间点 $t^{\star}$ 的储备池状态。热图显示了空间域上的 $u(\mathbf{x}\ t^{\star})$。浅蓝色三角形标记固定注入位置，输入信号 $\mathbf{x}$ 通过这些位置写入场中（标记大小与注入强度成正比）。十字标记固定测量位置 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$，这些位置为注意力模块提供输入特征 $\tilde{\mathbf{r}}_t \in \mathbb{R}^{N_{\text{fix}}}$ （参见图 1）。叠加的蓝色圆圈表示注意力模块在T 时间步选择的自适应测量位置，此时 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$ 已经测量完毕，即定义了收集到 $\mathbf{r}_{t+T} \in \mathbb{R}^N$ 中数值的查询 $\{\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{N}$ 。颜色强度反映了

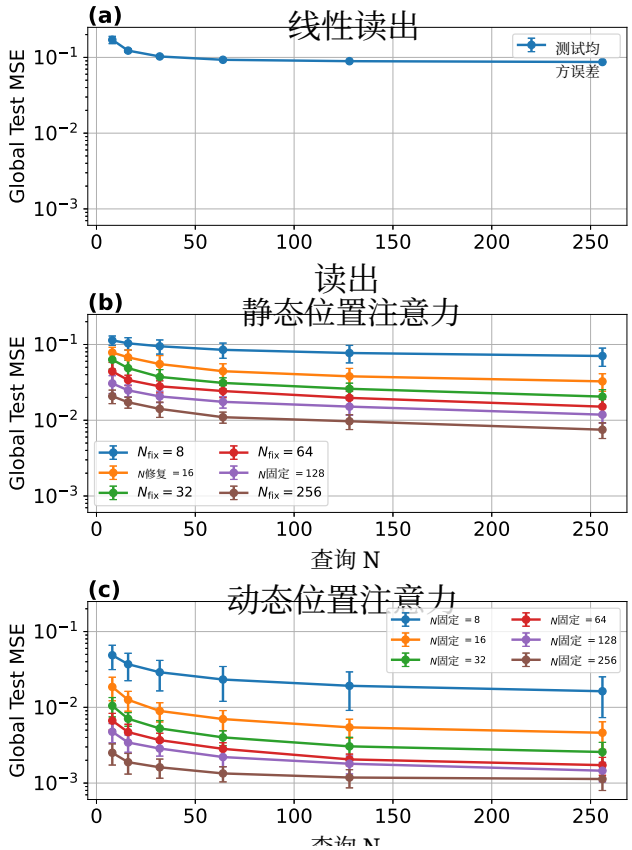


图 3：**测量点数量与预测误差的关系**。所有方法使用相同的 PDE储层。(a) 使用线性读出的经典储备池计算；(b) 使用固定测量位置的 AERC；(c) 使用自适应感知的 ASAERC。颜色表示在固定位置处的测量点数量。

每个自适应测量通过 $\mathbf{W}_{\text{att},t}$ 对最终预测的贡献程度。为便于说明，我们展示了一个包含 25 个固定传感器和 25 个自适应查询的小型配置，以便直观地呈现感知行为。

图 2(c) 通过绘制加权查询位置的直方图，汇总了整个洛伦兹轨迹上的自适应感知决策。ASAERC 并非均匀采样，而是反复选择定义域中具有结构特征的区域，由此展现出一种学习得到的测量策略，该策略同时受到储备池动力学和目标预测任务的影响。由于采用了齐次狄利克雷边界条件，查询往往聚集在较大的注入附近，并避开边界$u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。总的来说，这些结果直观地诠释了 ASAERC 作为可训练感知接口的工作方式：模型将输入写入连续系统，自适应地探测由此产生的场，并结合互补测量以生成准确的预测。

2.3 性能与测量点数量的关系

我们接下来量化预测性能如何依赖于测量点的数量。我们使用八种不同的混沌系统作为数据集。详细描述见方法部分第4.8节。图3报告了整个数据集上的均方误差随输出测量点数量 $\{\phi_t^{(i)}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{N}$ 的变化，比较了三种方法：（a）采用线性读出的经典储备池计算，（b）采用固定测量位置和自适应权重的AERC，以及（c）采用自适应感知和自适应权重的ASAERC。所有方法共享相同的PDE储层，因此差异完全来自测量与读出策略。

图 3(a) 中的线性读出基线使用固定的线性映射进行预测。在这种情况下，由于未使用注意力模块，输入测量 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$ 与输出测量$\{\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{N}$ 相同。误差仍然相对较大，并在 10^{-1} 左右趋于饱和，这符合预期，因为单个静态读出必须在多个吸引子之间权衡性能。

图 3(b) 中的 AERC 方法使用一个小型神经网络动态计算读出权重，但测量位置在空间中保持固定。只有权重随时间自适应。在 x- 轴上，我们改变输出查询的数量 $\{\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{N}$；不同颜色则对应不同数量的固定输入测量 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$。隐藏层大小固定为 128 个节点。对于足够多的固定输入，这种自适应加权已能带来显著改进，将误差降至 10^{-2} 以下。

图3(c)中的 ASAERC 方法使测量位置能够自适应。在此，注意力模块会在每个时间步输出权重和测量位置。为进行公平比较，所有超参数均与 AERC 配置保持一致。ASAERC 在 AERC 的基础上又将误差降低了一个数量级，这证实了优化系统的感测位置，除了优化感测值的组合方式之外，还能带来显著提升。当测量点为 256 个时，总体误差降至约 10^{-3}；即使只有 16 个输入，ASAERC 的表现也优于采用 256 个输入的 AERC 设置。

2.4 可训练参数数量与测量点数量的关系

为评估模型复杂度，我们比较了可训练参数数量随固定输入测量 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$数量的变化。图4总结了线性读出（点线）、AERC（虚线）和 ASAERC（实线）的参数数量。

线性读出会随测量点数量线性扩展，因为只有输出矩阵需要训练。由于需要通过神经网络将固定测量映射为注意力权重，AERC 所需的参数更多，其参数数量会随N_{fix}增长。ASAERC 增加了第二个输出头来生成测量位置，因此参数数量略多于 AERC。不过，这一差异本质上是一个常数偏移：它对应于预测核参数所需的额外线性层。

总体而言，AERC 和 ASAERC 的运行处于 10^4 至

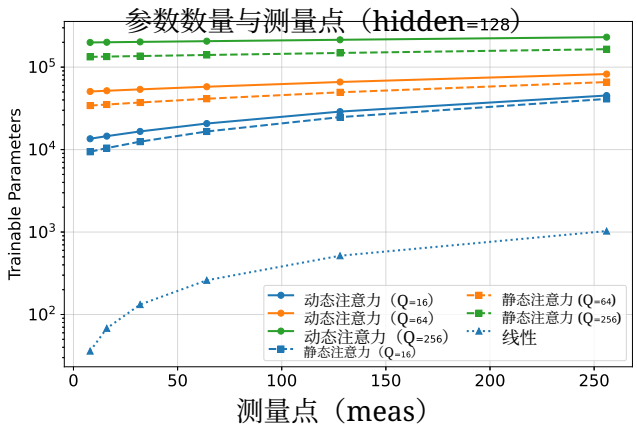


图4：**可训练参数数量与测量点数量的关系**。带三角形的点线表示线性读出，带方形的虚线表示 AERC，带圆点的实线表示 ASAERC。对于 AERC 和 ASAERC，我们分别展示三种情况：使用 16、64 和 256 个自适应查询。三种方法均使用相同的 PDE储层。ASAERC 的参数数量最多，但仅略多于 AERC。线性读出的参数数量要少得多。

10^5 参数范围内，因此在现代硬件上训练计算几乎不费吹灰之力。更重要的是，即使 AERC 和 ASAERC 的参数数量几乎相同，ASAERC 的预测误差仍显著低于 AERC（参见图 3）。这表明，ASAERC 的优势源于自适应测量点布置，而非仅仅增加模型容量。

2.5 储层读出的相关性分析

为了进一步探究 ASAERC 取得更佳预测性能的原因，我们考察读出节点之间的统计依赖。对于每一对测量点 $(i,\ j)$，我们计算皮尔逊相关系数

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(z_i, z_j)}{\sigma(z_i)\,\sigma(z_j)}, \tag{2}$$

其中，$\mathrm{Cov}(z_i,\ z_j)$ 表示两个时间序列之间的协方差，$\sigma(z_i)$ 表示 z_i 的标准差（按下文所述，先在时间维度上计算，再对各次试验取平均），其中 z_i 表示与索引 i 相关联的量。

图5总结了数据集中所有测量对的相关系数分布，并对其取平均。我们考虑三种情况：（左列）测量位置处的原始偏微分方程场值、（中列）学习得到的注意力权重，以及（右列）二者的乘积，即有效读出贡献。各行对应：（顶行）线性读出、（中间行）AERC，以及（底行）ASAERC。

在线性读出基线（顶行）中，原始采样值呈现出较强的成对相关性，并聚集在 ± 1 附近，表明固定测量位置造成了大量冗余。由于读出权重不随时间变化，它们随时间的皮尔逊相关在形式上未定义。为清晰起见，我们在图 5 中将相应的权重间相关性设为零。有效贡献（权重$\times$ 值）的相关性基本反映了原始值的相关性，此外还会根据对应读出权重的乘积发生符号翻转。在 AERC（中行）中，学到的权重降低了权重分布中的冗余，但由于测量位置仍固定，节点之间的相关性依然显著。在 ASAERC（底行）中，相关性大幅降低，尤其是在综合贡献中。令人意外的是，自适应权重显著降低了相关性，因为现在位置也可以学习。这表明，自适应定位能够选择冗余度较低的测量值，并提高特征多样性。随后，注意力机制分配互补权重，从而形成更加均衡且信息更丰富的表示。

从这些结果来看，相关性分析表明，ASAERC 的优势并非仅仅源于灵活的权重。其关键贡献在于自适应地重新分配测量位置，从而减少冗余，并提升感知表示的特征多样性。

3 结论

在本研究中，我们提出了自适应感知注意力增强储备池计算机（ASAERC），这是一种用于从连续动力系统中自适应提取信息的通用框架。ASAERC 将基于偏微分方程的储备池与可训练注意力机制相结合，同时学习测量位置，以感知底层时空场，并学习如何组合这些测量结果以进行预测。这种双重自适应能力将储备池计算从固定特征提取范式重新构建为可训练测量范式，从而有效地将神经网络转变为物理系统的动态传感器。

我们通过对八个基准系统进行系统评估，证明 ASAERC 的表现显著优于采用线性读出的经典储备池计算和注意力增强储备池计算（AERC）。与 AERC 相比，自适应感知使预测误差降低了一个数量级，与线性读出相比则降低了两个数量级，而参数数量仅略有增加。

相关性分析进一步表明，ASAERC 降低了读出节点之间的统计依赖，从而产生更多样且互补的特征表示。总体而言，这些结果凸显了自适应测量作为一种强大原理，能够从复杂动力系统中提取信息。虽然我们采用扩散型偏微分方程储层实现了 ASAERC，但该框架具有通用性，可应用于其他时空物理系统的机器学习。

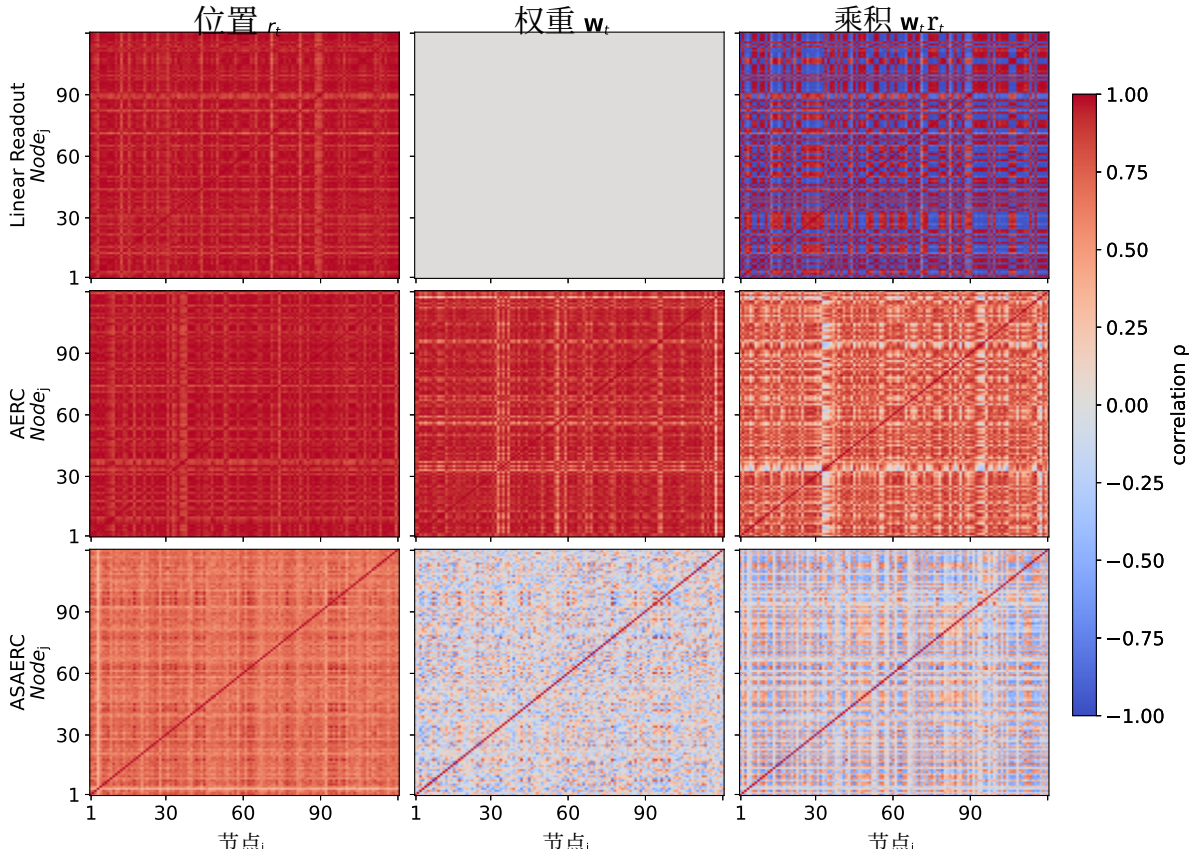


图5：**读出贡献的相关性分析**。 ρ_{ij} 读出节点 i 与 j 之间成对皮尔逊相关系数的分布，其中左列为原始偏微分方程值，中列为注意力权重，右列为二者的乘积。各行分别对应顶行为线性读出、中行为 AERC、底行为 ASAERC。ASAERC 的相关性显著低于线性读出和 AERC，表明其测量结果冗余性更低、互补性更强，这可能有助于提升泛化能力并降低预测误差。

4 方法

4.1 经典储备池计算

储备池计算（RC）是一种计算框架，它利用一个固定的高维动力系统（称为储备池），并结合可训练的读出层，执行时间序列预测、模式识别和分类等任务[2, 3, 4]。储备池有多种类型可供选择。最常见的方法由随机连接的非线性节点构成，这些节点将输入转换为丰富的动力学表示，而只有线性输出权重需要优化。

以回声状态网络[2]为例。时间步 t的储备池状态记为$\mathbf{r}_t$，其演化遵循

$$\mathbf{r}_t = \tanh(\mathbf{W}_{\text{res}}\mathbf{r}_{t-1} + \mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}), \tag{3}$$

其中，$\mathbf{r}_t \in \mathbb{R}^N$ 是包含 N个节点的储层状态向量，$\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^M$ 是包含 M 个输入维度的输入向量，$\mathbf{W}_{\text{res}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是固定的内部储备池权重矩阵，$\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ 是输入权重矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ 是偏置向量。非线性函数通常选择双曲正切函数。

储备池连接到线性读出层，该层将状态向量映射为预测输出

$$\bar{\mathbf{y}}_n = \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}_t, \tag{4}$$

其中，$\mathbf{W}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{Y\times N}$ 是可训练的输出权重矩阵，Y 表示输出维度的数量。

在训练过程中，将随时间收集的储备池状态组成一个特征矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{r}_T^\top \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中每一行对应一个时间步，每一列对应一个储备池节点。输出权重通过岭回归进行优化：

$$\mathbf{W}_{\text{out}} = (\mathbf{R}^\top\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}^\top\mathbf{Y}, \tag{6}$$

其中，$\mathbf{Y}$ 包含期望输出，λ 是正则化参数，$\mathbf{I}$ 是单位矩阵。本研究改用梯度下降进行训练。

4.2 注意力增强型储备池计算（AERC）

在储备池计算中加入注意力机制，以依赖状态的映射取代静态线性读出

该映射会根据储备池状态进行调整。我们不再使用固定的$\mathbf{W}_{\text{out}}$，而是学习一个小型神经网络 F_{att} ，其参数为 $\mathbf{W}_{\text{net}}$ ，并在每个时间 t 根据当前储备池状态 $\mathbf{r}_t$ 生成注意力权重矩阵$\mathbf{W}_{\text{att},\ t}$ ：

$$\mathbf{W}_{\text{att},t} = F_{\text{att}}(\mathbf{W}_{\text{net}},\, \mathbf{r}_t)\,, \tag{7}$$

$$\bar{\mathbf{y}}_n = \mathbf{W}_{\text{att},t}\,\mathbf{r}_t. \tag{8}$$

此处$\mathbf{r}_t \in \mathbb{R}^N$、$\mathbf{W}_{\text{att},\ t} \in \mathbb{R}^{Y\times N}$以及 $\bar{}\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^Y$。在本工作中， F_{att} 是一个采用ReLU激活的单隐层多层感知机；其他轻量参数化也是可行的。这种状态条件重加权使模型能够在底层状态演化过程中强调$\mathbf{r}_t$ 中与任务相关的坐标，从而在无需重新训练[13, 14, 15]的情况下提高短时程精度和长期统计保真度。

给定目标$\mathbf{y}_n$，我们在长度为 T_{train} 步的窗口上最小化预测损失（例如归一化均方根误差或均方误差）：

$$L_{\text{pred}} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{t} \ell(\bar{\mathbf{y}}_n, \mathbf{y}_n)\,, \qquad \bar{\mathbf{y}}_t = \mathbf{W}_{\text{att},t}\mathbf{r}_t, \tag{9}$$

并通过梯度下降更新$\mathbf{W}_{\text{net}}$：

$$\mathbf{W}_{\text{net}}^{(s+1)} \;=\; \mathbf{W}_{\text{net}}^{(s)} \;-\; \gamma\,\nabla_{\mathbf{W}_{\text{net}}} L_{\text{pred}}, \tag{10}$$

其中轮次索引为 s ，学习率为 γ。

4.3 基于连续的储备池计算

我们现在从基于节点的离散储备池转向时空储层。以下形式体系可应用于任何连续储层。作为示例，我们将描述一个基于偏微分方程的储备池。令 $u(\mathbf{x}\ t)$表示空间域 $\Omega \;\subset\; \mathbb{R}^d (d \;\in\; \{1, 2, 3, \dots\})$上的储备池场。其演化由下式支配

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) \;=\; \mathcal{L}[u](\mathbf{x}, t) \;+\; \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_t)\,, \tag{11}$$

其中 $\mathcal{L}$编码内在的输运/反应动力学（例如扩散 $\nu\Delta u$、平流$\mathbf{c}\cdot\nabla u$、局部反应 $g(u)$），而 $\mathcal{I}$ 通过空间致动器注入离散时间驱动$\mathbf{x}_t$ （在 $[t, t + \Delta t$上保持恒定）。

为了获得类似于$\mathbf{r}_t$的有限维状态，我们定义测量泛函 $\{\phi_t^{(i)}\}_{i=1}^N$，并收集

$$r_t^{(i)} \;=\; \int_\Omega \phi_t^{(i)}(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{r}_t = \big(r_t^{(1)}, \dots, r_t^{(N)}\big)^\top. \tag{12}$$

这些 $\{\phi_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ 刻画了从底层储备池中提取状态的不同形式的测量过程。利用所提取的状态 $r_t^{(i)}$ ，我们现在可以遵循第4.1节和第4.2节所述的相同逻辑，以逼近给定目标$\mathbf{y}_t$。

4.4 自适应感知注意力增强储备池计算（ASAERC）

本节将详细介绍我们提出的新方法。注意力可以发挥双重作用：既能学习**（i）在哪里感知场**，也能**（ii）学习如何将感知到的特征组合成输出**。为将其形式化，我们区分了两类测量：

1. 固定测量（注意力的输入）。在每个时间步，我们在场 $u(\mathbf{x}\ t)$上评估一组固定测量泛函 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$ ，从而生成基线特征向量

$$\tilde{r}_t^{(j)} = \int_\Omega \psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}, \qquad \tilde{\mathbf{r}}_t = \big(\tilde{r}_t^{(1)}, \dots, \tilde{r}_t^{(N_{\text{fix}})}\big)^\top. \tag{13}$$

这些固定特征作为注意力网络的输入状态。

2. 自适应测量（学习型传感器）。以 $\bar{}\mathbf{r}_t$为条件，该网络预测参数$\{\theta_t^{(i)}\}_{i=1}^N$，用以定义一组动态空间（或时间）核函数 $\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})$：

$$\{\theta_t^{(i)}\}_{i=1}^N = F_\theta(\mathbf{W}_{\text{net}}, \tilde{\mathbf{r}}_t)\,, \qquad \phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x}) = \kappa\big(\mathbf{x};\, \theta_t^{(i)}\big), \tag{14}$$

其中 κ 是一个可微核族（例如高斯凸起函数、有限元形函数）。这些核函数充当位置随时间变化的传感器。对它们的评估产生自适应储层状态，如下所示。

$$r_{t+T}^{(i)} = \int_\Omega \phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}, t+T)\, d\mathbf{x}, \tag{15}$$

$$\mathbf{r}_{t+T} = \big(r_{t+T}^{(1)}, \dots, r_{t+T}^{(N)}\big)^\top \tag{16}$$

这些状态类似于经典储备池计算或AERC情形中的储备池状态$\mathbf{r}_t$ 。

3. 自适应加权（读出）。
同一网络随后生成一个注意力权重矩阵，以线性方式组合这些自适应测量：

$$\mathbf{W}_{\text{att},t+T} = F_{\text{att}}(\mathbf{W}_{\text{net}}, \tilde{\mathbf{r}}_t)\,, \tag{17}$$

$$\bar{\mathbf{y}}_n = \mathbf{W}_{\text{att},t+T}\mathbf{r}_{t+T}. \tag{18}$$

二者共同构成一个可训练接口： F_θ 与 F_{att} 首先决定观察何处（通过 $\theta_t^{(i)}$ ），然后决定如何组合所测得的内容（通过$\mathbf{W}_{\text{att},t+T}$）。为简便起见，我们让两个网络共享权重，仅最后使用各自独立的输出头，一个用于自适应测量位置，另一个用于加权。

若 $\phi_{t+T}^{(i)}(\mathbf{x})$=$\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$ 在空间中保持固定，则该模型退化为AERC（第4.2节）。将偏微分方程动力学替换为基于节点的更新，可进一步恢复离散情形下的经典AERC。

4.5 连续注意力增强储备池计算的流程图

标准化输入 $\mathbf{x}_n$ 作为固定连续储层的强迫项，使时空场 $u(\mathbf{x}\ t)$不断演化。在每个时间步，首先对场进行采样

表 1：经典储备池计算（RC）、注意力增强型储备池计算（AERC）与自适应感知 AERC（ASAERC）的比较。

方面	经典储备池计算	AERC	ASAERC
感知 / 读取-out	静态线性映射 $\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}_t$。	状态条件权重 $\mathbf{W}_{\text{att},\,t} = F_{\text{att}}(\mathbf{r}_t)$（小用于预测的多层感知机，$\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{W}_{\text{att},\,t}\mathbf{r}_t$。	双重机制：(i) 自适应核函数 $\{\phi^{(i)}{}_{t+T}\}$ 选择测量位置；(ii) at-注意力权重 $\mathbf{W}_{\text{att},\,t+T}$ 决定如何组合。
可训练的参数 pa-	仅 $\mathbf{W}_{\text{out}}$ 通过岭回归或梯度下降训练。	F_{att} 的参数通过梯度下降训练。	F_θ 和 F_{att}的参数（通常共享骨干网络）通过梯度下降训练。

采样过程通过一组固定核函数 $\{\psi_t^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^{N_{\text{fix}}}$ 进行，以形成特征向量 $\tilde{\mathbf{r}}_t = \big(\tilde{r}_t^{(1)}, \ldots, \tilde{r}^{(N_{\text{fix}})}{}_t\big)^\top$。可训练的注意力模块将这些特征映射为两个输出：(i) 核参数 $\{\theta_t^{(i)}\}$，用于定义自适应测量核函数并指定场在何处 采样；(ii) 状态依赖的注意力权重矩阵 $\mathbf{W}_{\text{att},t}$，用于指定如何 组合采样值。最终预测为 $\tilde{\mathbf{y}}_n = \mathbf{W}_{\text{att},t+T}\mathbf{r}_{t+T}$。至关重要的是，梯度仅更新注意力网络；不会通过储备池进行反向传播。

4.6 连续注意力增强型储备池计算机的训练

我们训练 ASAERC，以一步超前预测系统状态。将预测向量 $\tilde{\mathbf{y}}_t$ 与真实值$\mathbf{y}_t$ 通过均方误差（MSE）进行比较：

$$L_{\text{MSE}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big\|\bar{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n\big\|^2, \tag{19}$$

其中 N 是训练样本的数量。

梯度通过注意力网络反向传播，从而更新共享参数$\mathbf{W}_{\text{net}}$:

$$\mathbf{W}_{\text{net}}^{(s+1)} = \mathbf{W}_{\text{net}}^{(s)} - \gamma\,\nabla_{\mathbf{W}_{\text{net}}} L_{\text{MSE}}, \tag{20}$$

其中，s 是训练轮次，γ 是学习率。

所有实验均使用 Adam优化器，初始学习率为 0.002，指数权重衰减因子为 $\gamma = 0.99$，批量大小为 1024，最多训练 500 轮。

4.7 基于二维扩散的时空储层

为实例化 ASAERC框架，我们使用二维扩散方程作为连续储层。场 $u(\mathbf{x}\ t)$ 在矩形区域 $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ 上演化，其演化过程如下：

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \nu\big(\partial_{xx}u + \partial_{yy}u\big) + f(x, y; \mathbf{x}_t), \tag{21}$$

其中 $\nu > 0$ 为扩散系数，$f(x,\ y;\ \mathbf{x}_t)$通过平滑高斯源注入离散时间输入。我们施加齐次狄利克雷边界，$u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，因此场在区域边缘处为零。该偏微分方程在均匀的 $n_x \times n_y$网格上离散化，并通过显式欧拉步推进时间，步长为

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t\big[\nu\,\Delta u_{i,j}^n + f(x_i, y_j; \mathbf{x}_t)\big], \tag{22}$$

其中，$\Delta u_{i,\ j}^n$ 为二阶有限差分拉普拉斯算子。时间步长 Δt 满足 Courant–Friedrichs–Lewy 稳定性准则。

固定输入测量。 在每个时间步，我们都会在散布于定义域内的一组 N_{fix} 固定测量点 $\{(x^{(k)},\ y^{(k)})\}_{k=1}^{N_{\text{fix}}}$ 处计算 $u(\mathbf{x}\ t)$。如果某个点与网格节点不重合，则通过双线性插值，根据距离最近的四个网格点求得该处的值：

$$\begin{aligned} u(x^{(k)}, y^{(k)}) \approx{}& w_{00}\,u_{i,j} + w_{10}\,u_{i+1,j} \\ &+ w_{01}\,u_{i,j+1} + w_{11}\,u_{i+1,j+1}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $w_{00} + w_{10} + w_{01} + w_{11} = 1$。这些插值得到的值构成储层状态向量

$$\tilde{\mathbf{r}}_t = \big(u(x_t^{(1)}, y_t^{(1)}), \ldots, u(x_t^{(N_{\text{fix}})}, y_t^{(N_{\text{fix}})})\big)^\top, \tag{24}$$

该向量会传入注意力网络 $F(\tilde{\mathbf{r}}_t)$。

自适应输出测量。 给定 $\tilde{\mathbf{r}}_t$，网络会输出一组新的测量位置$\{(x_{t+T}^{(i)},\ y_{t+T}^{(i)})\}_{i=1}^N$，这些位置可能随时间步而变化；同时还会输出注意力权重$\mathbf{W}_{\text{att},\ t+T}$ 用于将这些位置的测量结果组合成预测输出。随后在这些位置对场进行采样（使用相同的插值规则），得到

$$\mathbf{r}_t = \big(u(x_{t+T}^{(1)}, y_{t+T}^{(1)}), \ldots, u(x_{t+T}^{(N)}, y_{t+T}^{(N)})\big)^\top, \tag{25}$$

并将其线性组合为 $\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{W}_{\text{att},\ t+T}\mathbf{r}_{t+T}$。这样，固定测量提供了稳定且一致的输入表示，而自适应测量则使网络能够随着时间推移，动态聚焦于偏微分方程场中富含信息的区域。时间偏移 T 模拟了测量流程中的信息传播时间：从测量储备池的时刻开始，经过注意力模块处理信息，直到测量设备作出响应。

表 2：本研究所用八种混沌系统的采样参数。总时间和步长的选择旨在确保收敛至吸引子，并提供足够丰富的时间尺度。李雅普诺夫指数为文献中的代表性数值。

系统	总采样步数		采样数 /		李雅普诺夫
	Time	点数	规模	Lyap. 时间	指数
Lorenz	375	7500	0.05	22.0	0.905
罗斯勒吸引子	2000	7500	0.27	52.0	0.071
范德波尔系统	1500	7500	0.20	40	0.025
Duffing	825	7500	0.11	53.9	0.177
双摆	2000	7500	0.27	60	0.122
逻辑映射	7500	7500	1	14.4	0.693
埃农映射	7500	7500	1	9.5	0.419
麦基–格拉斯	7500	7500	1	166.7	0.006

4.8 基准系统和采样参数

我们评估 ASAERC 在一项任务中的表现：使用单个共享模型，同时预测一组多样的混沌吸引子。在此前离散 AERC 研究 [28], 的基础上，我们通过结合连续时间常微分方程（ODEs）、离散映射和时滞微分方程（ DDE），增加了基准系统的数量和异质性。这种多样性检验了连续空间注意力能否适应不同的时间尺度和动力学状态。

具体而言，基准数据集包括：

- **连续时间混沌系统：** 洛伦兹系统 [29], 罗思勒系统 [30], 范德波尔振子、杜芬振子 [31], 和双摆。这些系统采用自适应龙格–库塔法进行积分。

- **离散映射：** 逻辑映射和埃农映射 [32]。

- **时滞微分系统：** 麦基–格拉斯方程 [33], ，使用离散化的时滞缓冲区并通过欧拉步进进行积分。

每个系统都呈现出独特的吸引子几何结构。Lorenz 系统和 Rössler 系统是具有不同折叠机制的三维混沌流；Duffing 振子和范德波尔振子呈现非线性振荡；双摆在保守动力学下产生混沌力学；逻辑映射和埃农映射代表离散时间混沌；麦基–格拉斯方程则通过延迟引入长程记忆。这些基准系统共同构成了对表征能力和自适应能力的严格检验。

实验中使用的采样参数汇总于表 2。我们选择总积分时间和步长，以确保轨迹收敛至吸引子并覆盖多种时间尺度。为保证各系统之间的一致性，每条轨迹都重新采样为 7500 个点；由此得到的特定步长列于表 2，该步长与仿真所用的步长不同。收集完八种不同吸引子的数据后，我们将其串接成一条长时间序列，并将其拆分划分为输入和目标，其中目标是将时间序列平移一步，即单步预测。

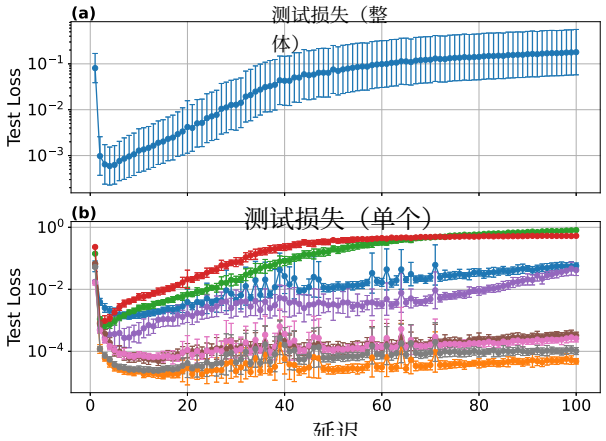


图 6：**延迟嵌入 MLP 基线**。全部（八个系统）及各系统的归一化均方误差与延迟步数 k 和参数数量的关系。双摆（蓝色）、Duffing 振子（橙色）、埃农映射（绿色）、逻辑映射（红色）、洛伦兹系统（紫色）、Mackey-Glass 方程（棕色）、罗斯勒系统（粉色）、范德波尔振子（灰色）。对于较小的 k，性能有所提升；但超过最佳值后性能反而下降，这可能是由于输入维度增加，以及训练不足或过拟合所致。

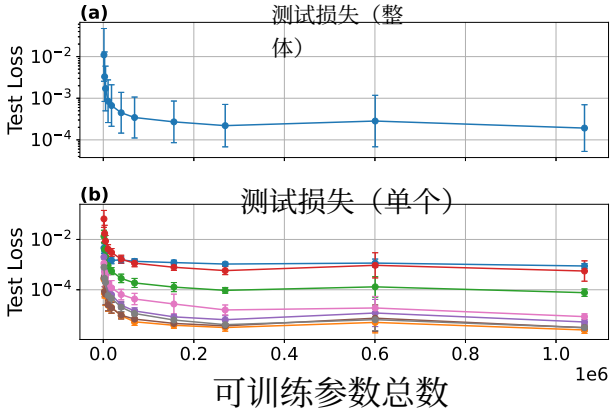


图 7：**LSTM 基线**。全部（八个系统）及各系统的归一化均方误差与总参数数量的关系，以及参数数量随隐藏层大小的变化。参数数量越多，性能越稳定地单调提升，表现出比延迟嵌入方法更稳定的行为。其性能与最优 ASAERC 模型不相上下，参数数量也大致相同。双摆（蓝色）、杜芬振子（橙色）、埃农映射（绿色）、逻辑映射（红色）、洛伦兹系统（紫色）、Mackey-Glass 方程（棕色）、罗斯勒系统（粉色）、范德波尔振子（灰色）。

附录

与延迟嵌入 MLP 和 LSTM 的比较

我们将该方法与经典储备池计算、静态注意力变体，以及基于延迟嵌入多层感知机（多层感知机）和LSTM[34, 35]的数据驱动基线进行比较。在延迟嵌入方法中，时间 t 处的输入会用 k 个延迟副本（$\mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-k}$）加以扩充，从而形成延迟向量，并送入一个经训练以直接预测$\mathbf{y}_t$ 的两层多层感知机。

图 6 展示了归一化均方误差随延迟长度 k 的变化，以及所得网络的可训练参数总数。对于较小的k，与单步输入相比，延迟嵌入模型能够适度降低误差。这表明，较短的历史信息有助于网络消除动力学中的局部歧义，其误差率最低时的水平与最佳 ASAERC 模型相当。然而，当 k 超过中间范围后，性能会恶化：模型必须处理维度越来越高的输入，而要有效拟合这些输入，可能需要更长的训练时间；在训练轮次固定的情况下，还容易出现过拟合。此外，该模型在不同运行之间表现出明显的不稳定性，这一点体现为较大的误差条。

在图 7 中，我们展示了 LSTM 基线的性能。图中绘出了归一化均方误差与参数总数量之间的关系。结果表明，随着网络规模增大，性能有所提升；当参数数量超过约 10^5 时，性能便趋于平稳。此时，其误差略优于表现最佳的 ASAERC配置，且两种方法所需的参数数量相近。不过，我们要指出，ASAERC 是一种初步方案，尚未经过任何优化。此外，ASAERC 允许使用任意连续系统作为其储备池，而某些系统可能比本文采用的简单扩散系统带来显著的性能提升。因此，令我们惊讶的是，即使是这种简单的初步方案，其性能也能接近参数数量相近、经过高度优化的 LSTM。

B 各系统均方误差

图 8 展示了图 3 中相同的均方误差，但按数据集中的各个系统进行了拆分。从图 8 可以看出，某些系统（例如杜芬振子）通过新的 ASAERC 方法，在多个数量级上实现了显著提升。

致谢

本研究部分得到 JSPS KAK-ENHI（JP22H05195、JP24KF0179、JP25H01129）和日本 JSTCREST（JPMJCR24R2）的资助。

参考文献

[1]Joni Dambre、David Verstraeten、Benjamin Schrauwen 和 Serge Massar。动力系统的信息处理能力。*ScientificReports*，2:514，2012。

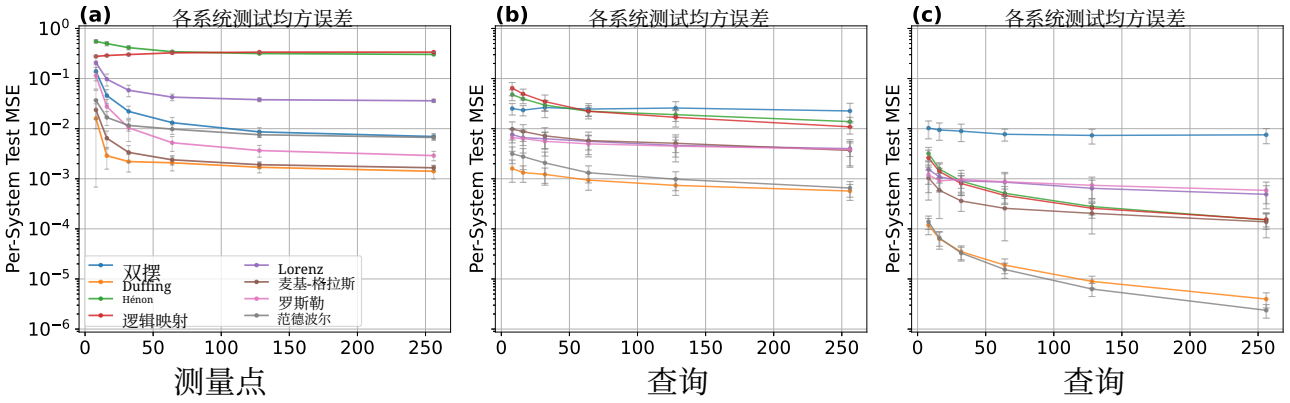


图 8：各个动力系统的图 3 均方误差。

[2]Herbert Jaeger。用于分析和训练循环神经网络的“回声状态”方法——附勘误说明。波恩，德国：德国国家信息技术研究中心 *GMD* 技术报告，148(34):13，2001。

[3] Lennert Appeltant、Miguel C Soriano、Guy Van der Sande、Jan Danckaert、Serge Massar、Joni Dambre、Benjamin Schrauwen、Claudio R Mirasso 和 Ingo Fischer。利用单个动力节点作为复杂系统进行信息处理。《自然·通讯》，2:468，2011。

[4] Gouhei Tanaka、Toshiyuki Yamane、James A He、Ryotaro Nakane、Seiji Kanazawa、Hiroshi Takeda、Hidetoshi Numata、Daiju Nakano 和 Akira Fujii。物理储备池计算的最新进展。神经网络，115:100–123，2019。

[5]Jacob Torrejon、Mathieu Riou、Flavio Abreu Araujo、Sumito Tsunegi、Guru Khalsa、Damien Querlioz、Paolo Bortolotti、Vincent Cros、Kay Yakushiji、Akio Fukushima、Hitoshi Kubota、Shinji Yuasa、Mark D. Stiles 和 Julie Grollier。利用纳米级自旋电子振荡器进行神经形态计算。《自然》，547(7664):428–431，2017年。

[6] Takumi Kotooka、Sam Lilak、Adam Stieg、James Gimzewski、Naoyuki Sugiyama、Yuichiro Tanaka、Hakaru Tamukoh、Yuki Usami 和 Hirofumi Tanaka。Ag2Se纳米线网络作为一种有效的材料内储备池计算设备，2021年。预印本。

[7] Felix Köster、Serhiy Yanchuk 和 Kathy Lüdge。具有单变量动力学的基于延迟的储备池计算机的主记忆函数。*arXiv*预印本 *arXiv:2108.12643*，2021年。

[8]Enrico Picco、Lina Jaurigue、Kathy Lüdge 和 Serge Massar。仅使用延迟输入对物理储备池计算机进行高效优化。《*Communications Engineering*》，3(1)，2025年。

[9] Kohei Nakajima、Helmut Hauser、Tao Li 和 Rolf Pfeifer。通过物理软体进行信息处理。*Scientific Reports*，5，2015年5月。

[10] Andrew Flynn、Vassilios A. Tsachouridis 和 Andreas Amann。储备池计算机中的多功能性。《混沌》，31(1):013125，2021年。[11] Andrew Flynn、Vassilios A. Tsachouridis 和 Andreas Amann。探索多功能储备池计算机中切换动力学的起源。《*Frontiers in Network Physiology*》，4:1451812，2024年。[12] Yao Du、Haibo Luo、Jianmin Guo、Jinghua Xiao、Yizhen Yu 和 Xingang Wang。多功能储备池计算。《物理评论*E*》，111(3):035303，2025年。[13]Ashish Vaswani、Noam Shazeer、Niki Parmar、Jakob Uszkoreit、Llion Jones、Aidan N Gomez、Łukasz Kaiser 和 Illia Polosukhin。注意力就是你所需要的一切。载于神经信息处理系统进展，第5998–6008页，2017年。[14] Shaojie Bai、J Zico Kolter 和 Vladlen Koltun。用于序列建模的通用卷积网络和循环网络的实证评估。*arXiv*预印本 *arXiv:1803.01271*，2018年。[15] Felix Köster、Kazutaka Kanno、Jun Ohkubo 和 Atsushi Uchida。注意力增强储备池计算。*Phys. Rev. Appl.*，22:014039，2024年7月。[16] Krithika Manohar、Bingni W. Brunton、J. Nathan Kutz 和 Steven L. Brunton。用于重建的数据驱动稀疏传感器布置。*arXiv*预印本 *arXiv:1701.07569*，2017年。[17] Andreas Krause、Ajit Singh 和 Carlos Guestrin。高斯过程中的近最优传感器布置：理论、高效算法与实证研究。《机器学习研究杂志》，9:235–284，2008年。[18] Max Jaderberg、Karen Simonyan、Andrew Zisserman 和 Koray Kavukcuoglu。空间变换网络。载于神经信息处理系统进展（*NeurIPS*），2015年。[19]Jifeng Dai、Haozhi Qi、Yuwen Xiong、Yi Li、Guodong Zhang、Han Hu 和 Yichen Wei。可变形卷积网络。载于论文集

*IEEE*国际计算机视觉会议（*ICCV*）论文集，第764–773页，2017年。[20] Edward N. Lorenz。确定性非周期流。大气科学杂志，20(2):130–141，1963年。[21] Otto E. Rössler。连续混沌的一个方程。*Physics Letters A*，57(5):397–398，1976年。[22] B. van der Pol。论“弛豫振荡”。《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志》，2(11):978–992，1926年。[23] Georg Duffing。固有频率变化时的受迫振荡及其技术意义。F. Vieweg und Sohn，布伦瑞克，1918年。[24] R. B. Levien 和 S. M. Tan。双摆：混沌实验。《美国物理学杂志》，61(11):1038–1044，1993年。[25] Robert M. May。具有极其复杂动力学的简单数学模型。《自然》，261(5560):459–467，1976年。[26] Michel Hénon。具有奇异吸引子的二维映射。《数学物理通讯》，50(1):69–77，1976年。[27]Michael C. Mackey 和 Leon Glass。生理控制系统中的振荡与混沌。《科学》，197(4300):287–289，1977年。[28] Felix Köster、Kazutaka Kanno 和 Atsushi Uchida。作为多动力系统近似器的注意力增强储备池计算。*Phys.Rev. Appl.*，24:054068，2025年11月。[29] Edward N Lorenz。确定性非周期流。大气科学杂志，20(2):130–141，1963年。[30] Otto E Rössler。连续混沌的一个方程。*Physics Letters A*，57(5):397–398，1976年。[31]Georg Duffing。受迫振荡：特别论及机械系统（论文集）。Vieweg & Sohn，布伦瑞克，1918年。[32] Michel Henon。具有奇异吸引子的二维映射。《数学物理通讯》，50(1):69–77，1976年。[33] Michael C Mackey 和 Leon Glass。生理控制系统中的振荡与混沌。《科学》，197(4300):287–289，1977年。[34] Norman H. Packard、James P. Crutchfield、J. Doyne Farmer 和 Robert S. Shaw。从时间序列中揭示几何结构。《物理评论快报》，45(9):712–716，1980年。[35] Floris Takens。检测湍流中的奇异吸引子。载于David A. Rand和Lai-Sang Young编，*动力系统与湍流：1980*年沃里克会议，第898卷数学讲义，第366–381页。Springer，1981年。