用于碱土金属及类似原子的纯光学宏观陷阱

O.N. Prudnikov，[1,2] V. I. Yudin，[1,2,3] R. Ya. Ilenkov,[1] 和 A. V. Taichenachev[1]

1)激光物理研究所，激光物理系，630090，俄罗斯新西伯利亚2)新西伯利亚国立大学，物理系，630090，俄罗斯新西伯利亚3)新西伯利亚国立技术大学，物理与技术系，630073，俄罗斯新西伯利亚

（*电子邮箱：oleg.nsu@gmail.com）

（日期：2026年3月5日）

我们研究了碱土金属及类似原子在与闭合光学跃迁 $^1S_0 \to {}^1P_1$ 或 $^1S_0 \to {}^3P_1$共振的双色场中的激光冷却与囚禁。研究表明，与单色场相比，该系统会出现新的动力学效应，从而能够形成深宏观势阱，捕获中性原子并将其冷却至亚多普勒温度。这种纯光学宏观陷阱可作为广为人知的磁光阱的替代方案，可用于需要尽量减小冷原子云区域磁场的应用。所得结果对新一代量子传感器和光频标准具有重要意义。

关键词：反冲效应、激光冷却、宏观光学阱

arXiv:2603.03653v1 [physics.atom-ph] 4 Mar 2026

I. 引言

众所周知[1]，，借助多普勒机制和亚多普勒机制，可以有效地冷却原子；这些机制使反向传播波的光场中共振于光学跃迁的原子动能耗散。然而，在大多数情况下，冷原子实验不仅要求将原子冷却至低温，还要求可靠地囚禁原子。这促使研究人员寻找能够形成深耗散陷阱、用于冷却和囚禁原子的光场构型。该问题最成功的解决方案是磁光阱（MOT），它于20世纪80年代末被提出并通过实验实现[2]。非均匀磁场与反向传播光波的独特组合形成了深磁光势，使原子得以冷却和囚禁。

另一方面，基于冷原子构建现代高精度量子器件（例如原子钟、量子逻辑门、量子存储器、原子干涉仪、重力仪、陀螺仪等）提出了新的要求，而使用标准磁光阱时，这些要求可能带来重大挑战。其中一项要求是精确控制冷原子作为量子对象进行探测区域内的磁场。因此，探索无需使用磁场即可冷却和囚禁原子的新机制具有特别重要的意义，尤其是在紧凑型器件中。例如，在文献[3]，中，我们提出了利用双色场中的宏观尺度深耗散势来冷却和囚禁锂原子的思想；锂原子具有特殊的能级结构。双色场的各个分量分别与不同的光学跃迁共振，从而能够形成纯光学宏观陷阱，其场强相对较低，与磁光阱中使用的场强相当。所形成的深耗散阱由两种效应共同决定。第一种是双色场中的偶极力整流效应，该效应在文献[4,5]中得到预言，并被用于有效减速原子束[6–8]。第二种是双色场中的激光冷却耗散机制[9,10]。光学频移的空-间拍频在双色场中形成了一个周期为 $\Lambda = \pi/|\Delta k|$的宏观势，其中 $\Delta k = k_2 - k_1$ 是双色场频率分量的波矢之差。当频率差选在 $5-30\,$GHz范围内时，光学陷阱的宏观周期达到厘米量级，从而能够实现亚毫米尺度的受困原子云。为展示这一效应，文献[3]，考察了锂原子精细结构能级或超精细结构能级之间的跃迁。然而，对于并非所有元素，都能找到具有上述频率差的光学跃迁。

在本研究中，我们进一步发展了纯光学宏观耗散阱的构想，用于囚禁能级结构中不含频率差处于 $5-30$ GHz 范围内跃迁的原子。为了用这类原子形成深宏观势，我们考虑让具有所需频率差的双色场与同一原子跃迁相互作用。所研究的情况不要求精细或超精细能级具有特定结构（如[3]），因此可应用于大多数类碱土原子（例如钙、锶、钡、汞、镁、镱，见表 I），这些原子具有偶极允许的闭合光学跃迁。这些元素对于光频标准[11–16]、量子存储器[17]，和原子干涉仪[18–21]尤为重要。我们证明，可以形成深的耗散宏观囚禁势。此外，对于奇数同位素，还可在其中达到亚多普勒温度。

II. 双色场中原子的动力学

让我们考虑原子与频率分量为 ω_1 和 ω_2 的双色激光场的相互作用

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) e^{-i\omega_\alpha t} \right\}, \qquad (1)$$

它们与频率为 ω_0的光学跃迁共振。用于类碱土金属原子激光冷却的光学跃迁具有电子组态$J_g = 0 \to J_e = 1$

元素	核 spin	激光冷却跃迁	$\gamma/2\pi$ (MHz)	I_S (毫瓦/厘米^2)	λ (纳米)	ε_R
^{25}镁, ^{24}镁	5/2, 0	$3^1S_0 \to 3^1P_1$	79	439	285.3	$1.3\cdot10^{-3}$
^{40}Ca	0	$4^1S_0 \to 4^1P_1$	35.7	61.9	422.6	$7.8\cdot10^{-4}$
^{87}锶, ^{88}锶	9/2, 0	$5^1S_0 \to 5^1P_1$ $5^1S_0 \to 5^3P_1$	32 $7.5\cdot10^{-3}$	42.7 $2.8\cdot10^{-3}$	461 689	$3.4\cdot10^{-4}$ 0.64
^{135}钡, ^{138}钡	3/2, 0	$6^1S_0 \to 6^1P_1$ $6^1S_0 \to 6^3P_1$	18.9 0.048	14.6 $12.5\cdot10^{-3}$	553.7 791.3	$2.5\cdot10^{-4}$ 0.048
^{171}镱, ^{174}镱	1/2, 0	$6^1S_0 \to 6^1P_1$ $6^1S_0 \to 6^3P_1$	29 0.18	59 0.14	399 555.8	$2.5\cdot10^{-4}$ 0.02
^{199}汞, ^{200}汞	1/2, 0	$6^1S_0 \to 6^1P_1$ $6^1S_0 \to 6^3P_1$	120 1.3	2480 10.6	185 253.7	$2.4\cdot10^{-4}$ 0.012

表 I. 用于激光冷却的类碱土原子的光学跃迁及其参数（数据来自[13,18,22–25]）：波长 λ、饱和强度 ($I_S = 2\pi^2\hbar c\gamma/\lambda^3$)，以及反冲参数 $\varepsilon_R = \hbar k^2/(2M\gamma)$，其值等于反冲能与自然线宽之比（M 为原子的质量）。

（见表I），其中J_g 和J_e 分别为基态（g）和激发态（e）的电子角动量。对于核自旋I不为零的奇数同位素（见表I），会出现一组总角动量为F_{e_n}的激发态，其中 $|J_e - I| \le F_{e_n} \le |J_e + I|$，而基态的角动量为$F_g = I$。这种能级结构存在于偶极跃迁 $^1S_0 \to {}^1P_1$ 和互组合偶极跃迁 $^1S_0 \to {}^3P_1$中。应当指出，互组合跃迁的自然线宽随原子序数增大而增大，从而使其可用于重元素的激光冷却[26–28]。

原子与激光场相互作用的哈密顿量形式为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{H}_0 + \hat{W}(t), \tag{2}$$

其中第一项为动能算符，第二项为原子在静止参考系中的哈密顿量，最后一项为原子-光相互作用项。哈密顿量 $\hat{H}_0$ 可写成 $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^{ee} + \hat{H}_0^{gg}$ 的形式，其中基态和激发态对应的分块通过投影算符 $\hat{P}^{e_n}$ 和 $\hat{P}^g$ 定义如下

$$\begin{aligned}\hat{H}_0^{ee} &= \sum_n \mathscr{E}_{e_n}\hat{P}^{e_n},\ \hat{P}^{e_n} = \sum_{M_{e_n}} |F_{e_n}, M_{e_n}\rangle\langle F_{e_n}, M_{e_n}| \\ \hat{H}_0^{gg} &= \mathscr{E}_g\hat{P}^g,\ \hat{P}^g = \sum_{M_g} |F_g, M_g\rangle\langle F_g, M_g|.\end{aligned} \tag{3}$$

这里，$\mathscr{E}_{e_n}$ 为第 n 个激发态的能量，$\mathscr{E}_g$ 为基态的能量，$|F_{e_n}, M_{e_n}\rangle$和 $|F_g, M_g\rangle$表示激发态和基态中塞曼子能级的波函数，其中 M_{e_n} 和 M_g 为磁量子数（$-F_{e_n} \le M_{e_n} \le F_{e_n}$，$-F_g \le M_g \le F_g$）。原子-光相互作用在电偶极近似下可表示为

$$\begin{aligned}\hat{W}(\mathbf{r}, t) &= \hbar \sum_{\alpha=1,2} \hat{V}_\alpha(\mathbf{r})\, e^{-i\omega_\alpha t} + h.c., \\ \hat{V}_\alpha(\mathbf{r}) &= -\left(\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{D}}\right)\overline{d}/2\hbar,\end{aligned} \tag{4}$$

其中，$\overline{d}$ 是所考虑电子跃迁 $J_g = 0 \to J_e = 1$ 的偶极跃迁约化矩阵元，D 是原子偶极矩的归一化（无量纲）算符，其分量 $\hat{D}_s$ ($s = 0, \pm 1$) 在循环基底 $\{e_\pm = \mp(e_x \pm ie_y)/\sqrt{2}, e_0 = e_z\}$ 中用克莱布施-戈丹系数表示

$$\hat{D}_s = \sum_{F_{e_n}, M_{e_n}, M_g} |F_{e_n}, M_{e_n}\rangle\, C^{F_{e_n}, M_{e_n}}_{F_g, M_g; 1, s}\, \langle F_g, M_g|. \tag{5}$$

在充分考虑反冲效应的情况下，描述场（1）中原子密度矩阵演化的量子动力学方程在坐标表象下形式如下

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ &-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \hat{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\hat{H}(\mathbf{r}_2)\right] - \hat{\Gamma}\{\hat{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\}.\end{aligned} \tag{6}$$

最后一项描述了量子系统因自发弛豫而产生的非哈密顿演化，并考虑了反冲效应（例如，参见[29]）：

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\} &= \frac{\gamma}{2}(\hat{P}^e\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{P}^e) - \hat{\gamma}\{\hat{\rho}\} \\ \hat{\gamma}\{\hat{\rho}\} &= \gamma\frac{3}{2}\left\langle \sum_{\xi=1,2} (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{e}_\xi(\mathbf{k}))^\dagger e^{-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_1}\hat{\rho}\, e^{i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_2}(\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{e}_\xi(\mathbf{k}))\right\rangle.\end{aligned} \tag{7}$$

这里，$\hat{\mathrm{P}}^e=\sum_n \hat{\mathrm{P}}^{e_n}$ 是投影到所有激发态上的完整投影算符，而γ 是自然线宽。算符$\hat{\gamma}\{\hat{\rho}\}$ 描述了因自发辐射而从激发态跃迁至基态的过程，其中 $\langle\ldots\rangle$ 表示对自发光子动量为 $\hbar k$、偏振方向互相正交的两个偏振矢量为$e^{\xi}(k)$时的辐射方向取平均。

如引言中所述，要形成一个厘米尺度的深耗散势阱，需要使用频率相差 $|\omega_1-\omega_2|\sim 5-30\,\mathrm{GHz}$ 的场。这样的频率差使我们能够忽略方程（6）中的快速振荡项 $\exp(\pm i(\omega_1-\omega_2)t)$。因此，在旋波近似下，我们得到以下关于矩阵块 $\hat{\rho}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ 的方程组

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= -\gamma\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{ee}\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{H}_0^{ee}\right]\\
&\quad -i\sum_{\alpha=1,2}\left(\hat{V}_\alpha(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}_\alpha^{ge}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}_\alpha^{eg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{V}_\alpha^{\dagger}(\mathbf{r}_2)\right)\\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}^{gg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= \hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\}-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{gg}\hat{\rho}^{gg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}^{gg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{H}_0^{gg}\right]\\
&\quad -i\sum_{\alpha=1,2}\left(\hat{V}_\alpha^{\dagger}(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}_\alpha^{eg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}_\alpha^{ge}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{V}_\alpha(\mathbf{r}_2)\right)\\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}_\alpha^{eg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= -\left(\frac{\gamma}{2}-i\omega_\alpha\right)\hat{\rho}_\alpha^{eg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{ee}\hat{\rho}^{eg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}^{eg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{H}_0^{gg}\right]\\
&\quad -i\left(\hat{V}_\alpha(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}^{gg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{V}_\alpha(\mathbf{r}_2)\right),\ \alpha=1,2\\
\frac{d}{dt}\hat{\rho}_\alpha^{ge}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= -\left(\frac{\gamma}{2}+i\omega_\alpha\right)\hat{\rho}_1^{ge}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{gg}\hat{\rho}^{ge}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}^{ge}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{H}_0^{ee}\right]\\
&\quad -i\left(\hat{V}_\alpha^{\dagger}(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}^{ee}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-\hat{\rho}^{gg}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\hat{V}_\alpha^{\dagger}(\mathbf{r}_2)\right),\ \alpha=1,2,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中矩阵块定义如下

$$
\begin{aligned}
&\hat{\rho}^{gg}=\hat{P}^g\hat{\rho}\hat{P}^g,\ \hat{\rho}^{ee}=\hat{P}^e\hat{\rho}\hat{P}^e,\\
&\hat{\rho}^{eg}=\hat{P}^e\hat{\rho}\hat{P}^g=\hat{\rho}_1^{eg}e^{-i\omega_1 t}+\hat{\rho}_2^{eg}e^{-i\omega_2 t},\ \ \hat{\rho}^{ge}=\left(\hat{\rho}^{eg}\right)^{\dagger},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

这里，$\hat{\rho}^{gg}$ 和$\hat{\rho}^{ee}$ 描述处于基态和激发态的原子，$\hat{\rho}_\alpha^{eg}$、$\hat{\rho}_\alpha^{ge}(\alpha=1,\ 2)$是密度矩阵非对角元的慢变振幅。为简洁起见，在（8）中我们采用

$$
\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{\hbar}{2M}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}_1^2}+i\frac{\hbar}{2M}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}_2^2}.
\tag{10}
$$

众所周知[30–32]，通过按反冲参数 $\hbar k/\Delta p\ll 1$ 展开，原子密度矩阵在维格纳表示中的方程$\hat{\rho}(\mathrm{r},\mathrm{p})$（其中Δp是原子系综动量分布的宽度）可以化为相空间中的分布函数 $\mathscr{F}(\mathrm{r},\mathrm{p})=\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(\mathrm{r},\mathrm{p})\}$所满足的福克-普朗克方程

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{M}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathscr{F}(\mathbf{r},\mathbf{p}) &= -\sum_j\frac{\partial}{\partial p_j}F_j(\mathbf{r},\mathbf{p})\mathscr{F}(\mathbf{r},\mathbf{p})\\
&\quad +\sum_{jj'}\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p_{j'}}D_{jj'}(\mathbf{r},\mathbf{p})\mathscr{F}(\mathbf{r},\mathbf{p}),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其系数分别对应作用于原子上的力 $\mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{p})$ 和扩散张量 $\mathrm{D}_{jj'}(\mathrm{r},\mathrm{p})$。请注意，基于福克-普朗克方程 (11) 的半经典方法所得结果与以下结果吻合良好

在小反冲参数 $\varepsilon_R=\hbar k^2/(2M\gamma)\ll 1$[33–35] 的情况下进行直接量子模拟所得的结果。由于所考察元素的条件 $\varepsilon_R\ll 1$ 得到较好满足（见表 I），下文将采用半经典近似。

为获得力和扩散的表达式，我们采用文献[36,37]提出的方法。该方法的实质是，将量子动理学方程按反冲参数 $\hbar k/\Delta p\ll 1$ 在坐标表象（6）中展开，并改写为变量

$$
\mathbf{q}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\ \ \mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2,
\tag{12}
$$

等价于按 $-ik\mathrm{q}_j$ 的幂展开，其中 q_j 是矢量 q 的笛卡尔分量。该展开可写成一般算符形式

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{\hbar}{M}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\hat{\rho}(\mathbf{r},\mathbf{q}) &= \hat{\mathscr{L}}^{(0)}\{\hat{\rho}\}\\
&\quad -\sum_j ikq_j\hat{\mathscr{L}}_j^{(1)}\{\hat{\rho}\}+\sum_{jj'}(-ik)^2q_jq_{j'}\hat{\mathscr{L}}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\rho}\}\ldots,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

算符 $\hat{\mathscr{L}}^{(k)}$ 的显式表达式见附录 A。注意，从坐标表象 (12) 到维格纳表象的变换由傅里叶变换定义

$$
\hat{\rho}(\mathbf{r},\mathbf{p})=\int\hat{\rho}(\mathbf{r},\mathbf{q})e^{-i\mathbf{pq}/\hbar}d\mathbf{q}/(2\pi\hbar)^3.
\tag{14}
$$

按照提出的方法[36,37],，半经典方法中的方程(13)可化简为相空间中分布函数的福克–普朗克方程(11)

分布函数为 $\mathscr{F}(\mathbf{r},\mathbf{p})$。在这种情况下，力 $\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 的表达式由展开式(13)中的一阶项确定。作用于速度为 $\mathbf{v}=\mathbf{p}/M$ 的原子的力 F_j 的笛卡尔分量形式如下：

$$F_j(\mathbf{r},\mathbf{p}) = -\mathrm{Tr}\left\{\mathscr{L}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{p})\}\right\}, \tag{15}$$

其中，$\hat{\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 是光学布洛赫方程的稳态解

$$\frac{\mathbf{p}}{M}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\hat{\sigma} = \mathscr{L}^{(0)}\{\hat{\sigma}\},\ \mathrm{Tr}\{\hat{\sigma}\}=1. \tag{16}$$

扩散系数可分解为两项之和

$$D_{jj'} = D_{jj'}^{(sp)} + D_{jj'}^{(ind)}. \tag{17}$$

其中第一项是自发扩散张量，由光子自发发射过程中原子动量的涨落决定

$$D_{jj'}^{(sp)}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \hbar^2k^2\mathrm{Tr}\left\{\mathscr{L}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\sigma}\}\right\} = \frac{\hbar^2k^2\gamma}{5}\mathrm{Tr}\left\{\left(\delta_{jj'}\hat{P}^e - \frac{1}{4}\left(\hat{D}_j\hat{D}_{j'}^{\dagger}+\hat{D}_{j'}\hat{D}_j^{\dagger}\right)\right)\hat{\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{p})\right\}, \tag{18}$$

其中，$\delta_{jj'}$ 是克罗内克符号。式（17）中的第二项是感应扩散张量，由场光子受激吸收/发射过程中原子动量的涨落决定

$$D_{jj'}^{(ind)} = \hbar^2k^2\mathrm{Tr}\left\{\mathscr{L}_j^{(1)}\{\hat{\eta}_{j'}\}\right\}, \tag{19}$$

其中，矩阵 $\hat{\eta}_j(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 满足方程

$$\frac{\mathbf{p}}{M}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\hat{\eta}_j = \mathscr{L}^{(0)}\{\hat{\eta}_j\} + \mathscr{L}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}\} - \hat{\sigma}\,\mathrm{Tr}\left\{\mathscr{L}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}\}\right\}$$
$$\mathrm{Tr}\{\hat{\eta}_j\} = 0, \tag{20}$$

这等价于[31,32]中提出的方法。

请注意，对于二能级原子模型[9,10]，我们得到了低速度极限下光学势、摩擦系数（力关于速度的线性修正）以及扩散张量的解析表达式。然而，要分析亚多普勒激光冷却的可能性，就必须得到超出低速近似 $kv \ll \gamma$ 的力和扩散的表达式。方程（15）—（20）使我们能够得到双色场中力张量和扩散张量所需的表达式，并在考虑原子能级的真实超精细结构和塞曼结构的情况下分析亚多普勒冷却。

III. 原子激光冷却和囚禁的数值计算

作为一个具体示例，本节考虑 ^{171}镱原子，其能级在角动量投影上简并（图1），这是实现

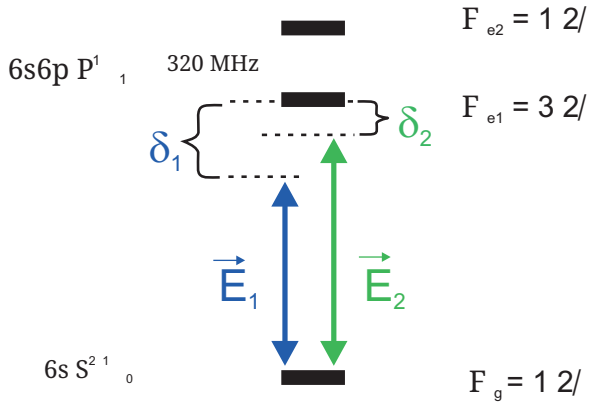


图 1. 镱-171用于在双色场中进行激光冷却和囚禁的能级示意图。实线箭头表示由双色场的分量 E_1 和 E_2 诱导的跃迁。

亚多普勒冷却[38]的必要条件。在这种情况下，我们考虑我们在[3]中提出的光场双线 ⊥ 线配置，以形成宏观势。在这种情况下，表达式（1）中的两个场 E_1和 E_2 均由具有正交线偏振的反向传播波构成（图2）

$$\mathbf{E}_\alpha(z) = E_{0\alpha}\left(\mathbf{e}_x e^{ik_\alpha z} + \mathbf{e}_y e^{-ik_\alpha z}\right),\ \alpha=1,2, \tag{21}$$

其中，$k_\alpha=\omega_\alpha/c$ 为波矢（c 为光速），$E_{0\alpha}$ 为相应行波的振幅。我们将 δ_1 和 δ_2 选作频率分量 ω_1 和 ω_2 相对于与光学跃迁 $F_g=1/2\to F_e=3/2$ 共振的失谐（图 1）。在这种情况下，两个场具有接近的波矢 $k_2\simeq k_1=k$，$\Delta k=k_2-k_1\ll k$，并且它们的相对相位 $\Delta\phi=\Delta k\,z=(\delta_2-\delta_1)z/c$ 是坐标的缓慢函数，该函数决定了双色势的宏观周期 [3,9,10]

$$\Lambda = \frac{\pi c}{|\omega_2-\omega_1|} = \frac{\pi c}{|\delta_2-\delta_1|}. \tag{22}$$

为形成激光冷却的耗散机制，我们选择失谐 δ_2，使其接近跃迁 $F_g=1/2\to F_e=3/2$ 的共振。由（22）可知，为形成厘米尺度的宏观势，$|\delta_1|$的值必须选在 $5-30$ GHz 范围内。

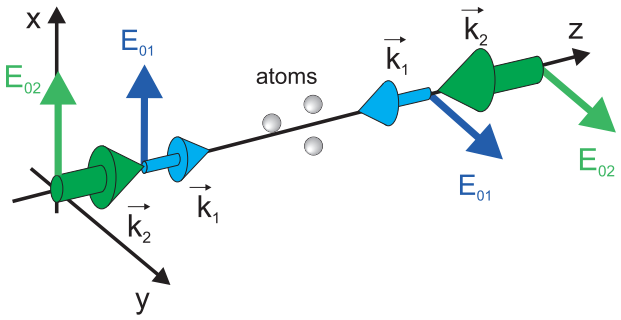


图 2. 双线偏振 ⊥ 线偏振双色场配置。

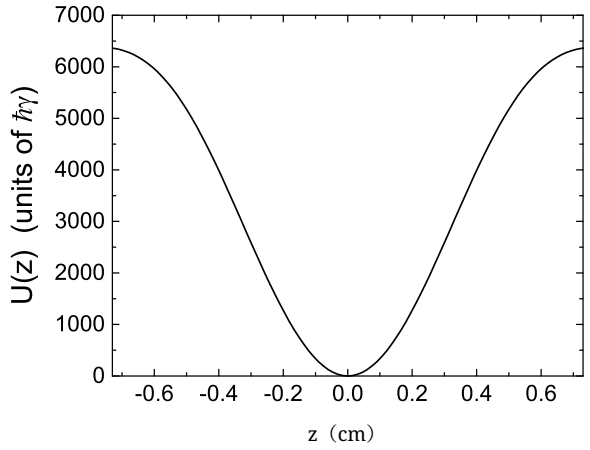


图 3. 双色场中的宏观光学势 U(z)，以 $\hbar\gamma$ 为单位。场失谐为 $\delta_1 = -346\gamma$ ($\simeq$ 10GHz) 和 $\delta_2 = -3\gamma$。频率分量的光波强度分别为 $I_1 \simeq 57$ W/cm^2 ($\Omega_{01} \simeq 22\gamma$) 和 $I_2 \simeq 0.4$ W/cm^2 ($\Omega_{02} \simeq 1.9\gamma$)。

图 3 展示了在双 lin⊥lin 构型（21）下，为 ^{171}镱原子形成的典型宏观光学势曲线。例如，对于失谐 $\delta_1 = -346\gamma$（$\simeq$ 10GHz），$\delta_2 = -3\gamma$，宏观势的周期为 $\Lambda = 1.2$ cm。在这种情况下，当行波强度分别为 $I_1 \simeq 57$ W/cm^2（$\Omega_{01} \simeq 22\gamma$）和 $I_2 \simeq 0.4$W/cm^2（$\Omega_{02} \simeq 1.9\gamma$）时，光学势深度达到$\Delta U_{opt} \simeq 6400\,\hbar\gamma$（或以温度单位表示为 ~ 8.8 K），与磁光阱的势阱深度相当，足以捕获、冷却和束缚原子。

图 4 显示了光学势中心和斜率处的力随速度的变化关系。可以看出，在低速度区域，力呈现出激光冷却亚多普勒机制的典型变化规律[38]。此外，当速度 $v = \pm|\delta_2|/k$ 时，还会出现极大值，这是由特定速度群中的原子与反向传播的

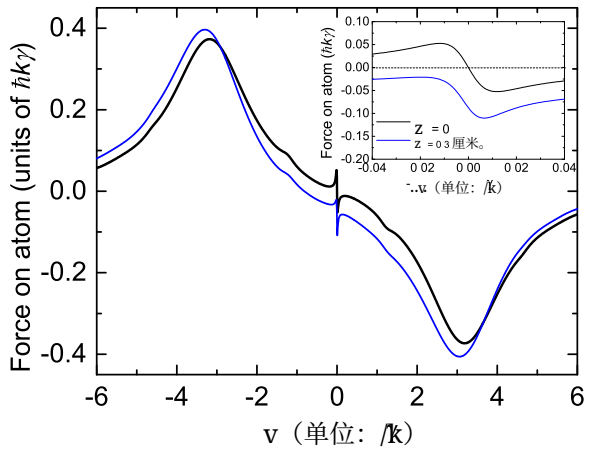
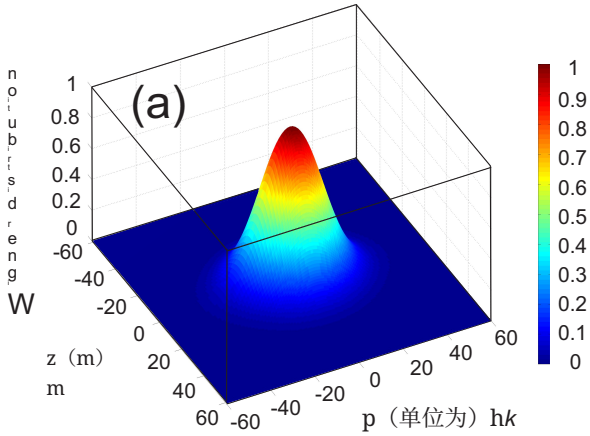


图4. 原子以速度 v 在双色场中运动时受到的力：在光学势全局最小值区域 $z = 0$（黑线）以及光学势斜率处 $z = 0.3$ 厘米（蓝线）。场参数对应于图3。



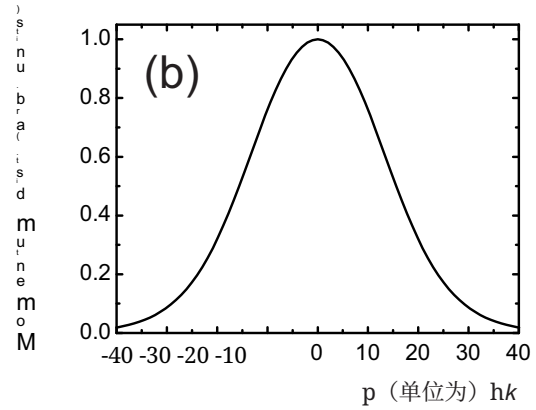


图5.（a）双色场双 lin ⊥ lin 构型的宏观势中原子相位分布$\wp$(z, p)的维格纳函数，以及（b）冷原子的动量分布。场参数对应于图3。

由于多普勒效应而产生的 E_2 场行波。请注意，另一超精细组分 $F_{e_2} = 1/2$ 的存在会导致力对速度的依赖关系中出现额外的共振，这些共振间隔为 $\delta v = \Delta_{hf}/k \simeq 11\gamma/k$（位于图4所示区域之外）。从光学陷阱中心移开时，可以清楚地看到偶极力在较宽速度范围内的整流效应（见图4中的蓝线）。

此类势阱中受困原子的温度和尺寸可由福克-普朗克方程 (11) 的稳态解求得。对于图 3 中的参数，激光冷却温度达到亚多普勒值 $T \simeq 0.1\,\hbar\gamma/k_B \sim 130\,\mu$K（见图 5），原子云的尺寸为 $\sim 28\,\mu$m。请注意，在所考虑的跃迁 $F_g = 1/2 \to F_e = 3/2$ 下，磁光阱中可达到的多普勒温度约为 $T_D \simeq 0.5\,\hbar\gamma/k_B \sim 700\,\mu$K，因为由 $\sigma_+ - \sigma_-$ 构型的磁场形成的标准磁光阱中所存在的亚多普勒冷却机制不适用于这一跃迁[38]。

耗散阱的一项重要特性是能够直接从热蒸气中捕获原子。

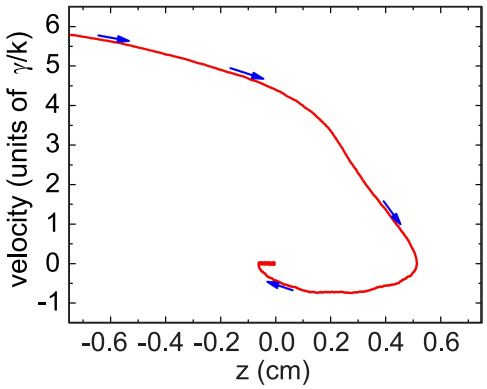


图6. 原子进入由图3参数下的双色场双线偏振配置形成的宏观光学阱时的相空间轨迹。阱边界处原子的初始速度为 $v_c = 5.8\gamma/k \simeq 67$米/秒。蓝色箭头表示轨迹演化方向。

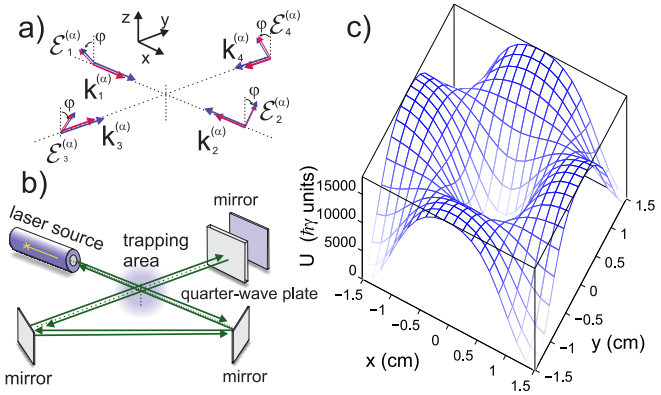


图7. 由四束双频光波形成的宏观二维光学势，其线偏振方向与 z 轴的夹角为 $\varphi = \pi/4$ （a）。光场的空间构型由折叠驻波的几何结构形成（b）。宏观光学势（c）的俘获区域深度为 $\Delta U \simeq 15200\,\hbar\gamma \simeq 21$ K。构成该光场的行波的光场强度和频率对应于图3中的参数。

捕获原子的数量可以根据[39,40]中给出的关系式估算。

$$N_c = \frac{L^2}{\sigma_c}\left(\frac{v_c}{u}\right)^4, \tag{23}$$

其中，v_c 是原子被捕获到阱中的速度，$u = (2k_BT/M)^{1/2}$ 是蒸气中原子的最概然速度（温度为 $T = 300$ K 时，镱原子的该速度为 170 米/秒），L 是阱的大小，σ_c 是原子将另一个原子从阱中驱逐出去的截面。因此，可通过采用使 v_c最大化的场配置，或使用额外的原子束塞曼减速器来有效降低 u，从而增加受困原子的数量。图6展示了原子进入阱时在相空间 (z, v) 中的轨迹。该轨迹根据朗之万方程计算得出（例如参见[41,42]）；这些方程描述了原子在光力及相关随机扩散作用下的运动。对于图3所示的参数，原子能够被捕获到阱中的速度为 $v_c \simeq 5.8\gamma/k \simeq 67$ 米/秒。据此可理论估算捕获原子数 $N_c \simeq 4 \times 10^{11}$，其值与磁光阱中捕获的原子数相当。

IV. 宏观尺度的多维光学晶格

通过叠加若干行波双色波，可以在空间中形成宏观光学晶格的二维构型和三维构型。对于双色晶格[3],以及由单色光波形成的光学晶格，空间拓扑可能取决于构成该场的波的相对相位[43,44]。因此，与相位无关的拓扑光学晶格具有最大的实际应用价值。此类晶格通常可由数量 M 不超过 $N+1$的波形成，其中 N 为空间维数。因此，与相位无关的宏观光学晶格二维构型最多由三束行波双色波形成，而三维构型则最多由四对波形成[3]。

或者，通过在二维和三维构型中结合由折叠驻波形成的反向传播波，可以获得具有与相位无关拓扑的光学晶格（图7）。在这种光场中，行波的相位彼此关联，镜面位移不会导致势形状发生相位诱导的变化，而只会使其发生空间平移[45]。如图7所示，采用折叠驻波几何结构的二维构型会形成一个井状宏观势，用于原子俘获与冷却。其深度与一维模型所得估算值吻合良好（见图3）。以类似方式可形成三维构型的宏观光学阱。

因此，由每个方向上的 lin ⊥ lin 构型形成的二维和三维光学阱，可作为标准磁光阱的替代方案，用于从热组分中俘获原子，并将原子激光冷却至亚多普勒温度。

第五部分：结论

本文展示了如何利用双色场为碱土原子及类似原子构造深的纯光学耗散宏观势。这种宏观势能够直接俘获并冷却来自高温组分的原子，为磁光阱提供了一种替代方案。我们以 ^{171}镱原子为例，对反向传播波组成的双线偏振 ⊥ lin构型中的原子进行了直接数值计算。在这种场中，可以将受困的 ^{171}镱原子冷却至亚多普勒温度$T \simeq 130\mu$K（见图5），这是这些原子在磁光阱中无法达到的。此外，冷原子云的尺寸可达到亚毫米量级，原子数与磁光阱中的原子数相当。

所提出的纯光学陷阱可被视为磁光阱的一种替代方案，适用于量子传感器、量子存储器和光频标准；这些应用要求对冷原子探测区域内的磁场进行精确控制。

总之，我们指出，碱土金属及类似原子在基态下仅具有核磁矩，其大小比电子磁矩小三个数量级。这大幅降低了所提出的激光冷却方案对残余磁场的敏感性。我们的估算表明，存在残余磁场 B $<$ 1G 并不会导致本文结果发生显著变化。同时，这样的条件切实可行，也是实验装置的标准要求。

致谢

本研究获得俄罗斯科学基金会第 25- 22-00314 号资助，https://rscf.ru/project/25-22-00314/

数据可用性声明

数据可向作者索取

附录 A

算符 $\hat{\mathscr{L}}^{(k)}$ 作用于矩阵 $\hat{\sigma}$的显式形式可写成下列方程的形式。反冲参数 $-i\mathbf{k}q_j$ 的展开的零阶项 $\hat{\mathscr{L}}(0)$ 为

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}^{(0)}\{\hat{\sigma}\}^{ee} &= -\gamma\hat{\sigma}^{ee} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{ee}\hat{\sigma}^{ee} - \hat{\sigma}^{ee}\hat{H}_0^{ee}\right] \\
&- i\sum_{\alpha=1,2}\left(\hat{V}_\alpha(\mathbf{r})\hat{\sigma}_\alpha^{ge} - \hat{\sigma}_\alpha^{eg}\hat{V}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\right), \\
\hat{\mathscr{L}}^{(0)}\{\hat{\sigma}\}^{gg} &= \gamma\sum_{s=0,\pm1}\hat{D}_s^\dagger\hat{\sigma}^{ee}\hat{D}_s - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{gg}\hat{\sigma}^{gg} - \hat{\sigma}^{gg}\hat{H}_0^{gg}\right] \\
&- i\sum_{\alpha=1,2}\left(\hat{V}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\hat{\sigma}_\alpha^{eg} - \hat{\sigma}_\alpha^{ge}\hat{V}_\alpha(\mathbf{r})\right), \qquad \text{(A.1)} \\
\hat{\mathscr{L}}^{(0)}\{\hat{\sigma}\}_\alpha^{eg} &= -(\gamma/2 - i\omega_\alpha)\,\hat{\sigma}_\alpha^{eg} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{ee}\hat{\sigma}^{eg} - \hat{\sigma}^{eg}\hat{H}_0^{gg}\right] \\
&- i\left(\hat{V}_\alpha(\mathbf{r})\hat{\sigma}^{gg} - \hat{\sigma}^{ee}\hat{V}_\alpha(\mathbf{r})\right), \ \alpha = 1,2, \\
\hat{\mathscr{L}}^{(0)}\{\hat{\sigma}\}_\alpha^{ge} &= -(\gamma/2 + i\omega_\alpha)\,\hat{\sigma}_\alpha^{ge} - \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0^{gg}\hat{\sigma}^{ge} - \hat{\sigma}^{ge}\hat{H}_0^{ee}\right] \\
&- i\left(\hat{V}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\hat{\sigma}^{ee} - \hat{\sigma}^{gg}\hat{V}_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\right), \ \alpha = 1,2.
\end{aligned}$$

对于算符 $\hat{\mathscr{L}}^{(1)}$ 的第 j 个笛卡尔分量，我们 have

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}\}^{ee} &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2}\left(\hat{F}_{\alpha_j}\hat{\sigma}_\alpha^{ge} + \hat{\sigma}_\alpha^{eg}\hat{F}_{\alpha_j}^\dagger\right), \\
\hat{\mathscr{L}}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}\}^{gg} &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2}\left(\hat{F}_{\alpha_j}^\dagger\hat{\sigma}_\alpha^{eg} + \hat{\sigma}_\alpha^{ge}\hat{F}_{\alpha_j}\right), \\
\hat{\mathscr{L}}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}\}_\alpha^{eg} &= -\frac{1}{2}\left(\hat{F}_{\alpha_j}\hat{\sigma}^{gg} + \hat{\sigma}^{ee}\hat{F}_{\alpha_j}\right), \ \alpha = 1,2, \\
\hat{\mathscr{L}}_j^{(1)}\{\hat{\sigma}\}_\alpha^{ge} &= -\frac{1}{2}\left(\hat{F}_{\alpha_j}^\dagger\hat{\sigma}^{ee} + \hat{\sigma}^{gg}\hat{F}_{\alpha_j}^\dagger\right), \ \alpha = 1,2,
\end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

其中 $\hat{\mathrm{F}}_{\alpha_j} = -\partial_{\mathbf{r}_j}\hat{\mathrm{V}}_\alpha(\mathbf{r})$ 是力算符的第 j 个分量。

二阶项为

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\sigma}\}^{ee} &= \frac{i}{8}\sum_{\alpha=1,2}\left[\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha\right)\hat{\sigma}_\alpha^{ge} - \hat{\sigma}_\alpha^{eg}\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha^\dagger\right)\right], \\
\hat{\mathscr{L}}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\sigma}\}^{gg} &= \frac{i}{8}\sum_{\alpha=1,2}\left[\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha^\dagger\right)\hat{\sigma}_\alpha^{eg} - \hat{\sigma}_\alpha^{ge}\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha\right)\right] \\
&+ \hat{\Gamma}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\sigma}^{ee}\}, \qquad \text{(A.3)} \\
\hat{\mathscr{L}}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\sigma}\}_\alpha^{eg} &= \frac{i}{8}\left[\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha\right)\hat{\sigma}^{gg} - \hat{\sigma}^{ee}\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha\right)\right], \\
\hat{\mathscr{L}}_{jj'}^{(2)}\{\hat{\sigma}\}_\alpha^{ge} &= \frac{i}{8}\left[\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha^\dagger\right)\hat{\sigma}^{ee} - \hat{\sigma}^{gg}\left(\partial_{\mathbf{r}_j}\partial_{\mathbf{r}'_j}\hat{V}_\alpha^\dagger\right)\right], \\
\alpha &= 1,2,
\end{aligned}$$

其中包含与偶极相互作用算符 $\hat{\mathrm{V}}_\alpha$的二阶导数成正比的项。这里，$\hat{\Gamma}^{(2)}{}_{jj'}\{\hat{\sigma}\}$ 是自发弛豫算符 (7) 关于反冲参数展开的二阶项

$$\hat{\Gamma}_{ij}^{(2)}\{\hat{\sigma}\} = \frac{\gamma}{5}\sum_{m,n}\left(\delta_{ij}\delta_{mn} - \frac{1}{4}\left[\delta_{in}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jn}\right]\right)\hat{D}_m^\dagger\hat{\sigma}\hat{D}_n. \qquad \text{(A.4)}$$

所给出的算符 $\hat{\mathscr{L}}^{(\kappa)}$, ($\kappa = 0, 1, 2$)使我们能够得到双色场中原子的力张量和扩散张量表达式，并在半经典福克-普朗克方程 (11)的框架内分析原子动力学。

[1]A. Kazantsev、G. Surdutovich和V. Yakovlev，《光对原子的机械作用》（World Scientific，新加坡，1990）。[2]E. Raab、M. Prentis、A. Cable、S. Chu和D. Pritchard，“利用辐射压力囚禁中性钠原子”，Phys. Lev. Lett. 59, 2631–2634 (1987)。[3]O. N. Prudnikov、R. Y. Ilenkov、A. V. Taichenachev、V. I. Yudin和S. N. Bagaev，“用于中性原子激光冷却与囚禁的深宏观纯光学势”，Physical Review A 108, 043107 (2023)。[4]A. P. Kazantsev和I. V. Krasnov，“共振辐射压力梯度力的整流”，《实验与理论物理学杂志快报》46, 332–336 (1987)。[5]R. Grimm、Y. B. Ovchinnikov、A. I. Sidorov和V. S. Letokhov，“在双频驻波光场中观测到强整流偶极力”，Physical Review Letters 65, 1415 (1990)。[6]J. Söding、R. Grimm、Y. B. Ovchinnikov、P. Bouyer和C. Salomon，“利用受激光力实现短距离原子束减速”，Physical Review Letters 78, 1420–1423 (1997)。[7]M. A. Chieda和E. E. Eyler，“亚稳态氦的双频减速”，Physical Review A 86, 053415 (2012)。

[8]T. Na Narong、T. Liu、N. Raghuram和L. Hollberg，“在窄 $^{1}S_{0} \rightarrow {}^{3}P_{1}$ 跃迁上对镱原子的受激减速”，Physical Review A 104, 053117 (2021)。[9]O. N. Prudnikov、A. S. Baklanov、A. V. Taichenachev、A. M. Tumaikin和V. I. Yudin，“双色场中的原子动力学”，《实验与理论物理学杂志》117, 222–231 (2013)。[10]O. N. Prudnikov、A. V. Taichenachev和V. I. Yudin，“椭圆偏振波形成的双色场中的原子动力学”，《量子电子学》47, 438–445 (2017)。[11]S. Falke、H. Schnatz、J. S. R. V. Winfred、T. Middelmann、S. Vogt、S. Weyers、B. Lipphardt、G. Grosche、F. Riehle、U. Sterr和C. Lisdat，“PTB的锶-87光学频率标准”，《计量学》48, 399 (2011)。[12]N. Poli、C. W. Oates、P. Gill和G. M. Tino，“光学原子钟”，《新物理评论》36, 555 (2013)。[13]A. D. Ludlow、M. M. Boyd、J. Ye、E. Peik和P. O. Schmidt，“光学原子钟”，《现代物理评论》87, 637–701 (2015)。[14]A. P. Kulosa、D. Fim、K. H. Zipfel、S. Rühmann、S. Sauer、N. Jha、K. Gibble、W. Ertmer、E. M. Rasel、M. S. Safronova、U. I. Safronova和S. G. Porsev，“迈向镁晶格钟：观测 $^{1}S_{0}-{}^{3}P_{0}$ 跃迁并测定魔法波长”，Physical Review Letters 115, 240801 (2015)。[15]A. N. Goncharov、A. E. Bonert、V. I. Baraulya、M. A. Tropnikov、S. A. Kuznetsov、A. V. Taichenachev和S. N. Bagayev，“光学原子钟”，《量子电子学》48, 410 (2018)。[16]M. Takamoto、I. Ushijima、N. Ohmae、T. Yahagi、K. Kokado、H. Shinkai和H. Katori，“利用一对可搬运光学晶格钟检验广义相对论”，Nat. Photonics 14, 411–415 (2020)。[17]J. P. Covey、A. Sipahigil、S. Szoke、N. Sinclair、M. Endres和O. Painter，“基于镱原子与硅纳米光子学的电信波段量子光学”，《物理评论应用》11, 034044 (2019)。[18]A. V. Taichenachev、A. N. Goncharov、A. E. Bonert、V. I. Baraulya、M. A. Tropnikov、S. A. Kuznetsov、O. N. Prudnikov和S. N. Bagaev，“超冷镁原子的原子干涉测量：频率标准与量子传感器”，《物理学杂志：会议系列》1508, 012002 (2020)。[19]F. Riehle、A. Witte、T. Kisters和J. Helmcke，“钙原子干涉测量”，《应用物理B》54, 333 (1992)。[20]J. Rudolph、T. Wilkason、M. Nantel、H. Swan、C. M. Holland、Y. Jiang、B. E. Garber、S. P. Carman和J. M. Hogan，“锶689 nm互组合线上的大动量转移时钟原子干涉测量”，Physical Review Letters 124, 083604 (2020)。[21]L. Hu、E. Wang、L. Salvi、J. N. Tinsley、G. M. Tino和N. Poli，“以光学钟跃迁进行的锶原子干涉测量：用作重力仪和重力梯度仪”，《经典与量子引力》37, 014001 (2019)。[22]C. Adams和E. Riis，“中性原子的激光冷却与囚禁”，Prog. Quonr. Elecr 21, 1 (1997)。[23]A. Bizzarri和M. C. E. Huber，“中性钡6s6p $^{1}p^{\circ}_{1}$ 共振能级的跃迁概率”，Physical Review A 42, 5422–5424 (1990)。[24]J. Brust和A. C. Gallagher，“钡与惰性气体碰撞中的激发转移”，Physical Review A 52, 2120–2131 (1995)。[25]M. Kleinert、M. E. Gold Dahl和S. Bergeson，“利用光学频率梳测量399 nm处镱I $^{1}s_{0}-{}^{1}p_{1}$ 跃迁频率”，Physical Review A 94, 052511 (2016)。[26]R. Maruyama、R. H. Wynar、M. V. Romalis、A. Andalkar、M. D. Swallows、C. E. Pearson和E. N. Fortson，“对亚多普勒冷却的研究，载于

镱磁光阱，” Phys. Rev. A 68, 011403 (2003). [27]H. Katori, T. Ido, Y. Isoya, 和 M. Kuwata-Gonokami，“锶原子的磁光囚禁与冷却，直至达到光子反冲温度，” Phys. Rev. Lett. 82, 1116–1119 (1999). [28] O. N. Prudnikov, R. Y. Il’enkov, A. V. Taichenachev, 和 V. I. Yudin，“窄线光学跃迁激光冷却的标度定律，” Phys. Rev. A 99, 023427 2019( ). [29]O. N. Prudnikov, R. Y. Ilenkov, A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, 和 V. I. Yudin，“考虑反冲效应时单色场中低密度原子系综的稳态，”《实验与理论物理学杂志》112, 939– 945 (2011). [30]J. Dalibard 和 C. Cohen-Tannoudji，“激光中的原子运动：半经典描述与量子描述之间的联系，” J.Phys. B. 18, 1661 1683 1985– ( ). [31]J. Javanainen，“多能级原子的密度矩阵方程与光子反冲，” Phys. Rev. A 44, 5857–5880 (1991).[32]S. M. Yoo 和 J. Javanainen，“多能级原子激光冷却的低强度极限，” Phys. Rev. A 45, 3071–3083 (1992). [33]O. N. Prudnikov, A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, 和 V. I. Yudin，“偏振梯度激光冷却：一种构造原子光刻强局域结构的方法，” Phys. Rev. A 75, 023413 (2007). [34]A. A. Kirpichnikova, O. N. Prudnikov, R. Y. Il’enkov, A. V. Taichenachev, 和 V. I. Yudin，“具有不同反冲能量的原子在偏振梯度场中的激光冷却极限，”《量子电子学》50, 939 – 946 (2020). [35]A. A. Kirpichnikova, O. N. Prudnikov, A. V. Taichenachev, 和 V. I. Yudin，“原子激光冷却问题中的伊藤–斯特拉托诺维奇两难：半经典近似的适用范围，”《量子电子学》52, 130 – 136 (2022). [36]A. V. Bezverbnyi, O. N. Prudnikov, A. V. Taichenachev, A. V. Tumaikin, 和 V. I. Yudin，“共振非均匀偏振激光场中原子的光压力、摩擦系数和扩散系数，”《实验与理论物理学杂志》96, 383–401 (2003). [37]O. N. Prudnikov, A. V. Taichenachev, A. V. Tumaikin, 和 V. I. Yudin，“椭圆偏振波产生的场中的原子动力学，”《实验与理论物理学杂志》98, 438–454 (2004). [38]J. Dalibard 和 C. Cohen-Tannoudji，“利用偏振梯度实现低于多普勒极限的激光冷却：简单理论模型，” Journal of the Optical Society of America B 6, 2023–2045 (1989). [39]C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, 和 C. Wieman，“蒸气池中的超冷受困原子，” Phys. Rev. Lett. 65, 1571–1574 (1990). [40]K. E. Gibble, S. Kasapi, 和 S. Chu，“蒸气池中改进的磁光囚禁，” Opt. Lett. 17, 526–528 (1992). [41]J. Javanainen，“多能级原子半经典激光冷却理论的数值实验，” Phys. Rev. A 46, 5819–5835 (1992). [42]O. N. Prudnikov 和 E. Arimondo，“强驻波中的准经典激光冷却，” J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 6, 336–344 (2004). [43]P. Jessen 和 I. Deutsch，“光学晶格，”《原子、分子与光学物理学进展》37, 95–138 (1996). [44]A. Hemmerich 和 T. W. Hänsch，“光束缚的二维原子晶体，” Phys. Rev. Lett. 70, 410–413 (1993). [45]G. D. Domenico, N. Castagna, P. M.D., T. P., T. A.V., 和 Y. V.I.，“关于光学晶格的稳定性，” Laser Physics 15, 1674–1679 (2005)。