arXiv:2603.03658v1 [math.LO] 4 Mar 2026

微分伽罗瓦理论中的参数化 D-扭子

OMAR LE´ON S´ANCHEZ 和 David Meretzk Y

Abstract. 在特征为零且具有多个可交换导子的微分域背景下，我们讨论参数化 D-扭子上的 #-微分方程及其相关伽罗瓦扩张的概念。运用模型论方法，我们发现，任何广义强正规扩张（按 Pillay [14] 以及更一般地，Le´on S´anchez [9] 的意义）都是某个参数化 D-扭子的伽罗瓦扩张。

此外，我们证明了 Kolchin 关于微分上同调的一个参数化版本；该结果本身也具有独立价值。我们利用它给出一个必要且充分的上同调条件，用以判定广义强正规扩张何时是其伽罗瓦群（作为参数化 D-群）上的某个对数微分方程的伽罗瓦扩张。我们还给出若干主要结果的一般模型论版本。

Contents

1. 引言 1 2. 一些模型论一般性 6 3. 参数化 D-扭子及其微分伽罗瓦扩张 10 4. Kolchin 上同调定理的参数化版本 15 5. 主要结果 18 参考文献 19

1. Introduction

在经典伽罗瓦理论中，域 L/K 的一个（有限）伽罗瓦扩张通常定义为一个正规有限可分扩张。随后可以证明（例如参见 [4,第 4 节3] ），这等价于要求 L 是某个 K上的可分多项式的分裂域。这一等价关系与伽罗瓦对应都是基本结果，在伽罗瓦关于多项式方程根式可解性的定理中发挥着关键作用。

在微分域和微分方程（零特征且导子可交换）的背景下，人们发展出了若干种“伽罗瓦理论”；其中一些适用于研究线性偏微分方程， [1, 3, 20] 通常称为（参数化）皮卡-维西理论；另一些则是

Date: 2026 年 3 月 5 日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 03C60、03C98、12H05。*Key words and phrases.* 微分域、强正规扩张、模型论、伽罗瓦上同调。Omar Le´on S´anchez 获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/V03619X/1。

皮卡-维西理论的广泛推广，旨在纳入仅具备某种关键性质的扩张：某种形式的（强）正规性，参见例如 [6, 8, 11, 14]。据作者所知，[11, §3.5], 中所述的广义强正规理论具有最一般的形式；也就是说，所有其他“微分伽罗瓦理论”中所考虑的、具有完备伽罗瓦对应的微分扩张，都是广义强正规扩张的实例。

简而言之，在一个环境微分闭域 $(\mathcal{U}, \Pi) \models \mathrm{DCF}_{0,m}$ 中，若一个微分域扩张 L/K 在 L 上有限（微分）生成，并且存在结构 $(\mathcal{U}, \Pi)$ 中一个 K-可定义集 X，使得 (i) 对所有 $\sigma \in \mathrm{Aut}_\Pi(\mathcal{U}/K)$，都有 $\sigma(L) \subset L\langle X\rangle$，则称 L 具有强正规性；以及 (ii) $K\langle X\rangle \cap L = K$，这一条件可称为无新常数 条件（亦称弱正交性）。这里，$L\langle X\rangle$ 表示由 $X = X(\mathcal{U})$ 的所有条目在 L 上生成的微分域，$K\langle X\rangle$ 的含义类似。

本文旨在将上述（代数）伽罗瓦理论中的基本结果，推广到广义强正规扩张的情形。粗略地说，第 5 节的主要结果表明，任何此类扩张都是某个参数化 D-扭子上 #-微分方程的“分裂微分域”。我们将在第 3 节严格定义这些概念。

我们的结果的特例由 Kolchin 在皮卡-维西和强正规情形下于 [6] 给出，并由 Pillay 在有限维（即 Π-类型为零）广义强正规情形下，在附加假设下于 [14, 15] 证明。在无限维情形下，我们结果的某些版本（在类似的附加假设下）见第一作者的工作 [9]。这些论文中的论证使用伽罗瓦上同调工具，证明 Kolchin 和 Pillay 所称的“G-原元”型结果。在第2节中，我们从文献中汇集证明主定理以及一种模型论推广所必需的上同调结果的模型论推广。

现在，我们将更详细地介绍我们的结果，以及它们在上述文献范围内的位置。回顾一下，定义在 K 上的代数 D-群，是指配备了正则截面 t 的代数群 G；该截面取自定义在 K上的延拓（或扭切丛） $\tau_\Pi G$，并满足 $t\colon G \to \tau_\Pi G$ 是群同态。这诱导出结构层 $\mathcal{O}_G$ 上的微分 K-代数结构，并且我们还要求这些导子彼此可交换。(G, t)上的 #-微分方程定义为

$$\nabla_\Pi(x) = t(x)$$

其中，$\nabla_\Pi(x) = (x, D_1x, \ldots, D_mx)$，满足 $\Pi = \{D_1, \ldots, D_m\}$，而 (G,t) 的 #-点集记为 $(G,t)^\#$，它是 G 中该 #- 微分方程的解集。注意，$(G,t)^\#$ 是 $(\mathcal{U},\Pi)$ 中的可定义群，或等价地说，是一个 Π-代数群；此外，它在如下意义下是有限维的：其 Π-类型为零（换言之，由一个一般点生成的微分域在 K 上具有有限超越次数）。令 e 为 G 的单位元，$\tau_\Pi G_e$ 为 $\tau_\Pi G$ 在 e 上方的纤维（这可以识别为 G 的李代数的 m 重积）。对于 $\tau_\Pi G_e$ 中的一个 K-点 α，(G,t) 上的 α-对数微分方程定义为

$$\nabla_\Pi(x) = \alpha \cdot t(x) \tag{1.1}$$

其中，乘积 α 与 $t(x)$ 是在代数群 $\tau_\Pi G$ 中计算的。

对于 α-log 微分方程 (1.1)，我们将 K 上的一个（微分）伽罗瓦扩张定义为形如 $K\langle a\rangle$ 的微分域 L，其中 a 是该方程的某个解，且满足 $K\langle(G,\ t)^{\#}\rangle\cap L=K$。回顾一下，$K\langle(G,\ t)^{\#}\rangle$ 表示由 $(G,\ t)^{\#}(\mathcal{U})$ 的所有项在 K 上生成的微分域。

可以验证，若 a是(1.1)的一个解，则 $\mathcal{U}$ 中的解集是陪集 $a\cdot(G,\ t)^{\#}$。因此，若 $L=K\langle a\rangle$ 是 α-对数方程的伽罗瓦扩张，则可将 $L\langle(G,\ t)^{\#}\rangle$ 视为(1.1)的“分裂域”。此外，由定义可知，L 实际上是一个广义强正规扩张，并带有$X=(G,\ t)^{\#}$。由 [11, §3] 还可推知，伽罗瓦群

$$\mathrm{Aut}_{\Pi}(L\langle(G,t)^{\#}\rangle/K\langle(G,t)^{\#}\rangle), \tag{1.2}$$

连同其在 $tp(a/K)$上的正则作用，经由 $\sigma\mapsto a^{-1}\cdot\sigma(a)$同构于 $H^{\#}$，其中 H 是$(G,\ t)$在 K上的某个代数 D-子群，并且在中间微分域与定义于 K上的 H 的代数 D-子群之间存在自然的伽罗瓦对应。

上述对数微分方程的微分伽罗瓦扩张，是 $(G,t)^{\#}$-强正规扩张的例子，其中我们可以假设 $(G,t)^{\#}$ 是该扩张的伽罗瓦群（1.2）。现在可以进一步追问，所有这类正规扩张是否都能以这种方式得到。在目前的设定下，有几个原因表明情况并非如此。例如，形如（1.1）的方程的伽罗瓦扩张在 K 上具有有限超越次数（因为 $(G,t)^{\#}$ 是有限维的）；然而，只要 $m\geq 2$ （即至少有两个导子），就存在超越次数无限的广义强正规扩张，参见 [1, 8] 或 [9,例 6.3]。

超越次数无限的对数微分方程的伽罗瓦扩张见于 [1, 8]，更一般的情形见于 [9]。构造这类扩张需要 D-群的参数化版本。我们将导子集合 $\Pi=\mathcal{D}\cup\Delta$ 划分为若干部分，其中 $\mathcal{D}$ 非空，并在 Δ-域理论的框架下进行研究；也就是说，我们以 Δ-代数几何取代代数几何。相对于 $\mathcal{D}/\Delta$，参数化 D-群是一个 Δ-代数群 G，带有其参数化延拓 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G$ 的 Δ-正则截面 t（更多细节见第 3 节）。上文所述的大部分内容都可以推广到参数化情形。然而，此时尖点集合 $(G,t)^{\#}$ 由下列方程定义

$$\nabla_{\mathcal{D}}(x)=t(x)$$

其中 $\nabla_{\mathcal{D}}(x)=(x,\ D_1x$、.....、$D_rx)$，满足 $\mathcal{D}=\{D_1,\dots,D_r\}$，因此一般而言，它是一个无限维的 Π-群（换言之，具有正的 Π-类型）。类似地，对于 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G_e$ 的 α a K-点，α-对数微分方程 $\nabla_{\mathcal{D}}(x)=\alpha\cdot t(x)$ 的微分伽罗瓦扩张 L/K 通常在 K 上具有无限超越次数。这些伽罗瓦扩张是（$G,\ t$）$^{\#}$-强正规扩张的例子（其中我们可以假设（$G,\ t$）$^{\#}$ 是该扩张的伽罗瓦群），并且已在 [9] 中得到研究。现在可以将上述问题重新表述为：所有广义强正规扩张是否都能作为其（参数化）伽罗瓦群（$G,\ t$）上的对数微分方程的微分伽罗瓦扩张出现？微分代数扭子与微分伽罗瓦扩张之间的密切联系告诉我们，答案仍然是 否。

简而言之，(V,s) 是关于 (G,t) 的参数化 D-扭子，即一个（右） Δ-扭子 V，它以 G 为底，且 s 与作用相容（精确定义见第 3 节）。为简化记号，有时我们称 (V,s) $\circlearrowright$ (G,t) 是一个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子。

(V, s) 的 #-微分方程就是 $\nabla_{\mathcal{D}}(x) = s(x)$。正如我们上文所述，我们的主要结果（定理 5.1）将表明，任何广义强正规扩张都可以表示为某个参数化 D-扭子 (V, s) 上的 #-微分方程的伽罗瓦扩张，其中该扭子对应于此扩张的伽罗瓦群 (G, t)；这里允许对 Π 施行 $GL_m(\mathbb{Q})$-变换。此外，我们证明，当且仅当 V 是平凡扭子（即 V 有一个 K- 点）时，这种扩张才是 (G, t) 上某个对数微分方程的伽罗瓦扩张。

注记 1.1. 上文表明，非平凡扭子的存在蕴含着广义强正规扩张的存在，而这些扩张并非其伽罗瓦群上对数方程的微分伽罗瓦扩张。事实上确实如此，甚至在使用皮卡-范列夫扩张的单导数（常微分）情形中也能看出这一点。的确，在 [5], 中，他们对每个 $n \geq 3$给出了一个以 SO_n为伽罗瓦群的皮卡-范列夫扩张，它是非平凡 SO_n-扭子 [1]的函数域。

我们不清楚 Kolchin 是否知道上述注记中所述现象的例子。然而，Kolchin 的著作 [6]中的最后一个定理给出了一个相关的正面结果。该结果刻画了强正规扩张；用我们的术语来说，它们恰好是 $\mathcal{U}^{\Pi}$-强正规扩张，其中 $\mathcal{U}^{\Pi}$为 $\mathcal{U}$的 Π-常数域。Kolchin 的这一刻画，正如在 [6], 中所证明的那样，使用了他在那里所称的微分伽罗瓦上同调，他后来在 [7]中称之为 Kovacic 上同调。我们现在以我们的语言和记号重述 Kolchin 的定理，因为它以这种形式由我们的主定理得出。

定理 1.2。 [6, 第 9 章定理 6] 令 $\mathcal{U}^{\Pi}$ 和 K^{Π} 分别表示 $\mathcal{U}$ 和 K的 Π-常数。

a) 设 V 是连通代数群G 在 K^{Π}上的一个代数（右）扭子。对数微分方程在 V 上、定义于 K的一个解 a，当且仅当 $L^{\Pi} = K^{\Pi}$（等价地，$L \cap \mathcal{U}^{\Pi} = K^{\Pi}$）时，生成 K 的一个强正规扩张 $L = K\langle a\rangle$。*b)* 设 L 是 K 的一个强正规扩张，其伽罗瓦群为 G（$\mathcal{U}^{\Pi}$），其中 G是定义于 K^{Π}上的连通代数群。那么，存在一个 $a \in L$，它生成 K 上的 L，且 a 是代数扭子 V 上的一个对数微分方程的解；该代数扭子定义于 K，对应于 G。*Kolchin* 将这样的 a 称为 V-本原元。此外，若 $\mathrm{H}^1(K, G)$ 是平凡的，则可取 $V = G$，而 a 称为 G-本原元。

在 [14, 命题3.4]和 [15, 备注3.8], 中，Pillay 将 Kolchin 的上述定理部分推广到了有限维广义强正规设定。我们再次引用该定理，并稍作调整以符合我们的术语。

命题1.3。 [14, 命题3.4] 和 [15, 备注3.8]
a) 设 *(G, t)* 是 K 上的一个代数 *D*-群。对 *(G, t)* 上的对数微分方程的一个解 a，当且仅当 *(G, t)*$^{\#}$*(L)* = *(G, t)*$^{\#}$*(K)* 时，它生成一个 *(G, t)*$^{\#}$-强正规扩张 $L = K\langle a\rangle$。*b)* 设 L/K 是一个广义强正规扩张，其伽罗瓦群具有 *(G, t)*$^{\#}$ 的形式，其中 *(G, t)* 是 K 上的一个代数 *D*-群（这尤其意味着 L 在 K 上必须具有有限超越次数）。在额外假设 K 代数闭的情况下，我们得到 L 由一个对数微分方程的解在 K 上生成

[1]感谢 Michael Singer 指出了这个例子。

该方程定义在(G,t) 上。这样的解称为 G-本原元。

我们注意到，在 Pillay 的引言中， [15] 提到，将 Kolchin 的上述定理（定理 1.2 ）完整推广到广义强正规扩张的情形，是一个可能的目标，但文中并未实现；具体而言，就是修改命题1.3的 a) 部分，使其允许任意可定义扭子，并修改 b) 部分，去掉 K 代数闭包的假设。这个“可能的目标”正是本文所要实现的。还要指出，a) 和 b) 部分这两个假设之间的联系，包含在以下上同调命题中。回顾一下，H^1_Π 表示 Kolchin约束上同调，或者等价地，表示 DCF$_{0,\ m}$ 中的可定义伽罗瓦上同调（相对于 Π-微分闭包取值）；而 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{alg}}$ 则是通常的代数伽罗瓦上同调，或者等价地，表示 ACF$_0$理论中的可定义伽罗瓦上同调（相对于代数闭包取值）。

命题 1.4。 [14,命题 3。2] 设 G 是定义在 K上的代数群。若 K是代数闭的，则 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,G)$ 是平凡的。

该命题可视为 Kolchin 以下定理的直接推论，我们称之为***Kolchin*** 上同调定理。

定理 1.5。 [7,§VII.3] 设 G 是定义在 K上的代数群。那么，

$$\mathrm{H}^1_\Pi(K,G)\cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{alg}}(K,G)$$

第一作者的论文 [9], 将命题1.3推广到了参数化情形。回顾一下，在参数化语境中，我们有一个划分 $\Pi=\mathcal{D}\cup\Delta$。关于一组导子的概念 Δ（它界定了微分域扩张的 Π-类型），请参见第 3 节。

定理 1.6。 [9, 定理 5.11 和 5.7]
a) 设 (G,t) 是关于 $\mathcal{D}/\Delta$ 、定义在 K 上的参数化 D-群。对数微分方程的一个解 a 生成 $(G,t)^{\#}$-强正规扩张，当且仅当 $(G,t)^{\#}(L)=(G,t)^{\#}(K)$。***b)*** 设 L/K 是一个广义强正规扩张，且 Δ 限制了 L 在 K 上的 Π-类型。设 $(G,t)^{\#}$ 是 L/K 的伽罗瓦群，其中 (G,t) 是关于 $\mathcal{D}/\Delta$ 的参数化 D-群。在附加假设 (K,Δ) 是 Δ-闭的条件下， L 由 (G,t) 上一个（参数化）对数微分方程的解生成。

注1.7。我们注意到，在 $G=\mathcal{U}$ 和 t 为零截面的特殊情形下，上述定理的 a) 部分出现在 Landesman 对 $\mathcal{U}^{\mathcal{D}}$-强正规扩张的研究中，参见 [8, 命题3.64]。

值得注意的是，定理 1.6 的证明中用到了命题 1.4 的下述参数化类比，尽管文献 [9] 中并未明确说明这一点。

命题 1.8。 设 G 是定义在 K 上的 Δ-群。若(K,Δ) 是 Δ-闭的，则$\mathrm{H}^1_\Pi(K,G)$ 是平凡的。

尽管 [9], 中给出了上述命题的证明思路，但它可以立即由一个更一般的陈述推出，即 Kolchin 的

上同调定理（定理 1.5）的参数化类比。据我们所知，该类比尚未见于其他文献，值得关注。我们将在第 4 节证明其参数化版本；具体而言：

定理 1.9。设 G 是 K 上的一个 Δ-群。那么，存在一个典范同构

$$\mathrm{H}^1_\Pi(K,G) \cong \mathrm{H}^1_\Delta(K,G),$$

其中，后者表示相对于 Δ 的 *Kolchin* 上同调（等价地，在采用 Δ-微分闭包的约化结构 $(\mathcal{U},\Delta)$ 中的可定义上同调）。

正如我们在上文已经暗示的那样，本文的主要目的之一是充实定理 1.6 的内容。首先，在 (a) 部分，我们研究一般参数化 D-扭子的微分伽罗瓦扩张（而不再将讨论局限于参数化 D-群上的对数方程）；其次，在 (b) 部分，我们去掉 (K,Δ) 是 Δ-闭的假设，并给出一个判据，精确说明何时能够在伽罗瓦群上恢复对数微分方程的伽罗瓦扩张。因此，我们在此给出了广义强正规理论的一种恰当的一般性表述，且不需要额外的闭包或上同调假设。

我们现在陈述主定理，它推广了 Kolchin 定理 1.2、Pillay 的命题 1.3，以及第一作者的定理 1.6。

定理 1.10（**主要结果**）。

(1) 设 $\mathcal{D}\cup\Delta$ 是 Π 的一个划分，其中 $\mathcal{D}$ 非空，且 $(V,s) \circlearrowleft (G,t)$ 是一个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-挠子。若 (V,s) 的 #-微分方程的一个解 a 生成一个 $(G,t)^\#$-强正规扩张 $L = K\langle a\rangle_\Pi$，当且仅当 $(G,t)^\#(L) = (G,t)^\#(K)$。*(2)* 设 L 是一个具有 L/K 正则性的广义强正规扩张（因此微分伽罗瓦群是连通的）。那么，经过对 Π 进行一次 $GL_m(\mathbb{Q})$- 变换后，存在一个划分 $\mathcal{D}\cup\Delta$，其中 Δ 见证了 L/K 的 Π-类型；并且存在一个定义在 K 上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-挠子 $(V,s) \circlearrowleft (G,t)$，使得 $(G,t)^\#$ 是 L/K 的微分伽罗瓦群，而 L 是 (V,s) 的一个微分伽罗瓦扩张。事实上，L 同构于 $(V,s)^\#$ 的 Π-函数域。

此外，L/K 是关于 (G,t) 上的对数微分方程的微分伽罗瓦扩张，当且仅当与Π-扭子 $(V,s)^\# \circlearrowleft (G,t)^\#$ 相关的类在上同调中的自然映射下的像（利用定理 *1.9*）

$$\mathrm{H}^1_\Pi(K,(G,t)^\#) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$$

是平凡的。特别地，当 (K,Δ) 是 Δ-闭的时，情况便会发生，因为此时 $\mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$是平凡的。

在第2节中，我们将在完全超越理论中的可定义上同调这一一般性层面上，给出上述结果的模型论版本。

2. Some model-theoretic generalities

本节将阐述本文其余部分将用到的一般约定和结果。首先，我们回顾并详细讨论 [11]关于模型论可定义伽罗瓦理论的结果。固定一个具有虚元消去的全超越一阶理论 T。令 $\mathcal{U}$ 为理论 T 的怪兽模型，它在足够大的基数 κ下饱和。令 A为一个小的（相对于

κ） dcl-闭参数集，我们将在其上开展工作。令 M 为 A上的素模型的一个副本。

设 X 是一个 A-可定义集，且 $q \in S_n(A)$。遵循 [11]，我们称 q 强内在于 X，若对于 q的任意一对实现 b_1 和 b_2，$b_2 \in dcl(b_1, A, X)$。此外，回顾一下，若 q 在 $A \cup X$ 上有唯一的类型扩张，则称 q 与 X 弱正交。

事实 2.1. [11, 引理 2.2(i)] 类型 q 与 X 弱正交，当且仅当对于 q 的任意（等价地，某个）实现 b，我们有 $X(dcl(A, b)) = X(A)$。

若一个 dcl-闭集 B 相对于 X 是 A 的伽罗瓦扩张，我们称之为伽罗瓦扩张，若 $B = dcl(A, b)$ 且 $q = tp(b/A)$ 强内在于 X 并与之弱正交。这些条件体现了这样一种思想：A 的伽罗瓦扩张具有一个（外在的）可定义伽罗瓦群，它存在于 $dcl(A, X)$ 中。我们在下述事实中将这一点精确表述。我们将该事实的第 (2) 部分称为扭子定理，并将在后文大量使用。第 (3) 部分有时称为间接伽罗瓦对应。

事实 2.2. [11, §2] 设 X 为一个 A-可定义集，且 $q = tp(b/A)$ 为一个既强内在于又弱正交于 X 的类型。设 Q表示 q 在 $\mathcal{U}$ 中的实现集，且 $Aut(Q/X, A)$ 表示在 $A \cup X$ 上初等的 Q 的置换群。

(1) 类型 q 是孤立的，因而在 M 中有一个实现 b。*(2)* $Aut(Q/X, A)$ 同构于一个位于 $dcl(A, X)$ 中的 A-可定义群 H。H 连通当且仅当 $acl(A) \cap dcl(A, b) = A$。此外，$Q$ 是 H 的一个A-可定义右扭子。*(3)* 群 H 称为伽罗瓦扩张扩张 $B = dcl(A, b)$ 的外在伽罗瓦群。此外，B 是 A 相对于 H 的伽罗瓦扩张，并且在 B/A 的中间 dcl-闭集与 H的 A-可定义子群之间存在伽罗瓦对应。

例 2.3. 设 $T = \mathrm{DCF}_{0,m}$。将导子记为 Π，将Π-常数域记为 $\mathcal{U}^{\Pi}$。以下例子的进一步细节见 [11, §3]。

(1) 若 $L = K\langle b\rangle$ 是 Kolchin [6, 第 VI 章], 意义下的强正规扩张，则它是上述意义下相对于 $\mathcal{U}^{\Pi}$ 的伽罗瓦扩张；即$tp(b/K)$是强内在的，且与 $\mathcal{U}^{\Pi}$弱正交。在此情形下，外在微分伽罗瓦群可等同于位于 $\mathcal{U}^{\Pi}$中的一个代数群。(2) 若 L/K 是 Landesman [8]意义下的（参数化）Δ-强正规扩张，其中 $\Delta \subset \Pi$，则它是相对于 $\mathcal{U}^{\mathcal{D}}$ 的伽罗瓦扩张，其中$\mathcal{D} = \Pi \setminus \Delta$，并且在此情形下微分伽罗瓦群是 $\mathcal{U}^{\mathcal{D}}$中的一个 Δ-代数群。(3) 更一般地，若 L/K 是 [9]意义下的 X-强正规扩张，其中 X 是一个 K-可定义集，则它是相对于 X 的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群同构于一个 Π-代数群。

现在回顾 [10]和 [16] 中关于可定义伽罗瓦上同调的一些基本结果。设 G是一个 A-可定义群。两个 A-可定义右扭子之间的 A-可定义同构，是一个与右作用相容的 A-可定义双射。我们用 $\mathcal{P}_{\mathrm{def}}(A, G)$ 表示 G 的 A-可定义右扭子的 A-可定义同构类集合。

我们还回顾一下 [16] 中可定义余循环的概念。若函数φ : Aut(M/A) $\to$ G(M) 满足以下两个条件，则称其为一个 A- 可定义余循环：

(1) $\forall\sigma,\ \tau\in$Aut(M/A), $\varphi(\sigma\tau)=\varphi(\sigma)\sigma(\varphi(\tau))$ (2) 存在一个来自 M 的元组 a ，以及一个 A- 可定义函数 $h(x,\ y)$，使得对于所有 $\sigma\in$ Aut(M/A)，都有 $h(a,\ \sigma(a))=\varphi(\sigma)$。

此外，若存在 $g\in G(M)$，使得对于所有 $\sigma\in$ Aut(M/A)，都有 $\varphi(\sigma)=g^{-1}\psi(\sigma)\sigma(g)$，则称两个余循环 φ 和 ψ 上同调等价。上同调在余循环上构成一个等价关系。常值余循环将 Aut(M/A) 中所有元素都映射到 $G(M)$ 的单位元。若一个可定义余循环与常值余循环上同调等价，则称其为平凡的。

我们用 $\mathrm{Z}^1_{\mathrm{def}}(A,\ G)$ 表示从 Aut(M/A) 到 $G(M)$ 的可定义余循环集。用上同调关系对 $\mathrm{Z}^1_{\mathrm{def}}(A,\ G)$ 取商，记为 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,\ G)$，并称其为第一（非阿贝尔）可定义伽罗瓦上同调集。

事实 2.4. [16]存在一个自然同构

$$\mathcal{P}_{\mathrm{def}}(A,G)\cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,G).$$

现在我们回顾 [10] 中可定义上同调的长正合列。这个正合列是计算可定义伽罗瓦上同调的主要工具。不过首先回顾一下：给定一个 A-可定义子群 $H\le G$，其中 H 在 G 中不一定正规，根据虚元消去， H 在 G 中的左陪集构成的带基点集合 G/H 可以与一个 A-可定义集合等同，而商映射 $G\to G/H$ 是A-可定义的。

事实 2.5. [10] 设 H 是 G 的一个 A-可定义子群。这会在可定义伽罗瓦上同调中诱导出一个正合列：

$$1\to H(A)\to G(A)\to (G/H)(A)\xrightarrow{\delta^1}\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,H)\xrightarrow{\iota^1}\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,G)$$

备注 2.6. 我们对映射 δ^1 和 ι^1 作几点说明。更多细节见 [10], [12], [13], 和 [16] 。

(1) 连接映射 δ^1 将 H 在 G 中的一个 A-可定义陪集 gH 映到与 gH 相关联的上同调类，其中 gH 被视为一个右 A-可定义扭子，其群为 H。(2) 由于 $H(M)\subseteq G(M)$，取值于 $H(M)$ 的可定义余循环也可视为取值于 $G(M)$，而这种识别在余循环层面诱导出 ι^1 。(3) 设 V 是一个以 H 为群的 A-可定义右扭子。设 $a\in V(M)$ 和 $h(x,y)$ 是相应的 A-可定义函数，并满足：对任意 $\sigma\in$Aut(M/A)， $a\cdot h(a,\sigma(a))=\sigma(a)$。设 Z 是孤立类型$tp(a/A)$ 的实现集合。在 ι^1 下， V 的类映到 $Z\times G/\sim$ 的类，其中 $(a_1,g_1)\sim(a_2,g_2)$ 当且仅当 $h(a_1,a_2)g_2=g_1$；这是一个以 G 为群的 A-可定义右扭子（在自然作用 $(a,g_1)\cdot g=(a_1,g_1\,g)$ 下）。

(4) 设 $V\circlearrowleft H$ 是 $W\circlearrowleft G$ 的一个 A-可定义子扭子。也就是说， $V\subseteq W$ 且 $H\le G$，并且 H 在 V 上的作用是 G 在 W 上的作用的限制。于是，在 ι^1 下， V 的类被映射到 W 的类。事实上，根据 (3)， V 的类被映射到 $Z\times G/\sim$，其中 Z 是关于 $a\in V(M)$ 的孤立类型 $tp(a/A)$ 的实现集合。现在，利用 $a\in W$，考虑映射ρ : $Z\times G\to W$，其定义简单地为 $(a,g)\mapsto a\cdot g$。显然， ρ 是满射的。可以

验证 ρ 保持等价关系 $\sim$，因而诱导出 $Z\times G/\sim$ 与 W 之间的一个 A-同构。这一构造恢复 W，正是最初由 [16] 给出的余循环-扭子对应的证明。

现在我们纳入第二作者博士论文中的一些内容 [13], ，这些内容在那里针对 DCF_0 进行了专门化，但在当前的一般性层次下同样适用。以下定义的第一部分源自 Pillay 和 Sokolovic 在 [19] 中的工作。这个定义是 Kolchin 的 G-和 V-本原元素的模型论推广。

定义 2.7. 设 H 是 A-可定义群 G 的一个 A-可定义子群。

(1) [19] 设 $\pi: G\to G/H$ 是 A-可定义商映射。若元素 $a\in G$ 满足 $\pi(a)\in (G/H)(A)$，则称其在 A 上是 (G,H)-本原的；也就是说，$\pi(a)$ 是一个 A-点。

(2) [13]设 W 是 G 的一个 A-可定义右扭子。由于 H 是 G 的子群，H 作用于 W，且该作用的轨道是某个 A-可定义等价关系的等价类。设 $\pi: W\to W/H$ 是 A-可定义商映射（由虚元消去给出）。若元素 $a\in W$ 满足 $\pi(a)\in (W/H)(A)$，则称其在 A 上是 (W,G,H)-本原的。

我们以如下定理结束本节，该定理给出了 A-可定义扭子与模型论本原元素（如上文定义）之间的关系。证明部分改编自 [13, §3.3]。

定理 2.8. 设 $\mathcal{U}$ 是一个消去虚元的全超越理论 T 的怪兽模型，且 A 是一个（小）参数集。

(1) 设 Q 是一个相对于 A 可定义群 H 的 A-可定义右扭子，并设 $b\in Q(\mathcal{U})$。那么，$B=dcl(A,b)$ 是相对于 H 的 A 的伽罗瓦扩张（按上述意义），当且仅当 $H(B)=H(A)$。*(2)* 设 B/A 是一个伽罗瓦扩张（按上述意义）；也就是说，$B=dcl(A,b)$，其中 $q=tp(b/A)$ 强内在，且与某个 A-可定义集合弱正交。设 $Q\circlearrowleft H$ 是由扭子定理给出的相应 A-可定义右扭子（即事实 *2.2* 的 *(ii)* 部分）。假设 H 是某个 A-可定义群 G 的子群。那么，存在一个相对于 G 的 A-可定义右扭子 W，使得 Q 与 H 在 W 上的一个轨道 A-可定义同构，并且伽罗瓦扩张 B/A 可由 A 上的一个 (W,G,H)-本原元素生成。

此外，与扭子 Q 相关的类在自然映射下的像

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,H)\xrightarrow{\iota^1}\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,G)$$

是平凡的，当且仅当 Q 与 G 中 H 的一个 A-可定义左陪集 A-可定义同构。在此情形下，伽罗瓦扩张 B/A 可由一个 $(G,\ H)$-本原元生成。尤其当 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,\ G)=1$ 时，情况便是如此。

证明。(1) 由于 H 在 Q 上的作用是传递的，我们有：对于任意 $b_1,\ b_2\in Q(\mathcal{U})$，存在 $h\in H$ 使得 $b_2=b_1\cdot h$，由此得到 $q=tp(b/A)$ 强内在于 H。q 与 X 弱正交，这正是事实 2.1。我们注意到，H 未必是 B 的伽罗瓦群。

(2) 根据事实 2.5，我们得到如下上同调正合列：

$$1\to H(A)\to G(A)\to (G/H)(A)\xrightarrow{\delta^1}\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,H)\xrightarrow{\iota^1}\mathrm{H}^1_{\mathrm{def}}(A,G).$$

设 W 是一个由 A-定义的 G（右）挠子，它表示类 Q在 ι^1 下的像。根据注 2.6 的第 (3) 部分，我们可以假设 $W = Q \times G/\sim$，其中 $(b_1, g_1) \sim (b_2, g_2)$ 当且仅当 $h(b_1, b_2)g_2 = g_1$。令 $[(b, e)]$ 表示 (b, e) 在 $\sim$ 下的等价类，其中 e 是 G的单位元。注意，H 通过 $[(b_1, g_1)] \cdot h = [(b_1, g_1\, h)]$作用于 W。于是，我们将 $[(b_1, g_1)]$ 在 H 下的轨道记为 $[(b_1, g_1)] \cdot H$。

断言。 Q A-可定义同构于轨道 $[(b, e)] \cdot H \subseteq W$。

断言的证明。 首先我们注意到，$[(b, e)] \cdot H$ 是Aut$(\mathcal{U}/A)$-不变的，因而 A-可定义。事实上，设 $[(b, h)] \in [(b, e)] \cdot H$，并设 $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$，则 $\sigma([(b, h)]) = [(\sigma(b)\ \sigma(h))] = [(bh(b, \sigma(b))\ \sigma(h))] = [(b, h(b, \sigma(b))\sigma(h))] \in [(b, e)] \cdot H$，其中最后一个等式使用了等价关系 $\sim$的定义。注意，事实上这表明 $[(b, e)] \cdot H = [(b_1, e)] \cdot H$对任意 $b_1 \in Q$成立。

对任意 $x \in Q$，存在唯一的 $h \in H$ 使得 $x = bh$。定义映射 $Q \to [(b, e)] \cdot H$ 为 $x \mapsto [(b, h)]$。容易验证这是一个 A-可定义双射。

□

由此可知，Q 与原像 $\pi^{-1}(\pi([(b, e)])) \subseteq W$在 A上可定义同构，其中 $\pi\colon W \to W/H$ 是典范的 A-可定义商映射。因此，$\pi([(b, e)])$是 W/H的一个 A-点；也就是说，$[(b, e)]$ 是 A上的一个 (W, G, H)-本原元。此外，由于 b和 $[(b, e)]$ 可互相定义，我们得到 $B = dcl(A, [(b, e)])$，如所需。

对于 moreover 子句，注意到 Q 的等价类属于 ι^1 的核，当且仅当 Q 的等价类属于 δ^1的像；在这种情况下，根据注 2.6 的第 (1) 部分，Q 与 G中 H 的一个 A-可定义左陪集在 A上可定义同构。令 $c \in G$ 为 b 在这个 A-可定义同构下的像。在这种情况下，Q与原像 $\pi^{-1}(\pi(c)) \subseteq G$在 A上可定义同构，此时 $\pi\colon G \to G/H$，因此 c是 A上的一个 (G, H)-本原元。显然，b 和 c 可互相定义。

□

上述定理是我们的主结果（定理 5.1）在完全超越理论中可定义上同调这一一般性层面上的模型论版本。我们将在针对理论 DCF$_{0,\ m}$特化后的主定理证明中使用它；在证明的第 (2) 部分，我们借助 Kolchin 上同调定理的参数化版本给出一个更强的条件（见定理 4.2）。

3. Parameterized D-torsors and their differential Galois extensions

现在我们在一个充分饱和的模型 $(\mathcal{U}, \Pi)$ 中讨论 DCF$_{0,\ m}$ 并固定一个基域 Π 子域 K。所有 Π-簇均视为其 $\mathcal{U}$-点集合。首先回顾 Kolchin 关于 Π-型和典型 Π-维数的概念。设 a是来自 $\mathcal{U}$ 的一个 n-元组。根据 [6, §II.12], , 存在一个数值多项式 $\omega_{a/K}$，称为 a 在 K 上的 Kolchin 多项式，它具有以下性质：

(i) 对于充分大的 $h \in \mathbb{N}$，$\omega_{a/K}(h)$ 等于

$$K(\theta a_i : i \leq n, \theta \in \Theta_\Pi \text{ with } \operatorname{ord}\theta \leq h)$$

关于 K 的超越次数。其中，Θ_Π 表示 Π-导数的集合。

（ii）$\deg \omega_{a/K} \leq |\Pi|$。（iii）记 $\omega_{a/K}(x) = \sum_i d_i \binom{x+i}{i}$，其中 $d_i \in \mathbb{Z}$，则 $d_{|\Pi|}$ 等于 $K\langle a\rangle_\Pi$ 在 K上的 Π-超越次数。

（iv）如果 b 是来自 $K\langle a\rangle_\Pi$的一个（有限）元组，那么存在 $h_0 \in \mathbb{N}$，使得对于充分大的 $h \in \mathbb{N}$，有 $\omega_{b/K}(h) \leq \omega_{a/K}(h+h_0)$。

由(iv)可知，$\omega_{a/K}$ 的次数是一个 Π-双有理不变量，我们将该次数称为 a 在 K 上的 Π-类型，记作 Π-类型(a/K)。此外，仍由(iv)可知，若写成$\omega_{a/K}(x) = \sum_i^\tau d_i\binom{x+i}{i}$，其中 $d_i \in \mathbb{Z}$ 且$\tau =$ Π-类型(a/K)，则系数 d_τ 也是一个 Π-双有理不变量，称为 a 在 K 上的典型 Π-维数，并记作 Π-dim(a/K)。

对于 $\Delta \subseteq \Pi$，若 Π-域 $K\langle a\rangle_\Pi$在 K 上是有限 Δ-生成的（即存在有限元组 α，使得 $K\langle a\rangle_\Pi = K\langle\alpha\rangle_\Delta$），则称 Δ 界定 Π-类型$(a/K)$。若此外还有 $|\Delta| =$ Π-类型(a/K)，则称 Δ见证 Π-类型(a/K)。这些概念是在 [9, §1]中引入的。在他的第一本书中，Kolchin证明了关于有限生成微分扩张的如下基本结果：其本质是说，总能找到某个 Δ 来见证 Π-类型。

事实 3.1. [6, §II.13]设 a是来自 $\mathcal{U}$的一个（有限）元组。那么，经过对 Π进行一次 $GL_m(\mathbb{Q})$变换后，存在 $\Delta \subseteq \Pi$ 使其见证 Π-类型(a/K)。也就是说，$|\Delta| =$ Π-类型(a/K)，并且存在一个来自 $\mathcal{U}$ 的（有限）元组 α，使得

$$K\langle a\rangle_\Pi = K\langle\alpha\rangle_\Delta.$$

$K\langle\alpha\rangle_\Delta$ 在 K 上的 Δ-超越次数为 Π-*dim*(a/K)。

现在考虑一个（不交）划分 $\Pi = \mathcal{D} \cup \Delta$，其中 $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_r\}$非空且 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_\ell\}$（我们将把 Δ 视为参数导子）。我们用 K^Δ 表示 K 的 Δ-常数，并用 Θ_Δ 表示 Δ-导数的集合（即形如 $\delta_1^{e_1}\cdots\delta_\ell^{e_\ell}$的算子，其中 $e_i \geq 0$）。

让我们回顾一下 [9] 中关于相对于划分 $\mathcal{D}/\Delta$ 的参数化 D-簇的一些结果（请注意，该论文使用了“相对”D-簇这一术语，而这里我们采用更常见的术语“参数化”）。根据 [9, §3], ，存在一个函子$\tau_{\mathcal{D}/\Delta}$，它从 Δ上 K 簇的范畴到其自身，并具有以下三个性质：

(1) 若 V 是定义在 K^Δ上的 Δ-簇，则 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$ 等于 Kolchin 的Δ-切丛 $T_\Delta V$，见 [7, §VIII.2]。(2) $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}$ 与乘积相容；也就是说，$\tau_{\mathcal{D}/\Delta}(V \times W)$自然同构于 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V \times \tau_{\mathcal{D}/\Delta}W$。(3) 对于仿射 $V \subseteq \mathcal{U}^n$，由下式给出的 $\mathcal{D}$-态射 $\nabla_\mathcal{D}$：$\mathcal{U}^n \to \mathcal{U}^{n(r+1)}$

$$\nabla_\mathcal{D}(x) := (x, D_1(x), \ldots, D_r(x))$$

限制到 $\nabla_\mathcal{D}^V$： $V \to \tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$。此外，若 f： $V \to W$ 是一个定义在 K 上的 Δ-态射，则 $\nabla_\mathcal{D}^W \circ f = \tau_{\mathcal{D}/\Delta}f \circ \nabla_\mathcal{D}^V$。

在定义于 K 上的 Δ-簇 V 的仿射图表中，可以如下给出 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$ 的精确方程。假设 $V \subseteq \mathcal{U}^n$ 是仿射的，并令 x 和 u 为 n元不定元组；对于每个 $D \in \mathcal{D}$ 和 $f \in K\{x\}_\Delta$，定义 $d_{D/\Delta}f \in K\{x,u\}_\Delta$ 为

$$d_{D/\Delta}f(x,u) := \sum_{\theta\in\Theta_\Delta, i\leq n} \frac{\partial f}{\partial(\theta x_i)}(x)\ \theta u_i + f^D(x)$$

那么，$\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$ 是由以下条件定义的 Δ-闭子集：

$$f(x) = 0,\ d_{D_1/\Delta}f(x,u_1) = 0,\ \ldots,\ d_{D_r/\Delta}f(x,u_r) = 0$$

其中，每个 u_j 都是一个由不定元组成的 n元组， f 在 $\mathcal{I}(V/K)_\Delta$ 上变化， Δ是 V在 K上的消失理想。

所谓关于 $\mathcal{D}/\Delta$ 的参数化 D-簇（亦称参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇），是指一对 $(V,\ s)$, 其中 V 是一个 Δ-簇，而 $s=(\mathrm{Id}\ s_1,\ \ldots\ldots,\ s_r)$ 是自然投影 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V\to V$ 的一个 Δ-截面，并满足以下可积条件：对所有 $1\leq i<j\leq r$

$$d_{D_i/\Delta}s_j(a,s_i(a))=d_{D_j/\Delta}s_i(a,s_j(a))$$

对所有 $a\in V$。$(V,\ s)$ 的参数化 D-子簇是一个 Δ-子簇 $W\subseteq V$，满足 $s(W)\subseteq\tau_{\mathcal{D}/\Delta}W$。若 Δ-态射 $f\colon V\to W$ 是参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇 $(V,\ s)$ 与 $(W,\ t)$ 之间的态射，并且 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}(f)\circ s=t\circ f$, 则称其为 $\mathcal{D}/\Delta$-态射。

给定一个参数化 D-簇（V,s），其在 V 上的 #-微分方程定义为

$$\nabla^V_{\mathcal{D}}(x)=s(x)\tag{3.1}$$

并且（V,s）的 #-点集就是方程 (3.1) 的解集，记作（V,s）$^{\#}$。注意，（V,s）$^{\#}$ 是一个 Π-簇，并且对每个 $a\in V$，都有 Δ 界定了Π-类型（a/K）。

对于一个 K-不可约的 Π-簇 X， X 在 K 上的 Π-类型和典型 Π-维数分别定义为 Π-类型（a/K）和 Π-维数（a/K），其中 $a\in X$ 是任意一个在 K 上的 Π-泛点。类似地，我们说，如果 Δ 界定（分别地，见证）Π-类型（a/K），那么它界定（分别地，见证） X 的 Π-类型。由 [9] 可得以下事实。

事实 3.2。 [9, 命题 3.10 和 3.12] 设 (V,s) 是定义在 K 上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇。

(1) $(V,s)^{\#}$ 在 V 中是 Δ-稠密的。此外，如果 V是 K-不可约的，则存在一个 V （在 K 上）的 Δ-泛点，位于 $(V,s)^{\#}$ 内，并且任何这样的点实际上都是 $(V,s)^{\#}$ 在 K 上的一个 Π-泛点。(2) 取 #-点给出了 *(V,s)* 在 K 上的参数化 *D-* 子簇与 *$(V,s)^{\#}$* 在 K 上的 Π- 子簇之间的一一对应（其逆映射由在 K 上取 Δ-闭包给出）。*(3)* 假设 X 是一个 K-不可约的 Π-簇，并且 Δ界定了 X 的 Π-类型，则存在一个定义在 K 上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇 *(W,t)*，使得 X 与 *$(W,t)^{\#}$*在 K 上 Π-有理等价。

现在我们转而讨论关于划分 $\mathcal{D}/\Delta$ 的参数化 D-群和 D-扭子。如上所述，$\tau_{\mathcal{D}/\Delta}$ 与乘积交换。因此，如果 G 是一个 Δ-群，我们就通过以下方式在 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G$上得到一个诱导的 Δ-群结构:

$$\tau_{\mathcal{D}/\Delta}\mu:\tau G\times\tau G\to\tau G$$

其中， $\mu\colon\ G\times G\to G$ 表示乘法映射。此外，如果 V是 G 的一个（右）Δ-挠子，这意味着存在一个 Δ-态射 $*\colon\ V\times G\to V$，它在 V 上给出了 G 的正则作用，那么 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}(*)$: $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V\times\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G\to\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$是一个 Δ-态射，它在 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$ 上给出了 $\tau_{\mathcal{D}/D}G$ 的（右）正则作用。我们将后一个作用 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}(*)$ 简单记作 $\cdot$。

如上所述，对于任意 Δ-态射 $f\colon\ V\to W$，我们有 $\nabla^W_{\mathcal{D}}\circ f=\tau_{\mathcal{D}/\Delta}f\circ\nabla^V_{\mathcal{D}}$。因此，对于 $\mu\colon G\times G\to G$， Δ-群 G 的乘法映射，我们有

$$\nabla^G_{\mathcal{D}}\circ\mu=\tau_{\mathcal{D}/\Delta}\mu\circ\nabla^{G\times G}_{\mathcal{D}}.$$

换言之，映射 $\nabla_{\mathcal{D}}^{G}:\ G\to\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G$ 是一个群同态。更一般地，若 V 是 G 的一个（右） Δ-扭子，其作用为 $*:\ V\times G\to V$，则

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{V}\circ *=\tau_{\mathcal{D}/\Delta}(*)\circ\nabla_{\mathcal{D}}^{V\times G}$$

因此，映射 $\nabla_{\mathcal{D}}^{V}:V\to\tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$ 保持作用；也就是说，

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{V}(v*g)=\nabla_{\mathcal{D}}^{V}(v)\cdot\nabla_{\mathcal{D}}^{G}(g).$$

相对于 $\mathcal{D}/\Delta$ 的参数化 D-簇（$G,\ t$），其中 G 是一个 Δ-群，若 $t:\ G\to\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G$ 是群同态，则称其为相对于 $\mathcal{D}/\Delta$ 的参数化 D-群（又称参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群）。注意，参数化 D-群等价于（$G,\ t$）$^{\#}$ 是 G 的一个子群。

更一般地，给定一个参数化 D-群（$G,\ t$）和一个参数化 D-簇（$V,\ s$），使得 V 是 G 的一个（右） Δ-挠子，我们称（$V,\ s$）是（$G,\ t$）的一个参数化（右） D-挠子（相对于 $\mathcal{D}/\Delta$），如果 s 保持作用 $*$；更确切地说，

$$s(v*g)=s(v)\cdot t(g)$$

其中回顾一下，$*$ 表示 G 在 V 上的作用，$\cdot$ 表示 τG在 τV上的作用。注意，作为参数化的 D-挠子，等价于（$V,\ s$）$^{\#}$是相对于 G 在 V上诱导的作用 $*$而言的（$G,\ t$）$^{\#}$上的Π-挠子。为简化记号，当（$V,\ s$）是（$G,\ t$）上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-挠子时，我们将（$V,\ s$） $\circlearrowleft$（$G,\ t$）。

回顾事实 3.2，通过 #-点函子，参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇与带有 Δ界定其 Π-类型的 Π-簇之间存在密切联系。对于参数化 D-群和 D-扭子，两者之间的联系要紧密得多。

定理 3.3。

（*1*） K 上的连通参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群与 K 上的连通 Π-代数群（其 Π-类型由 Δ界定）之间存在范畴等价。该范畴中的函子由取 #-点给出。（*2*）更一般地，设 $\mathcal{E}$ 是以下范畴：K上连通 $\mathcal{D}/\Delta$-群的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-挠子，其中（$V,\ s$） $\circlearrowleft$（$G,\ t$）与（$W,\ r$） $\circlearrowleft$（$G,\ t$）之间的态射是保持作用的、定义在 K上的 $\mathcal{D}/\Delta$-态射（$V,\ s$） $\to$（$W,\ r$）。另一方面，设 $\mathcal{F}$ 是以下范畴：K 上连通 Π-代数群的 Π-挠子，其 Π-类型由 Δ 界定，其中 $X\circlearrowleft H$ 与 $Y\circlearrowleft H$ 之间的态射是保持作用的、定义在K 上的 Π-态射 $X\to Y$。那么，#-点函子给出 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{F}$之间的范畴等价。

证明。（1）由 [9, 定理 4.6] 得出；以自然的方式，（2）由（1）得出。□

现在我们回顾最初在 [9]中作为定义 2.1 给出的 X-强正规扩张的定义。然而，按照 [11], ，我们将“常数适当地封闭”的条件（即 $X(K)=X(K^{\mathrm{diff}})$）弱化为仅要求是“无新常数”扩张（即 $X(L)=X(K)$）。

定义 3.4。 [11, 定义 3.3] 设 X 是一个 K-可定义集。有限生成的微分域 L/K 是 K 的一个 X-强正规扩张，当且仅当

(1) 对于任意 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathcal{U}/K)$，我们都有 $\sigma(L)\subset L\langle X\rangle$。

(2) $X(L) = X(K)$。

若某个微分扩张 K 对于某个 K-可定义的 X是 X-强正规扩张，则称其为广义强正规扩张。

注释 3.5。

(1) 伽罗瓦理论基本定理最初在 [9, 定理 2.7]中得到证明。在当前的无新常数假设下，该基本定理见 [11, 定理 2.3], ，我们已在事实 2.2 的第 (iii) 部分重新陈述了它。(2) [9] 中的定理 2.5 的第 (3) 部分指出（用我们的记号），若 $(G, t)^{\#}$ 是某个 X-强正规扩张 L/K的伽罗瓦群，那么 L/K 也是$(G, t)^{\#}$-强正规扩张。

现在我们引入参数化 D-扭子的微分伽罗瓦扩张这一概念。

定义 3.6. 设 $(V, s) \circlearrowleft (G, t)$ 是一个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子。若微分扩张 L/K 满足以下条件，则称其为 (V, s) 的微分伽罗瓦扩张：

(i) $L = K\langle a\rangle_{\Pi}$ 对于 V 上 #-微分方程的一个解 a，回忆一下，根据 (3.1) 的定义，它是 $\nabla^V_{\mathcal{D}}(x) = s(x)$，且 (ii) $K\langle (G, t)^{\#}\rangle_{\Pi} \cap L = K$或等价地 $(G, t)^{\#}(L) = (G, t)^{\#}(K)$。

现在我们注意到，这些扩张是广义强正规扩张，其伽罗瓦群嵌入于 $(G, t)^{\#}$，也就是说，它们是 $(G, t)^{\#}$-强正规扩张。

引理 3.7. 若 L/K 是参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子 $(V, s) \circlearrowleft (G, t)$ 的微分伽罗瓦扩张，则 L/K 是一个 $(G, t)^{\#}$-强正规扩张。

反过来，如果参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子 $V, s \circlearrowleft (G, t)$ 上的 $\#$-微分方程的一个解生成了一个 $G, t^{\#}$-强正规扩张，那么该扩张就是关于 V, s 的微分伽罗瓦扩张。

证明。设 L/K 是一个参数化扭子上的微分伽罗瓦扩张。那么由条件 (i)，有 $L = K\langle a\rangle_{\Pi}$ 使得 $\nabla^V_{\mathcal{D}}(a) = s(a)$。我们要证明 $p := tp(a/K)$ 是强 $(G, s)^{\#}$-内的。事实上，若 $b \models p$，则 $\nabla^V_{\mathcal{D}}(b) = s(b)$。现在取 $g \in G$ 使得 $b = a * g$（这是由作用的传递性 $*$得出的）。只需证明 $g \in (G, t)^{\#}$。我们有 $s(b) = s(a) \cdot t(g)$；另一方面

$$s(b) = \nabla^V_{\mathcal{D}}(b) = \nabla^V_{\mathcal{D}}(a * g) = \nabla^V_{\mathcal{D}}(a) \cdot \nabla^G_{\mathcal{D}}(g) = s(a) \cdot \nabla^G_{\mathcal{D}}(g)$$

由作用的正则性 $\cdot$，可得 $\nabla^G_{\mathcal{D}}(g) = t(g)$，如所述。条件 (ii) 只是将 p 与 $(G, t)^{\#}$ 弱正交这一点换一种说法。

反过来，设 a 是 #-方程的一个解。若 $L = K\langle a\rangle_{\Pi}$ 是 $(G, t)^{\#}$-强正规，则 $tp(a/K)$ 与 $(G, t)^{\#}$ 弱正交。正如我们所说，这与所需的条件 (ii) 同义，而这正是我们唯一缺少的条件。□

设 $L = K\langle a\rangle_{\Pi}$ 是参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇 $(V, s) \circlearrowleft (G, t)$ 的一个微分伽罗瓦扩张。设 $\mathcal{G} = Aut_{\Pi}(L\langle (G, t)^{\#}\rangle / K\langle (G, t)^{\#}\rangle)$ 为其（微分）伽罗瓦群。对于任意 $\sigma \in \mathcal{G}$，有 $\sigma(a) \in (V, s)^{\#}$。令 $\mu(\sigma)$ 为 $(G, t)^{\#}$ 中满足 $\sigma(a) = a * \mu(\sigma)$ 的唯一元素。容易验证，$\mu : \mathcal{G} \to (G, t)^{\#}$ 是一个单射群同态，因此 $\mathcal{G}$ 同构于 (G, t) 的某个 D-子群的 #-点。事实上，命题 5.8 和推论 5.9] 的论证可得：

命题 *3.8.* 设 $L = K\langle a\rangle_\Pi$ 是参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇 (V, s) $\circlearrowleft$ (G, t) 的一个微分伽罗瓦扩张。$q = tp(a/K)$ 的伽罗瓦群具有 $(H, t)^\#$ 的形式，其中 H 是定义在 K 上的 (G, t) 的某个参数化D-子群，并且正则作用由 $b * h$ 给出，其中 $b \models q$ 且 $h \in (H, t)^\#$。此外，L/K 的中间 Π-域与定义在 K 上的 (H, t) 的参数化D-子群之间存在自然的一一对应。

在 Pillay 的论文 [15], 或第一作者的论文 [9], 中，并未研究参数化 D-扭子的微分伽罗瓦扩张（在这一层次的一般性下）；他们只研究了其中的特殊情形：即来自参数化 D-群上的对数微分方程的那些微分伽罗瓦扩张。现在我们回顾这些微分伽罗瓦扩张的特殊情形。给定一个 Δ-群 G，π 的纤维 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G \to G$ 在单位元 $e \in G$ 处记为 $\tau_{\mathcal{D}/\Delta}G_e$。给定一个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群（G，t），如果（G，t）是一个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-簇，我们就称 $\alpha \in \tau_{\mathcal{D}/\Delta}G_e$是（$G$，$t$）的可积点；其中$\alpha\, t : G \to \tau_{\mathcal{D}/\Delta}G$ 表示截面 $\alpha \cdot t$（x）。由 [9, 引理 5.3], 可知，α是可积点，当且仅当

$$\nabla^G_{\mathcal{D}}(x) = \alpha \cdot t(x) \tag{3.2}$$

有一个解（在 G 中）。我们将 (3.2) 称为 (G, t) 上的对数微分方程，若要指定 α，则称为α-对数微分方程。

定义 3.9. 设 (G, t) 是 K 上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群。若一个微分扩张 L/K 满足以下两个条件，则称其为 (G, t) 上某个对数微分方程的微分伽罗瓦扩张：

(i) 存在一个 K-点 $\alpha \in \tau_{\mathcal{D}/\Delta}G_e(K)$，使得 $L = K\langle a\rangle_\Pi$ 对于 a 是 α-对数微分方程 $\nabla^G_{\mathcal{D}}(x) = \alpha \cdot t(x)$ 的一个解 (ii) $K\langle (G, t)^\#\rangle_\Pi \cap L = K$，或者等价地，$(G, t)^\#(L) = (G, t)^\#(K)$。

引理 3.10. 若 $L = K\langle a\rangle_\Pi$ 是参数化 D-群 (G, t) 上某个 α-对数微分方程的微分伽罗瓦扩张，则 L/K 是参数化 D-挠子上的$\#$-微分方程的微分伽罗瓦扩张。

证明。设 (V, s) 满足 $V = G$ 和 $s = \alpha \cdot t$。由于方程 $\nabla^G_{\mathcal{D}}(x) = \alpha \cdot t(x)$ 有一个解（即 a），截面 $s : V \to \tau_{\mathcal{D}/\Delta}V$可积（见 [9, 引理 5.3]），因此 (V, s) 确实是一个参数化 D-簇。显然，它是 (G, t) 的一个 D-挠子，并且 a 是 (V, s) 的一个 #-点。□

在注 1.1 中，我们看到，参数化 D-挠子 (V, s) $\circlearrowleft$ (G, t) 对应的微分伽罗瓦扩张 L/K，其伽罗瓦群为 $(G, t)^\#$，未必是 (G, t) 上某个对数微分方程的伽罗瓦扩张。

我们的主要结果将在第 5 节给出，它表明任意广义强正规扩张都是某个参数化 D挠子的微分伽罗瓦扩张。此外，我们还将刻画该扩张何时是其伽罗瓦群上某个对数微分方程的微分伽罗瓦扩张。

4. A parameterized version of Kolchin's cohomology theorem

我们沿用上一节的设定。特别地，我们有如下的导子集划分：

$$\Pi = \Delta \cup \mathcal{D}.$$

我们在饱和模型 $(\mathcal{U},\ \Pi)\ \models\ \mathrm{DCF}_{0,\ m}$ 中工作，K 表示一个（小的）微分子域。H^1_Π 表示 $(\mathcal{U},\ \Pi)\ \models\mathrm{DCF}_{0,\ |\Pi|}$中的可定义伽罗瓦上同调；而 H^1_Δ 表示约化结构 $(\mathcal{U},\ \Delta)\ \models\mathrm{DCF}_{0,\ |\Delta|}$中的可定义上同调。

Kolchin 上调定理 [7, §VII.3] 指出，对于 K上的代数 G，我们有 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,\ G)\ \cong\mathrm{H}^1_{alg}(K,\ G)$，后者是（代数的）伽罗瓦上同调，它与约化结构 $\mathcal{U}\models ACF_0$ 中的可定义上同调相一致（即取 Δ 为空时）。本节旨在证明这一结果的参数化版本，其中群 G 是一个 Δ-代数群。我们将使用以下事实，见 [17, 推论 4.2] 和 [18, 事实 1.5]:

事实 4.1。设 G 为 K上的一个 Π-代数群。

(1) 存在一个 K 上的代数群 H 以及一个 K-可定义群嵌入 $G\hookrightarrow H$。我们将 G 视为代数群 H的子群。*(2)* 此外，如果 $V\circlearrowleft G$ 是 K上的一个 Π-扭子，那么存在一个代数扭子 $W\circlearrowleft H$ 以及一个 K-可定义嵌入 $f\colon\ V\hookrightarrow W$，使得

$$f(v*g)=f(v)\cdot g\quad\ for\ all\ v\in V,g\in G$$

其中，$*$ 是 $V\circlearrowleft G$ 中的作用，而 $\cdot$ 是 $W\circlearrowleft H$中的作用。换言之，$f(V)\circlearrowleft G$是 $W\circlearrowleft H$的子挠子；也就是说，G在 $f(V)$上的作用，是 H 在 W上的作用的限制。

现在我们可以证明 Kolchin 上同调定理的参数化版本。

定理 4.2. 设 G 是 K上的一个 Δ-代数群。那么，存在一个典范同构

$$\mathrm{H}^1_\Delta(K,G)\cong\mathrm{H}^1_\Pi(K,G).$$

证明。对于 $\alpha\in\mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$，我们可以写作 $\alpha=[X]_\Delta$，其中 X 是 K上的一个 Δ-挠子，$[X]_\Delta$ 表示 K 上与 X 在K上 Δ-同构的 Δ-挠子的类。当然，这样一个 X 也是一个 Π-挠子，我们也可以类似地写作 $[X]_\Pi$ （表示 K 上与 X 在 K上 Π-同构的 Π-挠子的类）。我们定义

$$\phi:\mathrm{H}^1_\Delta(K,G)\to\mathrm{H}^1_\Pi(K,G)$$

以最自然（或典范）的方式，也就是说

$$\alpha=[X]_\Delta\mapsto[X]_\Pi.$$

注意，ϕ 定义良好。事实上，若 Y是 K 上的一个 Δ-扭子，且与 X 是 Δ-同构的，而 V是一个与 X Π-同构的 Π-扭子，那么 Y和 V是Π-扭子之间的 Π-同构。因此，若 $[X]_\Delta=[Y]_\Delta$，则 $[X]_\Pi=[Y]_\Pi$。

现在证明 ϕ 是单射。设 $\phi(\alpha)\ =\phi(\beta)$，其中 $\alpha=[X]_\Delta$ 且 $\beta=[Y]_\Delta$。换言之，我们假设 $[X]_\Pi=[Y]_\Pi$；也就是说，存在一个 Π-同构$f\colon\ X\to Y$。要证明单射，只需证明存在一个在 K上的 Δ-同构。

根据事实 4.1，存在代数扭子 $V\circlearrowleft H$ and $W\circlearrowleft H$，因此我们可以将 $X\circlearrowleft G$ 视为 $V\circlearrowleft H$ 的子扭子，并将 $Y\circlearrowleft G$ 视为 $W\circlearrowleft H$的子扭子。令 $h\colon\ V\times V\to H$ 为将 (x,y) 映射到 H中使 $x\mapsto y$ 成立的唯一元素的函数（注意，该函数是 ACF-可定义的）。固定 $a\in X$，并考虑映射$\rho:X\to Y$，定义如下:

$$\rho(x)=f(a)\cdot h(a,x)$$

其中 $\cdot$ 是 H 在 W 上的作用（因此是 ACF-可定义的）。注意，由于 X 和 Y 是Δ-可定义的，因此映射 ρ 是 Δ-可定义的。此外，直接计算可知它是一个扭子同构。剩下要证明的只有 ρ 可在 K上定义。为此，只需证明对所有 $\sigma \in Aut_\Pi(\mathcal{U}/K)$，都有$\sigma(\rho(x)) = \rho(\sigma(x))$，对所有 $x \in X$均成立。我们有

$$\begin{aligned}\sigma(\rho(x)) &= \sigma(f(a)h(a,x)) \\ &= f(\sigma(a))h(\sigma(a),\sigma(x)) \\ &= f(\sigma(a)h(\sigma(a),\sigma(x))) \\ &= f(ah(a,\sigma(x))) \\ &= f(a)h(a,\sigma(x)) \\ &= \rho(\sigma(x))\end{aligned}$$

如所需。

现在证明满射性。设 $\mu \in \mathrm{H}^1_\Pi(K,G)$，那么 $\mu = [U]_\Pi$ 是一个 Ua Π-挠子。我们需要构造一个与 U 在 K上 Π-同构的 a Δ-挠子。根据事实 4.1，存在一个从 U 到代数扭子 V 的 ACF-可定义嵌入 K，其中 H 是一个代数群，且 G 嵌入其中。令 X 为 U 在 V中的像。只要证明 X 是 Δ-可定义的，我们就完成了。考虑 V上的等价关系

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{there is } g \in G \text{ such that } a \cdot g = b$$

由于 G 是 Δ-可定义的，且上面的作用 $a \cdot g$ 是 ACF-可定义的，因此上述关系是一个 Δ-可定义的等价关系。因此，我们可以将 V/G 与定义在 K 上的一个 Δ-可定义集等同起来，而商映射 $p : V \to V/G$ 在K上是 Δ-可定义的。由于 X 是一个等价类，点 $\gamma = p(X) \in V/G$ 是一个 K-点。因此，$X = p^{-1}(\gamma)$ 在 K上是 Δ-可定义的，如所需。□

注记 4.3。注意，上述映射 $\phi : \mathrm{H}^1_\Delta(K,G) \to \mathrm{H}^1_\Pi(K,G)$ 也可以用可定义余循环来描述。具体而言，设

$$s : \mathrm{Aut}_\Delta(K^{\Delta\text{- diff}}/K) \to G(K^{\Delta\text{- diff}})$$

是一个 Δ-可定义余循环，其可定义性数据为 $h(x,y)$ 和 a。设 $\phi(x)$ 是隔离 $tp_\Delta(a/K)$ 的公式。于是我们知道，对于所有在 $K^{\Delta\text{-微分闭}}$中实现 ϕ 的 b,c,d， $h(b,c)$ 均有定义，且属于 $G(K^{\Delta\text{-微分闭}})$，并且

$$h(b,c)h(c,d) = h(b,d) \tag{4.1}$$

定义 t: $\mathrm{Aut}_\Pi(K^{\Pi\text{-微分闭}}/K) \to G(K^{\Pi\text{-微分闭}})$ 为

$$t(\sigma) = h(a,\sigma(a))$$

还要记住，我们可以取 $K^{\Delta\text{-微分闭}} \leq K^{\Pi\text{-微分闭}}$。利用 (4.1) 很容易验证， t 确实是一个 Π-可定义余循环：也就是说， $tp_\Pi(a/K)$ 的任意一个实现都必须满足 $tp_\Delta(a/K)$。现在取这个余循环在 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,G)$ 中的等价类。

记号 4.4. 给定一个定义在 K 上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群 (G,t)，我们将其记为

$$\Phi : \mathrm{H}^1_\Pi(K,(G,t)^\#) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$$

由事实 2.5 中诱导的映射 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,\ (G,\ t)^\#) \xrightarrow{\iota^1} \mathrm{H}^1_\Pi(K,\ G)$ 与定理 4.2 中得到的同构 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,\ G) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,\ G)$ 复合而成的映射。

我们现在注意到，定理 3.3 中给出的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子与 Π-扭子之间的范畴等价（其中 Π-扭子的 Π类型由 Δ 界定）得出以下上同调结果：

引理 4.5. 设 (G,t) 是一个连通的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群。那么，定理 *3.3* 中的范畴等价给出一个自然映射

$$\Lambda : \mathrm{H}^1_\Pi(K,(G,t)^\#) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$$

证明。设 Q 是 $(G,t)^\#$ 上的一个 Π-代数扭子。由于 Δ 界定了 $(G,t)^\#$ 的 Π-类型，且 Q 是 $(G,t)^\#$的内在对象，根据 $[9,$ 引理 1.9$],$，我们有 Δ也界定了 Q的 Π-类型。于是，我们可以应用定理 3.3，得到一个参数化的 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子 $(V,s) \circlearrowright (G,t)$，其中 $(V,s)^\# \cong Q$ 是 K上的 Π-扭子。接着，我们通过将类 $[Q]_\Pi$ 映射到 $[V]_\Delta$的类来定义 Λ 。该映射良定义这一点，再次用到了定理 3.3 中的范畴等价。

□

我们通过指出，上文定义的从 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,(G,t)^\#) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$ 的两个映射实际上相同，来结束本节。

引理 4.6. 设 (G,t) 是一个连通的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-群。那么，上述两个映射 Φ 和 Λ 来自

$$\mathrm{H}^1_\Pi(K,(G,t)^\#) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$$

分别记号 *4.4* 和引理 *4.5* 中，且二者相同。

证明. 设 Q 是一个关于 $(G,t)^\#$ 的 Π-挠子。我们在引理 4.5 的证明中已看到，可以假设对于某个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-挠子 $(V,s) \circlearrowright (G,t)$，有 $Q = (V,s)^\#$ 。于是，根据定义， $\Lambda([Q]_\Pi) = [V]_\Delta$。我们必须证明 $\Phi([Q]_\Pi) = [V]_\Delta$。由于 $Q \circlearrowright (G,t)^\#$ 是 $V \circlearrowright G$的一个 Π-子挠子，根据注 2.6 的第 (4) 部分，上同调中的诱导映射 ι^1 将 $[Q]_\Pi$ 映到 $[V]_\Pi$。注意，定理 4.2 中的同构 $\mathrm{H}^1_\Pi(K,G) \to \mathrm{H}^1_\Delta(K,G)$ 将 $[V]_\Pi$ 映到 $[V]_\Delta$，由此可知 $\Phi([Q]_\Pi)$ 确实是 $[V]_\Delta$。

□

5. The main result

我们回顾一下所处的背景。我们在 $\mathrm{DCF}_{0,\ m}$ 中工作，其中 Π 是可交换导子的集合。回顾一下，对于 $\Delta \subseteq \Pi$，H^1_Δ 表示约化结构 $\mathrm{DCF}_{0,\ |\Delta|}$ 中的可定义伽罗瓦上同调。

现在我们证明本文的主定理。

定理 5.1。 设$(\mathcal{U},\ \Pi)$ 是 $DCF_{0,\ m}$ 的一个怪兽模型，且 K 是一个（小的）微分子域。

(1) 设 $\mathcal{D} \cup \Delta$ 是 Π 的一个划分，其中 $\mathcal{D}$ 非空，且 (V,s) 是 (G,t) 上的一个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子。方程 (V,s) 的 #-微分方程的一个解 a 生成一个 $(G,t)^\#$-强正规扩张 $L = K\langle a\rangle_\Pi$，当且仅当 $(G,t)^\#(L) = (G,t)^\#(K)$。*(2)* 设 L 是 K 的一个广义强正规扩张，且 L/K 正规（因此微分伽罗瓦群是连通的）。那么，经过对 Π 作一个 $GL_m(\mathbb{Q})$-变换后，存在一个划分 $\mathcal{D} \cup \Delta$，其中 Δ 见证了 L/K 的 Π-类型；并且存在一个定义在 K 上的参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子 $(V,s) \circlearrowright (G,t)$，使得 $(G,t)^\#$ 是 L/K 的微分伽罗瓦群，而 L 是一个微分

伽罗瓦扩张，对于 (V,s)。事实上， L 同构于$(V,s)^{\#}$ 的 Π-函数域。

此外，当且仅当与Π-挠子 $(V,s)^{\#}$ $\circlearrowright$ $(G,t)^{\#}$ 相关的类在映射（来自记号 *4.4*）下的像为平凡的时， L/K 才是 (G,t) 上的对数微分方程的微分伽罗瓦扩张。

$$\Phi : \mathrm{H}^1_{\Pi}(K,(G,t)^{\#}) \to \mathrm{H}^1_{\Delta}(K,G)$$

是平凡的。特别地，当(K,Δ)是 Δ-闭的时，这一条件成立，因为$\mathrm{H}^1_{\Delta}(K,G)$是平凡的。

证明。

(1) 第 (1) 部分正是引理 3.7。

(2) 设 $L = K\langle b\rangle_{\Pi}$ ，并设 Q为 q 的实现：$= tp_{\Pi}(b/K)$。由扭子定理（见事实 2.2），L/K 的伽罗瓦群同构于 K 上的一个连通 Π-代数群 H，且 Q 是 K上关于 H 的一个 Π-扭子。此外，由于 q 是孤立的（见事实 2.2(1)），Q 的 Π-类型小于 $|\Pi|$。因此，由事实 3.1，在对 Π作 $GL_m(\mathbb{Q})$-变换之后，存在 Π 的一个真子集 Δ，它见证 Q的 Π-类型（与 L/K的 Π-类型相同）。设 $\mathcal{D} = \Pi \setminus \Delta$。现在，由定理 3.3，$Q$具有形式$(V,s)^{\#}$，其中某个参数化 $\mathcal{D}/\Delta$-扭子(V,s) $\circlearrowright$ (G,t)满足$(G,t)^{\#} = H$。由于 $b \in (V,s)^{\#}$，L显然是(V,s)的微分伽罗瓦扩张；事实上，由于 b在 K上于$(V,s)^{\#}$ 中是 Π-泛的，L是$(V,s)^{\#}$ 的 Π-函数域。

现在证明“此外”这一条。由定理 2.8 可知，在映射 Φ 下，$(V,s)^{\#}$ 的类的像是平凡的，当且仅当 $(V,s)^{\#}$ 在 K 上与 $(G,t)^{\#}$ 在 G 中的一个 K-可定义左陪集 Π-同构。在此同构下，令 a 为 G 中与 b 对应的点。那么，$(V,s)^{\#} \cong a\cdot(G,t)^{\#}$ 且 $L = K\langle a\rangle_{\Pi}$。

由于 $a\cdot(G,t)^{\#}$ 是 K-可定义的，因此该陪集在 K-可定义映射下的像

$$\nabla^G_{\mathcal{D}}(x)\cdot t(x)^{-1} : G \to \tau_{\Delta}G_e$$

必为一个 K-点，记为 α。由于 a 是 $\nabla^G_{\mathcal{D}}(x) = \alpha\cdot t(x)$ 的一个解，我们可知 L 是定义在 (G,t) 上的这个 α-对数微分方程的伽罗瓦扩张。

□

References

[1] P. Cassidy 与 M. Singer. 参数化微分方程的伽罗瓦理论与线性微分代数群. 《微分方程与量子群》（IRMA 数学与理论物理讲座第 9 卷）. EMS 出版社, 第 113-157 页, 2006. [2] Z. Chatzidakis 与 A. Pillay. 广义 Picard–Vessiot 扩张与微分伽罗瓦上同调. Annales de la Facult´e des sciences de Toulouse：Math´ematiques (6), 第 28 卷, 第 5 期, 第 813–830 页, 2019.[3] H. Gillet、S. Gorchinskiy 与 A. Ovchinnikov, 参数化 Picard-Vessiot 扩张与 Atiyah 扩张. 《数学进展》, 238 (2013), 322-411. [4] T. W. Hungerford. 《代数》. 数学研究生教材 73, 施普林格, 1974. [5] L. Juan 与 A. Ledet. 非平凡 SO_n-挠子上的等变向量场与微分伽罗瓦理论. 《代数杂志》, 312(2):734–745, 2007. [6] E. R. Kolchin. 微分代数与代数群. 学术出版社. 纽约, 纽约 1973.[7] E. R. Kolchin. 微分代数群. 学术出版社股份有限公司 1985.

[8] P. Landesman. 广义微分伽罗瓦理论. 《美国数学会汇刊》360, 第 4441-4495 页, 2008.[9] O. Le´on S´anchez. 若干导子情形下的相对 D-群与微分伽罗瓦理论. 《美国数学会汇刊》, 367:7613–7638, 2015.[10] O. Le´on S´anchez、D. Meretzky 与 A. Pillay. 再论伽罗瓦上同调、可定义性与微分代数群. 《符号逻辑杂志》, 89(2):496–515, 2024. [11] O. Le´on S´anchez 与 A. Pillay. 一些可定义伽罗瓦理论及例子. 《符号逻辑通报》, 23(2):145–159, 2017. [12] D. Meretzky. 可定义伽罗瓦上同调中的短正合列. 《符号逻辑杂志》. 在线发表

2025 1 15 10 1017 2025 8 : - . doi: . /jsl. . D. Meretzky. 微[13]
分域算术. 圣母大学. 学位论文. https://doi.org/ 10 7274 28786154 1 . / .v A.
Pillay. 微分伽罗瓦理论 I. 《伊利诺伊数学杂志》[14], 42(4):678–699, 1998. [15] A. Pillay. 代数 D-群与微分伽罗瓦理论. 《太平洋数学杂志》. 第 216 卷, 第 2 期, 2004.[16] A. Pillay. 关于伽罗瓦上同调与可定义性的注记. 《符号逻辑杂志》. 第 62 卷, 第 2 期, 第 487-492 页, 1997.[17] A. Pillay. 关于微分代数群的一些基础性问题. 《太平洋数学杂志》. 第 179 卷, 第 1 期, 1997.[18] A. Pillay. 皮卡-维西奥理论、受约束上同调与线性微分代数群. Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees. 第 108 卷, 第 809-817 页, 2017. [19] A. Pillay 与 Z. Sokolovic. 超稳定微分域 . 《符号逻辑杂志》 . 57(1):97–108, 1992. [20] M. van der Put 与 M. Singer. 线性微分方程的伽罗瓦理论. 施普林格出版社 柏林海德堡 2003

Omar León Sánchez University of Manchester School of Mathematics Oxford , Road Manchester M13 9PL.

, , „*Email address*: omar.sanchez@manchester.ac.ukDavid Meretzky, Universidad de Los Andes, Departamento de Matematicas, Carrera1 #18A - 12, Edificio H, Bogotá - Colombia 111711
Email address: d.meretzky@uniandes.edu.co