arXiv:2603.03676v1 [math.DG] 4 Mar 2026

由等距超曲面叶状结构生成的球面中的极小超曲面

JUNQI LAI 和 GUOXIN WEI

Abstract. 我们研究由子球面 $\mathbb{S}^n$ 的等距超曲面叶状结构生成的 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中极小超曲面的存在性。通过考虑由等距超曲面叶的位似副本之并构成的广义旋转构造，我们将极小曲面方程化为一个常微分方程。我们证明，对于任意选取的等距超曲面 $M \subset \mathbb{S}^n$，此构造都能生成一个闭嵌入极小超曲面。所得超曲面的拓扑类型为 $S^1 \times M$，将已知的极小超环面例子（$S^1 \times S^k \times S^k$ 和 $S^1 \times S^k \times S^l$）扩展到由等距结构决定的更广泛的拓扑类型。

1. Introduction

对单位球面中的极小超曲面的研究 $\mathbb{S}^{n+1}$ 长期以来一直是微分几何的核心课题。自 Lawson [11] 以及 Chern、do Carmo 和 Kobayashi 的奠基性工作以来， [2], 对闭极小超曲面的分类、拓扑性质和构造的研究一直备受关注。赤道和克利福德环面是最简单的例子，而寻找具有非平凡拓扑结构的新型嵌入极小超曲面，仍然是一个颇具挑战且富有成果的研究领域。

球面中一个尤为丰富的几何结构来源是等距超曲面理论。该理论由 Cartan 创立，并由 M¨unzner [13]，在结构上加以阐明，描述的是具有常主曲率的超曲面。定义等距超曲面的多项式的等值集构成了 $\mathbb{S}^n$上的奇异黎曼叶状结构。这些叶的几何性质已得到充分理解，且具有高度对称性，因此是构造高维复子流形的理想对象。

本文探讨这两个经典主题之间的联系： $\mathbb{S}^n$ 中的等距超曲面叶状结构，以及 $\mathbb{S}^{n+1}$中的极小超曲面。一个自然的问题是，能否将等距超曲面 $M \subset \mathbb{S}^n$ 的几何“提升”，从而在高维球面 $\mathbb{S}^{n+1}$中构造极小超曲面。具体而言，我们研究一种基于等距超曲面叶的位似副本之并集的构造。这可以视为旋转曲面构造的一种推广。

我们的主要贡献在于证明：对于任意等距超曲面，这样的构造总是可行的，从而得到一族具有乘积$S^1 \times M$拓扑类型的极小超曲面。主要结果如下所述：

定理 1.1。 对于任意等距超曲面 M *in* $\mathbb{S}^n$，存在一个拓扑类型为 $S^1 \times M$ 的闭嵌入极小超曲面，位于 $\mathbb{S}^{n+1}$中。该超曲面是与 M相关的 $\mathbb{S}^n$ 的等距超曲面叶状结构的叶片的位似副本之并。

证明受到 [17]中的思想启发。从几何上看，该超曲面纤维化于参数空间中的一条闭曲线之上，其纤维是等距超曲面叶状结构的叶片。这一构造为在 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中生成极小超曲面提供了一种统一方法，体现了 $\mathbb{S}^n$中等距超曲面理论的复杂性。

注 1.2. 在等距超曲面 M 为 $S^k \times S^k$的情形下，我们的主定理恢复了 [1], 的定理 *1.1*，该定理是用常微分方程方法证明的。对于 $M = S^k \times S^l$，它恢复了 [5], 的结果，该结果是通过将欧几里得空间中具有双正交对称性的自由边界极小锥的链环加倍而建立的。关于球面中极小超曲面与常平均曲率超曲面构造的最新进展，可见 [9, 10, 16] （使用常微分方程方法）和[19, 20] （使用极小极大构造）。

2. Preliminaries

设 M^{n-1} 为单位球面 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$中的等距超曲面，并设 N 为 M 在 $\mathbb{S}^n$中的单位法向量场。众所周知， M 的主曲率是常数。设 g 表示 M的互异主曲率个数。M¨unzner的一个著名结果表明， g只能在 $\{1,2,3,4,6\}$中取值。设cot $\varphi_1 \geq$、cot $\varphi_2 \geq \cdots \geq$、cot φ_{n-1}为 M的主曲率，其中 φ_1, ……， $\varphi_{n-1} \in$ （0， π）。

设 $\gamma(s) = (x(s)\ y(s)\ z(s)) = (\sin r(s)\cos\varphi(s),\ \sin r(s)\sin\varphi(s),\ \cos r(s)),\ s \in I$ 是二维单位球面上按弧长参数化的一条光滑曲线，其中

$$(r(s),\varphi(s)) \in (0,\pi)\times(\varphi_1 - \frac{\pi}{g},\varphi_1).$$

我们定义一个浸入 F 从 $M\times I$ 到 $\mathbb{S}^{n+1}$ 如下:

$$\begin{aligned} F: M\times I &\to \mathbb{S}^{n+1},\\ (p,s) &\mapsto (p\,x(s) + N(p)\,y(s),\ z(s)). \end{aligned} \tag{1}$$

可以验证

$$\nu(p,s) = ((yz' - y'z)\,p + (x'z - xz')\,N,\ xy' - x'y)$$

是 F的单位法向量场，并且 F 的主曲率为

$$\begin{aligned} &\kappa_i = \csc r\,\cot(\varphi_i - \varphi)\cos\alpha + \cot r\,\sin\alpha, \quad i = 1,\cdots,n-1,\\ &\kappa_n = \alpha' + \cot r\,\sin\alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\alpha(s)$ 表示曲线 $\gamma(s)$ 的切向量与 $\frac{\partial}{\partial r}$ 之间的夹角。对于 $g = 2$以及两个主曲率重数相等的情形，计算过程可见 [9]。

注记 *2.1.* 当 $g = 1$ 时，此处构造的超曲面恰好是球面中的旋转超曲面。事实上，取 $M = \mathbb{S}^{n-1} := \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} = 0\}$ 和 $N = (0,\cdots,0,1)$，点 $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ 可写为 $(\bar{p},0)$，其中 $|\bar{p}| = 1$。在这种情况下，$(p\,x(s) + N(p)\ y(s)\ z(s)) = (\bar{p}\,x(s)\ y(s)\ z(s))$。这正是单位球面中旋转超曲面的标准浸入形式；例如参见 [14, 3, 15]。

注记 2.2. 类似地，可以定义浸入到双曲空间中的这类浸入:

$$\begin{aligned} F_{-1}: M\times I &\to \mathbb{H}^{n+1}\\ (p,s) &\mapsto (p\sinh r(s)\cos\varphi(s) + N(p)\sinh r(s)\sin\varphi(s),\ \cosh r(s)). \end{aligned}$$

这里，双曲空间采用洛伦兹模型表示，即

$$\mathbb{H}^n = \left\{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} \mid \langle x,x\rangle_1 := x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = -1\right\}.$$

记 $x(s) = \sinh r\cos\varphi,\ y(s) = \sinh r\sin\varphi,\ z(s) = \cosh r$。若 $\gamma(s) = (r(s)\ \varphi(s))$ 是一条关于双曲平面度量（即 $dr^2 + \sinh^2 r\,d\varphi^2$）以弧长为参数的曲线，则此浸入的单位法向量场 $\nu(p,s)$ 为:

$$\nu(p,s) = \left((zy' - z'y)\,p + (z'x - zx')\,N,\ xy' - x'y\right),$$

使用角 α （定义为曲线 $\gamma(s)$ 的切向量与径向向量场 $\frac{\partial}{\partial r}$ 之间的夹角）， F_{-1} 的主曲率可表示为:

$$\begin{aligned} &\kappa_i = \operatorname{csch} r\,\cot(\varphi_i - \varphi)\cos\alpha + \coth r\,\sin\alpha, \quad i = 1,\cdots,n-1,\\ &\kappa_n = \alpha' + \coth r\,\sin\alpha, \end{aligned}$$

注 2.3. 更一般地，可以将此类浸入定义到以单位球面为纤维的扭曲积中:

$$\begin{aligned} F_h: M\times I &\to \tilde{I}\times_h \mathbb{S}^n\\ (p,s) &\mapsto (r(s),\ p\cos\varphi(s) + N(p)\sin\varphi(s)). \end{aligned}$$

此浸入的主曲率 F_h 为:

$$\kappa_i = \frac{1}{h(r(s))}\cot(\varphi_i - \varphi(s))\cos\alpha + \frac{h'(r(s))}{h(r(s))}\sin\alpha, \quad i = 1, \cdots, n-1,$$
$$\kappa_n = \alpha' + \frac{h'(r(s))}{h(r(s))}\sin\alpha,$$

其中 α（s）表示以弧长参数化的曲线 γ（s） $=$（r（s） φ（s）的切向量与 $\frac{\partial}{\partial r}$ 之间相对于度量 $\mathrm{d}r^2 + h$（r）$^2\mathrm{d}\varphi^2$所成的角。

注 2.4。 利用单位球面 $\mathbb{S}^{k+l+1}$上的克利福德叶状结构，还可以如下定义一类浸入:

$$\begin{aligned} F_c : I \times S^k \times M &\to \mathbb{S}^{k+l+1} \\ (s,p,q) &\mapsto (p\cos r(s),\ (q\cos\varphi(s) + N(q)\sin\varphi(s))\sin r(s)), \end{aligned}$$

其中 M 是 $\mathbb{S}^l$中的一个等距超曲面。若 γ（s） $=$（r（s） φ（s）是相对于度量 $\mathrm{d}r^2$+正弦 $r^2\mathrm{d}\varphi^2$以弧长参数化的曲线，且 α（s）表示该曲线的切向量与 $\frac{\partial}{\partial r}$之间所成的角，则该浸入的单位法向量场 ν 可取为

$$\nu(s,p,q) = (p\sin r\sin\alpha,\ (-\Psi\cos r\sin\alpha + A\cos\alpha)),$$

其中 $\Psi = q$余弦 φ+N正弦 φ 以及 $A = -q$正弦φ+N余弦 φ。超曲面F_c 的主曲率分为三类:

- 对应于 $\mathbb{S}^k$ 的主曲率（重数为 k）:

$$\mu = -\tan r\ \sin\alpha.$$

- 对应于 M的主曲率:

$$\lambda_i = \csc r\ \cot(\varphi_i - \varphi)\cos\alpha + \cot r\ \sin\alpha, \quad i = 1, \ldots, l-1.$$

- 对应于轮廓曲线方向的主曲率（重数为1）:

$$\kappa = \alpha' + \cot r\ \sin\alpha.$$

众所周知，等距超曲面 M 的所有互异主曲率均具有如下形式

$$\cot\varphi_1,\ \cot\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{g}\right),\ \ldots,\ \cot\left(\varphi_1 + \frac{(g-1)\pi}{g}\right),$$

并且它们的重数按此顺序交替出现。此外，当 g 为奇数时，所有重数均相等。令 m_2 表示 M最大主曲率的重数， m_1 表示第二大主曲率的重数（若 $g = 1$，则令 $m_1 = m_2$）。回顾 F的主曲率:

$$\begin{aligned} &\kappa_i = \csc r\ \cot(\varphi_i - \varphi)\cos\alpha + \cot r\ \sin\alpha, \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ &\kappa_n = \alpha' + \cot r\ \sin\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

利用多倍角余切公式的求和形式，可得 F 的平均曲率为

$$\begin{aligned} H &= \alpha' + n\cot r\sin\alpha + \frac{g}{2}\left[m_2\cot\left(\frac{g}{2}(\varphi_1 - \varphi)\right) - m_1\tan\left(\frac{g}{2}(\varphi_1 - \varphi)\right)\right]\csc r\cos\alpha \\ &= \alpha' + n\cot r\sin\alpha + \frac{g}{2}\left[m_2\tan\left(\frac{g}{2}\theta\right) - m_1\cot\left(\frac{g}{2}\theta\right)\right]\csc r\cos\alpha, \end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{\pi}{g} - \varphi_1 + \varphi$。结合 $\gamma(s)$ 以弧长为参数这一事实，我们知道，F 具有常平均曲率 H 当且仅当 r, θ, α 满足以下常微分方程

$$\begin{aligned} &r' = \cos\alpha, \qquad \theta' = \frac{\sin\alpha}{\sin r}, \\ &\alpha' = -n\cot r\sin\alpha + \frac{g}{2}\left[m_1\cot\left(\frac{g}{2}\theta\right) - m_2\tan\left(\frac{g}{2}\theta\right)\right]\csc r\cos\alpha + H. \end{aligned} \tag{3}$$

注 2.5. 当 $H=0$ 时，上述常微分方程系统等价于由 $(r')^2+(\theta')^2$正弦$^2\, r=1$ 以及以下方程组成的系统

$$(r'\theta''-r''\theta')\sin r+(r')^2\theta'\cos r+n\theta'\cos r-\frac{g}{2}\left(m_1\cot\left(\frac{g}{2}\theta\right)-m_2\tan\left(\frac{g}{2}\theta\right)\right)r'\csc r=0.$$

直接计算可知，曲线 $(r(s)\ \theta(s))$ 满足该系统，当且仅当其轨迹在下述共形度量下是一条测地线轨迹（见 [1]）：

$$\sin^{2n-2}r\,\sin^{2m_1}\left(\frac{g}{2}\theta\right)\cos^{2m_2}\left(\frac{g}{2}\theta\right)\left(\sin^2 r\,\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}r^2\right).$$

因此，证明定理 *1.1* 本质上可归结为证明在该度量下存在一条简单闭测地线。本文采用射击法证明其存在；另一种可能的方法是（经修改的）曲线缩短流，见 [4]。

尤其值得注意的是，*Hsiang* [6], 在研究球面上的伯恩斯坦问题时，寻找一类**特殊的解曲线**：它们连接商空间的两个奇异边界（即 $\{\theta=0\}$ 和 $\{\theta=\pi/g\}$），并在边界处满足**正交条件**。这种严格的边界行为确保了将曲线提升回原空间后，它会生成一个光滑闭超曲面，其拓扑类型与球面相同。*Hsiang* 的突破在于发现，除了显然的赤道解之外，还存在满足上述边界条件的非平凡解曲线，由此构造出并非全测地的嵌入极小球面，另见 [7, 8, 18]。

经过重新参数化后，可以看出方程（3）等价于

$$r'=\sin r\cos\alpha,\qquad \theta'=\sin\alpha,$$
$$\alpha'=-n\cos r\sin\alpha+\frac{g}{2}\left[m_1\cot\left(\frac{g}{2}\theta\right)-m_2\tan\left(\frac{g}{2}\theta\right)\right]\cos\alpha+H\sin r.$$

令 $\xi=\frac{g}{2}$ln tan $\frac{r}{2}$和 $\vartheta=\frac{g}{2}\theta$，则 cos $r=-$tanh $\frac{2}{g}\xi$, sin $r=$sech $\frac{2}{g}\xi$且 $\xi,\ \vartheta,\ \alpha$满足以下常微分方程

$$\xi'=\frac{g}{2}\cos\alpha,\qquad \vartheta'=\frac{g}{2}\sin\alpha,$$
$$\alpha'=\frac{g}{2}\left[\frac{2n}{g}\tanh\frac{2}{g}\xi\sin\alpha+(m_1\cot\vartheta-m_2\tan\vartheta)\cos\alpha+\frac{2}{g}H\,\mathrm{sech}\,\frac{2}{g}\xi\right],$$

这等价于

$$\begin{cases}\xi'=\sin 2\vartheta\cos\alpha,\\ \vartheta'=\sin 2\vartheta\sin\alpha,\\ \alpha'=m\sin 2\vartheta\tanh\frac{2}{g}\xi\sin\alpha+2(m_1\cos^2\vartheta-m_2\sin^2\vartheta)\cos\alpha+\frac{2}{g}H\sin 2\vartheta\,\mathrm{sech}\,\frac{2}{g}\xi,\end{cases}\tag{4}$$

其中 $m:=-\frac{2}{g}n$。令 $D=\mathbb{R}\times(0,-\frac{\pi}{2})\times\mathbb{R}$。本文将只关注方程（4）中属于 D。

当 $H=0$ 和（$\xi(t)\ \vartheta(t)$）的形式为（$\xi,\vartheta(\xi)$）时，则 $\vartheta(\xi)$满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2}=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right]\left(m\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\tanh\frac{2}{g}\xi+m_1\cot\vartheta-m_2\tan\vartheta\right).\tag{5}$$

当 $H=0$ 和 $(\xi(t)\ \vartheta(t))$ 具有 $(\xi(\vartheta)\ \vartheta)$ 的形式时，$\xi(\vartheta)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\vartheta^2}=-\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2\right]\left[m\tanh\frac{2}{g}\xi+(m_1\cot\vartheta-m_2\tan\vartheta)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta}\right].\tag{6}$$

注记2.6.

- 如果 $m_1\cos^2\vartheta-m_2\sin^2\vartheta=0$ 则 $\vartheta=$反正切 $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}=:\vartheta^*$;
- 方程(5) 有唯一常数解 $\vartheta\equiv\vartheta^*$;
- $m_1\csc^2\vartheta^*+m_2\sec^2\vartheta^*=2(m_1+m_2)$;

我们用两个初等命题结束本节。

命题 2.7。 对于 (4) 的解，我们有：

(i) 对于任意 $(\xi_0, \vartheta_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^3$，存在唯一解 γ，它是 (4) 的解，并满足初始条件$\gamma(0) = (\xi_0, \vartheta_0, \alpha_0)$。该解光滑，且其最大存在区间为整个实直线；也就是说，该解对所有时间都存在。

(ii) 假设 $(\xi_s, \vartheta_s, \alpha_s)$ 收敛到 $\mathbb{R}^3$ 中的一点 $(\xi_\infty, \vartheta_\infty, \alpha_\infty)$。记 γ_s 为以初始数据 $(\xi_s, \vartheta_s, \alpha_s)$ 为初始条件的 *(4)* 的解，并记 γ_∞ 为以初始数据 $(\xi_\infty, \vartheta_\infty, \alpha_\infty)$ 为初始条件的解。那么，γ_s在 $\mathbb{R}$ 的每个紧子集上一致收敛到 γ_∞。

(iii) *(*(4) 的解若其初始数据属于 D，则对所有时间始终处于 D 中。

证明。 证明是标准的，因此略去。 □

命题 2.8。 设 $\gamma(t) = (\xi(t)\ \vartheta(t)\ \alpha(t))$ 是 (4) 在 D中的解。那么

$$\hat{\gamma}(t) = (-\xi(-t),\ \vartheta(-t),\ -\alpha(-t)),$$

$$\tilde{\gamma}(t) = (\xi(-t),\ \frac{\pi}{2} - \vartheta(-t),\ \pi - \alpha(-t)) \qquad (when\ m_1 = m_2),$$

$$\check{\gamma}(t) = (\xi(t),\ \vartheta(t),\ \alpha(t) + 2k\pi), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

也是 (4) 在 D中的解。

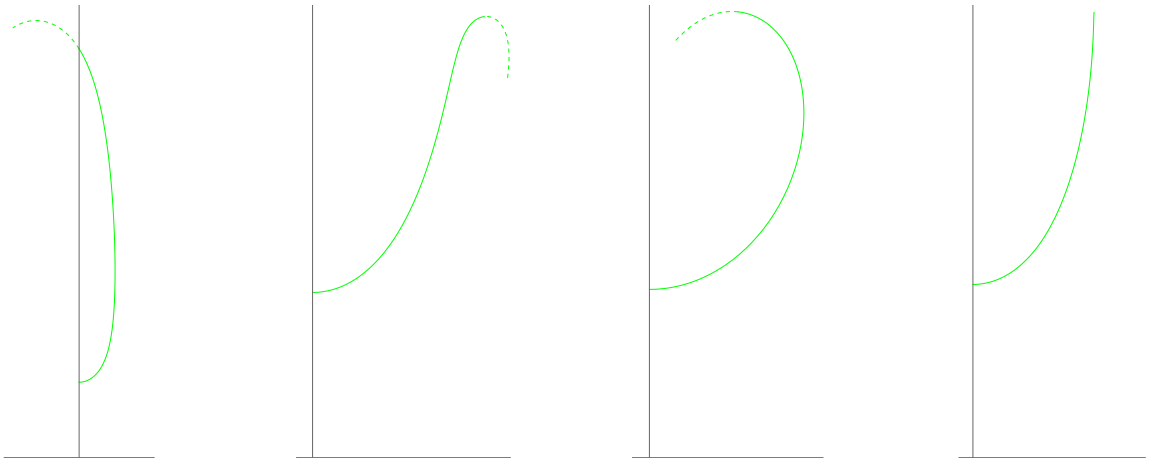
证明。 证明只需进行直接计算。 □

3. Existence of periodic curves

本文中，$\sqrt{m_1/m_2}$的反正切记为 ϑ^*。为了证明定理1.1，只需找到满足 (4)（当 $H = 0$时）的解，使得分量 $(\xi(t)\ \vartheta(t))$ 构成光滑简单闭曲线。下面先给出一个定义。

定义 3.1。 对于 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 令$(\xi_\delta(t)\ \vartheta_\delta(t)\ \alpha_\delta(t))$ 表示满足初始条件 (4) 的解 $(\xi_\delta(0)\ \vartheta_\delta(0)\ \alpha_\delta(0)) = (0, \delta, 0)$。那么：

(i) δ称为类型 *1*，如果存在一个 $T > 0$，使得对于所有 $t \in (0, T)$，$\xi_\delta(T) = 0$且 $\vartheta'_\delta(t) \neq 0$。示意图见图 *1(a)*。*(ii)* δ称为类型 *2*，如果存在一个 $T > 0$，使得对于所有 $t \in (0, T)$，$\vartheta'_\delta(T) = 0$且 $\xi_\delta(t) \neq 0$。示意图见图 *1(b)*、*(c)*。*(iii)* 如果对于所有 $t > 0$，$\vartheta'_\delta(t) \neq 0$ 且 $\xi_\delta(t) \neq 0$，则称 δ 为类型 *3*。示意图见图 *1(d)*。



(a) 类型 1　(b) 类型 2　(c) 类型 2　(d) 类型 3

Figure 1. 轮廓曲线的类型。

注意，这三种情况涵盖了所有可能性。接下来我们定义

$$\delta^* := \sup\left\{\delta \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid \delta_0 \text{ is type 1 for all } \delta_0 \in (0, \delta)\right\}$$

约定当集合为空时， $\delta^* = 0$ 。

命题 3.2. 设 $H = 0$，则我们有：

(i) $\delta^* > 0$.(ii) $\delta^* < \vartheta^*$.(iii) δ^* 不是类型 *3*。

本命题将在第5,6,7节中证明。接下来，我们陈述如下引理，其证明十分直接，故予以省略。

引理 3.3. 设 $H = 0$，则对 $(\xi, \vartheta, \alpha)(t) \in D$ 有：

(i) 若 $\xi'(t) = 0$，则 $\xi''(t) > 0$ 当且仅当 $\xi(t) < 0$；$\xi''(t) < 0$ 当且仅当 $\xi(t) > 0$；$\xi''(t) = 0$ 当且仅当 ξ 恒为零。*(ii)* 若 $\vartheta'(t) = 0$，则 $\vartheta''(t) > 0$ 当且仅当 $\vartheta(t) < \vartheta^*$；$\vartheta''(t) < 0$ 当且仅当 $\vartheta(t) > \vartheta^*$；$\vartheta''(t) = 0$ 当且仅当 ϑ 恒为ϑ^*。

由此可得：

命题 3.4. 令 $H = 0$ ，则 δ^* 属于类型 *1* 和类型 *2*。

证明。 利用方程（12）的解对初始条件的连续依赖性，证明是标准的，另见 [17]。 □

应用命题 2.8，即可证明周期曲线的存在，进而证明定理 1.1。下图展示了 $g = 4$， $m_1 = 4$, $m_2 = 5$ 和 $\delta^* \approx 0.341639$ 的一条周期轮廓曲线。

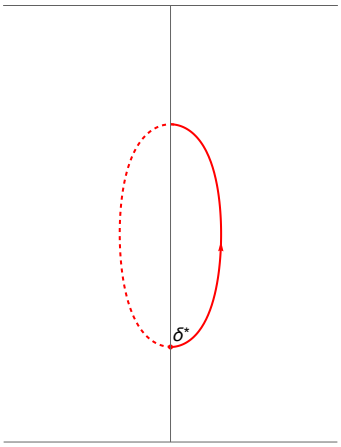


FIGURE 2. 周期轮廓曲线的存在性

4. PREPARATIONS FOR PROPOSITION 3.2

回想方程（6）为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\vartheta^2} = -\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2\right]\left[m\tanh\frac{2}{g}\xi + (m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta}\right].$$

引理 *4.1.* 设 $\xi(\vartheta)$ $a \le \vartheta \le \vartheta^*$ 是（*6*）的一个解，其中 $\xi'(a) = 1$、$\xi(\vartheta^*) > 0$ 以及 $\xi'(\vartheta) \ge 0$ 对于$\vartheta \in [a, \vartheta^*]$（$\xi'(a) = -1$、$\xi(\vartheta^*) < 0$ 以及 $\xi'(\vartheta) \le 0$ 对于 $\vartheta \in [a, \vartheta^*]$）。若 $|\xi(\vartheta^*)|$ 与 a 充分小，则 $\xi(a) \le 0$ ($\xi(a) \ge 0$)。

证明。 假设 $\xi'(a) = 1$, $\xi(\vartheta^*) > 0$ 且 $\xi'(\vartheta) \ge 0$ 对于 $\vartheta \in [a, \vartheta^*]$。我们假设 $\xi(a) > 0$ 以导出矛盾。第一步是证明，当 $|\xi(\vartheta^*)|$ 和 a充分小时，一致估计

$$c_1\,\xi(\vartheta^*) < a^{m_1} < c_2\,\xi(\vartheta^*). \tag{7}$$

对某些常数 c_1, c_2成立。具体而言，我们可以取

$$c_1 = \frac{m\vartheta^*}{8g}\mathrm{e}^{-17}\sin^{m_1}\frac{\vartheta^*}{2}\cos^{m_2}\vartheta^* \qquad \text{and} \qquad c_2 = \frac{1}{\vartheta^*}2^{m_1+2}\mathrm{e}^{18}\sin^{m_1}\vartheta^*\cos^{m_2}\frac{\vartheta^*}{2}.$$

由于对所有 $\vartheta \in (a, \vartheta^*)$， $\xi'(\vartheta) \geq 0$，我们得到，对于这样的 ϑ， $\xi(\vartheta) > 0$。然后由 (6) 可得，对所有 $\vartheta \in (a, \vartheta^*)$， $\xi''(\vartheta) < 0$，进而 $\xi'(\vartheta)$ 在此区间内严格递减。$\xi'(\vartheta)$ 的单调性和中值定理继而推出

$$\xi'\left(\frac{a+\vartheta^*}{2}\right) < \xi(\vartheta^*)\frac{2}{\vartheta^* - a}, \qquad \xi\left(\frac{a+\vartheta^*}{2}\right) > \frac{1}{2}\xi(\vartheta^*). \tag{8}$$

将第二个不等式与图形常微分方程 (6) 结合起来，可得（注意， $\xi(\vartheta^*)$ 足够小）此外还有 ξ' 在 $(a+\vartheta^*)$ 处的下界/2。因此存在一致常数 $\tilde{c}_1$， $\tilde{c}_2 > 0$使得当 $\xi(\vartheta^*)$ 和 a足够小时：

$$\tilde{c}_1\,\xi(\vartheta^*) < \xi'\left(\frac{a+\vartheta^*}{2}\right) < \tilde{c}_2\,\xi(\vartheta^*). \tag{9}$$

可以取 $\tilde{c}_1 = \frac{m\vartheta^*}{8g}$ 和 $\tilde{c}_2 = \frac{4}{\vartheta^*}$。将图形常微分方程改写为

$$\frac{\xi''}{\xi'(1+(\xi')^2)} = -\frac{m\tanh\frac{2}{g}\xi}{\xi'} - G(\vartheta), \tag{10}$$

其中 $G(\vartheta) := m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta$。注意到右端第一项为 $O(1)$，在区间 $(a, \frac{a+\vartheta^*}{2})$ 内，由 (9) 及 ξ' 的单调性可知，并且左端以 $\ln(\frac{\xi'}{\sqrt{1+(\xi')^2}})$ 为原函数。将 (10) 在 $(a, \frac{a+\vartheta^*}{2})$ 上积分，即得

$$\ln\left(\xi'\left(\frac{a+\vartheta^*}{2}\right)\right) = m_1\ln\sin a + O(1).$$

利用近似 $\sin x = x + O(x^3)$，即可得到界 (7)，其由 (9) 推出。

对于下一步，注意到 $G(\vartheta) - \xi'(\vartheta)^{-1}$ 在 $\vartheta \to \vartheta^*$ 时变为负，而 $G(a) - 1$ 在 $\vartheta \to a$时，对足够小的 a 将为正。因此，对足够小的 a，存在 $b \in (a, \vartheta)$，使得 $G(b) = \xi'(b)^{-1}$。由 (8) 及 ξ' 的单调性可知， $\xi'(\vartheta^*)$ 在$\xi(\vartheta^*)$ 与 a 趋于零时收敛于零。从而， $\xi(\vartheta)$ 及其导数在紧集上一致收敛于零，进而推出 b收敛于零。

我们令

$$q = \frac{b}{a}$$

并接着证明存在一个一致常数 $c_3 > 0$，使得 $q^{m_1} \geq c_3/b$，从而当 $\xi(\vartheta^*)$与 a 趋于零时， q 无界增长。可以取 $c_3 = m_1\mathrm{e}^{-18}2^{-(m_1+1)}$。

为证明这一点，我们再次对(10)积分，这次从 $\vartheta \geq a$ 到 b。结果为：

$$\ln\xi'(b) - \ln\xi'(\vartheta) = m_1(\ln\sin\vartheta - \ln\sin b) + O(1).$$

注意到 $\xi'(b) = G(b)^{-1} = \frac{1}{m_1}b + O(b^3)$。利用正弦在0附近的展开，可知存在 c_3， $c_4 > 0$，使得当 $\xi(\vartheta^*)$与 a足够小时：

$$c_4\,\xi'(\vartheta) \geq \left(\frac{b}{\vartheta}\right)^{m_1} b \geq c_3\,\xi'(\vartheta). \tag{11}$$

可以取 $c_4 = m_1\mathrm{e}^{18}2^{m_1+1}$。在(11)中取 $\vartheta = a$ 可得 $q^{m_1} \geq c_3/b$。另一方面，若将 $\xi'(\vartheta)$在(a, b)上积分，则由(11)可知

$$c_4(\xi(b) - \xi(a)) \geq \begin{cases} b^2\ln q & m_1 = 1 \\ \frac{1}{m_1-1}b^2(q^{m_1-1}-1) & m_2 > 1. \end{cases}$$

注意到 $b^2 = \frac{a^{m_1}}{b^{m_1}}q^{m_1}b^2 > c_1c_3b^{1-m_1}\xi(\vartheta^*)$，并利用 q 的无界性，可见当 $\xi(\vartheta^*)$与 a充分小时， $\xi(b) - \xi(a)$将大于 $\xi(\vartheta^*)$，这与我们关于$\xi(a) \geq 0$的假设相矛盾。另一种情形的证明类似。

□

下面的引理可以类似地证明。

引理 *4.2.* 设 $\xi(\vartheta)$ $\vartheta^* \le \vartheta \le a$ 是方程 *(6)* 的解序列，满足 $\xi'(a) = -1$, $\xi(\vartheta^*) > 0$ 且$\xi'(\vartheta) \le 0$，其中 $\vartheta \in [\vartheta^*, a]$ *(*$\xi'(a) = 1$, $\xi(\vartheta^*) < 0$ 且 $\xi'(\vartheta) \ge 0$， $\vartheta \in [\vartheta^*, a]$*)*。若 $|\xi(\vartheta)|$ 和 $\frac{\pi}{2} - a$充分小，则 $\xi(a) \le 0$*(*$\xi(a) \ge 0$*)*。

接下来我们回顾系统 (4)，其中 $H = 0$:

$$\begin{cases} \xi' = \sin 2\vartheta \cos\alpha, \\ \vartheta' = \sin 2\vartheta \sin\alpha, \\ \alpha' = m \sin 2\vartheta \tanh \dfrac{2}{g}\xi \sin\alpha + 2(m_1 \cos^2\vartheta - m_2 \sin^2\vartheta)\cos\alpha, \end{cases} \tag{12}$$

注意， $\xi'(t)$ $\vartheta'(t)$ $\alpha'(t)$有界，因此 ξ， ϑ， α 的所有高阶导数也有界。

引理 4.3. 设 $H = 0$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}$，则 $\vartheta(t_0) < \vartheta^*$ *(*$\vartheta(t_0) > \vartheta^*$*)* 和 $\vartheta'(t_0) > 0$*(*$\vartheta'(t_0) < 0$*)* 蕴含存在一个时间 $T \in (0, \infty)$ 使得 $\vartheta(t_0 + T) = \vartheta^*$。

证明。假设对所有 $t > t_0$， $\vartheta(t_0) < \vartheta^*$, $\vartheta'(t_0) > 0$，且 $\vartheta(t) < \vartheta^*$。我们将导出一个矛盾。首先注意到，根据引理 3.3，对所有 $t > t_0$， $\vartheta'(t) > 0$。若存在一个递增趋于 ∞ 的序列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\xi'(t_i) = 0$，那么由 $\vartheta(t)$ 的递增单调性可知，对所有 i， $\vartheta'(t_i) =$$\sin 2\vartheta(t_i) > 0$ 与零之间有正距离。因此， $\vartheta''(t)$ 的有界性直接导致矛盾。若对于较大的 t，$\xi'(t) \ne 0$，那么不失一般性，我们可以假设对于较大的 t， $\xi'(t) > 0$，且 $\alpha(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$。由此可得 $\lim_{t\to\infty}\xi(t) = \infty$ 或 $\lim_{t\to\infty}\xi(t)$ 为有限值。后一种情况意味着 ξ' 和 ϑ' 趋于零，进而 $\vartheta(t)$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$，这就产生了矛盾。对于前一种情况，可知当 t 较大时， $\alpha'(t) > 0$，由此可得当 t 较大时， $\alpha(t)$ 与 0 之间有正距离。因此，当 t 较大时， $\vartheta'(t)$ 也与 0 之间有正距离，这再次导致矛盾。另一种情况的证明类似。□

引理 4.4. 设 $H = 0$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}$，则 $\xi(t_0) < 0$ *(*$\xi(t_0) > 0$*)* 以及 $\xi'(t_0) > 0$*(*$\xi'(t_0) < 0$*)* 蕴含存在一个时间 $T \in (0, \infty)$ 使得 $\xi(t_0 + T) = 0$。

证明。假设对所有 $t > t_0$， $\xi(t_0) < 0$、$\xi'(t_0) > 0$ 且 $\xi(t) < 0$。我们将导出一个矛盾。首先注意，由引理 3.3，对所有 $t > t_0$， $\xi'(t) > 0$。 $\alpha'(t)$ 的有界性意味着$\xi''(t)$ 有界，因此 $\lim_{t\to\infty}\xi'(t) = 0$.

如果存在一个递增趋于 ∞ 的序列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\vartheta'(t_i) = 0$，那么由 $\lim_{t\to\infty}\xi'(t) = 0$ 可知

$$\lim_{i\to\infty} \sin 2\vartheta(t_i) = 0$$

必然地。由引理 3.3 和引理 4.3，此类序列的存在性 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 意味着存在序列 $\{\tilde{t}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 递增至 ∞ 使得 $\vartheta(\tilde{t}_i) = \vartheta^*$。注意，$\lim_{i\to\infty}\sin\alpha(\tilde{t}_i) =$在取某个子序列后为 1，这由 $\lim_{t\to}\xi'(t) = 0$可得。我们将证明

$$\lim_{i\to\infty} \xi(\tilde{t}_i) = 0.$$

假设 $\lim_{i\to\infty}\xi(\tilde{t}_i) < 0$，则对某个 b，$\lim_{i\to\infty}\alpha'(\tilde{t}_i) < 2b < 0$。 $\alpha'(t)$ 的有界性意味着 $\alpha''(t)$ 有界，由此可知存在 $\varepsilon > 0$，使得当 i 和 $t \in [0, \varepsilon]$ 足够大时， $\alpha'(\tilde{t}_i + t) < b < 0$。不失一般性，我们可以假设 $\lim_{i\to\infty}\alpha(\tilde{t}_i) = \frac{\pi}{2}$。那么

$$\alpha(\tilde{t}_i + \varepsilon) < \frac{\pi}{2} + \frac{b\varepsilon}{2}$$

当 i 足够大时。通过适当减小 ε，可以确保对于所有 i 和 $t \in [0, \varepsilon]$， $\vartheta(\tilde{t}_i + t)$ 都与 $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ 保持正距离。结合$\lim_{i\to\infty}\sin 2\vartheta(t_i) = 0$，可知对于所有 $t \in [0, \varepsilon]$ 以及足够的大 i， $\vartheta'(\tilde{t}_i + t) > 0$。因此，当 i 足够大时

$$0 < \alpha(\tilde{t}_i + \varepsilon) < \frac{\pi + b\varepsilon}{2},$$

这与 $\lim_{t\to\infty}\xi'(t) = 0$ 矛盾。

现在我们已经证明了极限$_{i\to\infty}\xi(\tilde{t}_i) = 0$。因此，不失一般性，可以找到一个解的序列 $\{\xi_i, \vartheta^* \le \vartheta < b_i\}$，它们满足（6），且极限$_{\vartheta\to b_i}\xi_i'(\vartheta) = \infty$，极限$_{i\to\infty}\xi_i'(\vartheta^*) = 0$， $\xi_i(\vartheta^*)$

递增趋于零，并且 $\xi_i'(\vartheta) \geq 0$ 对于 $\vartheta \in [\vartheta^*, b_i)$。注意，带初始条件$\xi(\vartheta^*) = \xi'(\vartheta^*) = 0$ 的（6）的解是一个常数解。因此，由（12）的解对初始条件的连续依赖，当 i 充分大时，存在一个序列 $a_i \in (\vartheta^*, b_i)$，使得 $\xi_i'(a_i) = 1$且极限$_{i\to\infty} a_i = \frac{\pi}{2}$。因此，应用引理 4.2，我们得到了矛盾。

若当 t 足够大时 $\vartheta'(t) \neq 0$，则不失一般性，我们假设 $\vartheta'(t) > 0$，且当 t 足够大时，$\alpha(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$。由此可知，$\xi(t)$ 和 $\vartheta(t)$ 均收敛，进而得到 $\xi'(t)$ 和 $\vartheta'(t)$ 收敛于零，而 $\vartheta(t)$ 收敛于 $\frac{\pi}{2}$。因此，由 (12) 可得 $\alpha'(t) < 0$，进而当 t 足够大时，$\alpha(t)$ 远离 $\frac{\pi}{2}$。再次由 (12) 可知，$\alpha'(t)$ 也远离零，这显然不可能。另一种情形的证明类似。□

5. Proof of first item of proposition 3.2

在本节中，ξ，ϑ和 α 将表示带有初始条件 (4) 的解的各个分量，其中初始条件为 $(\xi, \vartheta, \alpha)(0) = (0, \delta, 0)$。

引理 5.1。令 $H = 0$ 和 i 为任意正整数。那么存在一个 $\delta_i \in (0, \frac{\pi}{2})$，使得对所有$0 < \delta < \delta_i$，在任意以 0 为起点的开区间 I 上，只要 $\vartheta'(s) > 0, \vartheta(s) < \vartheta^*$且 $\alpha'(s) > 0$ 对于 $s \in I$成立，就有 $\xi(s) < \frac{2\vartheta^*}{i}$。

证明。对于 t 为了证明该引理，使用以下常微分方程组更为方便 E:

$$\begin{cases} \xi' = \cos\alpha, \\ \vartheta' = \sin\alpha, \\ \alpha' = m\tanh\dfrac{2}{g}\xi\sin\alpha + (m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta)\cos\alpha, \end{cases} \tag{13}$$

我们采用爆破分析，因此引入以下变量：

$$\Xi(t) = \frac{1}{\delta}\xi(\delta t), \qquad \Theta(t) = \frac{1}{\delta}(\vartheta(\delta t) - \delta), \qquad \Psi(t) = \alpha(\delta t).$$

其中 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$。由 (13)，它们满足：

$$\begin{cases} \Xi' = \cos\Psi, \\ \Theta' = \sin\Psi, \\ \Psi' = \dfrac{m_1}{\Theta+1} f(\delta(\Theta+1))\cos\Psi + \delta\left[m\tanh\left(\dfrac{2\delta}{g}\Xi\right)\sin\Psi - m_2\tan\left(\delta(\Theta+1)\right)\cos\Psi\right], \end{cases} \tag{14}$$

其中 $f(x) = x$ 余切 x。考虑具有以下初始条件的常微分方程组：

$$\Xi(0) = 0, \quad \Theta(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0.$$

对于 $\delta = 0$，这个初值问题可以显式求解，得到 $\Psi(t) =$ 反正弦 $\Theta'(t)$，其中 $\Theta(t)$ 是

$$t = \int_0^{\Theta} \frac{(1+x)^{m_1}}{\sqrt{(1+x)^{2m_1} - 1}}\mathrm{d}x.$$

对显式解 $\Psi(t)$进行初等分析可知

$$\Psi'(t) > 0 \text{ for } t \in [0, \infty), \qquad \lim_{t\to\infty}\Psi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

因此，根据（14）中的参数依赖性，有如下断言：

断言。对于任意 $i \in \mathbb{N}$，存在一个 $T_i > 0$ 和一个 $\delta_i > 0$，使得对于所有 $0 < \delta < \delta_i$，都有$\alpha'(s) > 0$ 对于 $s \in [0, T_i\delta]$，且在 $s = T_i\,\delta$ 处，反正切 $i < \alpha < \pi/2$, $\xi = O(\delta)$ 以及 $\vartheta = \delta + O(\delta)$。

通过适当减小 δ_i，我们可以确保

$$\xi(T_i\,\delta) = O(\delta) < \frac{\vartheta^*}{i} \text{ and } \vartheta(T_i\,\delta) = \delta + O(\delta) < 1$$

对于 $0<\delta<\delta_i$。考虑曲线 $(\xi(s)\ \vartheta(s))$ 在 $s=T_i\,\delta$ 处的切线 $l_{i,\ \delta}$： $Y-\vartheta(T_i\,\delta)=\tan\theta_\delta(T_i\,\delta)(X-\xi(T_i\,\delta))$。将 $Y=\vartheta^*$ 代入 $l_{i,\ \delta}$ 的方程中，我们得到

$$X=\frac{1}{\tan\alpha(T_i\delta)}(\vartheta^*-O(\delta)-\delta)+O(\delta)<\frac{2\vartheta^*}{i},$$

从而完成证明。 □

在继续之前，我们注意到，在一个开区间 I（从 0 开始）上，其中 $\vartheta'(t)>0$， $\vartheta(t)<\vartheta^*$且 $\xi'(t)>0$，则有 $\alpha'(t)>0$，对 $t\in I$ 成立，这由 (12) 得到。

引理 5.2. 设 $H=0$ 与 $\delta>0$ 充分小，则存在时间 $T_1>0$，使得 $\xi'(T_1)=0$，$\vartheta(t)<\vartheta^*$ 且 $\vartheta'(t)>0$ 对 $t\in(0,T_1]$ 成立。

证明。对于 $\delta<\vartheta^*$，有 $\alpha'(0)>0$，进而 $\vartheta'(t)>0$ 对充分小的 t 成立，由此可知存在 $T_2>0$ 使得 $\vartheta(T_2)=\vartheta^*$，这由引理 4.3 得到。设 T_2 为第一个这样的时间，则 $\vartheta'(t)>0$ 对 $t\in(0,T_2)$ 成立，这由引理 3.3 得到。为得出矛盾，假设本引理不成立。则存在递减到零的初始条件序列 $\left\{\tilde{\delta}_i\right\}$，使得对相应解 $(\xi_i,\vartheta_i,\alpha_i)$，有 $\xi_i'(t)>0$ 对 $t\in(0,T_2)$ 成立。这进一步蕴含 $\alpha_i'(t)>0$ 对 $t\in(0,T_2)\tilde{}$ 成立，这由 (12) 得到。通过抽取子序列，不妨设 $\delta_i<\delta_i$，其中 δ_i 如引理 5.1 中所述。于是 $\lim_{i\to\infty}\xi_i(T_2)=0$ 由引理 5.1 得到。接下来我们注意到，存在 $T_0\in(0,T_2)$ 使得 $\alpha_i(T_0)=\frac{\pi}{4}$，并且 $\lim_{i\to\infty}\vartheta_i(T_0)=0$ 由引理 5.1 的证明中的断言得到。现在应用引理 4.1 便导致矛盾，从而完成证明。 □

引理 5.3. 设 $H=0$ 与 δ 足够小，则 δ 为类型 1。

证明。对于足够小的 $\delta>0$，设 $T_1>0$ 为引理 5.2 中所定义的第一个时间。因此，对 $t\in(0,T_1)$ 有 $\xi'(t)>0$，再由引理 3.3 $\xi''(T_1)<0$，由此可知存在 $T_4>T_1$，使得由引理 4.4 可得 $\xi(T_4)=0$。设 T_4 为第一个这样的时间，则由引理 3.3，对 $t\in(T_1,T_4)$ 有 $\xi'(t)<0$。因此，只需证明对 $t\in(T_1,T_4)$ 以及足够小的 $\delta>0$，有 $\vartheta'(t)\neq0$。用反证法，假设该结论不成立。则存在一列递减趋于零的初始条件 $\left\{\tilde{\delta}_i\right\}$，使得对相应解 $(\xi_i,\vartheta_i,\alpha_i)$ 以及某个依赖于i的 $T_3\in(T_1,T_4)$，对所有 $t\in(T_1,T_3)$ 都有 $\vartheta_i'(T_3)=0$ 且 $\vartheta_i'(t)>0$。必要时取子序列，我们可以假设 $\delta_i<\delta_i$，其中 δ_i 如引理 5.1 中所述。于是由同一引理可得 $\lim_{i\to\infty}\xi_i(T_1)=0$。接下来我们注意到，由引理 3.3 有 $\vartheta_i(T_3)>\vartheta^*$，并且存在唯一依赖于 i 的 $T_2\in(T_1,T_3)$，使得由引理 5.2 有$\vartheta_i(T_2)=\vartheta^*$。我们将证明

$$\lim_{i\to\infty}\xi_i(T_2)=0,\qquad\lim_{i\to\infty}\alpha_i(T_2)=\frac{\pi}{2}.$$

对于前者，由于对所有 $t\in(0,T_4)$，$\xi_i(t)\le\xi_i(T_1)$，且 $\lim_{i\to\infty}\xi_i(T_1)=0$，结论成立。对于后者，我们采用反证论证：假设经过必要的子序列选取后，$\alpha_i(T_2)\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，并且对所有 i，它与 $\frac{\pi}{2}$ 保持正距离。于是由 (12) 可知，$\xi_i'(T_2)<0$ 与零保持正距离。注意到 $\xi''(t)$ 有界，因此存在充分小的 ε、$b>0$，使得对所有 $t\in[T_2-\varepsilon,T_2]$ 及充分大的 i，$\xi_i'(t)<-b$。然而，这不可能，因为对所有 $t\in[0,T_2]$，$\xi_i(t)\le\xi_i(T_1)$，且 $\lim_{i\to\infty}\xi_i(T_1)=0$，所以 $\lim_{i\to\infty}\alpha_i(T_2)=\frac{\pi}{2}$。现在，我们可以运用引理 4.2，并采用引理 4.4 的证明倒数第二段末尾的相同推理，得出矛盾。 □

本引理证明了命题3.2(i)。

6. Proof of second item of proposition 3.2

下文中，ξ、ϑ 和 α 将表示满足初始条件（4）的解的各分量（ξ，ϑ，α）（0）=（0，$\vartheta^*-\varepsilon$，0）。我们先考虑 $g=4$的情形。先回顾3）中关于 $H=0$的系统：

$$\begin{cases} r'=\cos\alpha,\\ \theta'=\csc r\sin\alpha,\\ \alpha'=-n\cot r\sin\alpha+\dfrac{g}{2}\left(m_1\cot\left(\dfrac{g}{2}\theta\right)-m_2\tan\left(\dfrac{g}{2}\theta\right)\right)\csc r\cos\alpha. \end{cases}\tag{15}$$

若（r（s） θ（s））具有（r， θ（r）15），则由此可得 θ（r）满足：

$$\cos r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}+\sin r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}r^2}=\left[1+\sin^2 r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]\left[-n\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\cos r+\frac{g}{2}\left(m_1\cot\left(\frac{g}{2}\theta\right)-m_2\tan\left(\frac{g}{2}\theta\right)\right)\csc r\right].$$

在常数解 $\theta=\frac{2\vartheta^*}{g}$ 处对该方程进行线性化，得到方程 —

$$\sin^2 r w''+(n+1)\cos r\sin r w'+g(n-1)w=0,$$

这里我们用到了以下事实：

$$m_1\csc^2\vartheta^*+m_2\sec^2\vartheta^*=2(m_1+m_2),\qquad n-1=\frac{g}{2}(m_1+m_2).$$

接下来我们注意到，关于 $g=4$ 的上述线性化方程等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sin^{n+1}r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)+4(n-1)\sin^{n-1}r\,w=0. \tag{16}$$

考虑以下不同于 (16) 的方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sin^{n}r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)+4(n-1)\sin^{n}r\,w=0. \tag{17}$$

通过代换 $x=\cos r$，可将其化为以下勒让德型方程：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}-(n+1)x\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+4(n-1)w=0. \tag{18}$$

我们需要莱顿证明的一个定理 [12]:

定理6.1 (莱顿)。 设 $r_1(x)$ $p_1(x)$ $r(x)$ 和 $p(x)$ 在区间$[a,b]$上为正且连续。若方程的一个解 $z(x)$ 的导数 $z'(x)$

$$[r_1(x)z']'+p_1(x)z=0$$

在 $x=c_1$ 和 $x=c_2$ $(a\le c_1<c_2\le b)$ 处有相继零点，且若 $r_1\ge r$ 和 $p_1\le p$ 成立，则系统的一个非零解 $y(x)$的导数 $y'(x)$

$$[r(x)y']'+p(x)y=0$$
$$y'(c_1)=0$$

将在区间 $(c_1,c_2]$ 上有一个零点。

为了应用这个定理，我们需要以下引理：

引理6.2。 设 $n\ge 5$ 和 $\varphi(x)$ 是 (18) 的一个解，且满足 $\varphi(0)=1$ 和 $\varphi'(0)=0$。则$\varphi'(x)$ 在 (0,1)中有一个零点。

证明。对（18）求导，得到以下二阶微分方程 ：

$$\begin{aligned}
(1-x^2)w'''-(n+3)xw''+(3n-5)w'&=0,\\
(1-x^2)w^{(4)}-(n+5)xw'''+(2n-8)w''&=0,\\
(1-x^2)w^{(5)}-(n+7)xw^{(4)}+(n-13)w'''&=0,\\
(1-x^2)w^{(6)}-(n+9)xw^{(5)}-20w^{(4)}&=0,\\
(1-x^2)w^{(7)}-(n+11)xw^{(6)}-(n+29)w^{(5)}&=0,\\
(1-x^2)w^{(8)}-(n+13)xw^{(7)}-2(n+20)w^{(6)}&=0,\\
(1-x^2)w^{(9)}-(n+15)xw^{(8)}-(3n+53)w^{(7)}&=0,\\
(1-x^2)w^{(10)}-(n+17)xw^{(9)}-4(n+17)w^{(8)}&=0.
\end{aligned} \tag{19}$$

结合 $\varphi(0)=1$ 和 $\varphi'(0)=0$，可得

$$\varphi'''(0)=\varphi^{(5)}=\varphi^{(7)}=\varphi^{(9)}=0,\quad \varphi''(0)=-4(n-1),\quad \varphi^{(4)}(0)=8(n-4)(n-1),$$

$$\varphi^{(6)}(0)=160(n-4)(n-1),\quad \varphi^{(8)}(0)=320(n+20)(n-4)(n-1),$$
$$\varphi^{(10)}(0)=1280(n+17)(n+20)(n-4)(n-1).$$

然后对（19）进行初等分析，可得

$$\varphi^{(9)}(x)>0$$

对于 $x\in(0,1)$，由此可得

$$\varphi'(x)>4(n-1)x\left[-1+\frac{1}{3}(n-4)x^2+\frac{1}{3}(n-4)x^4+\frac{1}{63}(n+20)(n-4)x^6\right]$$

对于 $x\in(0,1)$。这证明了 $n\geq 5$ 的引理。 □

由于满足条件 18 的解 $\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x(0)=0$ 是偶函数，上述引理表明，满足条件 17 的解的导数 $w(\frac{\pi}{2})=1$，$\mathrm{d}w\mathrm{d}r(\frac{\pi}{2})=0$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上有一个零点。现在我们将定理 6.1 应用于 16 和 17，得到：

引理 6.3。满足 $w(\frac{\pi}{2})=1$，$\mathrm{d}w\mathrm{d}r(\frac{\pi}{2})=0$ 的解的导数 $\mathrm{d}w\,\mathrm{d}r$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上有一个相邻零点 c。此外，$\mathrm{d}^2w\,\mathrm{d}r^2(c)>0$。

立即得到：

引理 6.4。令 $H=0$、$g=4$ 和 $\varepsilon>0$ 足够小，则 $\vartheta^*-\varepsilon$ 不是类型 1。

证明。若能证明对于 $\varepsilon>0$ 足够小，存在一个 $T(\varepsilon)$，使得 $\vartheta'_\varepsilon(T)<0$ 且 $\xi'_\varepsilon(t)>0$ 在 $[0,T]$ 上成立，那么该引理便得证。为此，我们转而考虑系统（15），相应结论可由引理 6.3 得出。证明至此完成。□

对于 $g=1$、2、3、6，我们采用反证法。因此，假设初始高度 $\vartheta^*-\varepsilon$ 在本节余下部分均为类型 1。注意，以下证明也适用于情形 $g=4$。

引理 *6.5*。设 $H=0$。若初始高度 $\vartheta^*-\varepsilon$ 为类型 *1*，则存在唯一的 $T(\varepsilon)>0$，以及唯一的 $T_2(\varepsilon)<T$，使得 $\xi(T)=0$ 且 $\xi'(T_2)=0$；同时，对于所有 $t\in(0,T_2)$，有 $\xi'(t)>0$、$\vartheta'(t)>0$；对于所有 $t\in(T_2,T)$，有 $\xi'(t)<0$、$\vartheta'(t)>0$。

证明。假设初始高度 $\vartheta^*-\varepsilon$ 属于类型 1。根据定义可知，存在唯一的 $T>0$，使得 $\xi(T)=0$ 且 $\xi(t)\neq 0$，并且对所有 $t\in\in(0,T)$，都有 $\vartheta'(t)\neq 0$。由于 $\vartheta^*-\varepsilon<\vartheta^*$，可得当 $t>0$ 足够小时，$\xi'(t)>0$ 且 $\vartheta'(t)>0$。因此，对所有 $t\in\in(0,T)$，都有 $\vartheta'(t)>0$。此外，$\xi(t)$ 必须先经过一个极值点，才能回到 0；并且存在一个 $T_2<T$，使得 $\xi'(T_2)=0$。根据引理 3.3，T_2 的唯一性意味着对所有 $t\in\in(0,T_2)$，都有 $\xi'(t)>0$，并且对所有 $t\in\in(T_2,T)$，都有 $\xi'(t)<0$。□

引理 6.6. 设 $H=0$。给定 $c>0$ 充分小且 $\vartheta(T_2)<\vartheta^*+c$，其中 T_2 如引理 *6.5*所述。那么对于 ε 充分小的情形，存在唯一的 $T_1<T_2$ 使得 $\vartheta'(T_1)/\xi'(T_1)=1$ 且 $\xi(T_1)\to\infty$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时。

证明。首先注意到，对于 $t\in(0,T_2)$，$\vartheta(t)<\vartheta(T_2)$，并且

$$m_1\cot\vartheta(T_2)-m_1\tan\vartheta(T_2)>-\frac{m}{2}$$

当 $c>0$ 足够小时且 $\vartheta(T_2)<\vartheta^*+c$。由微分中值定理可得 T_1 的存在。由于初始条件 $\varepsilon=0$ 的解为直线（$t\sin 2\vartheta^*$，ϑ^*，0），可知当 $\varepsilon\to 0$ 时，该解及其导数在紧集上一致收敛于上述曲线。特别地，对于任意有限区间 $[0,T]$，通过取足够小的 ϑ'，可以使 $t/\xi'(t)$ 对所有 $t\in[0,T]$ 任意小（通过取 ε 足够小），同时 $\xi(T)$ 可以任意大（先取 T 足够大，再取 ε 足够小）。这意味着，当 $\varepsilon\to 0$ 时，必有 $\xi(T_1)\to\infty$，其中 T_1 是满足引理中条件的任意一个时间。然而，考察图形常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2}=\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right)\left(m\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\tanh\frac{2}{g}\xi+m_1\cot\vartheta-m_2\tan\vartheta\right),$$

可知，如果 $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\xi \geq 1$，$\xi$ 足够大且 $\vartheta < \vartheta^* + c$，那么 $\mathrm{d}^2\vartheta/\mathrm{d}\xi^2 > 0$，因为 $\tanh \frac{2}{g}\xi \to 1$ 当 $\xi \to \infty$ 时。由此得到 T_1 的唯一性。□

这两个引理使我们能够引入以下记号：

$$\xi_1 := \xi(T_1)\,(\text{when } T_1 \text{ is unique}) \qquad \xi_2 := \xi(T_2), \qquad \vartheta_2 := \vartheta(T_2).$$

引理 6.7. 设 $H = 0$, $T_1 < T_2$ 为满足 $\vartheta'(T_1)/\xi'(T_1) = 1$的任意时刻，则当 ε 足够小时，有 $\vartheta(T_1) \geq \vartheta^*$。

证明。为简洁起见，令 $\xi_1 = \xi(T_1)$，并注意到 $\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_1 = \infty$，如引理 6.6 的证明中所示。我们反设 $\vartheta(T_1) < \vartheta^*$ 成立。由于 $\vartheta'(t) \geq 0$ 对所有 $t \in (0, T_2)$ 均成立，因此得到 $\vartheta(t) < \vartheta^*$ 对所有 $t \in [0, T_1]$ 均成立。于是由图形常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right)\left(m\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\tanh\frac{2}{g}\xi + m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta\right),$$

可得 $\mathrm{d}^2\vartheta/\mathrm{d}\xi^2 > 0$ 对 $\xi \in [0, \xi_1]$成立。这意味着

$$\vartheta(\frac{\xi_1}{2}) < \vartheta^* - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}(\xi_1 - 1) < \varepsilon$$

因此，当 ε 足够小时：

$$m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta > a_1\varepsilon := \frac{m_1 + m_2}{2}\varepsilon$$

只要 $\xi \in [0, \xi_1/2]$成立。因此

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2} > a_1\varepsilon \text{ for } \xi \in [0, \xi_1/2],$$

这意味着

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}(1) > a_1\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi} > a_1\varepsilon \text{ for } \xi \in [1, \xi_1].$$

将图形常微分方程改写为

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2}}{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right)} = m\tanh\frac{2}{g}\xi + \frac{m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta}{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}}, \tag{20}$$

注意到右侧的第二项在区间（$\xi_1 - 1$，ξ_1）内为 $O(1)$，且左侧有

$$\ln\left(\frac{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}}\right)$$

作为原函数。对（20）在（$\xi_1 - 1$，ξ_1）上积分，得到

$$-\ln\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}(\xi_1 - 1)\right) = O(1)$$

这与 $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\xi(\xi_1 - 1) < \varepsilon$ 矛盾。 □

引理 6.8. 设 $H = 0$ 和 c 满足引理 6.6。那么对于 $\varepsilon > 0$ 足够小的情形，有 t

$$\vartheta_2 \geq \min\left\{\vartheta^* + c,\ \frac{\ln 2}{2(m + |G(\vartheta^* + c)|)} + \vartheta^*\right\},$$

其中 $G(\vartheta) = m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta$。

证明。 我们假设

$$\vartheta_2 < \min\left\{\vartheta^* + c,\ \frac{\ln 2}{2(m + |G(\vartheta^* + c)|)} + \vartheta^*\right\}$$

从而得到矛盾。该假设意味着，当 ε 足够小时：

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi} \geq 1, \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2]$$

根据引理6.6，这意味着

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2}}{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right)} \leq \left| m \tan\frac{2}{g}\xi + \frac{m_1 \cot\vartheta - m_2 \tan\vartheta}{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}} \right| \leq m + |G(\vartheta^* + c)|.$$

从 ξ_1 到 ξ_2 积分可得

$$\frac{1}{2}\ln 2 \leq (m + |G(\vartheta^* + c)|)(\xi_2 - \xi_1)$$

然后根据引理6.7

$$\vartheta(T_2) = \vartheta(T_1) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi \geq \vartheta^* + \xi_2 - \xi_1 \geq \frac{\ln 2}{2(m + |G(\vartheta^* + c)|)} + \vartheta^*.$$

这个矛盾完成了证明。 □

引理6.9。设 $H = 0$。如果 ε 足够小，那么 $\vartheta^* - \varepsilon$ 不是类型 *1*。

证明。 由引理 6.5，假设 $\vartheta^* - \varepsilon$ 为类型 **1**，可推出轨迹

$$\{(\xi, \vartheta)(t) \mid t \in (T_2, T)\}$$

是 ϑ 在 ξ 上的图像。该图像由图形常微分方程确定

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right)\left(m\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\tanh\frac{2}{g}\xi + m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta\right)$$

以及初始数据 $\vartheta(\xi_2) = \vartheta_2$，$\lim^{\xi\to\xi_2^-} \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\xi = -\infty$。由引理 6.8，存在 $b > 0$ 使得

$$m_1\cot\vartheta - m_2\tan\vartheta < -b, \quad \forall \xi \in (0, \xi_2)$$

对所考虑的图像成立，由此可得

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\xi^2}}{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2} < -b$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi} < 0$。从 ξ 到 ξ_2 积分，我们得到

$$\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\xi} > b(\xi_2 - \xi)$$

这对 $\xi = \xi_2 - \frac{\pi}{2b}$ 是不可能的。我们通过注意到 $\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_2 = \infty$ 来完成证明，类似于引理6.6 的证明。 □

7. Proof of third item of proposition 3.2

引理 7.1. 设 $H = 0$ 和 δ^* 为类型3，则：

(i) $\xi'(t) > 0$ 且 $\vartheta'(t) > 0$ 对所有 $t > 0$均成立。
(ii) $\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$ 且 $-\alpha'(t) > 0$ 对于充分大的 t成立。
(iii) $\lim_{t\to\infty}\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$ 且 $\lim_{t\to\infty}\xi(t)$ 是有限的，其中

是 $\xi(t)$ $\vartheta(t)$ $\alpha(t)$ 方程 (12) 在初始条件 $(\xi, \vartheta, \alpha)(0) = (0, \delta^*, 0)$.

证明。根据定义 3.1，对于所有 $t>0$，我们有 $\vartheta'(t)>0$。假设存在某个$t_0>0$使得 $\xi'(t_0)\le 0$，从而导致矛盾。那么存在一个 $T>0$，使得在 $t\in(0,T)$ 上 $\xi'(T)=0$ 且 $\xi'(t)>0$，由此可知，根据引理 3.3，$\xi''(T)<0$。现在应用引理 4.4，由于根据定义 3.1，对于所有 $t>0$，$\xi(t)>0$，因此得到矛盾。至此，第一项的证明完成。

由 $\vartheta''(t)$ 和 $\vartheta(t)$ 的有界性可得，$\lim_{t\to\infty}\vartheta'(t)=0$，因为对所有 $\vartheta'(t)>0$ 都成立。注意，由引理4.3 可知，存在一个 $b_1>0$ 使得

$$m_1\cos^2\vartheta(t)-m_2\sin^2\vartheta(t)<-b_1$$

当 t 充分大时。反设，极限 $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)$ 不存在或小于 $\frac{\pi}{2}$，则存在一个 $b_2>0$ 和一个趋于无穷的时间序列 $\{t_i\}$，使得对所有 i，$\cos\alpha(t_i)>b_2$。由 $\vartheta'(t)$ 的极限可得，当 i 充分大时，$\alpha'(t_i)<-b_1b_2<0$，由此通过初等分析可知，当 t 充分大时，$\alpha'(t)<-b_1b_2$。然而，这不可能，因为对所有 $t>0$，$\alpha(t)>0$。

由 $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=\frac{\pi}{2}$ 可得，当 t 充分大时，$\xi'(t)<\vartheta'(t)$。结合 $\vartheta(t)$ 的有界性，可得 $\xi(t)$ 有界，从而 $\lim_{t\to\infty}\xi(t)$ 有限。注意，$\lim_{t\to\infty}\vartheta(t)$ 也有限。因此，由于 $\xi''(t)$ 和 $\vartheta''(t)$ 有界，$\lim_{t\to\infty}\xi'(t)=\lim_{t\to\infty}\vartheta'(t)=0$。再由 (12) 可得 $\lim_{t\to\infty}\vartheta(t)=\frac{\pi}{2}$。第三项的证明至此完成。

为证明当 t 足够大时 $\alpha'(t)>0$，采用系统 (13) 更为方便。令 T_∞ 为相应解的最大存在区间的右端点。由于 $\alpha(t)$ 从下方收敛到 $\frac{\pi}{2}$，因此我们得到一个趋于 T_∞ 的递增序列 $\{t_i\}$，使得对所有 i，都有 $\alpha'(t_i)>0$。反设当 $t>0$ 足够大时，并非对所有情形都有 $\alpha'(t)>0$。那么存在一个趋于 T_∞ 的递增序列 $\{\tilde{t}_i\}$，使得对所有 i，都有 $\alpha'(\tilde{t}_i)=0$。由 $\lim_{t\to T_\infty}\vartheta(t)=\frac{\pi}{2}$ 和 (13) 可知，当 t 趋近于 T_∞ 时，只要 $\alpha'(t)=0$，就有 $\alpha''(t)<0$。结合这两个序列的存在性，通过标准论证可得矛盾。至此，第二项的证明完成。□

引理 7.2. 设 $H=0$，则 δ^* 不是类型 3。

证明。对于 $\varepsilon\in[0,\delta^*)$，我们用 $\xi_\varepsilon(t)$ $\vartheta_\varepsilon(t)$ $\alpha_\varepsilon(t)$表示满足初始条件 (12)和 $(\xi,\ \vartheta,\ \alpha)(0)=(0,\ \delta^*-\varepsilon,\ 0)$ 的解。注意，根据 $\delta^*-\varepsilon$ 的定义，$\delta^*-\varepsilon$ 是类型 1，由此可知存在一个 $T_2(\varepsilon)>0$ 使得

$$\xi_\varepsilon(T_2)=0,\quad \xi_\varepsilon(t)>0 \text{ and } \vartheta'(t)>0 \text{ for } t\in(0,T_2).$$

由罗尔定理和引理 3.3可进一步推出，存在唯一的 $T_1(\varepsilon)\in(0,\ T_2)$使得 $\xi_\varepsilon'(T_1)=0$ 且

$$\xi_\varepsilon'(t)>0 \text{ for } t\in(0,T_1),\quad \xi_\varepsilon'(t)<0 \text{ for } t\in(T_1,T_2).$$

反设 δ^* 是类型 3，由引理 7.1 可知，对所有 $t>0$，$\lim_{t\to\infty}\vartheta_0(t)=\frac{\pi}{2}$.且 $\xi_0'(t)>0$。设 b属于区间 $(0,\lim_{t\to\infty}\xi_0(t))$，且 $M>\frac{\pi}{2b}$。那么存在一个 $T>0$使得 $\xi_0(T)>b$且 $m_1\cot\vartheta_0(T)-m_2\tan\vartheta_0(T)<-M$。利用解对初始条件的连续依赖，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，有

$$\xi_\varepsilon(T)>b,\quad m_1\cot\vartheta_\varepsilon(T)-m_2\tan\vartheta_\varepsilon(T)<-M,\quad \xi_\varepsilon'(t)>0 \text{ for } t\in[0,T].$$

因此，当 ε $T_1>T$ 足够小时，我们有如下结论：

$$\xi_\varepsilon(T_1)>b,\quad m_1\cot\vartheta_\varepsilon(t)-m_2\tan\vartheta_\varepsilon(t)<-M \text{ for } t\in(T_1,T_2). \tag{21}$$

接下来注意到，轨迹 $\{(\xi_\varepsilon,\ \vartheta_\varepsilon)(t)\mid t\in(T_1,\ T_2)\}$ 可以视为严格递减函数 $\vartheta_\varepsilon(\xi)$ 在 $(0,\ \xi_\varepsilon(T_1))$ 上的图像，且函数 $\vartheta_\varepsilon(\xi)$ 满足 (5)。结合 (21) 可知

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\xi^2}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}<-M.$$

将其从 0 积分到 $\xi_\varepsilon(T_1)$，得到

$$\arctan\frac{\mathrm{d}\vartheta_\varepsilon}{\mathrm{d}\xi}(0)>M\,\xi_\varepsilon(T_1)-\frac{\pi}{2}>M\,b-\frac{\pi}{2}>0,$$

这是不可能的。 □

References

[1] A. Carlotto 和 M. B. Schulz, *Minimal hypertori in the four-dimensional sphere*, Ars Inven. Anal. 2023, 论文编号 8, 33 4645955 页; MR S. S. Chern、M. P. do Carmo 和 S. Kobayashi, [2] *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length* *Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968)* 59 75, 0273546 约-柏林, ; MR[3] M. P. do Carmo 和 M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, 美国数学会汇刊 **277** 1983 2, 685 709 0694383 (), 第 – 期; MR G. Drugan 和 X. H. Nguyen, *Shrinking doughnuts via variational methods*, [4] 《几何分析杂志》28（2018年）, 第4期, 3725 3746 3881988 –; MR B. Firester 和 R. Tsiamis, *New minimal surfaces in the sphere from capillary minimal cones*, [5] arXiv:2602.20124v1。[6] W.-Y. Hsiang, *Minimal cones and the spherical Bernstein problem. I*, 《数学年刊》（第2辑）118（1983年）, 第1期, 61–73; MR0707161[7] W.-Y. Hsiang, *Minimal cones and the spherical Bernstein problem. II*, 《发明数学》74（1983年）, 第3期, 351–369; MR0724010[8] W.-Y. Hsiang 和 I. Sterling, *Minimal cones and the spherical Bernstein problem. III*, 《发明数学》85（1986年）, 第 2, 223 247 0846927 –期; MR C. Huang 和 G. Wei, [9] *New examples of constant mean curvature hypersurfaces in the sphere* 2209 13236 , arXiv: 。J. Lai 和 G. Wei, , [10] *Embedded constant mean curvature hypertori in the 2n-sphere* **38** 2025 《非线性》 (), 第8期, 论文编号 085003, 11 4938918 页; MR H. B. Lawson Jr., [11] *Complete minimal surfaces in S^3* 2 **92** 1970 335 374 0270280 , 《数学年刊》 () (), –; MR [12] *Some elementary Sturm theory* **4** 1968 187 193 W. Leighton, , 《微分方程杂志》 (), –; MR 0224907 [13] ¨ *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären* **251** 1980 1, 57 71 H. F. Munzner, , 《数学年刊》 (), 0583825 第 – 期; MR[14] *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature* **92** 1970 T. Otsuki, 《美国数学杂志》 (), 145 173 0264565 –; MR O. M. Perdomo, *Embedded constant mean curvature hypersurfaces on spheres*, 《亚洲数学杂志》14（2010年）, [15] 第1期, 73 108 2726595 –; MR O. M. Perdomo, *Navigating the space of compact CMC hypersurfaces in spheres*, [16] arXiv:2503.13823。[17] O. Riedler, *Closed embedded self-shrinkers of mean curvature flow*, 《几何分析杂志》33（2023年）, 第6期, 论文编号 172, 27 4567573 页; MR P. Tomter, *The spherical Bernstein problem in even dimensions and related problems*, 《数学学报》 [18] 158（1987年）, 第 3 4, 189 212 0892590 - –期; MR T. Wang、Z. Wang 和 X. Zhou, [19] *Equivariant min-max theory and the spherical Bernstein problem in $\mathbb{S}^4$*, arXiv:2602.03984[20] Z. Wang 和 X. Zhou, *Existence of four minimal spheres in S^3 with a bumpy metric*, arXiv:2305.08755

Junqi Lai, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, 510631, Guangzhou, China ,
2019021668@m.scnu.edu.cnGuoxin Wei, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, 510631, Guangzhou, China ,
weiguoxin@tsinghua.org.cn