arXiv:2603.03690v1 [math.CO] 4 Mar 2026

Cameron 树状类上的测度及其在张量范畴中的应用

¨THANH CAN 与 THOMAS RUD

Abstract. Fra¨ıss´e 类上的测度是 Harman–Snowden（2022）构造张量范畴时的关键输入。树状 Fra¨ıss´e 类提供了特别易于处理的例子来源。本文完成了对 Cameron 的初等树状类上测度的分类。特别地，对于具有 n 种颜色的节点着色的有根二叉树结构所构成的类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$，我们借助与由 $\{1,\dots,n\}$ 作边标记、并带有一个指定顶点的有向有根树之间的显式双射来分类测度，从而得到 $(2n+2)^n$ 个互不相同的 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ 值测度。对每一个 $n \geq 1$，我们利用一族测度 μ_n^I 及其支撑 $\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$（其中 $I \subseteq \{1,\dots n\}$）来构造 Karoubi 包络 $\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}; \mu_n^I)$，从而产生具有超指数增长、且不能通过表示范畴的 Deligne 插值得到的半单张量范畴的无穷族。我们还证明，对于 $n \geq 2$，在 n 色树类 $C_n\mathfrak{T}$ 以及标记树类$L\mathfrak{T}$上不存在测度，从而推广了 Snowden 关于无色树的结果。

Contents

1. 引言 1致谢 42. 关于 Fra¨ıss´e 类的测度 43. 消失测度环 114. 节点着色有根二叉树上的测度 175. Fra¨ıss´e 子类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 及诱导正则测度 306. 张量范畴的应用 41附录 A. 关于 $\partial\mathfrak{T}_3(2)$ 及其支撑 47参考文献 47

1. Introduction

本文的主要目标是通过对Fra¨ıss´e类（或等价地，寡形群）上的测度进行计算，构造大量新的张量范畴。尽管一般性机制已相对充分地发展 [HS24], ，计算测度仍是一个众所周知的困难组合问题。在本引言中，我们首先提供该主题的若干背景并回顾先前的工作，然后概述我们的结果以及本文的提纲。

Date: 2026年3月5日。

1.1. **背景与动机**。 对于仿射（超）群概形 G，考虑零特征代数闭域上的表示范畴 $\mathbf{Rep}(G)$。可以验证，$\mathbf{Rep}(G)$ 是一个张量范畴（定义6.1），并且德利涅 [Del02]事实上证明，每一个具有次指数增长的张量范畴（定义 6.2）都等价于 $\mathbf{Rep}(G, z)$，其中 z 是一个按奇偶性作用的适当二阶元。我们感兴趣的是被德利涅刻画排除在外的、具有超指数增长的张量范畴。

目前，由于缺乏具体实例，在一般情形下理解张量范畴仍然十分困难。德利涅 [Del02] 和克诺普[Kno06、Kno07] 的早期工作表明，通过对有限群表示范畴序列进行插值，可以构造出具有超指数增长的新型张量范畴实例；例如，德利涅通过对有限对称群的表示范畴序列进行插值，得到了 $\mathbf{Rep}(S_t)$，其中 $t \in \mathbb{C}$ 为正整数$\{\mathbf{Rep}(S_n)\}$。 n

在 Harman 和 Snowden 最近的工作 [HS24]，中，出现了一种基于寡轨道理论构造张量范畴的新方法。若群 G作用于集合 Ω，且对所有 $n \geq 0$， G 在 Ω 上只有有限多个轨道^n，则称其为寡形群。作者引入了寡形群上的测度概念 μ，其取值于某个域；若 μ 满足某些性质，就可以构造张量范畴 $\mathrm{Rep}(G; \mu)$，在某些情况下它甚至是半单的。早期成果 [HS24] 包括张量范畴 $\mathrm{Rep}(S_\infty; \mu_t)$，它令人瞩目地复现了德利涅插值范畴 $\mathrm{Rep}(S_t)$；还包括与寡形群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}, <)$ 相关联的 Delannoy 范畴，后者是一个半单张量范畴。

值得注意的是，在同一篇论文中，作者指出了模型论与寡形群之间的密切联系，从而为通过有限组合结构类构造张量范畴奠定了基础，这些类被称为$Fra¨ıss´e$ 类（定义2.3）。模型论视角使得测度的分类可以约简为一个纯粹的组合问题，其中存在复值测度的类似概念（定义2.7），这些测度作用于 Fra¨ıss´e 类中的嵌入。在本文中，我们将聚焦于这一视角。

为便于稍后讨论我们的结果，我们简要描述 Harman–Snowden 对张量范畴的构造。给定带有测度 μ 的 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$，我们定义范畴 $\mathrm{Perm}(\mathfrak{F}; \mu)$，其对象是结构的形式直和，其中 Vec_X 对应于 $X \in \mathfrak{F}$。态射 $\mathrm{Vec}_X \to \mathrm{Vec}_Y$ 是 X 与 Y的 $\mathbb{C}$-线性 amalgam（定义 2.2），而复合涉及对按 μ 缩放的 amalgam 求和。该范畴带有张量积 $\otimes$，其中 $\mathrm{Vec}_X \otimes \mathrm{Vec}_Y = \bigoplus_Z \mathrm{Vec}_Z$，且 Z 张成于 X 与 Y的所有 amalgam 之上。然后，我们令 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{F}; \mu)$ 为 $\mathrm{Perm}(\mathfrak{F}; \mu)$ 的 Karoubi 包络。具体细节见第6节。

通过上述构造，Fra¨ıss´e 类上的测度提供了一种构造全新张量范畴实例的方法：事实上，只要某个 Fra¨ıss´e 类包含任意（有限）规模的结构，并且存在正则测度（定义2.8），由此产生的张量范畴便会具有超指数增长 [HS24，注 8。5]。此外，Harman–Snowden 构造所产生的张量范畴通常也无法通过插值获得（$\mathbf{Rep}(S_\infty; \mu_t)$ 是一个例外），尤其是在相关寡形群与有限置换群相去甚远的情况下；本文研究的群确实如此。尽管如此，测度仍是相对鲜为人知的对象，目前只有少数

情形已得到解决 [HNS24，Sno24b，Sno23a，Sno23b，Sno24a，Kri23，Nek24]。

1.2. **结果概述**。为陈述主要结果，我们首先指出存在测度环（定义2.14）这一形式概念，它是一个交换环 $\Theta(\mathfrak{F})$，使得 $\mathbb{C}$值测度对应于环同态 $\mu:\ \Theta(\mathfrak{F})\to\mathbb{C}$。因此，只需计算 $\Theta(\mathfrak{F})$ 即可对 $\mathfrak{F}$上的测度进行分类。此外，为分析子类上的测度，我们随后将测度的定义域扩展到也包含结构，其中 $\mu(X)=\mu(\varnothing\to X)$ 对结构 X。

在第 2 节中，我们提供关于 Fra¨ıss´e 类、寡态射群与测度的必要背景，并证明一些初步理论结果。我们定义 Cameron 树状类：n色树结构 $C_n\mathfrak{T}$ 及其度-$\leq k$ 变体 $C_n\mathfrak{T}_k$，其中 $n\geq 2$ 与 $k\geq 3$，带标号树结构 $L\mathfrak{T}$，以及n色有根二叉树结构 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$。这些树状类推广了 Harman、Snowden 与 Nekrasov 所研究的无色树结构，其中相应的测度被分类 [HNS24]。

在第 3 节中，我们首先证明 $C_n\mathfrak{T}$和 $C_n\mathfrak{T}_k$ 都不存在测度，这展现了由此产生的测度及方程的复杂性。

定理 1.1 (定理 3.2)。我们有 $\Theta(C_n\mathfrak{T})\cong\Theta(C_n\mathfrak{T}_k)\cong\mathbf{0}$.

$L\mathfrak{T}$ 也同样适用：

定理 1.2 (定理 3.8)。我们有 $\Theta(L\mathfrak{T})\cong\mathbf{0}$。

第 4 节给出了关于测度的主要结果。我们通过将计算化归为有限个方程组，对 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$上的测度进行分类。

定理 1.3 (定理4.15)。对于每个整数 $n\geq 1$，在 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$上的测度与以 $\{1,\dots,n\}$ 为边标记且带有一个指定顶点的有向有根树之间存在一个显式双射，从而得到 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))\cong\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$。

参见定理4.15 的证明，以了解该双射的描述及更多细节，并参见4.2 中的具体例子。

在第5节中，我们进一步分析这些测度及其支撑，对 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的子类进行分类，并在这些子类上构造正则测度。我们证明子类对应于三叶树的集合（推论5.7），枚举这些子类（命题5.8），并给出其诱导正则测度的显式公式（命题5.19）。例如，取 $I=\{1,2,3\}$，我们有

$$\mu_3^I\left(\begin{array}{c}\boxed{3}\quad\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}\right)=-\frac{1}{2^7},\qquad \mu_3^I\left(\begin{array}{c}\boxed{3}\\ \boxed{2}\\ \boxed{1}\end{array}\right)=-\frac{1}{2^9}.$$

最后，在第6节中，我们给出一个半单性判据，并构造与 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的某些子类上的上述正则测度相关联的张量范畴族。

定理1.4 (定理6.9)。对于每个整数 $n\geq 1$ 和子集 $I\subseteq[n]$，范畴 $\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}};\ \mu_n^I)$ 是一个半单张量范畴。

这里， $\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$是 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$的子类，其中颜色沿每条从根到叶的路径按递增顺序排列，并且索引集 I 中的颜色可以沿任意路径重复。

Acknowledgements

作者谨向 Andrew Snowden 致谢，感谢他友好地提出本项目并进行了多次有益讨论，尤其感谢他提供半单性论证的提纲。我们也感谢 Arun Kannan 对本文草稿提出的意见。最后，我们感谢 MIT PRIMES-USA 的组织者，本项目正是在该项目的支持下开展的。

2. Measures on Fraïssé classes

本节将定义 Fra¨ıss´e 类、其上的测度以及 Cameron 树状类，并证明这些类是 Fra¨ıss´e 类。我们将 Fra¨ıss´e 类与寡形群联系起来，以证明有关测度的一些理论结果。此外，我们还将定义测度环，并介绍如何计算测度。

2.1. Fra¨ıss´e 类和寡形群。

我们首先确立关键的模型论定义，并将 Fra¨ıss´e 类与寡形群联系起来。

定义 2.1. 一个结构 是一个集合 X，配备有关系 $\{R_i\}_{i\in I}$，其中 R_i定义在 X^{n_i} 上，且 n_i为正整数。 X 的一个子结构 Y 是 X的子集，其关系限制在 Y的元素上。

如果两个结构之间存在保持关系的双射，则称它们同构。

定义 2.2. 设 $i\colon Z\to X$ 和 $j\colon Z\to Y$ 是从 Z 到 X 和 Y的嵌入，即 X 和 Y 具有一个公共子结构（同构于） Z。 X 和 Y 在 Z 上的一种融合是一个结构 Z' 以及联合满射嵌入 $i'\colon Y\to Z'$和 $j'\colon X\to Z'$，使得 $i'\circ j=j'\circ i$。

更自然地说， Z' 是通过将 X 的一个子集与 Y的一个子集等同而得到的，这两个子集都包含 Z；而 X与 Y 其余元素之间的关系可以自由确定。我们在2.4中给出示例。

定义 2.3. 有限结构类 $\mathfrak{F}$ 称为*Fra¨ıss´e* 类，如果它满足以下性质：

(a) 如果 X 属于 $\mathfrak{F}$，那么任何与 X 同构的结构都属于 $\mathfrak{F}$。(b) 如果 X 属于 $\mathfrak{F}$，那么 X 的任何子结构都属于 $\mathfrak{F}$。(c) 对每个 $n\geq 0$， $\mathfrak{F}$ 至多有有限个 n元素同构类。(d) 对每个 X， $Y\in\mathfrak{F}$，对于每个公共子结构 $Z\in\mathfrak{F}$，都存在 X 和 Y 在其上的一个融合 Z'，使得 $Z'\in\mathfrak{F}$。

条件 2.3d 称为 Fra¨ıss´e 类的融合性质。

Fra¨ıss´e [Fra53] 提出的一个重要定理保证，任何 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$都存在一个称为 $\mathfrak{F}$的 Fra¨ıss´e 极限的可数结构 Ω（在同构意义下唯一），使得 $\mathfrak{F}$中的每个结构都是 Ω 的有限子结构。此外，Ω 是齐性的，即对于 Ω 中子结构间的任意同构 $i\colon X\to Y$，都存在一个 Ω 的自同构 σ，将 i扩展为自同构；这意味着对所有 $x\in X$， $\sigma(x)=i(x)$。因此，Ω 的两个有限子结构同构，当且仅当它们属于

在 $G =$ 对 Ω 的自然作用下的同一轨道。由此可知，Ω 的 n元子集在 G作用下的轨道与 n元结构的同构类之间存在双射，而这些结构在 $\mathfrak{F}$中是有限的，这由2.3c可知，且它们与 Ω 具有相同的有限型条件^n。因此 G 在 Ω 上有有限多个轨道^n，对所有$n \geq 0$均成立。我们称 G 是一个寡形群，其在 Ω 上具有相应的作用；而一个G集 X 是有限型的，如果相应的 G作用具有有限多个轨道。

按照 [HS24], 我们赋予 G 如下的自然拓扑：对于每个$A \subseteq \Omega$，令 $G(A)$ 为 G 逐点固定 A中每个元素的子群。所有 $G(A$，其中 A 遍历 Ω 的所有有限子集，构成 1_G的邻域基。令$\mathscr{E}$ 为形如 $G(A$的开子群集合，其中 A 是 Ω 的某个有限子集。

我们称 G 在 Ω 上的作用是 $\mathscr{E}$-光滑的，如果每个稳定化子都属于 $\mathscr{E}$（因而是开子群）；若一个 G-集 X 满足其每个逐点稳定化子都属于 $\mathscr{E}$，则称其为 $\mathscr{E}$-光滑的。令 $(G, \mathscr{E})$ 为传递的 $\mathscr{E}$-光滑 G-集类。

2.2. **相对 Fra¨ıss´e 类**。设 $\mathfrak{F}$ 是一个 Fra¨ıss´e 类。为陈述本节后文将出现的一些结果，我们定义相对 Fra¨ıss´e 类，它们依赖于一个基结构。

定义 2.4. 对于固定的结构 $A \in \mathfrak{F}$，相对 *Fra¨ıss´e* 类 是一个有序对 (X, i) 的类 $\mathscr{F}_A$，其中 $i\colon A \to X$ 是 $\mathfrak{F}$ 中的嵌入。

注意，$\mathfrak{F}_\varnothing = \mathfrak{F}$。我们如下定义 $\mathscr{F}_A$ 中的嵌入。给定有序对 (X, i) 和 (Y, j)，$\mathscr{F}_A$ 中的嵌入 $k\colon (X, i) \to (Y, j)$ 是一个嵌入 $k\colon X \to Y$，其中$\mathfrak{F}$ 满足 $j = k \circ i$。

命题 2.5. 对于每个结构 $A \in \mathfrak{F}$，包含$\mathscr{F}_A$ 的最小 *Fra¨ıss´e* 类是 $\mathfrak{F}$。

证明. 设 $\mathfrak{F}'$ 是一个 Fra¨ıss´e 类，包含 $\mathscr{F}_A$。对于任意 $X \in \mathfrak{F}$， X 和 A 在 中任意子结构上的融合都属于 $\mathscr{F}_A$，根据2.3d。由 2.3b可知 $X \in \mathfrak{F}'$。这意味着 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$，因此 $\mathfrak{F}$ 是所需的最小类。□

注 2.6。请注意，相对 Fra¨ıss´e 类这一概念颇为非传统，而且并非必需。事实上，可以验证，任意此类 $\mathscr{F}_A$ 都等价于如下方式得到的 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$：将每个元素 $X \in \mathscr{F}_A$ 映射到 $X \setminus i(A)$，并为每个 n 元关系 R 添加 $(|A| + 1)^n - |A|^n - 1$ 个关系，以编码涉及 $i(A)$ 和 $X \setminus i(A)$ 中元素而丢失的信息。不过，在讨论某个寡形群的开子群及其对应子类时，这一概念有助于阐述清晰。

2.3. **测度**。现在我们引入 Fra¨ıss´e 类上的测度，它们是本文的核心对象，也是 Harman–Snowden 张量范畴构造中的关键要素。

定义 2.7。Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$上的一个测度 是一个取值于 $\mathbb{C}$ 的函数 μ，定义在 $\mathfrak{F}$ 中的嵌入 i 上，并满足以下条件：

(a) 若 i 是同构，则 $\mu(i) = 1$。(b) 若 $i\colon X \to Y$和 $j\colon Y \to Z$ 是嵌入，则 $\mu(j \circ i) = \mu(j)\mu(i)$。(c) 设 $i\colon Z \to X$ 和 $j\colon Z \to Y$ 是嵌入。若$i'_k\colon Y \to Z'_k$ 是嵌入，且嵌入到 X 与 Y 在 Z 上的所有 amalgamations Z'_k 中，其中 $k = 1$、……、 n，则 $\mu(i) = \sum_{k=1}^{n} \mu(i'_k)$。

相对 Fra¨ıss´e 类 $\mathscr{F}_A$ 中的每个嵌入都是 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$中的嵌入，因此根据命题 2.5，我们将相对 Fra¨ıss´e 类上的测度定义为包含该类的最小 Fra¨ıss´e 类上的测度的限制。

令 G 为 $\mathfrak{F}$ 的 Fra¨ıss´e 极限 Ω 的自同构群。给定一个结构$X \in \mathfrak{F}$，令 Ω^X 表示 Ω 的嵌入 $X \to$ 的集合。每个结构的嵌入$i:\ X \to Y$ 都会诱导一个相应的 G-态射 $i^*:\ \Omega^Y \to \Omega^X$，其中 G-作用由 $g \cdot i^* = g \circ i$ 给出，因此 i^* 也是一个有限型 $\mathscr{E}$-光滑 G-集。

在 $(G, \mathscr{E})$ 上存在一个类似的测度 μ^*：它将有限型 $\mathscr{E}$-光滑 G-集之间的每个映射 $i^*:\ \Omega^Y \to \Omega^X$（其中 Ω^Y 是传递的）赋予一个复数值 $\mu^*(i^*)$，并满足一系列类似的公理 [（HS24，定义 3.1，第 20] 页），使得 μ^* 唯一满足$\mu(i) = \mu^*(i^*)$ [（HS24，定理6.9，第 45] 页）。我们称 μ^* 为 μ 对应的测度。

定义 2.8。设 μ是 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$上的一个测度。若对于 $\mathfrak{F}$中的每个嵌入 i，$\mu(i)$ 都非零，则称 μ 是正则的。

请注意，对于更一般的环值测度，我们也可以改为要求测度可逆。若 μ 是正则的，则其对应的测度 μ^* 在 $(G, \mathscr{E})$ 上也正则，即对于所有 $X \in (G, \mathscr{E})$，$\mu^*(X)$ 都非零。

定义 2.9。设 μ 是 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$上的一个测度，该类的 Fra¨ıss´e 极限为 Ω，且$G = \mathrm{Aut}(\Omega)$。若存在 G的一个开子群 U，使得对应的测度 μ^* 在 $(U, \mathscr{E})$ 上正则，则称 μ 是拟正则 的。

取 U 为 G，即可知每个拟正则测度都是正则的。

命题 2.10。 $\mathfrak{F}$上的测度 μ （对应的测度为 μ^*）是拟正则的，当且仅当存在一个有限结构 $A \subset \Omega$，使得 $\mu^*|_{\mathrm{Stab}_G(A)}$ 是正则的，其中 $\mathrm{Stab}_G(A)$ 是 G 中逐个固定 A 的每个元素的子群。

证明。 $\mathfrak{F}$ 中有限结构的稳定化子构成了 G中单位元的邻域基，因此 G 的每个开子群 U 都包含某个有限结构A的稳定化子 $\mathrm{Stab}_G(A)$。由于 $(\mathrm{Stab}_G(A)\ \mathscr{E}) \subseteq (U,\ \mathscr{E})$，若 μ^* 在 $(U,\ \mathscr{E})$ 上正则，则其在 $(\mathrm{Stab}_G(A)\ \mathscr{E})$ 上也正则。

另一方面，由于 G 在 Ω 上的作用是 $\mathscr{E}$-光滑的，$\mathrm{Stab}_G(A)$ 是 G的一个开子群。因此，若对于某个 A，$\mu^*|_{\mathrm{Stab}_G(A)}$ 是正则的，则 μ是拟正则的。□

命题 2.11. 设 A 是 $\mathfrak{F}$中的一个有限结构，μ 是$\mathfrak{F}$ 上的一个测度，其对应测度为 μ^*。那么，当且仅当 μ 在相对 *Fra¨ıss´e* 类 $\mathscr{F}_A$上正则时，$\mu^*|_{\mathrm{Stab}_G(A)}$ 才是正则的。

证明。 令 $U = \mathrm{Stab}_G(A)$ 并考虑 $X \in \mathscr{F}_A$。令 Ω_A^X 表示 Ω 上所有嵌入 $X \to$ 的集合 A，也就是说，若 $i \in \Omega_A^X$，则 $i(a) = a$ 对所有 $a \in A$ 都成立。由于 Ω 是齐性的，U 在 Ω_A^X 上的作用由 $u \cdot i = u(i)$ 给出，且该作用是传递的。此外，Ω_A^X 的每个稳定化子都是 $i(X)$ $\subset \Omega$ 的稳定化子，因此 Ω_A^X 是 $\mathscr{E}$-光滑的。因此，对于任意有限结构 B，我们有

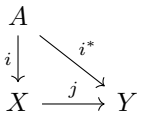
$$\mathrm{Orb}(B) = \{i(B) : i \in \Omega_A^{B \cup A}\} \cong \Omega_A^{B \cup A},$$

因此我们得到分解

$$\Omega^{[n]} \cong \bigsqcup_{\substack{|X|=n \\ A \subseteq X}} \Omega_A^X$$

其中右侧是不相交并，由传递的 $\mathscr{E}$-光滑 U-集组成。由于任意传递的 $\mathscr{E}$-光滑 U-集都是 Ω^n 上的轨道，其中 n，因此所有这类集合都具有 Ω_A^X 的形式，其中 $|X| \leq n$。

现在，传递的 $\mathscr{E}$-光滑 U-集 $f\colon \Omega_A^Y \to \Omega_A^X$ 的每个映射都对应于一个嵌入 $j\colon X \to Y$，使得该图表



可交换。这意味着，当且仅当 $\mu(j)$ 非零时，$\mu^*(f)$ 才非零；但 $\mathfrak{F}$ 中所有这样的嵌入 j 恰好就是对应相对类 $\mathscr{F}_A$中的全部嵌入，因此，当且仅当 $\mu|_{\mathscr{F}_A}$ 正则时，$\mu^*|_U$ 才是正则的，命题得证。□

上述命题使我们能够将拟正则性条件转换为有限组合结构的语言。

推论 2.12。测度 μ 在 $\mathfrak{F}$ 上是拟正则的，当且仅当存在 $A \in \mathfrak{F}$，使得对于 $\mathfrak{F}$ 中所有可能的嵌入 $i\colon A \to X$，$\mu(i)$ 均非零。

证明。结合命题 2.10 和 2.11，μ 是拟正则的，当且仅当 $\mu|_{\mathscr{F}_A}$对于某个 $A \in \mathfrak{F}$是正则的。推论由 $\mathscr{F}_A$的定义立即得到。□

给定一个带有子结构 X 的结构 $Y \in \mathfrak{F}$，可能存在多个不同的嵌入 $X \to Y$。我们证明，（拟）正则测度表现良好，不受 X 嵌入 Y 的方式影响。

命题 2.13。设 μ 是相对 *Fra¨ıss´e* 类 $\mathscr{F}_A$ 上的一个正则测度，且 K 是某个 (X,i)、$(Y,j) \in \mathscr{F}_A$ 的所有嵌入 $(X,i) \to (Y,j)$ 的集合。$\mu(k)$ 的值在所有嵌入 $k \in K$ 中都相同。

证明。对于任意嵌入 $k\colon (X,i) \to (Y,j)$，我们有 $j = k \circ i$，因此 $\mu(k) = \mu(j)\mu(i)^{-1}$，这一定义良好，且与嵌入的选择无关。□

由于测度的性质较为复杂，我们引入一种形式化构造，它恰好刻画测度的所有组合约束。

定义 2.14。对于一个 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$，我们将其测度环 定义为一个交换环 $\Theta(\mathfrak{F})$，其中每个嵌入 i 都由一个形式符号 $[i]$ 表示，并满足以下条件：

(a) 如果 i 是同构，那么 $[i] = 1$。(b) 如果 i，j 是可复合的嵌入，那么 $[i \circ j] = [i] \cdot [j]$。(c) $[i] = \sum_{k=1}^{n} [i'_k]$ 采用定义 2.7 中的相同记号。

特别地，在 $\mathbb{C}$ 中实现一个测度相当于一个环同态 $\mu\colon \Theta(\mathfrak{F}) \to \mathbb{C}$，因此计算 $\mathfrak{F}$ 上的测度等价于计算其对应的测度环。

为进一步简化问题，注意到每个嵌入 $i : X \to Y$ 都由若干个 $|Y| - |X|$ 单点扩张复合而成。因此 $\Theta(\mathfrak{F})$ 由单点扩张生成。采用 [HNS24], 的记号，我们引入以下对象。

定义 2.15。设 X 是 $\mathfrak{F}$ 中的一个结构。对于 $a \in X$，标记结构(X,a) 是单点扩张 $i : X \setminus a \to X$。

对于每个标记结构（X，a），都有一个相应的类 $[X,a]\in\Theta(\mathfrak{F})$。由此可知，标记结构的同构类生成 $\Theta(\mathfrak{F})$，因此要计算 $\Theta(\mathfrak{F})$，只需考虑标记结构及其之间的关系。事实上，借助以下分离元素的关键思想，许多测度环都可以归约为有限计算。

定义 2.16。若两个元素 $a,b\in X$ 满足 X 是 $X\setminus a$ 和 $X\setminus b$ 在 $X\setminus\{a,b\}$ 上的唯一融合，则称它们为分离的 。

以下命题允许我们从标记点中移除分离元素，直到得到一个相对简单的结构。我们附上证明，以说明融合图的性质。

命题 2.17 ([HNS24，命题 2.9，第8])。设 (X,a) 是一个标记结构。若 $b\in X$ 与 a分离，则 $[X,a]\cong[X\setminus b,a]$ 属于 $\Theta(\mathfrak{F})$。

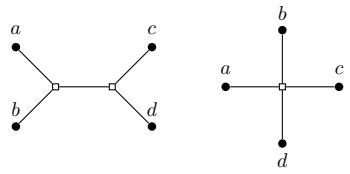
证明。考虑唯一融合图：

$$\begin{array}{ccc} X\setminus b & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ X\setminus\{a,b\} & \longrightarrow & X\setminus a \end{array}$$

根据定义 2.14c，我们有 $[i]=[j]$，这就是所需结果。 □

2.4. **Cameron 的树状结构**。我们现在概述由 Cameron 最初构造的树状结构类 [Cam87]。我们对这些类上的测度的研究扩展了 Harman、Snowden 和 Nekrasov 先前的工作 [HNS24，Nek24] 并穷尽了 Cameron 的初等树状结构列表。

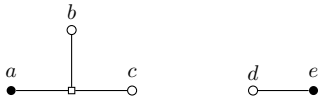
回想一下，树是没有圈的连通简单图。对于树 T，令$L(T)$ 表示其叶子集合。Cameron [Cam87] 在$L(T)$ 上指定了一个四元关系 R，其中 $R(a,b;\,c,d)$ 为真当且仅当这四片叶子互不相同，且从 a 到 b 的简单路径与从 c到 d的简单路径不相交。事实上，由任意四片叶子 a,b,c,d 张成的子树是下列构型之一：



在第一种构型中，$R(a,b;\,c,d)$ 为真，而 $R(a,c;\,b,d)$ 与 $R(a,d;b,c)$ 为假。在第二种构型中，R 恒为假。若 T 没有任何二度顶点，则称树 T 是约简的。Cameron 证明了，若 T 是 T'的约简，则 $L(T)$ 与 $L(T')$（带有关系 R）是同构的结构[Cam87, 命题 3.1]。当我们在 $L(T)$ 上施加更多关系时，该性质仍然成立，因此本文通篇假设所有树都是约简的。现在我们介绍本文所处理的树状类。

定义 2.18. 给定一棵树 T，一个 n-着色树结构 是叶子$L(T)$的集合，配备四元关系 R 和一个 n-着色 $\sigma\colon L(T)\to\{1,\dots,n\}$。

例 2.19. 以下是双色树的示例，其叶节点集合是双色树结构：



为方便起见， $\sigma^{-1}(1)$ 用黑叶表示，而 $\sigma^{-1}(2)$ 用白色叶节点表示。一般而言，我们通过融合相应的树，来融合（不同变体的）树结构。具体来说，如果 T 是上述两棵树在空树上的融合，我们只能识别标签属于以下配对的叶子：$(a,\ e)$、$(b,\ d)$ 和 $(c,\ d)$。有两种可能的融合 T，其中 $|L(T)| = 3$:

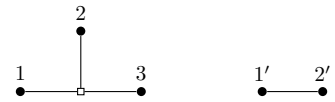


我们将 $C_n\mathfrak{T}$ 和彩色树结构类以及 n彩色树结构类分别记为 n，其中顶点的度至多为 k （其中 $k \geq 3$）。

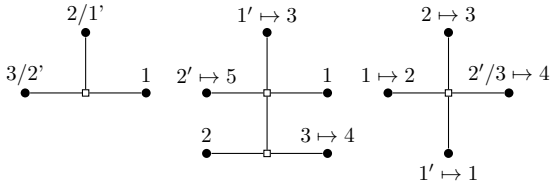
定义 2.20。给定一棵树 T，带标记树结构是配备四元关系 R 和全序 $<$的叶子集合 $L(T)$。

$L(T)$上的全序是一种二元关系，并诱导出一个保序双射 $\ell\colon\ L(T) \to \{1,\ldots,|L(T)|\}$，因此我们给每个叶子赋予 $\{1,\ldots,|L(T)|\}$ 中的一个不同正整数，以表示其顺序。

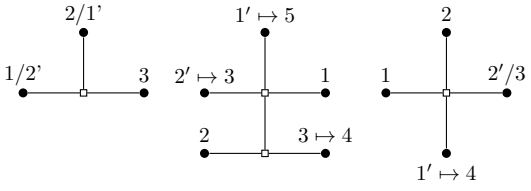
例 2.21. 以下是带标记树的示例，其叶节点集合是带标记树结构:



为了区分它们的叶子，我们在右侧的树中进行了重新标记 $1 \mapsto 1'$ 和 $2 \mapsto 2'$。一些有效的融合（其中新的顺序由重新标记表示）包括



而以下则不是示例，因为原有顺序未得到保留:



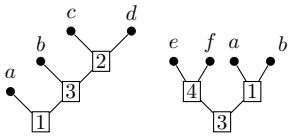
设 $L\mathfrak{T}$ 为带标记树结构的类。请注意，在实际应用中， R 和 $<$可以视为 $L(T)$上的独立关系。

为了介绍最后一种变体，设树中的一个节点为非叶顶点。节点着色有根二叉树是这样一种有根树：每个节点都有两个不区分左右的子节点，并被赋予来自 $\{1,\ldots,n\}$ 的 n 种颜色之一。如果一棵树至少有

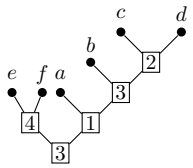
两个叶子，那么它的根就是一个节点。注意，与 $C_n\mathfrak{T}$ 中的树不同，这里的叶子不着色。给定一棵根为 r 的节点着色有根二叉树 T，在 $L(T)$ 上有一个三元关系 S：当且仅当 a, b, c 互不相同，且从根到 a 的简单路径与从 b 到 c 的简单路径不相交时，$S(a, b, c)$ 成立。

定义 2.22。给定一个节点着色有根二叉树 T，节点着色有根二叉树结构 是叶子集合 $L(T)$，并配备三元关系 S。

例 2.23。以下是节点着色有根二叉树的示例，其叶节点集合构成节点着色有根二叉树结构：



在左侧的树中，根的颜色为 1，且 $S(a, b, c)$ 和 $S(b, c, d)$ 为真，而 $S(c, a, d)$ 为假。在右侧的树中，根的颜色为 3，且 $S(e, a, b)$ 和 $S(a, e, f)$ 为真，而 $S(a, b, f)$ 为假。两棵树在 $\{a, b\}$ 上的子树之上的一个融合为



我们用 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 表示 n（节点）着色有根二叉树结构的类。

要在 Cameron 树状类上赋予测度，我们需要验证它们是 Fra¨ıss´e 类，具体见以下命题。

命题 2.24. 类 $C_n\mathfrak{T}$、$C_n\mathfrak{T}_k$、$L\mathfrak{T}$ 和 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 都是 *Fra¨ıss´e* 类。

证明。对于这四个类，2.3a、2.3b 和 2.3c 都显然成立，因此只需验证融合性质。我们改编 [Cam87, 命题 3.2, p.158], 中的证明，该证明讨论的是未着色且未标记的情形。假设有两棵树 T_1 和 T_2，它们有一个公共子树 T_0。设 deg(v) 表示顶点 v 的度。为了将 T_1 和 T_2 在 T_0 上融合，我们从 T_0 开始，向外延伸以构造 T_1 和 T_2 的其余部分。如果 T_1 和 T_2 各自向外延伸的顶点集合两两不相交，那么只需将 T_1 和 T_2 的剩余部分分别连接到这些顶点上。如果存在 $v \in T_0$，使得 T_1 和 T_2 都从 v 向外延伸（可能导致 deg(v) $> k$），那么将 v 连接到新的节点 u 和 w，并分别从 u 处延伸 T_1，从 w 处延伸 T_2。注意，添加 u 和 w 后，deg(v) $= 3$（若 v 是根，则为 2），且 $L(T_1) \cup L(T_2)$ 保持不变，因此我们得到一个有效的融合。

在 $L\mathfrak{T}$ 中，我们将全序与树分别进行融合。给定分别定义在 T_0、T_1 和 T_2 上的全序 L_0、L_1 和 L_2，其中 $L_0 \subseteq L_1, L_2$，同样从 L_0 开始，并在添加 L_1 和 L_2 的其余元素时，为 L_1 和 L_2 中的元素任意选择序（同时保留 L_0）。此过程独立于底层无标记树的融合，并由此完成带标记树的融合。□

3. Vanishing measure rings

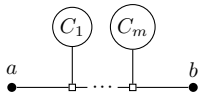
本节中，我们计算测度环 $\Theta(C_n\mathfrak{T})$、 $\Theta(C_n\mathfrak{T}_k)$ 和 $\Theta(L\mathfrak{T})$，它们分别对应于 Fra¨ıss´e 类的 n-颜色树结构、最大度为 k 的 n-颜色树结构，以及带标号树结构。特别地，我们证明这三个测度环都同构于零环，这意味着这些类均不具有测度。

3.1. n-彩色树。

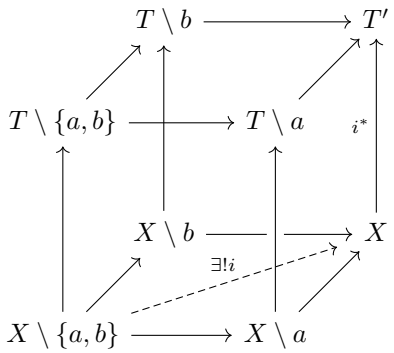
对于一棵带有叶 a的树 T，回顾一下，标记结构（T， a）是嵌入 $T \setminus a \to T$，而 $[T, a]$ 是测度环中（T， a）的同构类所对应的变量。令 $N(a)$表示与 a相邻的不同节点（如果该节点存在）。

命题 3.1。 设(T, a) 是 $C_n\mathfrak{T}$中的一个标记结构。若存在 $b \in L(T)$，使得 $d(N(a)\ N(b)) \geq 2$或$\deg(\mathrm{N(a)}) \geq 4$或$\deg(N(b)) \geq 4$（其中 $d(u, v)$表示 u 与 v之间的测地距离），则 a 和 b 是分离的。换言之， $[T, a] = [T \setminus b, a]$。

证明。 给定一个标记结构 (T, a)，只需证明命题对 T 的无色版本成立。若 $d(N(a)\ N(b)) \geq 2$，考虑 T 在 a, b 上的诱导子树 X，以及所有满足以下条件的 $c \in L(T) \setminus \{a, b\}$： 从 a 到 b 的简单路径与从 c 到 a 或 b 的简单路径相交。特别地， X 的图示为



其中 $m > 2$ 和 $c \in C_i$ 对某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 成立。注意， X 是 $X \setminus a$ 和 $X \setminus b$ 在 $X \setminus \{a, b\}$ 上的唯一融合，即 a 和 b 在 X 中分离。令 T' 为 $T \setminus a$ 和 $T \setminus b$ 在 $T \setminus \{a, b\}$ 上的一个融合；下面的图表交换：



注意，存在唯一的嵌入 i： $X \setminus \{a, b\} \to X$，使得下方方块交换，因此 X（连同嵌入 $X \setminus a \to X$ 和 $X \setminus b \to X$）是嵌入 $X \setminus \{a, b\} \to X \setminus a$与 $X \setminus \{a, b\} \to X \setminus b$的推出。由泛性质，存在唯一的嵌入 i^*： $X \to T'$，这意味着 T'与 T在 X上也一致。因此，对于 T 的任意叶子 c、d （由于 $L(T) = L(T')$，它们也是 T'的叶子），我们有 $R(a, b; c, d) = R'(a, b; c, d)$，其中 R'是 T'上的四元关系。由此容易得出 $R(a, c; b, d) = R'(a, c; b, d)$同样成立。最后，已知 R 与 R' 在所有不同时见证 a 和 b 的四元组上一致，因为 T与 T'都保持 $T \setminus a$、 $T \setminus b$和 $T \setminus \{a, b\}$，所以我们得出 $R = R'$。这

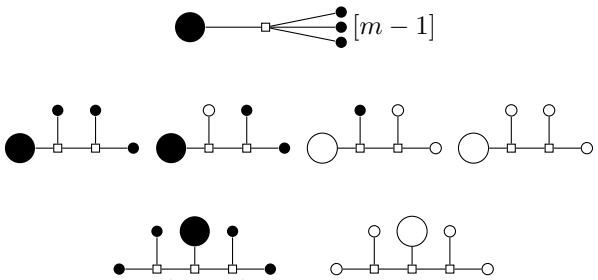
意味着 $T = T'$，因此 T 是唯一融合，从而 a 与 b 在 T中是分离的。该结果现在由命题 2.17得出。

当 $\deg(N(a)) \geq 4$或 $\deg(N(b)) \geq 4$时，可由类似的论证得出：a 与 b 在 X 中分离，因此在 T中也分离。□

现在，我们陈述主要结果。

定理 3.2. 对于所有 $n \geq 2$ 和 $k \geq 3$，都有 $\Theta(C_n\mathfrak{T}) \cong \Theta(C_n\mathfrak{T}_k) \cong \mathbf{0}$。因此，在类 $C_n\mathfrak{T}$ 和 $C_n\mathfrak{T}_k$上不存在测度。

为证明定理 3.2，我们根据定义 2.14 给出的测度环性质推导方程，并证明这些方程最终相互矛盾。我们首先引入以下标记结构，其中标记叶被放大，且仅涉及两种颜色（白色和黑色）：

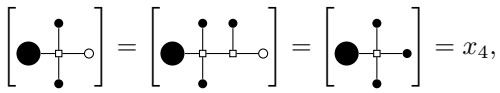


令 x_m 表示第一行中标记结构的同构类，其中 $m \leq k$ 属于 $C_n\mathfrak{T}_k$。从左到右，令 y_1，y_2，y_3，y_4 表示第二行中标记结构的同构类，并令 z_1，z_2 表示第三行中的同构类。

引理3.3。 以下（类）标记结构等于 x_4 *in* $\Theta(C_n\mathfrak{T})$和 $\Theta(C_n\mathfrak{T}_k)$ *for* $k \geq 4$*:*



证明。 利用命题 2.17，我们可以先添加再移除分离叶，从而得到等式链



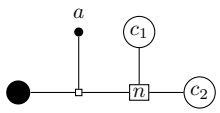
如所需。 □

对于一个标记结构 (T, a)，令 $t_{T,a}$ 表示将 T限制到 $N(a)$ 及其叶邻居所得的限制。例如， t_{y_1} 是对应于具有一个节点和两片黑叶的树结构的类（它同构于仅有两片黑叶的树结构），而 t_{z_1} 同构于具有一片黑叶的树结构。

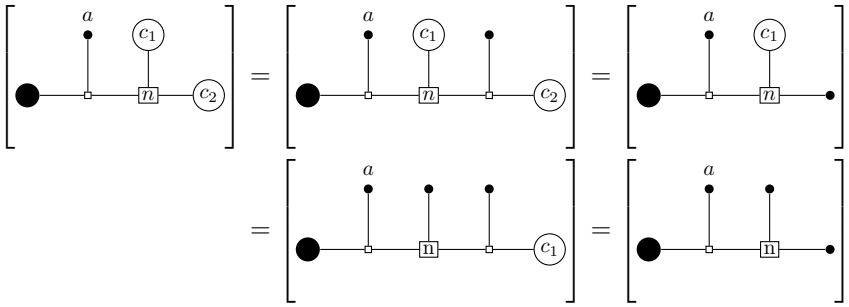
引理 3.4。 设 (T, a) 是一个至少有两个节点的标记结构，并假设 $\deg(N(a)) = 3$。若 $t_{T,a} \cong t_{y_i}$对某个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$成立，则 $[T, a] = y_i$。若$t_{T,a} \cong t_{z_j}$对某个 $j \in \{1, 2\}$成立，则 $[T, a] = z_j$。

证明。 我们在每种情况下证明 $i = 1$ 的结果；其余情形类似。若 $t_{T,a} \cong t_{y_1}$，则 $N(a)$ 与两片黑叶（一片是 a）及一个节点相邻，我们将其记为 n。根据命题 2.17，我们可以移除叶子

从与 $N(a)$ 的测地距离至少为二的节点中移除，直至 n 与恰好两片颜色为 c_1、c_2 的叶子相邻，如下图所示：

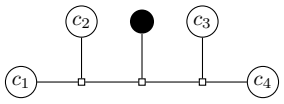


现在，考虑通过反复添加和删除分离顶点得到的等式链

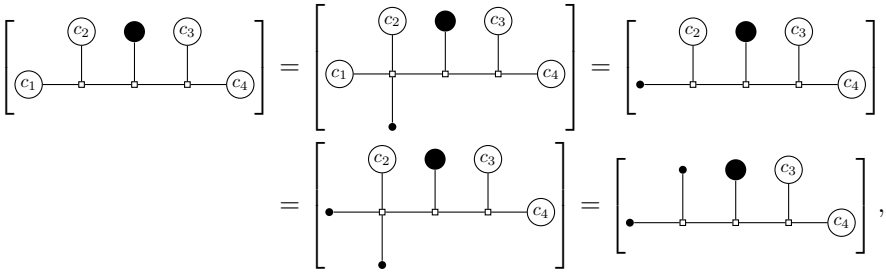


这正是我们需要的。

如果$t_{T,a} \cong t_{z_1}$，则 $N(a)$与一个叶和两个节点相邻。我们可以再次移除与 $N(a)$ 距离至少为二的所有其他节点上的叶子，以及相邻节点上的叶子，直到 T 的每个节点的度为三，且叶子的颜色为c_1, c_2, c_3, c_4 ，如下所示：



我们有如下等式链：

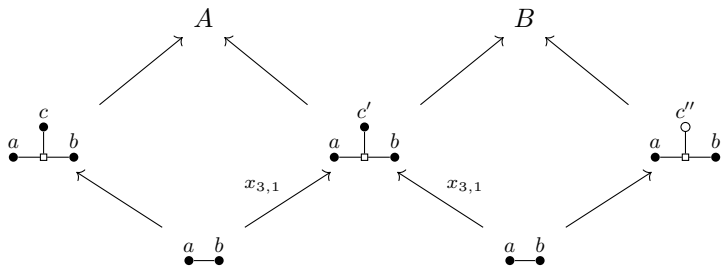


这使得我们可以将 c_1 和 c_2 变为黑色。通过类似的步骤，我们可以将c_3 和 c_4 变为黑色，从而按预期得到 z_1 。□

上述两条引理导出了 y_i之间的如下关系，我们认为这些关系对于解释测度环的消失至关重要。

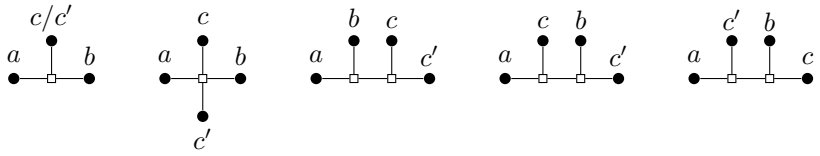
引理 3.5. 对所有 $n \geq 2$ 和 $k \geq 3$，我们有 $y_1 + 1 = y_2$ 与 $y_4 + 1 = y_3$ 属于 $\Theta(C_n\mathfrak{T})$ 以及 $\Theta(C_n\mathfrak{T}_k)$ 。

证明。只需证明前一个等式，因为后一个等式可由交换颜色得到。考虑下面由两个并排的粘合方块组成的图：



我们令 A、B 分别表示左方块与右方块中 amalgam 的集合。

假设 $k \geq 4$。在左方块中，我们可以选择将 c 与 c' 等同，或保持它们相异。我们最终得到 A 中如下可能的 amalgam：



由2.14a 与2.14c 可知

$$x_{3,1} = 1 + x_{4,1} + 3y_1. \tag{3.1}$$

在右方块中，c' 与 c'' 无法等同，因为它们的颜色不同，因此 B 中可能的 amalgam 是通过在上述列表中除第一个 amalgam 之外的所有项里，将 c改为 c'' 并更改其相应颜色而得到的。结合引理3.3 与3.4，我们得到融合方程

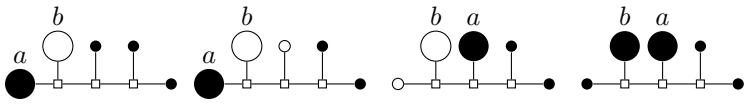
$$x_{3,1} = x_{4,1} + y_2 + 2y_1 \tag{3.2}$$

由2.14c。对于 $k = 3$ 情形，只需注意$x_{4,\ 1}$ 在3.1 与3.2中均不存在。将这两个方程结合起来，即可得到所需结论。□

定理 *3.2* 的证明 结合引理3.5以及由定义 2.14b 得出的若干二次方程，我们将导出矛盾。注意，若 a，b是树 T 的两个不同叶子，则

$$[T, a][T \setminus a, b] = [T, b][T \setminus b, a],$$

因此，每棵有两个标记叶子 a，b 的树都会导出一个关于 $\Theta(C_n\mathfrak{T})$ 和 $\Theta(C_n\mathfrak{T}_k)$的二次方程。事实上，考虑以下四棵双标记树：



从左到右，令标记树为 T_1、T_2、T_3、T_4。由 T_1 和命题2.17，我们得到

$$y_2y_3 = y_3y_1 = y_3(y_2 - 1),$$

因此 $y_3 = 0$。由此可得 $y_4 = -1$。利用引理3.4，对应于 T_2 的方程为

$$y_2 y_4 = y_3 y_2,$$

这意味着 $(y_1, y_2) = (-1, 0)$。再次由引理 3.4， T_3 可得

$$z_1 y_4 = y_4 y_2,$$

这导出 $z_1 = 0$。最后，与 T_4 对应的方程为

$$z_1 y_1 = y_1^2,$$

或 $0 = 1$。因此， $\Theta(C_n\mathfrak{T})$ 和 $\Theta(C_n\mathfrak{T}_k)$ 均为零。 □

3.2. 带标记树。我们再次从分离叶的一个充分条件开始。由于命题 3.1 同样适用于无色树，对于带标记（无色）树 T，我们称两个叶子 a 和 b 为 R-分离的，如果 $d(N(a), N(b)) \geq 2$ 或 $\deg(N(a)) \geq 4$ 或 $\deg(N(b)) \geq 4$，并称其为 $<$-分离的，如果存在另一个叶子 $c \in T$，使得 $a < c < b$ 或 $b < c < a$。特别地，如果 a 和 b 是 $<$-分离的，那么在 $T \setminus \{a, b\}$上的 $T \setminus a$ 与 $T \setminus b$ 的任何 amalgam 中，我们都无法改变它们的顺序，因此任意两个 amalgam 都具有相同的标签。

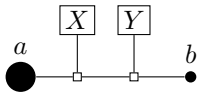
命题 3.6. 设 T 是一棵带标记树，其叶子 a 和 b互不相同。如果 a 和b 既是 R-分离的，又是 $<$-分离的，那么 a 和 b 在 T中分离，即$[T, a] = [T \setminus b, a]$。

证明。回顾2.4 可知，我们将 R 与 $<$视为独立的关系，并独立地进行 amalgam。这意味着 $T \setminus a$与 $T \setminus b$在 $T \setminus \{a, b\}$ 上的 amalgam 总数等于其无标记版本的 amalgam 数与其全序数的乘积，即为 $1 \cdot 1 = 1$，当 a 与 b同时为 R-分离且 $<$-分离时。□

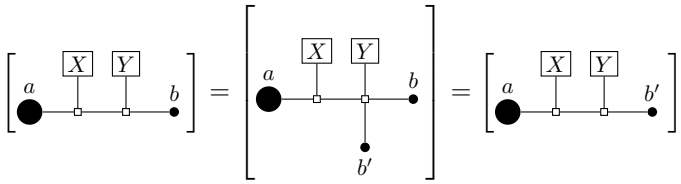
事实上，我们引入另一个结果，以进一步调整标记树中叶子的序。

命题 3.7. 设(T, a) 为一个标记结构，且 b 是一个 $<$-分离于 a 的叶，使得 $N(a) \neq N(b)$。假设 T' 由 T通过在叶子的诱导序中将 b移至 b'而得到，从而 b' 仍保持 $<$-分离于 a，且其余叶子的相对序保持不变。则 $[T, a] = [T', a]$。

证明。若 a 和 b 也彼此 R-分离，则根据命题 3.6，它们在 T 中是分离的，因此确实有 $[T, a] = [T \setminus b, a] = [T' \setminus b', a] = [T', a]$。于是，假设 b(和b') 与 a并非 R-分离。由此可知，$N(a)$ 和 $N(b)$ 相邻，且 $\deg(N(a)) = \deg(N(b)) = 3$，因此 (T, a) 具有如下形式



根据命题 3.6，我们有



其中第二个等号之后的类为 $[T', a]$，正如所需。 □

以下是本节的第二个主要结果。

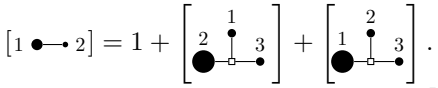
定理 3.8。 我们有 $\Theta(L\mathfrak{T}) \cong \mathbf{0}$，因此带标记树这一类上不存在测度。

证明。 与前面讨论彩色树的情形一样，我们通过列出一系列线性方程和二次方程，最终导出矛盾，从而得到该结果。我们注意到 [HNS24] 的以下观察：给定标记结构（$T \setminus b,\ a$）和（$T \setminus a,\ b$），其中 $T_1, \ldots\ldots, T_k$ 是 $T \setminus a$ 和 $T \setminus b$ 在 $T \setminus \{a, b\}$ 上所有可能的融合，根据定义 2.14c，存在一个与之关联的线性方程：

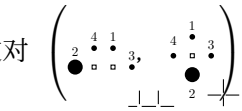
$$[T \setminus b, a] = \sum_{i=1}^{k} [T_i, a].$$

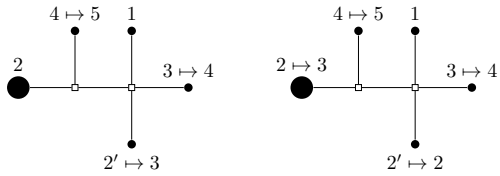
因此，每一对有序对标记树（（$T \setminus b,\ a$），（$T \setminus a,\ b$））都会导出一个线性方程。此外，回顾 3.1，一个二次方程 $[T, a][T \setminus a, b] = [T, b][T \setminus b, a]$ 源自一棵带标记叶子的树 T，其标记叶子为 $a,\ b$。

首先，考虑这对重复的标记树（1 2，1 2）。其对应的方程为

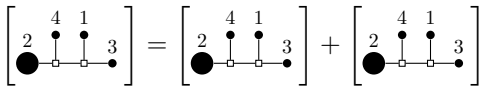


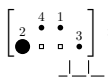
不过请注意，在最右侧的类中，1 与 3 分离，因此我们得到  $= -1$。

接下来，考虑这对 ，它会产生两种融合：

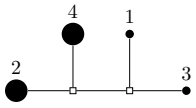


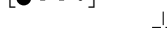
根据命题3.6，在左侧融合中，2 与 1 分离；在右侧融合中，3 与 1 分离，因此得到的方程为

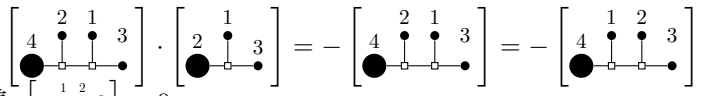


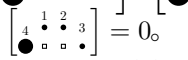
由此得到  $= 0$。

现在，考虑以下双重标记的 树：

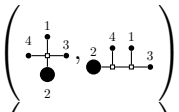
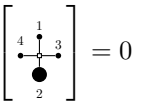
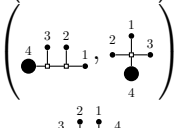
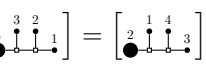
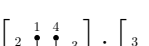
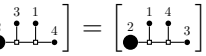
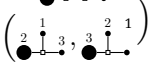
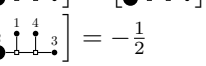
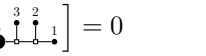


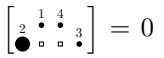
我们之前发现  $= 0$，因此相关的二次方程可化简为



这意味着  $= 0$。

其余相关图（无论是标记树对还是双标记树）及其相应的方程均列于下表。它们是命题 3.6 和 3.7 与上述方程相结合的结果。

图	方程
	 $= 0$
	
	 $= 0$
	
	 $= -\frac{1}{2}$
	 $= 0$

由第二个方程和最后两个方程可得  $= 0 = -\frac{1}{2}$，因此 $\Theta(L\mathfrak{T})$ 消失。□

4. Measures on node-colored rooted binary trees

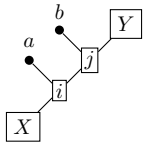
在本节中，我们将完整计算测度环 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$，从而对 n-颜色有根二叉树类上的所有测度进行分类。随后，我们将对¨ıss´e 子类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 进行分类，以考察在某个子类上正则的测度。正如我们在第6节中讨论的，这些测度会产生半单张量范畴。

4.1. 测度环的计算。

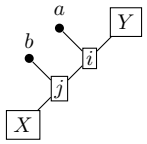
我们注意到，我们计算测度环的方法与 [HNS24], 中采用的方法相似，该方法首先通过以下命题将 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 的生成集缩减为有限个标记结构。

命题 4.1。 *a 和 b 是 $T \in \partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的两个不同叶子，当且仅当 $N(a)$ 与 $N(b)$ 既不相同也不相邻时，它们才是分离的。*

证明。如果 $N(a) = N(b)$，那么通过识别 a和 b，我们可以得到 $T\backslash a$和 $T\backslash b$在 $T \setminus \{a, b\}$ 上的另一种融合（除 T之外）。如果 $N(a)$ 和 $N(b)$ 相邻，如下图所示，

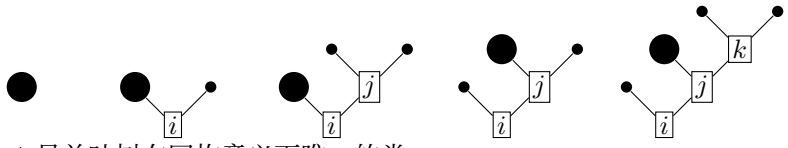


那么交换 a和 b（以及 $N(a)$ 和 $N(b)$）是另一种融合:



现在假设 $N(a)$ 和 $N(b)$ 既不相同，也不相邻。如果从 a 到 b 的路径经过根，那么在任意融合 T' 中， a 和 b仍位于根的不同两侧，因此既不能被识别，也不能互换。由此， $T' = T$。如果 a和 b位于根的同一侧，那么存在一个节点 M ，使得与根 r 的距离小于 $N(a)$ 和 $N(b)$ 中恰好一个的，是 M （设为 $N(a)$）。这意味着在任意融合 T' 中，我们有 $d(a, r) < d(b, r)$，因此 a和 b 再次都保持不变，这说明不存在不同于 T 的融合。□

设 $[n] = \{1, \dots, n\}$。对于 $i, j, k \in [n]$，令 A、 $B(i)$、 $C(i, j)$、 $D(i, j)$、 $E(i, j, k)$ 分别表示下列标记树的同构类，如从左到右所示；其中，参数表示按距根的距离递增排列的节点颜色。



注意， A 是单叶树在同构意义下唯一的类。

命题 4.2. 环 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 由 A, $B(i)$, $C(i, j)$, $D(i, j)$,$E(i, j, k)$ 生成，其中 i, j, k 取遍 $[n]$。

证明。我们通过对 $|L(T)|$ 作归纳法，证明任意一个标记结构类 $[T, a]$ 都等于 $\partial\mathfrak{T}_3$ (n) 中上述类之一。当 $|L(T)| \leq 3$ 时，结论显然成立，因此设 $|L(T)| \geq 4$。若 $[T, a]$ 不是 $E(i, j, k)$，则存在 $b \in L(T)$，使得 $d(N(a)\ N(b)) > 1$。由命题 4.1，我们有 $[T \setminus b, a] = [T, a]\,\text{where}|L(T) \setminus b| = |L(T)| - 1$，因此根据归纳假设， $[T, a]$ 等于上述类之一。归纳完成。□

特别地，我们注意到，命题4.2中的结构的标记叶与其余任何叶子都不分离。我们称这类标记结构为不可约。为处理 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中的线性关系，回顾一下：给定标记结构 $(T \setminus b, a)$ 和 $(T \setminus a, b)$，其中 $T_1, \dots, T_k$ 是 $T \setminus a$ 和 $T \setminus b$ 在 $T \setminus \{a, b\}$ 上所有可能的融合，则有一个与之对应的线性方程 $L_{T,a,b}$ ，其形式为

$$[T \setminus b, a] = \sum_{i=1}^{k} [T_i, a].$$

我们称 $L_{T,a,b}$ 为一个极小线性方程，如果 $[T \setminus b, a]$ 和 $[T \setminus a, b]$ 都不可约，并且除去 $N(a)$ 和 $N(b)$ 的颜色外彼此同构。

命题 4.3. 任意非平凡线性方程 $L_{T,\ a,\ b}$（其中 $k \geq 2$）都等于一个极小线性方程。

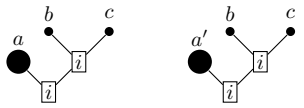
证明。如果 $[T \setminus b, a]$ 不是不可约的，那么存在与 a分离的 $c \in L(T)$，因此有 $[T \setminus b, a] = [T \setminus \{b, c\}, a]$。此外，在任意融合 T_i中，c仍与a 分离，因此对每个 i，都有 $[T_i, a] = [T_i \setminus c, a]$，这意味着移除与 a分离的叶子不会改变该方程。因此，设 $[T \setminus b, a]$ 不可约。如果 a和 b在 T中分离，那么根据命题 4.1，T是唯一所需的融合，因此 L_T、$_a$、$_b$ 只是平凡等式。由此可知，a和 b不分离，因此 $N(a)$ 和 $N(b)$ 相同或相邻，这意味着 $[T \setminus a, b]$ 与 $[T \setminus b, a]$ 的差异可能仅在于 $N(a)$ 和 $N(b)$ 的颜色。因此，$[T \setminus a, b]$ 也不可约，从而将 L_T、$_a$、$_b$化为极小线性方程，证毕。□

根据上述命题，只需考虑 A、$B(i)$、$C(i,\ j)$、$D(i,\ j)$ 和 $E(i,\ j,\ k)$ 之间的线性关系，尤其是那些源自如下结构的关系：这些结构之间可能仅在各自标记点相邻节点的颜色上有所不同。由于这类关系的族有有限多个，化简后即可得到下面的完整列表。

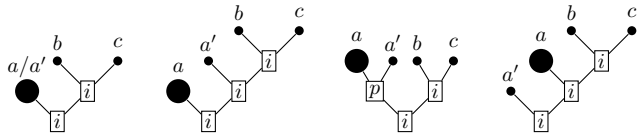
推论 4.4. 对于遍历 $[n]$ 的两两不同的 i、j、k，$\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 中的线性关系由以下各族生成：

$$
\begin{aligned}
&A = 1 + \textstyle\sum_{i\in[n]} B(i), && B(i) = 1 + C(i,i) + D(i,i) + \textstyle\sum_{p\in[n]} D(i,p),\\
&B(i) = C(i,j) + D(j,i), && 0 = 1 + \textstyle\sum_{p\in[n]} D(i,p) + E(i,i,i),\\
&C(i,i) = C(i,j) + E(j,i,i), && D(i,i) = D(j,i) + E(i,i,j),\\
&E(i,j,i) = 0, && C(i,j) = C(i,k) + E(k,i,j).
\end{aligned}
$$

证明。我们说明第二行第二列中的等式是如何得到的；其余等式也可通过类似过程得出。考虑带有不同标记点的两个 $C(i,\ i)$ 副本：



带有标记叶 a 的 $C(i,\ i)$ 的自融合，以 $a,\ a',\ b,\ c$ 标记，使得 $\{a, b, c\}$ 和 $\{a', b, c\}$ 上的诱导标记子树（其标记点分别为 a 和 a'）同构于 $C(i,\ i)$。忽略颜色和同构后，四叶无序有根二叉树只有两种，因此所有自融合如下



其中，p 遍历 $[n]$中的所有颜色。从左到右，令标记树依次为 I_1、I_2、I_{3p}和 I_4。由于 I_1 是通过识别 a 和 a'得到的，因此有 $[I_1] = 1$。在 I_2中，

b 与 a分离，因此有 $I_2 \cong I_2 \setminus b \cong C(i,i)$，这意味着 $[I_2] = C(i,i)$。在 I_{3p}中， b 也与 a分离，从而得到 $I_{3p} \cong I_{3p} \setminus b \cong D(i,p)$。因此，对于所有 $p \in [n]$，都有 $[I_{3p}] \cong D(i,p)$。最后， I_4 已经是不可约的，并且与 $E(i,i,i)$的同构类同构，因此有 $C(i,i) = 1 + C(i,i) + \sum_{p\in[n]} D(i,p) + E(i,i,i)$，这就得到了所需结果。□

回顾一下，Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$ 上的测度 μ 是正则的，当且仅当对于 $\mathfrak{F}$ 中所有结构的嵌入 i ，(i) μ都非零。

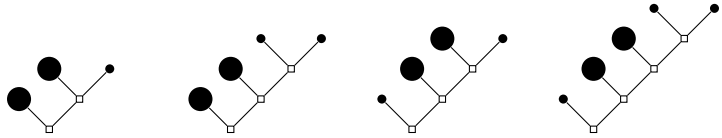
推论 4.5。 对于每个 $n \geq 2$， $\partial\mathfrak{T}_3$（n）上都不存在正则测度。

证明。 由推论 4.4可知， $E(i, j, i) = 0$ 对任意一对不同的指标 (i, j) 均成立，因此只要存在至少两种颜色，总有至少一个嵌入为零 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$。□

现在，我们考虑 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中标记结构之间的二次关系。根据定义 2.14b，它们由以下形式的方程 $Q_{T,\ a,\ b}$ 生成：

$$[T, a][T \setminus a, b] = [T, b][T \setminus b, a]$$

对于 a， $b \in L(T)$，因为 $T \setminus a$ 与 $T \setminus b$ 的融合必须在 $T \setminus \{a, b\}$ 上一致。若 T 是以下某棵树的一个 n-着色，且 a， b 是按任一顺序排列的标记叶子（因为 Q 是对称的），则称 $Q_{T,\ a,\ b}$ 为一个极小二次方程：



命题 4.6. 任意非平凡的二次方程 $Q_{T,\ a,\ b}$ 都等于一个极小二次方程。

证明。如果 a和 b在 T中分离，则 $([T \setminus a, b], [T \setminus b, a]) = ([T, b], [T, a])$，因此$Q_{T,a,b}$平凡地成立。如果 $[T, a]$和 $[T, b]$都不是不可约的，那么存在一个$c \in L(T) \setminus \{a, b\}$，它与 a和 b都分离，因此移除 c不会改变 Q。此外，如果 $N(a) = N(b)$，那么 $([T, a], [T \setminus a, b]) = ([T, b], [T \setminus b, a])$，因此 Q 再次平凡地成立。对 $|L(T)|$（至多为 5）进行分类讨论可得， T 必定是上文四类标记树的 n-着色之一。□

推论 4.7. 对于（不一定互不相同的） i、 j、 k、 l遍历 $[n]$的情形， $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 中的二次关系由以下几族生成：

$$\begin{aligned} &C(i,j)B(j) = D(i,j)B(i), && C(i,j)C(j,k) = E(i,j,k)C(i,k), \\ &D(j,k)D(i,j) = E(i,j,k)D(i,k) && E(i,j,k)E(i,k,l) = E(j,k,l)E(i,j,l). \end{aligned}$$

现在，我们结合推论4.4 中的线性方程族与推论 4.7 中的二次方程族，以减少 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中的二次生成元数量。

命题 4.8。 环 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 由 $B(i)$、 $C(i,j)$ 生成，并满足以下二次约束，其中 i、 j、 $k\in[n]$ 两两不同：

$$B(i)(B(i)-S(i))=0 \tag{4.8a}$$

$$C(i,i)(C(i,i)-S(i))=0 \tag{4.8b}$$

$$C(i,j)C(j,i)=0 \tag{4.8c}$$

$$C(i,j)(C(i,j)-S(i))=0 \tag{4.8d}$$

$$C(i,j)B(j)=(B(j)-C(j,i))B(i) \tag{4.8e}$$

$$C(i,j)C(j,k)=(C(j,k)-C(j,i))C(i,k) \tag{4.8f}$$

其中

$$\begin{aligned} S(i)&=B(i)+C(i,i)-D(i,i)\\ &=B(i)+C(i,i)-\frac{1}{2}\left(B(i)-C(i,i)+\sum_{p\neq i}(C(p,i)-B(p))-1\right). \end{aligned} \tag{4.8g}$$

证明。 利用推论 4.7 中的关系，并用推论 $B(i)$ 和 $C(i,j)$ 表示这些关系，很容易验证上述方程组成立。根据推论4.4。与此同时，该命题实质上指出推论 4.7底行中的两个方程组是冗余的，按从左到右的顺序记为 Q_3 和 Q_4；对 i、 j、 k、 l之间的相等情形分类讨论即可证明。

我们来说明 $i=k$ 和 $i\neq j$的情形。 Q_3 的右端为零，因为$E(i,j,i)=0$；而 $D(i,j)D(j,i)=(B(j)-C(j,i))(B(i)-C(i,j))$ 也因 4.8c 和 4.8e 而为零。 Q_4 的左端对任意 l都为零；当 $l=i$ 和 $l=j$时，右端也为零。若 $l\notin\{i,j\}$，则根据推论 4.4 右下方的方程组，我们仍有 $E(j,i,l)E(i,j,l)=(C(i,l)-C(i,j))(C(j,l)-C(j,i))$，由 4.8c 和 4.8f 可知其为零。□

利用这一简化的表述，我们现在对所有测度 μ 进行分类： $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))\to\mathbb{C}$。对于一个标记结构 X （连同某个标记点），记作 $\mu(X)=\mathbf{X}$。

命题 4.9。 对于任意测度 μ 及每个 $n\geq 1$，都有$\mathbf{S}(i)\neq 0$ 对所有$i\in[n]$均成立。

证明。 我们对 n 进行归纳法。设 2 是 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 中的单位元。对于$n=1$，由 4.8g，可得 $S(1)=\frac{1}{2}(B(1)+3C(1,1)+1)$，因此 4.8a 和 4.8b 推出

$$\begin{aligned} B(1)(3C(1,1)+1-B(1))&=0,\\ C(1,1)(B(1)+C(1,1)+1)&=0. \end{aligned}$$

由于 μ 是环同态，而 $\mathbb{C}$是整环，我们分以下情形讨论。如果$\mathbf{B(1)}=0$，那么（$\mathbf{C(1,1)}$，$\mathbf{S(1)}$）$\in\left\{\left(0,\frac{1}{2}\right),(-1,-1)\right\}$。如果$\mathbf{B(1)}=3\mathbf{C(1,1)}+1$，那么（$\mathbf{C(1,1)}$，$\mathbf{S(1)}$）$\in\left\{(0,1)\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$。我们验证这四个解均有效，且确实给出了$\mathbf{S(1)}\neq 0$。

现在，为了导出矛盾，假设 $\mathbf{S}(n)=0$ 对某个固定的 $n>1$。由此可得 $\mathbf{B}(n)=\mathbf{C}(n,i)=\mathbf{D}(n,n)=0$ 对所有 $i\in[n]$，根据 4.8g，

$$\sum_{p\neq n}(\mathbf{C}(p,n)-\mathbf{B}(p))=1. \tag{4.1}$$

这意味着，对所有 $m \in [n-1]$,

$$\mathbf{S}(m) = \mathbf{B}(m) + \mathbf{C}(m,m) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}(m) - \mathbf{C}(m,m) + \sum_{p\neq m}(\mathbf{C}(p,m) - \mathbf{B}(p)) - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(3\mathbf{C}(m,m) + \mathbf{B}(m) - \sum_{p\in[n-1]\setminus m}(\mathbf{C}(p,m) - \mathbf{B}(p)) + 1\right),$$

与方程4.1结合可得

$$3\mathbf{C}(m,m) + \mathbf{C}(m,n) - 2\mathbf{S}(m) + \sum_{p\in[n-1]\setminus m}(\mathbf{C}(p,n) - \mathbf{C}(p,m)) = 0.$$

因此，我们得到命题 4.8 中的关于 i、j、$k \in [n-1]$ 的方程组，并附加方程 4.1 中的约束，以及当 m 变化时，$\mathbf{C}(m、n)(\mathbf{C}(m、n) - \mathbf{S}(m)) = 0$ 这一事实。因此，归纳假设适用，从而对所有 $m \in [n-1]$，都有 $\mathbf{S}(m) \neq 0$。令 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i、j=1}^{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$，并令 $\mathbf{s} = (\mathbf{S}(i))_{i=1}^{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$，其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 3\delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)} + \delta_{\mathbf{C}(i,n),\mathbf{S}(i)} - 2 & \text{if } i = j, \\ \delta_{\mathbf{C}(j,n),\mathbf{S}(j)} - \delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)} & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

我们有

$$\mathbf{Cs} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

其中 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$，且 $\mathbf{C}$ 的各项满足 4.8c、4.8e和 4.8f。在继续进行该方程组的矩阵重构之前，先考虑以下引理。

引理 4.10. 设 G 为一个有限有向无环图（有向无环图）。若 $\mathbf{A}$ 为其邻接矩阵，则存在置换矩阵$\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PAP^{-1}}$ 为上三角。

证明. 取由 $v_1 \prec \cdots \prec v_n$给出的顶点集 V的拓扑排序。设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 且 $\mathbf{P}$ 为将 V 的标准顺序映到 $(v_1, \ldots, v_n)$ 的置换。对于 $\mathbf{PAP^{-1}}$ 中满足 $i < j$的所有对 (i, j)，v_i 与 v_j 之间要么没有边，要么有一条从 v_i 到 v_j的边，这两种情形均导致 $a_{ij} = 0$。由此可知，$\mathbf{PAP^{-1}}$ 对角线下方的所有元素均为零，即为所求。□

设 $G_{\mathbf{C}}$ 为来自 $\mathbf{C}$ 的诱导子图，即 $\mathbf{C}$是 $G_{\mathbf{C}}$的邻接矩阵。我们断言 $G_{\mathbf{C}}$ 是附加了自环的有向无环图。

注意到

$$\begin{aligned} c_{ij}c_{ji} &= (\delta_{\mathbf{C}(j,n),\mathbf{S}(j)} - \delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)})(\delta_{\mathbf{C}(i,n),\mathbf{S}(j)} - \delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(j)}) \\ &= \delta_{\mathbf{C}(j,n),\mathbf{S}(j)}(\delta_{\mathbf{C}(i,n),\mathbf{S}(i)} - \delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(j)}) - \delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)}\delta_{\mathbf{C}(i,n),\mathbf{S}(i)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中第二个等式由4.8c 得到，最后一个等式由4.8f得到。这意味着 $G_{\mathbf{C}}$ 是一个有向图。

现在，反设存在一个环 $v_{a_1} \to v_{a_2} \to \cdots \to v_{a_l} \to v_{a_1}$，其中 v_{a_1}、……、$v_{a_l} \in G_{\mathbf{C}}$，且 $l \geq 2$。这意味着，对于所有 $i \in \{1, \ldots, l\}$，都有 $\delta_{\mathbf{C}(a_{i+1},n),\ \mathbf{S}(a_{i+1})} - \delta_{\mathbf{C}(a_{i+1},a_i),\ \mathbf{S}(a_{i+1})} \in \{-1, 1\}$，或者等价地，

$$(\mathbf{C}(a_{i+1}, n), \mathbf{C}(a_{i+1}, a_i)) \in \{(\mathbf{S}(a_{i+1}), 0), (0, \mathbf{S}(a_{i+1}))\} \tag{4.3}$$

其中下标均按模 l 计算。

首先，假设 $\mathbf{C}(a_2,n)=\mathbf{S}(a_2)$，因此 $\mathbf{C}(a_2,a_1)=0$。我们反复应用4.8f。注意

$$\mathbf{C}(a_2,a_3)\mathbf{C}(a_3,n)=(\mathbf{C}(a_3,n)-\mathbf{C}(a_3,a_2))\mathbf{C}(a_2,n),$$

因此，若 $\mathsf{C}(a_3,n)=0$，则 $\mathsf{C}(a_3,a_2)\mathsf{C}(a_2,n)=\mathsf{C}(a_3,a_2)\mathsf{S}(a_2)=0$，这意味着根据归纳假设，$\mathsf{C}(a_3,a_2)=0$。然而，这意味着 $\mathsf{C}(a_3,n)=\mathsf{C}(a_3,a_2)=0$，与 4.3 矛盾。因此我们必有 $\mathsf{C}(a_3,n)=\mathsf{S}(a_3)$ 且 $\mathsf{C}(a_3,a_2)=0$。通过归纳法，对所有 i，$(\mathsf{C}(a_{i+1},n),\mathsf{C}(a_{i+1},a_i))=(\mathsf{S}(a_{i+1}),0)$，并且

$$\begin{aligned}0&=\mathbf{C}(a_2,a_1)\mathbf{C}(a_1,n)\\&=(\mathbf{C}(a_1,n)-\mathbf{C}(a_1,a_2)\mathbf{C}(a_2,n)\\&=(\mathbf{S}(a_1)-\mathbf{C}(a_1,a_2))\mathbf{C}(a_2,n),\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbf{C}(a_1,a_2)=\mathbf{S}(a_1)$。然而，注意到

$$\mathbf{C}(a_1,a_2)\mathbf{C}(a_2,a_3)=(\mathbf{C}(a_2,a_3)-\mathbf{C}(a_2,a_1))\mathbf{C}(a_1,a_3),$$

由此得到 $\mathbf{C}(a_1,a_3)=\mathbf{C}(a_1,a_2)=\mathbf{S}(a_1)$。类似地，我们得到

$$\mathbf{C}(a_1,a_2)=\mathbf{C}(a_1,a_3)=\cdots=\mathbf{C}(a_1,a_{l-1})=\mathbf{S}(a_1),$$

yet

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(a_1)\mathbf{S}(a_{l-1})&=\mathbf{C}(a_1,a_{l-1})\mathbf{C}(a_{l-1},a_l)\\&=(\mathbf{C}(a_{l-1},a_l)-\mathbf{C}(a_{l-1},a_1))\mathbf{C}(a_1,a_l)\\&=0.\end{aligned}$$

根据归纳假设，上述左端非零，从而导出矛盾。

反之，若 $\mathbf{C}(a_2,n)=0$ 且 $\mathbf{C}(a_2,a_1)=\mathbf{S}(a_2)$，则有 $\mathbf{C}(a_1,a_2)=0$，因此

$$\begin{aligned}0&=\mathbf{C}(a_1,a_2)\mathbf{C}(a_2,n)\\&=(\mathbf{C}(a_2,n)-\mathbf{C}(a_2,a_1))\mathbf{C}(a_1,n)\\&=-\mathbf{S}(a_2)\mathbf{C}(a_1,n),\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbf{C}(a_1,n)=0$。类似地，$\mathbf{C}(a_{i+1},n)=0$ 对所有 i，并且 4.3 意味着$\mathbf{C}(a_{i+1},a_i)=\mathbf{S}(a_{i+1})$。此外，注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(a_3)\mathbf{S}(a_2)&=\mathbf{C}(a_3,a_2)\mathbf{C}(a_2,a_1)\\&=(\mathbf{C}(a_2,a_1)-\mathbf{C}(a_2,a_3))\mathbf{C}(a_3,a_1)\\&=\mathbf{S}(a_2)\mathbf{C}(a_3,a_1),\end{aligned}$$

由此得到 $\mathbf{C}(a_3,a_1)=\mathbf{S}(a_3)$。通过类似的过程，我们得到

$$\mathbf{C}(a_2,a_1)=\mathbf{C}(a_3,a_1)=\cdots=\mathbf{C}(a_l,a_1)=\mathbf{S}(a_l),$$

因此 $\mathbf{C}(a_l,a_1)\mathbf{C}(a_1,a_l)=\mathbf{S}(a_l)\mathbf{S}(a_1)=0$，这与归纳假设矛盾。

因此可得 $G_{\mathbf{C}}$忽略自环后是一个有向无环图。根据引理 4.10，存在一个置换矩阵 $\mathbf{P}$使得$\mathbf{PCP^{-1}}$ 是上三角矩阵。由于进行

对$\mathbf{C}$进行行列置换不会改变其对角元素集合，因此有

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C}) &= \det(\mathbf{PCP^{-1}})\\ &= \prod_{i=1}^{n-1} c_{ii}\\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (3\delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)} + \delta_{\mathbf{C}(i,n),\mathbf{S}(i)} - 2)\\ &= \pm 2^k \neq 0,\end{aligned}$$

对于某个适当的非负整数 k，这意味着方程4.2不存在非平凡解。这就是所需的矛盾。□

上述命题意味着，克罗内克δ $\delta_{\mathbf{B}(i),\ \mathbf{S}(i)}$、 $\delta_{\mathbf{C}(i,i),\ \mathbf{S}(i)}$ 和 $\delta_{\mathbf{C}(i,j),\ \mathbf{S}(i)}$ 为零，当且仅当 $\mathbf{B}(i)$、$\mathbf{C}(i,\ i)$ 以及 $\mathbf{C}(i,\ j)$ 为零，这促使我们引入以下对象。

定义 4.11。 n-码是由两个函数 $(\beta,\ \chi)$ 组成的一对，其中 $\beta\colon\ [n] \to \{0,1\}$，以及$\chi\colon [n]\times[n] \to \{0,1\}$，对于两两不同的 i、j、$k \in [n]$ 满足以下性质:

$$\chi(i,j)\chi(j,i) = 0 \tag{4.11a}$$

$$\beta(i)\beta(j) = \beta(i)\chi(j,i) + \beta(j)\chi(i,j) \tag{4.11b}$$

$$\chi(i,k)\chi(j,k) = \chi(i,j)\chi(j,k) + \chi(j,i)\chi(i,k). \tag{4.11c}$$

注意，4.11a、4.11b和4.11c 分别是4.8c、4.8e和4.8f的改写，并且不涉及 χ（$i,\ i$）的约束。

命题 4.12. 在 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 上的测度与n-码之间存在自然双射，其中 $\delta_{\mathbf{B}(i),\mathbf{S}(i)}$, $\delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)}$, 和 $\delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(i)}$ 分别对应于 $\beta(i)$、 $\chi(i,i)$ 和 $\chi(i,j)$。

证明. 我们等价地证明，满足 $\delta_{B(i),S(i)}$, $\delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)}$, and$\delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(i)}$4.8c、4.8e和4.8f 的一组取值，会给出 4.8g 中线性方程组的唯一解。注意，将4.8g改写后可得

$$2\mathbf{S}(i) - 3\mathbf{C}(i,i) - \mathbf{B}(i) + \sum_{p\neq i}(\mathbf{C}(p,i) - \mathbf{B}(p)) = 1.$$

沿用命题4.9中的方法，令$\mathbf{D}\ = (d_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 以及$\mathbf{s}\ =(\mathbf{S}(i))_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$，其中

$$d_{ij} = \begin{cases} 2 - 3\delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)} - \delta_{\mathbf{B}(i),\mathbf{S}(i)} & \text{if } i = j,\\ \delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)} - \delta_{\mathbf{B}(j),\mathbf{S}(j)} & \text{if } i \neq j.\end{cases}$$

我们有

$$\mathbf{Ds} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n}\\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S(1)\\ S(2)\\ \vdots\\ S(n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

其中右边是 $n \times 1$ 全 **1** 矩阵。只需证明**D** 可逆，即 $\det(\mathbf{D}) \neq 0$。事实上，我们断言 $G_{\mathbf{D}}$（由**D**得到的诱导子图）是一个有向无环图，且在每个顶点处都附加并存在自环。

首先，我们有

$$\begin{aligned} d_{ij}d_{ji} &= (\delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)} - \delta_{\mathbf{B}(j),\mathbf{S}(j)})(\delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(i)} - \delta_{\mathbf{B}(i),\mathbf{S}(i)}) \\ &= \delta_{\mathbf{B}(j),\mathbf{S}(j)}\delta_{\mathbf{B}(i),\mathbf{S}(i)} - \delta_{\mathbf{B}(j),\mathbf{S}(j)}\delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(i)} - \delta_{\mathbf{B}(i),\mathbf{S}(i)}\delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 4.8e 得出。因此， $G_{\mathbf{D}}$ 是一个有向图。

现在我们断言， $G_{\mathbf{D}}$ 不含长度至少为二的有向环。为反证，假设存在一个环 $v_{a_1} \to v_{a_2} \to \cdots \to v_{a_l} \to v_{a_1}$，其满足$v_{a_1}$，…，$v_{a_l} \in G_{\mathbf{D}}$，其中 $l \geq 2$。这意味着，对于每个 $i \in \{1, \ldots, l\}$，我们有

$$(\mathbf{C}(a_{i+1}, a_i), \mathbf{B}(a_{i+1})) \in \{(0, \mathbf{S}(a_{i+1})), (\mathbf{S}(a_{i+1}), 0)\} \tag{4.5}$$

其中所有指标均按模 l 计算。

若 $\mathbf{C}(a_2, a_1)$，$\mathbf{B}(a_2)) = (0, \mathbf{S}(a_2))$，由 4.8e，可得

$$\mathbf{C}(a_1, a_2)\mathbf{B}(a_2) = (\mathbf{B}(a_2) - \mathbf{C}(a_2, a_1))\mathbf{B}(a_1) = \mathbf{B}(a_2)\mathbf{B}(a_1).$$

由于 $\mathbf{B}(a_2) = \mathbf{S}(a_2) \neq 0$，因此 $\mathbf{C}(a_1, a_2) = \mathbf{B}(a_1) = \mathbf{S}(a_1)$。类似地，对于所有 i，都有 $\mathbf{C}(a_i, a_{i+1}) = \mathbf{S}(a_i)$。应用 4.8f，得到

$$\mathbf{C}(a_1, a_2)\mathbf{C}(a_2, a_3) = (\mathbf{C}(a_2, a_3) - \mathbf{C}(a_2, a_1))\mathbf{C}(a_1, a_3) = \mathbf{C}(a_2, a_3)\mathbf{C}(a_1, a_3),$$

这意味着 $\mathbf{C}(a_1, a_2) = \mathbf{C}(a_1, a_3) = \mathbf{S}(a_1)$。类似地，

$$\mathbf{C}(a_1, a_2) = \cdots = \mathbf{C}(a_1, a_{l-1}) = \mathbf{S}(a_1).$$

然而，

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(a_1)\mathbf{S}(a_{l-1}) &= \mathbf{C}(a_1, a_{l-1})\mathbf{C}(a_{l-1}, a_l) \\ &= (\mathbf{C}(a_{l-1}, a_l) - \mathbf{C}(a_{l-1}, a_1))\mathbf{C}(a_1, a_l) \\ &= 0, \end{aligned}$$

这显然荒谬。

若反之（$\mathbf{C}(a_2, a_1)$，$\mathbf{B}(a_2) = (\mathbf{S}(a_2), 0)$），则$\mathbf{C}(a_1, a_2) = 0$，且4.8e给出

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(a_2)\mathbf{B}(a_1) &= \mathbf{C}(a_2, a_1)\mathbf{B}(a_1) \\ &= (\mathbf{B}(a_1) - \mathbf{C}(a_1, a_2))\mathbf{B}(a_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此 $B(a_1) = 0$。由此得到 $\mathbf{B}(a_i) = 0$ 对所有 i，由 4.5 可知$\mathbf{C}(a_{i+1}, a_i) = \mathbf{S}(a_{i+1})$ 对所有 i。现在注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(a_2)\mathbf{S}(a_1) &= \mathbf{C}(a_2, a_1)\mathbf{C}(a_1, a_l) \\ &= (\mathbf{C}(a_1, a_l) - \mathbf{C}(a_1, a_2))\mathbf{C}(a_2, a_l) \\ &= \mathbf{S}(a_1)\mathbf{C}(a_2, a_l) \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{C}(a_2, a_l) = \mathbf{S}(a_2)$。由归纳法，$\mathbf{C}(a_{l-2}, a_l) = \mathbf{S}(a_{l-2})$，但是

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(a_{l-1})\mathbf{S}(a_{l-2}) &= \mathbf{C}(a_{l-1}, a_{l-2})\mathbf{C}(a_{l-2}, a_l) \\ &= (\mathbf{C}(a_{l-2}, a_l) - \mathbf{C}(a_{l-2}, a_{l-1}))\mathbf{C}(a_{l-1}, a_l) \\ &= 0, \end{aligned}$$

这就是所需的矛盾，因此结论成立。

由于 $G_{\mathbf{D}}$ 忽略自环后是一个有向无环图，根据引理 4.10，存在一个置换矩阵 $\mathbf{P}$使得 $\mathbf{PDP^{-1}}$ 是上三角矩阵，因此

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{D}) &= \det(\mathbf{PDP^{-1}}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} d_{ii} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (2 - 3\delta_{C(i,i),S(i)} - \delta_{B(i),S(i)}) \\ &= \pm 2^k \neq 0\end{aligned}$$

对于某个非负整数 k，从而得到该命题。 □

推论 4.13。 所有定义在 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 上的测度都取值于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$。

证明。 由于$\mathbf{D}$ 的条目均为整数，且其行列式在相差一个符号的意义下是 2 的幂，因此$\mathbf{D}^{-1}$ 的条目属于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$。回想一下，$\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 中每个不可约标记树类的测度要么为零，要么等于 $S(i)$ 的测度。后者等于$\mathbf{D}^{-1}$第 i 行各条目的和，该和是 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$的一个元素。□

备注 4.14。事实上，应用 Nekrasov 和 Snowden 的一个理论结果[NS24，定理 3.4]，，我们可以证明， $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 上的所有测度在 $\mathbb{C}$ 中的像要么为零，要么在相差一个符号的意义下是 2 的幂。该结果指出，如果对于某个 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$ 中的所有 $X \in \mathfrak{F}$， m 都整除 $|\mathrm{Aut}(X)|$，那么 $\mathfrak{F}$ 上的测度值是有理数，且其分母只含有 m 的素因子。事实上，我们稍后将证明，对于所有 $T \in \partial\mathfrak{T}_3(n)$，2 是整除 $|\mathrm{Aut}(T)|$ 的唯一素数（命题 6.10）。

定理 4.15。 给定一棵有向有根树 T，其边标记为 $\{1, \ldots, n\}$，并有一个指定顶点 v （可以是根），则存在相应的 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ 值测度 $\mu_{T,\,v}$ 定义在 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 上。因此，我们得到一个环同构$\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n)) \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]^{(2n+2)^n}$。

证明。 令 $\mathcal{Q}_n$ 表示 n-编码的集合，令 $\mathcal{T}_n$ 表示带有指定顶点的 $[n]$-标记有向有根树的集合。对于一棵树 T，令 $r(T)$ 为其根， $v(T)$ 为其指定顶点。我们将标记为 i 的边记作 i；若从 i 的尾端到 u 的路径包含 i，则称 i 指向 顶点 u。此外，我们所说的从 u 到 i 的路径，是指从 u 到 i 的两个端点中距离 u 较远的那个端点之间的路径。考虑映射 $\Psi\colon \mathcal{T}_n \to \mathcal{Q}_n$，其定义为 $\Psi(T) = (\beta_T,\ \chi_T)$，并满足以下规则，其中 i, $j \in [n]$ 两两不同：

$$\chi_T(i,i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ points towards } r(T), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\beta_T(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ lies on the simple undirected path from } r(T) \text{ to } v(T), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\chi_T(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ lies on the simple undirected path from } r(T) \text{ to } j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们首先验证，对于任意一棵树 $T \in \mathcal{T}$，其像满足定义4.11中的性质。对于顶点 u 和边 $i = \{a, b\}$，定义 $d(u,\ i) = \min\{d(u,\ a)\ d(u,\ b)\}$。若

$\chi_T(i,j) = 1$，则 $d(u,i) < d(u,j)$，从而推出 $\chi_T(j,i) = 0$。因此，对于所有互不相同的 i、j，均有 $\chi_T(i,j)\chi_T(j,i) = 0$，满足 4.11a。

若对于某些互不相同的 i、j，有 $\chi_T(i,j) = \chi_T(j,i) = 0$，那么 i 和 j 不可能同时位于从 $r(T)$ 到 $v(T)$ 的路径上，因为这会导致其中一个位于从 $r(T)$ 到另一个的路径上。因此，$\beta_T(i)\beta_T(j) = 0$，满足 4.11b。此外，如果存在 $k \in [n] \setminus \{i,j\}$ 使得 $\chi_T(i,k) = \chi_T(j,k) = 1$，那么从 $r(T)$ 到 k 的路径将同时包含 i 和 j，从而确定 i 与 j 之间的顺序，这就产生了矛盾。因此，对于所有此类 k，我们还有 $\chi_T(i,k)\chi_T(j,k) = 0$，满足 4.11c。

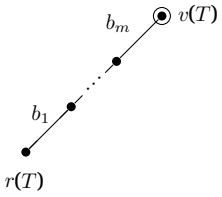
如果 $(\chi_T(i,j)\ \chi_T(j,i)) = (1,0)$，那么若 $\beta(j) = 1$，则 i 也必定位于从 $r(T)$ 到 $v(T)$ 的路径上，因此 $\beta(i) = 1$。另一方面，$\beta(i) = 0$ 同理可推出 $\beta(j) = 0$。因此 $\beta(j)(\beta(i) - 1) = 0$，故 4.11b 仍然成立。此外，对于任意 $k \in [n] \setminus \{i,j\}$，若 $\chi_T(j,k) = 1$，则 i 也必定位于从 $r(T)$ 到 k 的路径上，因此$\chi_T(i,k) = 1$。若 $\chi_T(i,k) = 0$，则 j 不可能位于从 $r(T)$ 到 k 的路径上，因此 $\chi_T(j,k) = 0$。由此可得 $\chi_T(j,k)(\chi_T(i,k) - 1)$，满足 4.11c。

情况（χ_T（i，j）χ_T（j，i））=（0，1）类似，并且定义χ_T（i，i）中没有任何约束。定义4.11。因此，我们已经穷尽了所有情况，而 Ψ 是一个有效映射。

现在我们证明 Ψ 是满射。假设 $(\beta,\ \chi)$ 是一个 n-码。定义

$$B = \{b \in [n] : \beta(b) = 1\} = \{b_1, \ldots, b_m\}.$$

根据 4.11b，对于所有互不相同的 i, j，我们有 $\chi(b_i,b_j) + \chi(b_j,b_i) = 1$，因此 4.11a 蕴含 $(\chi(b_i,b_j)\ \chi(b_j,b_i)) \in \{(0,1),(1,0)\}$。此外，4.11c 要求满足传递性：若$\chi(b_i, b_j) = \chi(b_j,b_k) = 1$，则 $\chi(b_i,b_k) = 1$。因此，不失一般性地，假设对于所有 $i \in \{1,\ldots,m-1\}$，均有 $(\chi(b_{i+1},b_i)\ \chi(b_i,b_{i+1})) = (0,1)$。这导出一个自然的序 $b_1 \prec \cdots \prec b_m$，因此考虑一棵树 $T \in \mathcal{T}$，其中由 B中的边导出的子树是一条有根路径，且 $d(r(T)\ b_i) < d(r(T)\ b_{i+1})$。此外，将 b_m 中距离 $r(T)$较远的端点作为 T中的指定顶点。$T|_B$的图示（即由 B中的边连接的顶点所构成的导出子图）如下：



我们断言，$T|_B$可唯一扩展为满足 $\Psi(T) = (\beta,\ \chi)$ 的树 T。我们对 $|[n] \setminus B|$使用归纳法。若 $|[n] \setminus B| = 0$，则 $T|_B = T$。否则，任取 $c' \in [n] \setminus B$，并令 k 为满足对所有 $1 \le i \le k$ 都有 $\chi(b_i,\ c') = 1$ 的最大指标。令

$$C_k = \{c \in [n] \setminus B : (\chi(b_i,c), \chi(b_{k+1},c)) = (0,1)\ \forall 1 \le i \le k\}.$$

并定义以下两两不相交的 C_k 子集：

$$X = \{c \in C_k : (\chi(c,c'), \chi(c',c)) = (0,0)\}$$
$$Y = \{c \in C_k : (\chi(c,c'), \chi(c',c)) = (0,1)\}$$
$$Z = \{c \in C_k : (\chi(c,c'), \chi(c',c)) = (1,0)\}.$$

根据归纳假设，只需通过插入边 c'，将 $T\setminus c'$（唯一地）扩展为 T，使得 4.11c 对 $\Psi(T)$ 成立。事实上，首先注意，从 $r(T)$ 到 c' 的路径不可能经过 X 中的任何边；实际上，这条路径只能包含 Y 中的边。在 T 中，c' 的位置唯一，使得路径上 Y 中的所有边都位于 c' 之前，而 Z 中的所有边都位于 c' 之后。至此归纳完成，证明所构造的 T 唯一满足 $\Psi(T) = (\beta, \chi)$，由此可知 Ψ 既是满射又是单射，因此是一个双射。

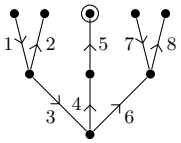
最后请注意，$n+1^{n-2}$ 条边以 $[n]$ 标记的树。根据凯莱定理的一个著名变体，[Cam95，命题 2。1]。每个 $n+1$种方式可从 $n+1$ 个顶点中选择一个根和一个指定顶点，且有 2^n种方式为边定向，且不存在非平凡自同构，因此得到

$$|\mathcal{T}_n| = |\mathcal{Q}_n| = 2^n(n+1)^n = (2n+2)^n,$$

如所需。 □

备注 4.16。采用寡形群的视角，[Sno23a] 确定了在 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}(n)$ 的 n-颜色全序集上也存在 $(2n+2)^n$ 个测度。注意，从 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的测度集到 $\mathfrak{F}(n)$ 的测度集存在一个自然双射，它由取测度的符号给出；事实上，$\mathfrak{F}(n)$ 上的测度取值于 $\{-1,0,1\}$。它们的不可约标记结构类之间也存在自然双射，其中 $B(i)$ 对应于颜色为 i 的单点标记结构；$C(i,j)$、$D(i,j)$ 分别对应于两点结构：较小元素的颜色为 i（对于 $C(i,j)$，该元素带有标记），较大元素的颜色为 j（对于 $D(i,j)$，该元素带有标记）；$E(i,j,k)$ 对应于一个三元结构，其中间元素带有标记，颜色按递增顺序为 i、j、k。它们之间的关系也完全相同，唯一例外是 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$ 中的关系包含和 $\sum_{p\in[n]} D(i,p)$；这是因为消去了二度顶点，从而使两种情况下的关系有所不同。

4.2. **一个例子**。现在，我们举例说明，给定一个带有指定顶点的 $[n]$ 标记有向有根树 T，如何构造其上的测度 $\mu_{T,\,v}$，其中 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$。考虑以下树 $T\in\mathcal{T}_8$:



圈出的顶点 v 是指定的。对于 $i\in\{4,5\}$，我们有 $\beta(i)=1$；对于 $i\in\{1,2,3,6,7,8\}$，我们有 $\beta(i)=0$。T 的有向边给出 $\chi(i,\ i)=1$，对应于 $i\in\{1,3,7\}$；以及 $\chi(i,\ i)=0$，对应于 $i\in\{2,4,5,6,8\}$。沿着从根到 T的叶子的路径追踪，我们得到下表，其中 $\chi(i,\ j)$ 的值出现在第 i 行、第 j 列:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0

在命题4.12中的双射下，我们构造相应的矩阵

$$\mathbf{D}_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

这导致

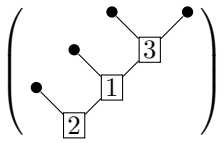
$$\mathbf{s} = (\mathbf{S}(i))_{i=1}^{8} = \mathbf{D}_T^{-1}\mathbf{1}_8 = (-8, 4, -4, 2, 1, 2, -2, 1)^\top.$$

由此还可得出

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mu_{T,v}(A) &= 1 + \sum_{i=1}^{8} \mathbf{B}(i) \\ &= 1 + \mathbf{S}(4) + \mathbf{S}(5) \\ &= 4. \end{aligned}$$

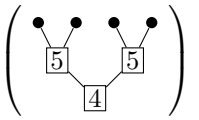
因此，例如，我们发现

$$\mu_{T,v}\left(\right) = \mathbf{AB}(3)\mathbf{C}(1,3)\mathbf{C}(2,1) = 0$$



而

$$\mu_{T,v}\left(\right) = \mathbf{AB}(4)\mathbf{D}(4,5)^2 = \mathbf{AS}(4)\mathbf{S}(5)^2 = 8.$$



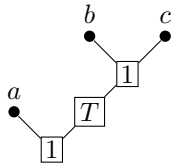
一般而言，对于这个例子，如果 $\{1,2,3,6,7,8\}$ 中至少有一种颜色出现在树 t 中，那么 $\mu_{T,\ v}(t) = 0$。

4.3. **拟正则测度**。回顾一下，若测度 μ定义在一个 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$上，且其 Fra¨ıss´e 极限为 Ω，则称其为拟正则（定义 2.9），如果存在 Aut(Ω) 的一个开子群 U，使得相应的测度 μ^* 在传递$\mathscr{E}$光滑 U集类上是正则的。我们已证明，拟正则性等价于在相对 Fra¨ıss´e 类上正则（推论 2.12），现在考虑 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 上的拟正则测度。

命题 4.17。对于每个 $n \geq 1$，在 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 上不存在非正则的拟正则测度。

证明。设 $\mu : \Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n)) \to \mathbb{C}$是一个非正则测度。根据推论 2.12，只需证明不存在 $T \in \partial\mathfrak{T}_3(n)$ 使得 $\mu(T \to X)$ 对所有 X 嵌入到其中的 T 均非零。反设存在这样的 T 。

对于 $n = 1$，考虑将 T 嵌入以下树中 X



其中 a， $b \in X \setminus T$且 $c \in X \cap T$。我们有

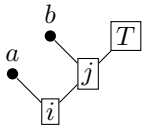
$$\begin{aligned}\mu(T \to X) &= \mu([X \setminus b, a])\mu([X, b]) \\ &= \mu(C(1,1))\mu(D(1,1)).\end{aligned}$$

由 4.8a 和 4.8b，我们得到

$$B(1)C(1,1) = B(1)C(1,1) = C(1,1)D(1,1),$$

并且由于 μ 不是正则的，上述各项中至少有两项在 μ下消失。因此， $\mu(T \to X) = \mu(C(1,1))\mu(D(1,1)) = 0$，矛盾。

对于 $n \geq 2$，假设 T 的根的颜色为 i ，且 j 是区别于 i的一种颜色。取 X 如下：



我们有

$$\begin{aligned}\mu(T \to X) &= \mu([X \setminus a, b])\mu([X, a]) \\ &= \mu(C(j,i))\mu(C(i,j)) \\ &= 0\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 4.8c 得出。由此得到所需的矛盾，并且 μ 不是拟正则的。

□

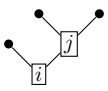
5. Fraïssé subclasses of $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ and induced regular measures

本节中，我们将研究 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的一些子类，它们是某个测度的支撑。由于这些子类（称为诱导子类）是 Fra¨ıss´e，我们首先对 ¨ıss´e 子类进行分类，并给出计算其数量的递归公式。随后，我们用一个公式明确描述诱导子类集合及其唯一的诱导正则测度。第 6 节将利用这些子类及其测度构造半单张量范畴。本节末尾，我们将以 $n = 2$ 情形为例，具体展示各子类上的测度值，以说明我们的分类结果。

5.1. 对 ¨ıss´e 子类的分类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$.

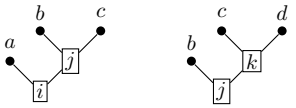
给定一个 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$，对其子类进行分类和枚举不仅是一个有趣的组合问题，也对 5.2 中进一步分析测度有诸多启示。

设 $\mathfrak{T}'$ 是 Fra¨ıss´e 子类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$，并令 $X_{i,\ j}$ 表示以下树 fo r 颜色 $i, j \in [n]$:

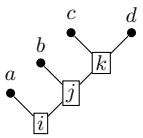


引理 5.1. 如果 $X_{i,j}$，$X_{j,k} \in \mathfrak{T}'$ 对两两不同的 i，j，k，则 $X_{i,k} \in \mathfrak{T}'$。

证明。考虑以下两棵树 T_1，T_2 它们在 $\{b,c\}$ 上有一个公共子树：



T_1 和 T_2 在 $\{b,c\}$ 上唯一的融合是以下这棵树 T



根据条件 $\mathfrak{T}'$，必须属于 2.3d。T 中 $\{a,c,d\}$ 上的诱导子树与 $X_{i,\ k}$ 同构；由条件 2.3b 可知 $X_{i,\ k} \in \mathfrak{T}'$。□

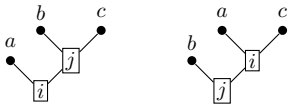
如果存在一棵树，其在 $\mathfrak{T}'$ 中有节点被染成 k，我们就说颜色 $k \in [n]$出现在子类 $\mathfrak{T}'$ 中。或者说，如果 k 出现，则 $\mathfrak{T}'$ 具有颜色 k。

引理 5.2。 如果 i 和 j 都在 $\mathfrak{T}'$ 中出现，那么至少有一个 $X_{i,\ j}$ 和 $X_{j,\ i}$ 属于 $\mathfrak{T}'$。

证明。由2.3b，以下两棵树属于 $\mathfrak{T}'$：



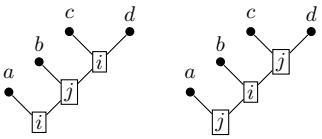
在 b 上的单点树之上仅有的两个amalgam是



其中至少有一个属于$\mathfrak{T}'$，由2.3d。 □

引理 5.3。 若$X_{i,\ j}$，$X_{j,\ i} \in \mathfrak{T}'$ 对互异的 i、j成立，则$X_{i,\ i}$，$X_{j,\ j} \in \mathfrak{T}'$。

证明。考虑这两棵树 T_1 与 T_2



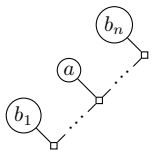
根据命题 4.1，T_1是 $T_1 \setminus \{a,c\}$上$T_1 \setminus a \cong X_{j,\ i}$与$T_1 \setminus c \cong X_{i,\ j}$的唯一融合，因此根据条件 2.3d，必有 $T_1 \in \mathfrak{T}'$。类似地，$T_2 \in \mathfrak{T}'$。最后注意，在 T_1和 T_2中，a、c、d上的诱导子树分别为$X_{i,\ i}$和$X_{j,\ j}$，由此根据 2.3b 可得$X_{i,\ i}$、$X_{j,\ j} \in \mathfrak{T}'$。□

令 $X_n = \{X_{i,j} : i, j \in [n]\}$ 为 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中三叶树的集合，且 A 为 X_n的子集。令 $\mathfrak{T}'_A$ 表示 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中相应的子类，其中包含所有其（唯一的）三元子结构均为 A的结构。显然，若A 非空，则 $\mathfrak{T}'_A$ 唯一。若 A 为空，则 $\mathfrak{T}'_A$ 为空，或包含至多有一片或两片叶子的结构；我们将后面这些类记为 $\mathfrak{T}_{\leq 1}$ 和$\mathfrak{T}_{\leq 2}$。

命题 5.4。 子类 $\mathfrak{T}'_A \subseteq \partial\mathfrak{T}_3(n)$ 是 ***Fra¨ıss´e***，当且仅当它满足引理 5.1、 5.2、5.3中的条件。

证明。 逆向显然，因此我们证明正向。根据构造，条件 2.3a和 2.3b 成立，而 2.3c由 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$继承而来。因此，只需验证 2.3d。设 T_1， T_2 是 $\mathfrak{T}'_A$ 中具有公共子结构T的树结构。我们对 $|T_2 \setminus T|$进行归纳。

若 $|T_2 \setminus T| = 0$，则 T_1 就是所需的融合。否则，根据归纳假设，对于任意 $a \in T_2 \setminus T$， T_1和 $T_2 \setminus a$ 存在融合 $T' \in \mathfrak{T}'_A$。根据 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$的融合性质，存在融合 $T'' \in \partial\mathfrak{T}_3(n)$，使得 T''在 $T_1 \cup T_2 \setminus a$ 上的限制与 T'同构。现在，令 $N(a)$表示与 a相邻的节点，并令 $C(a)$表示其颜色。对于 $b \in T_1$，如果存在 $c \in T_2$ 使得$X_{C(a),C(b),C(b),C(c)} \in A$ （分别为$X_{C(c),C(b),C(b),C(a)} \in A$），那么根据引理 5.1，有 $X_{C(a),C(c)} \in A$（分别为$X_{C(c),C(a)} \in A$），这意味着 T''不会在 A 中引入新的三元结构。否则，令$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ 为满足以下条件的 $b_i \in T_1$ 的集合：不存在这样的 c，且从根到 b_i 的简单路径包含 a，或者从根到 a的路径包含 b_i，因为只有这样的 b_i 可能在 T''中引入新的三元子结构。不失一般性，假设对于 $i = 1, \ldots, n-1$, $X_{C(b_i)}$ $X_{C(b_{i+1})}) \in A$。 $B \cup \{a\}$ 上的导出子图是以下分支：



令 j 为满足 $X_{C(a),C(b_j)} \in A$ 的最小指标。沿分支重新放置 a，使得 $N(a)$ 位于 $N(b_{j-1})$ 与 $N(b_j)$ 之间；若 $j = 1$，则 a 成为根。于是，对所有 $i \geq j$，由引理 5.1 可得 $X_{C(a),C(b_i)} \in A$，因此我们得到对 T'' 的所需修改，使其现在属于 $\mathfrak{T}'_A$。□

令 $S(X_n)$ 表示满足引理 5.1、5.2、5.3 的 $A \subseteq X_n$ 子集。令 $\mathcal{F}_n$ 表示 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中排除 $\mathfrak{T}_{\leq 1}$和 $\mathfrak{T}_{\leq 2}$ 后的 Fra¨ıss´e 子类。上述构造建立了一个映射 $\Phi : S(X_n) \to \mathcal{F}_n$，其定义为 $\Phi(A) = \mathfrak{T}'_A$（其中 $\Phi(\varnothing) = \varnothing$）。

命题 5.5。 映射 Φ 是一个满射。

证明。设 $\mathfrak{T}'$ 是 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的一个 Fra¨ıss´e 子类，其三元素结构集合为 A。根据 $\mathfrak{T}'_A$ 的定义，我们有 $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{T}'_A$。另一方面，设 T 是 $\mathfrak{T}'_A$ 中的一个树结构。我们对 $|T|$ 使用归纳法证明 $T \in \mathfrak{T}'$。对 $\mathfrak{T}'$ 中的诱导子结构取值，即可得到 $|T| \leq 3$ 的情形，因此假设 $|T| \geq 4$。容易看出，必定存在叶子 a 和 b，使得 a 和 b 分离，即 $N(a)$ 与 $N(b)$ 既不相同也不相邻。根据命题 4.1， T 是唯一的

与 $T \setminus a$ 和 $T \setminus b$的融合，但 $|T \setminus a| = |T \setminus b| = |T| - 1$，因此根据归纳假设， $T \setminus a$, $T \setminus b \in \mathfrak{T}'$，这意味着 $T \in \mathfrak{T}'$ 由 2.3d。因此， $\mathfrak{T}'_A \subseteq \mathfrak{T}'$，于是我们有 $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'_A$。这意味着，给定 ¨ıss´ 在 $\mathcal{F}_n$ 中的任意 Fra 类，其在 Φ 下的原像存在，并由其三元素结构确定。 □

命题5.6。 映射 Φ是单射。

证明。 这由 $\mathfrak{T}'_A$的定义可知。 □

推论5.7。 映射 Φ 是双射。

因此，每个关于¨的弗雷´歇子类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 都由其三元结构确定，即满足引理 5.1、5.2和5.3的 X_n 的一个子集。我们引入一个额外结果来枚举这些子类，具体如下。

命题5.8。 对于每个 $n \geq 2$，令 $f(n)$ 表示具有 n 种颜色的 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的弗雷¨歇´子类的数量。那么，

$$f(n) = nf(n-1) + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} f(m) \tag{5.1}$$

其中 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$。

证明。 由于空类是弗雷¨歇´，因此有 $f(0) = 1$。令

$$\varepsilon(i,j) := \mathbf{1}_{X_{i,j} \in \mathfrak{T}'}$$

对于某个弗雷¨歇´子类 $\mathfrak{T}' \subseteq \partial\mathfrak{T}_3(n)$。对于 $n \geq 1$，根据命题 5.5 和 5.6，$f(n)$ 等于满足以下性质的映射数量，其中对所有两两不同的 ε： $[n] \times [n] \to \{0,1\}$， i， j， $k \in [n]$:

(1) 如果 $\varepsilon(i,j) = \varepsilon(j,k) = 1$，那么 $\varepsilon(i,k) = 1$。(2) 如果 ε $(i,j) = \varepsilon(j,i) = 1$，那么 $\varepsilon(i,i) = \varepsilon(j,j) = 1$。(3) 我们有 ($\varepsilon$ (i,j) $\varepsilon(j,i)$) $\neq (0,0)$。

性质 (3) 保证所有 n 颜色都出现在所计数的子类中。我们称 U的非空子集 $[n]$ 为自连通的，如果对于所有$i,j \in U$， $\varepsilon(i,j) = \varepsilon(j,i) = 1$；若对于所有 $k \in [n] \setminus U$， $\varepsilon(i,k) = 0$，则称其为孤立的。我们声称，对于每个 ε，都存在一个自连通且孤立的集合 U。注意，如果 U 存在，则它是唯一的；引理 5.3 保证情形 $i = j$ 与 U的性质相一致。

为证明这一结论，我们对 n 使用归纳法。对于 $n \leq 2$，结论显然成立，因此设 $n \geq 3$。固定一个映射 ε，并考虑任意一个自连通的 $W \subseteq [n]$。若$\varepsilon(i,k) = 0$ 对某个 $i \in W$ 以及所有 $k \in [n] \setminus W$都成立，那么 W就是我们所需的选择，因此设存在 k 使得 $\varepsilon(i,k) = 1$。我们还假设 W 是极大的自连通集，即 W 不真包含于任何更大的自连通集。这意味着 $\varepsilon(k,i) = 0$，否则由引理 5.1 可知 $W \cup \{k\}$是自连通的。事实上，根据引理 5.1，我们得出，对于所有 $w \in W$，($\varepsilon(w,k)$ $\varepsilon(k,w)$) $= (1,0)$。令 $K \subseteq [n] \setminus W$ 表示所有此类 k构成的集合。注意，对于所有$l \in [n] \setminus (W \cup K)$，我们都有 ($\varepsilon(w,l)$ $\varepsilon(l,w)$) $= (0,1)$，因此可得 $\varepsilon(l,k) = 1$；而根据 W 的极大自连通性， $\varepsilon(k,l) = 0$。现在，由归纳假设，存在一个自连通的孤立集 $U \subseteq [n] \setminus W$。容易看出$U \subseteq K$，也就是说，对于所有 $u \in U$ 和 $w \in W$， $\varepsilon(u,w) = 0$，由此即得所述结论。

等式右侧 5.1 是通过对 $|U| = n - m$进行分类讨论得到的。注意， $|U| > 0$因为所有 n 颜色都出现在该子类中。如果 $|U| = 1$,

假设 $U = \{u_1\}$。我们有 $\varepsilon(u_1, u_1) \in \{0,1\}$，而映射$\varepsilon$ 共有 $f(n-1)$ 个: $[n] \setminus \{u_1\} \times [n] \setminus \{u_1\} \to \{0,1\}$。$u_1$有 n 种选择，贡献

$$2nf(n-1) = nf(n-1) + \binom{n}{n-1} f(n-1)$$

可能的映射。

如果 $2 \le |U| \le n$，则有 $f(n-|U|) = f(m)$个映射 ε: $[n]\setminus U \times [n]\setminus U \to \{0,1\}$而引理5.3 表明 $\varepsilon(u, u) = 1$ 对所有 $u \in U$成立。由于存在

$$\binom{n}{|U|} = \binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$$

对 U的选择，我们有

$$\sum_{m=0}^{n-2} \binom{n}{m} f(m)$$

额外的映射，从而该命题成立。 □

推论5.9. 当 $n = 1$、2、3、4、.....时，具有 n种颜色的 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的*Fra¨ıss´e*子类个数分别为2、9、61、551、.....

注记 5.10。 序列 $(f(n))_{n\ge 0}$ 见于在线整数数列百科 [OEI25，A006155]。其指数生成函数为

$$F(x) = \frac{1}{2 - x - e^x}.$$

5.2. **诱导正则测度**。 给定 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$上的一个固定测度 μ ，令 $\mathfrak{F}'$ 为由所有满足 $\mu(X) \neq 0$ （其中$\mu(X) = \mu(\varnothing \to X)$）的结构 X 组成的子类，并令 μ' 为 μ 在 $\mathfrak{F}'$上的限制。我们称 $\mathfrak{F}'$ 为 μ 的支撑，并称 μ' 为 $\mathfrak{F}'$上的诱导正则测度。若子类 $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{F}$上某个测度的支撑，则称其为诱导子类。下面的命题说明了 μ' 的正则性；为便于读者熟悉诱导正则测度，我们给出证明。

命题5.11 ([HNS24，命题2.18，第12])。 若 $\mathfrak{F}'$ 是 $\mathfrak{F}$的诱导子类，则它是一个 *Fra¨ıss´e* 类，并且 μ' 是 $\mathfrak{F}'$上的正则测度。

证明。论证与 [HNS24], 中的论证相同，为完整起见，我们在此给出。设 $X \in \mathfrak{F}'$，且存在一个嵌入 $i\colon Y \to X$ （它也可能是一个同构）。我们有 $\mu(X) = \mu(i)\mu(Y)$，因此 $\mu(X) \neq 0$ 意味着 $\mu(Y) \neq 0$，或者$Y \in \mathfrak{F}'$。因此， $\mathfrak{F}'$ 满足 2.3a 和 2.3b。

显然， $\mathfrak{F}'$ 满足2.3c 因为它是 $\mathfrak{F}$的一个子类，因此只需证明2.3d。给定结构 X， $Y \in \mathfrak{F}'$，它们有一个公共子结构 Z，设 Z'_1、.....、Z'_m都是 X 与 Y 在 Z之上的融合。我们有

$$\mu(Z \to X) = \sum_{k=1}^{m} \mu(Y \to Z'_i). \tag{5.2}$$

由于左侧非零，必定存在某个 i，使得 $\mu(Y \to Z'_i)$ 非零，因此 $Z'_i \in \mathfrak{F}'$，如所需。

现在我们证明 μ' 在 $\mathfrak{F}'$上定义了一个测度。性质 2.7a 和 2.7b 显然成立。注意， $\mathfrak{F}'$ 仅排除了这些结构： Z'_k 其中 $\mu(Z'_k) = \mu(Y \to Z'_k) = 0$，它们正是方程 5.2 右边那些为零的项，因此该方程仍然成立。由此，2.7c 也成立。

最后，给定一个嵌入 $i: Y \to X$ 其中 X，$Y \in \mathfrak{F}'$，我们有 $\mu'(i) = \mu'(X)\mu'(Y)^{-1}$，其值非零，因此 μ' 确实在 $\mathfrak{F}'$上正则。□

由定理 4.15，设 μ是一个 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$值测度，即 $\mu: \Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n)) \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ 是一个环同态，实现了 $2n+2)^n$ 个 $\partial\mathfrak{T}_3(n$ 上的测度之一。设 $\mathfrak{T}' \subseteq \partial\mathfrak{T}_3(n)$ 是一个带有诱导正则测度 μ' 的诱导子类。特别地，由命题 5.5 和 5.6，$\mathfrak{T}'$ 由其三元结构确定。我们用以下结果缩小支撑中可能的三元结构列表。

引理 5.12。对于所有互不相同的 i、$j \in [n]$，$X_{i,\ j}$ 和 $X_{j,\ i}$ 中至多有一个属于 $\mathfrak{T}'$。

证明。由于 μ' 在 $\mathfrak{T}'$上是正则的，若X_{i}、$_{j}$ 与X_{j}、$_{i}$ 都属于 $\mathfrak{T}'$，则 $\mu'(C(i,j))$与 $\mu'(C(j,i))$均非零。因此，$\mu'(C(i,j)C(j,i))$非零，与4.8c矛盾。□

设 B 为节点着色为 k的双叶树结构。回顾 $A = [\varnothing \to \bullet]$与 $B(k) = [\bullet \to B]$ 是 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n))$中嵌入的同构类。

引理 5.13. 对每个 $n \geq 1$，我们有 $\mu(A) \neq 0$对所有测度 μ： $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(n)) \to \mathbb{C}$。

证明。再次令$\mathbf{X}$ 表示 $\mu(X)$。证明思路与命题4.9 和4.12 相同，即证明$\mathbf{S}(i)$的系数矩阵是对角线项非零的有向无环图的邻接矩阵（因此该有向无环图附带自环）。事实上，为得出矛盾，假设

$$\mathbf{A} = 1 + \sum_{i\in[n]} \mathbf{B}(i) = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned} 2\mathbf{S}(i) &= \mathbf{B}(i) + 3\mathbf{C}(i,i) + 1 + \sum_{p\in[n]\setminus i} \mathbf{B}(p) - \sum_{p\in[n]\setminus i} \mathbf{C}(p,i) \\ &= 3\mathbf{C}(i,i) - \sum_{p\in[n]\setminus i} \mathbf{C}(p,i). \end{aligned}$$

令 $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ 再次令 $\mathbf{s} = (\mathbf{S}(i))_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n}$，其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 2 - 3\delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)} & \text{if } i = j, \\ \delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)} & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

因此我们得到矩阵方程 $\mathbf{Ms} = \mathbf{0}$。由于对所有互异的 i、j、$G_{\mathbf{M}}$ 都有 $\mathbf{C}(i,j)\mathbf{C}(j,i) = 0$，由 M 得到的诱导子图是有向的。为看出 $G_{\mathbf{M}}$ 没有长度至少为二的圈，注意若对$l \geq 2$存在一个环 $a_1 \to \cdots \to a_l \to a_1$，则对 $i = 1$，……，l 有 $(\mathbf{C}(a_i, a_{i+1}), (\mathbf{C}(a_{i+1}, a_i)) = (0, \mathbf{S}(a_{i+1}))$，其中指标按模 l 取值。对每个 i，将 4.8f 应用于 $(i,j,k) = (a_1, a_{i+1}, a_{i+2})$，我们得到对所有 i 有 $\mathbf{C}(a_1, a_{i+1}) = 0$，从而 $\mathbf{C}(a_1, a_l) = \mathbf{S}(a_1) = 0$，矛盾。因此 M 是附加了自环的有向无环图的邻接矩阵。由引理 4.10，存在置换矩阵 P，使得 $\mathbf{PMP^{-1}}$ 为上三角。从而对某个非负整数 k 有 $\det(\mathbf{M}) = \prod_{i\in[n]} m_{ii} = \pm 2^k \neq 0$，但由命题 4.9 有 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$，故该矩阵方程无解，结论随之成立。□

注 5.14. 上述引理保证诱导子类并非自动就是空的 Fra¨ıss´e 类，因为若 $\mu(A)$ 为零，则对所有满足 $|X| \geq 1$ 的 X， $\mu(X)$ 为零。

引理 5.15. 当且仅当 $\mu(B(k)) \neq 0$ 时，颜色 k 会出现在 $\mathfrak{T}'$ 中。

证明。回忆一下， B 表示节点着色为 k 的双叶树结构。注意，当且仅当 $B \in \mathfrak{T}'$ 或 $\mu(B) \neq 0$ 时， k 会出现在 $\mathfrak{T}'$ 中。由于 $\mu(B) = \mu(\varnothing \to B) = \mu(A)\mu(B(k))$，且根据引理 5.13， $\mu(A)$ 非零，因此 $\mu(B)$ 非零当且仅当 $\mu(B(k))$ 非零，从而得到所需结论。□

注意，若 $\mathfrak{T}'$ 是 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的子类，则对于任意 $m \geq n$，它也是 $\partial\mathfrak{T}_3(m)$ 的子类。如果颜色 1、.....、 n 全都出现在 $\mathfrak{T}'$ 中，那么 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 可以视为包含 $\mathfrak{T}'$ 的节点着色有根二叉树的最小 Fra¨ıss´e 类。下一个命题表明，对于最小 n 的 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的一个诱导（ Fra¨ıss´e ）子类 $\mathfrak{T}'$ ，从 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 限制而来的所有诱导正则测度构成了 $\mathfrak{T}'$ 上所有诱导正则测度。在其他意义上，对于每个 n，计算诱导正则测度时，只需考虑 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 中具有 n 种颜色的诱导子类。

命题 5.16. 设 $\mathfrak{T}'$ 是 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的一个 *Fra¨ıss´e* 子类，具有 n 种颜色，且 μ' 是 $\mathfrak{T}'$上的诱导正则测度。若 $\mathfrak{T}'$ 是 ν 的支撑，其中 ν 是 $\partial\mathfrak{T}_3(m)$ 上的一个测度，对任意 $m \geq n$均成立，则 $\nu|_{\mathfrak{T}'} = \mu'$。

证明。回顾一下，计算测度等价于求解由公式 4.4 中的 D 编码的线性方程组，并对 D 的元素施加适当约束。由于 $\mathfrak{T}'$是 ν的支撑，颜色 $n+1$、 $n+2$、.....、 m不会出现在 $\mathfrak{T}'$中。由引理 5.15 可知，对所有 $j \in [m] \setminus [n]$，都有 $\nu(B(j)) = 0$。根据 4.8e，可得对所有 $i \in [n]$，均有 $\nu(B(i)C(j,i)) = 0$ ；然而 i 出现在 $\mathfrak{T}'$中，因此 $\nu(B(i)) \neq 0$，这意味着对所有 $i \in [n]$ 和 $j \in [m] \setminus [n]$，都有 $\nu(C(j,i)) = 0$。由此可知，对所有此类 i、 j，均有 $d_{ij} = 0$，因此与 ν 对应的系数矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & \dots & d_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ d_{(n+1)1} & \dots & d_{(n+1)n} & d_{(n+1)(n+1)} & \dots & d_{(n+1)m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} & d_{m(n+1)} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}.$$

注意，阶为 n 的**D** 的前主子矩阵恰好编码了 μ'上的约束，而右上非对角分块是一个零子矩阵，因此 ν在颜色**1**,. . . , n 上受到与 μ' 完全相同的约束（在颜色 $n+1, \dots, m$ 上可能还有更多约束），从而推出 $\nu|_{\mathfrak{T}'} = \mu'$，正如所需。□

根据上述命题，只需考虑 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$中所有 n 种颜色均出现的Fra¨ıss´e子类。对每个 $n \geq 1$，令 $\mathcal{F}'_n$ 表示 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$的具有 n 种颜色的Fra¨ıss´e子类所成的集合，使得对所有 $\mathfrak{T}' \in \mathcal{F}'_n$， $X_{i,j}$ 与$X_{j,i}$ 中恰好有一个属于 $\mathfrak{T}'$。

命题5.17. 具有 n 种颜色的子类 $\mathfrak{T}'$ 是 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的诱导子类，当且仅当 $\mathfrak{T}' \in \mathcal{F}'_n$。

证明。 由于 $X_{i,j}$ 和 $X_{j,i}$ 中恰有一个属于 $\mathfrak{T}'$，因此 $[n]$ 上存在一个诱导全序，使得 $i \prec j$ 当且仅当 $X_{i,j} \in \mathfrak{T}'$。不失一般性，假设 $X_{i,j} \in \mathfrak{T}'$ 当且仅当 $i < j$。对所有 i, j，令

$$(\mathbf{B}(i), \mathbf{C}(i,j), \mathbf{C}(j,i)) = (\mathbf{S}(i), \mathbf{S}(i), 0)$$

and

$$\mathbf{C}(i,i) = \begin{cases} \mathbf{S}(i) & \text{if } X_{i,i} \in \mathfrak{T}', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

上述构造满足 4。8 并定义了 $\mathfrak{T}'$ (因为 $\mathbf{S}(i) \neq 0$) 上唯一的诱导正则测度，正如所需。

另一方面，若 $\mathfrak{T}' \notin \mathcal{F}'_n$，则由引理 5.2，存在 i, j 使得 $X_{i,j}$以及 $X_{j,i}$ 都属于 $\mathfrak{T}'$。由引理 5.12 可知 $\mathfrak{T}'$ 不是任何测度的支撑。 □

推论5.18。 对于每个 $n \geq 1$，都有 $2^n n!$ 个 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的诱导子类，具有n 种颜色。

证明。 根据命题 5.17，只需计算 $\mathcal{F}'_n$中的类的数量。 n 种颜色共有 $n!$ 种全序，对于每个 $i \in [n]$，我们可以选择$X_{i,\,i} \in \mathfrak{T}'$ 或$X_{i,\,i} \notin \mathfrak{T}'$，因此共有 2^n 种独立选择。由此，我们得到 $\mathcal{F}'_n$中的$2^n n!$个不同的类；模去颜色交换自同构后有 2^n 个类，每个类都允许一个诱导正则测度。□

现在，我们确定具有 n 种颜色的诱导（Fra¨ıss´e）子类上的诱导正则测度公式。不失一般性，假设每个子类都带有自然序；也就是说，$X_{i,j}$ 属于该子类，当且仅当 $i < j$。从现在起，将具有 n 种颜色的每个带自然序的诱导子类记作 $\partial\mathfrak{T}_3(n)^{\mathrm{ord}}_I$，其中 $I \subseteq [n]$ 满足 $i \in I$ 当且仅当 $X_{i,i} \in \partial\mathfrak{T}_3(n)^{\mathrm{ord}}_I$。注意，根据推论5.7，每个 I 都唯一对应于$\partial\mathfrak{T}_3(n)$中具有 n 种颜色的一个带自然序的诱导子类。令 μ^I_n 表示相应的诱导正则测度。对于一棵树 T，令 $\ell(T)$ 表示叶子的数量，令 $v_T(i)$ 表示颜色为 i的节点数量。

命题5.19。 对于诱导子类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)^{\mathrm{ord}}_I$，其中 $I \subseteq [n]$，以及一棵树$T \in \partial\mathfrak{T}_3(n)^{\mathrm{ord}}_I$，我们有

$$\mu^I_n(T) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell(T) = 0, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \Big(P_I(i)^{v_T(i)} \left(1 + P_I(i)\right)^{1+\sum_{j=1}^{i-1} v_T(j)} \Big) & \text{if } \ell(T) \geq 1, \end{cases}$$

其中

$$P_I(i) = \frac{1}{1 - 3 \cdot \mathbf{1}_I(i)}.$$

证明。 固定一个子集 I，为方便起见，令 $\mu^I_n = \mu$ 和 $P_I = P$。回顾命题 **4.12**中的系数矩阵 D，其中 $d_{ii} = 2 - 3\delta_{\mathbf{C}(i,i),\ \mathbf{S}(i)} - \delta_{\mathbf{B}(i),\ \mathbf{S}(i)}$且 $d_{ij} = \delta_{\mathbf{C}(j,i),\ \mathbf{S}(j)} - \delta_{\mathbf{B}(j),\ \mathbf{S}(j)}$ 对于互不相同的 i， j。根据命题 5.17证明中给出的唯一构造，我们有

$$(\delta_{\mathbf{B}(i),\mathbf{S}(i)}, \delta_{\mathbf{C}(i,j),\mathbf{S}(i)}, \delta_{\mathbf{C}(j,i),\mathbf{S}(j)}, \delta_{\mathbf{C}(i,i),\mathbf{S}(i)}) = (1, 1, 0, \mathbf{1}_I(i))$$

对所有 i, j 其中 $i < j$。这意味着

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 - 3 \cdot \mathbf{1}_I(i) & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i < j, \\ 0 & \text{if } i > j. \end{cases}$$

换言之，$\mathbf{D}$ 是一个上三角矩阵，其对角线上的元素等于$1 - 3 \cdot \mathbf{1}_I(i)$，对角线上方的所有元素都等于 -1。因此，系统 $\mathbf{Ds} = \mathbf{1}$编码了线性方程组

$$d_{ii}\mathbf{S}(i) - \sum_{j>i} \mathbf{S}(j) = d_{ii}\mu(S(i)) - \sum_{j>i} \mu(S(j)) = 1$$

对所有 $i \in [n]$ 均成立。以 $\mu(S(n)) = \frac{1}{d_{nn}}$ 为基例向下归纳，可得 —

$$\mu(S(i)) = \frac{1}{d_{ii}} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{d_{jj}+1}{d_{jj}} = P(i) \prod_{j=i+1}^{n} (1 + P(j))$$

对所有 i 均成立。现在回想一下

$$\mu(A) = \mu([\varnothing \to \bullet]) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mu(B(i)).$$

注意，令

$$Q(i) = \prod_{j=i}^{n} (1 + P(j)),$$

我们有

$$\mu(S(i)) = Q(i) - Q(i+1),$$

这意味着

$$\begin{aligned} \mu(A) &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \mu(S(i)) \\ &= Q(1) \\ &= \prod_{j=1}^{n} (1 + P(j)). \end{aligned}$$

根据 μ 在不可约标记结构上的取值，我们现在证明 μ 的一般公式。我们对 $\ell(T)$ 进行归纳。

若 $\ell(T) = 0$，则 $\mu(T) = \mu(\varnothing \to \varnothing) = 1$；若 $\ell(T) = 1$，则确实有 $\mu(T) = \mu(A) = \prod_{j=1}^{n}(1 + P(j))$。若 $\ell(T) \geq 2$，则

$$\mu(T) = \mu(T \setminus a)\mu([T, a])$$

对某个叶 $a \in T$，其中 (T, a) 表示嵌入 $T \setminus a \to T$。令 $c(a) \in [n]$表示 $N(a)$ 的颜色（与 a 相邻的唯一节点）。我们根据 a 在 T 中的位置分情况讨论。

如果 $N(a)$ 是根，那么要么是 $[T,a]=B(c(a))$，要么是 $[T,a]=C(c(a)\ j)$，其中 j 是距根最近的节点的颜色。在这两种情况下，我们都有

$$\begin{aligned}\mu(T)&=\mu(T\setminus a)\cdot\mu(S(c(a))\\&=\mu(T\setminus a)\cdot\left(P(C(a))\prod_{j=c(a)+1}^{n}(1+P(j))\right)\\&=\Big(P(C(a))^{v_T(c(a))-1}\prod_{i\in[n]\setminus c(a)}P(i)^{v_T(i)}\prod_{i=1}^{c(a)}(1+P(i))^{1+\sum_{j=1}^{i-1}v_T(j)}\\&\quad\cdot\prod_{i=c(a)+1}^{n}(1+P(i))^{\sum_{j=1}^{i-1}v_T(j)}\Big)\Big(P(C(a))\prod_{j=c(a)+1}^{n}(1+P(j))\Big)\\&=\prod_{i=1}^{n}\Big(P(i)^{v_T(i)}(1+P(i))^{1+\sum_{j=1}^{i-1}v_T(j)}\Big),\end{aligned}$$

这就是所述的表达式。

如果 $N(a)$ 不是根，且只与另一个节点相邻，设该节点的颜色为 $j<c(a)$（如 $X_{j,c(a)}\in\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$），那么根据推论 4.4，$[T,a]=D(j,c(a))=B(c(a))-C(c(a)\ j)$，因此

$$\begin{aligned}\mu([T,a])&=\mu(B(c(a))-C(c(a),j))\\&=\mu(S(c(a))\\&=P(C(a))\prod_{j=c(a)+1}^{n}(1+P(j)),\end{aligned}$$

其余计算与上述情形相同。

最后，如果 $N(a)$ 与两个节点相邻，那么我们就这两个节点的颜色进行分类讨论。这里我们说明它们的颜色也都是 $c(a)$ 的情形；其他情形可利用推论 4.4中的关系类似地验证。事实上，我们有

$$\begin{aligned}[T,a]&=E(c(a),c(a),c(a))\\&=-1-\sum_{p\in[n]}D(c(a),p)\\&=C(c(a),c(a))+D(c(a),c(a))-B(c(a),c(a))\\&=2C(c(a),c(a))-S(c(a)),\end{aligned}$$

因此，再次得到 $\mu([T,a])=\mu(S(c(a))$，如所愿，从而完成归纳法。 □

注 5.20. 如果我们假设另一个诱导全序 $\sigma\in S_n$（因此该子类不一定具有自然序），那么我们也可以得到

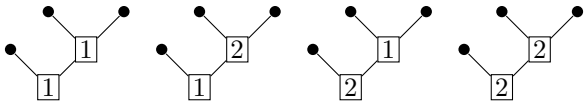
$$\mu_n^I(S(i))=P_I(i)\prod_{j=\sigma(i)+1}^{n}(1+P_I(j)).$$

注记 5.21。我们注意到字典序积和花环积的一个有趣应用。设 $I=[n]_\circ$ 令 Ω_1 和 Ω_{ord} 分别表示 $\partial\mathfrak{T}_3(1)$ 和 $\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$ 的 Fra¨ıss´e 极限。若 $\Omega_1^{n\circ}$表示 n 重迭代字典序积

Ω_1, , 那么可以验证 $\Omega_{\mathrm{ord}} \cong \Omega_1^{\circ n}$。因此，若 $\mathrm{Aut}(\Omega_1)^{\wr n}$ 表示 $\mathrm{Aut}(\Omega_1)$ 的 n 重迭代花环积，则 $\mathrm{Aut}(\Omega_{\mathrm{ord}}) \cong \mathrm{Aut}(\Omega_1)^{\wr n}$。

5.3. 该 $n = 2$ 情形。 我们以在 $\partial\mathfrak{T}_3(2)$ 上说明我们的分类结果，并将 $(2\cdot 2+2)^2 = 36$ 个测度分别归入其对应的支撑来结束本节。

设 $\mathfrak{T}'$ 为一个无限 Fra¨ıss´e 子类，属于 $\partial\mathfrak{T}_3(2)$（若 $\mathfrak{T}'$ 是有限的，则它只包含至多具有四片叶子的树）。由推论5.7，只需确定 $\mathfrak{T}'$ 中的三叶树集合。设$X_{1,\,1}$, $X_{1,\,2}$, $X_{2,\,1}$, $X_{2,\,2}$ 从左到右表示下列树



并回顾 $\varepsilon(i,\ j) = \mathbf{1}_{X_{i,\,j}\in\mathfrak{T}'}$。注意，$\mathfrak{T}'$ 是无限的，当且仅当存在某个 i 使得 $\varepsilon(i,\ i) \neq 0$。定义 Fra¨ıss´e 子类

$$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nt-1}} = \Big\{T \in \partial\mathfrak{T}_3(2) : \text{every node not adjacent to a leaf has color } 1\Big\},$$
$$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nr-1}} = \Big\{T \in \partial\mathfrak{T}_3(2) : \text{every non-root node has color } 1\Big\},$$
$$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nt-2}} = \Big\{T \in \partial\mathfrak{T}_3(2) : \text{every node not adjacent to a leaf has color } 2\Big\},$$
$$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nr-2}} = \Big\{T \in \partial\mathfrak{T}_3(2) : \text{every non-root node has color } 2\Big\},$$
$$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{ord}} = \Big\{T \in \partial\mathfrak{T}_3(2) : \text{no } 2 \text{ lies above a } 1 \text{ on any root-leaf path}\Big\},$$
$$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{rev}} = \Big\{T \in \partial\mathfrak{T}_3(2) : \text{no } 1 \text{ lies above a } 2 \text{ on any root-leaf path}\Big\}.$$

根据引理5.3，我们将 $\mathfrak{T}'$ 中存在三叶树与其 r 对应的 Fra¨ıss´e 子类:

$\varepsilon(1,\ 2)$	$\varepsilon(2,\ 1)$	$\varepsilon(1,\ 1)$	$\varepsilon(2,\ 2)$	子类
0	0	1	0	$\partial\mathfrak{T}_3(1)$
0	0	0	1	$\partial\mathfrak{T}_3(1)$
1	0	1	0	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nt-1}}$
1	0	0	1	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nr-2}}$
1	0	1	1	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{ord}}$
0	1	0	1	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nt-2}}$
0	1	1	0	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nr-1}}$
0	1	1	1	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{rev}}$
1	1	1	1	$\partial\mathfrak{T}_3(2)$

给定 $\mathfrak{T}'$ 上的诱导正则测度 μ'，根据引理 5.15，对于不同的 i、j，$\varepsilon(i,j) = 1$ 当且仅当 $\mu'(B(i))$ $\mu'(B(j))$ 和 $\mu'(C(i,j))$ 均非零。同时，$\varepsilon(i,i) = 1$ 当且仅当 $\mu'(B(i))$ 和 $\mu'(C(i,i))$ 均非零。

我们使用计算机代数系统 Macaulay 2 [GS26] 分析多项式环 $\mathbb{Q}[B(1)\ C(1,1)\ C(1,2)\ B(2)\ C(2,1)\ C(2,2)]$ 模去由命题 4.8 中关于 $n = 2$ 的二次方程生成的理想 I。命令 dim(R/I) 返回 0，而 degree(R/I) 返回 36，因此该系统有 36 个按重数计的复数解。调用 rationalPoints 函数后，我们得到 36 个不同的解，其坐标均为 2 的幂（正负号均可），对应于 $36\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ 值测度在 $\partial\mathfrak{T}_3(2)$ 上，这验证了我们的理论

–

第 4 节的结果。在附录A中，我们根据上表列出每个测度的取值及其支撑。

注 5.22。 将每个测度 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8$ 限制在其支撑上，我们便得到 $\partial\mathfrak{T}_3(1)_I^{\mathrm{ord}} = \partial\mathfrak{T}_3(1)$ 上的诱导正则测度 μ_1^I，其中 $I = \{1\}$。这是所有 $n \geq 1$ 上 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 的唯一正则测度。

6. Applications to tensor categories

本节中，我们利用第5节的诱导子类 $\partial\mathfrak{T}_3(n)$ 和诱导正则测度，构造半单张量范畴族。我们首先回顾张量范畴和 Harman–Snowden 构造的一些背景知识。然后，我们利用寡形群证明这些范畴的半单性判据。最后，我们将这一构造专门应用于诱导子类族 $\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$，从而得到超指数增长的半单张量范畴的无限族。

6.1. **张量范畴的背景。** 设 $\mathbb{K}$是一个域，且 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{K}$-线性对称幺半范畴（具有双线性张量积），其幺半单位为$\mathbb{1}$。若对象 X 存在一个对偶对象 X^*，并配备求值态射 $\mathrm{ev}_X\colon X^* \otimes X \to \mathbb{1}$ 和余求值态射 $\mathrm{coev}_X\colon \mathbb{1} \to X \otimes X^*$，且满足若干性质，则称其为刚性 EGNO17，§2。10]。若范畴中的所有对象都是刚性的，则称该范畴是刚性的；若所有对象都有有限长度，且所有 Hom空间都是有限维的，则称其为局部有限。

定义 6.1。 若一个张量范畴 是 $\mathbb{K}$-线性对称幺半范畴 $\mathcal{C}$，且为阿贝尔、局部有限、刚性，并且 $\mathrm{End}(\mathbb{1}) = \mathbb{K}$，则称其为张量范畴。

张量范畴的一项重要性质是其增长性，该性质根据范畴中的对象定义。对于对象 X，长度 指其 Jordan–Holder 长度。

定义 6.2。 若对于每个对象$X \in \mathcal{C}$，都存在一个自然数 N_X，使得对每个$n \geq 0$都有 $\mathrm{length}(X^{\otimes n}) \leq (N_X)^n$，则张量范畴 $\mathcal{C}$ 具有亚指数增长 。否则， $\mathcal{C}$ 具有超指数增长。

6.2。 **Harman–Snowden 构造。** 设我们有一个 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$，并配备一个 $\mathbb{C}$ 值测度 μ。现在回顾 Harman–Snowden 构 [HS24]，，该构造生成 $\mathbb{C}$线性刚性对称幺半范畴$\mathbf{Perm}(\mathfrak{F};\ \mu)$。

对于每个结构 $X \in \mathfrak{F}$，令形式符号 Vec_X 表示相应的对象。给定两个对象 Vec_X 和 Vec_Y，令

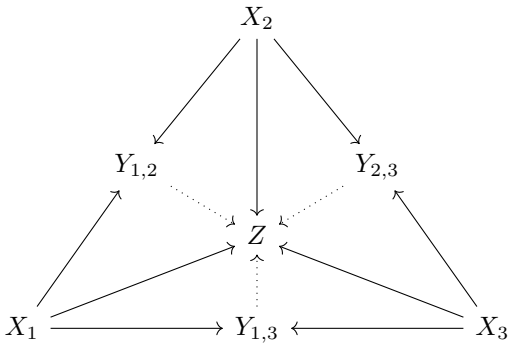
$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathbb{C}[\mathrm{Amalg}(X, Y)]$$

其中，$\mathrm{Amalg}(X,\ Y)$表示 X和 Y的融合的同构类集合。换言之，$\mathrm{Hom}(X,\ Y)$是由 X 和 Y的融合的同构类自由生成的 $\mathbb{C}$-模，而这样的同构类只有有限多个。

现设$Y_{1,2}$ 是 $X_1, X_2 \in \mathfrak{F}$ 与$Y_{2,3}$ 的一个融合，是 $X_2, X_3 \in \mathfrak{F}$的一个融合。令$\varphi_{1,2}$ 与$\varphi_{2,3}$ 表示相应的态射 $\mathrm{Vec}_{X_1} \to \mathrm{Vec}_{X_2}$ 与 $\mathrm{Vec}_{X_2} \to \mathrm{Vec}_{X_3}$。复合由下式给出

$$\varphi_{2,3} \circ \varphi_{1,2} = \sum_{Y_{1,3}} \sum_{Z} \mu(Y_{1,3} \subset Z) \cdot \varphi_{1,3}$$

其中$Y_{1,3}$ 遍历 X_1 与 X_3 的所有 amalgam，且 Z 遍历 X_1、X_2与 X_3 的所有 amalgam，使得下列图表交换：



此处，所有箭头均表示 $\mathfrak{F}$中的嵌入。上述构造可双线性地扩展到任意复合。我们将$\mathbf{Perm}(\mathfrak{F};\mu)$定义为由对象 $\{\mathrm{Vec}_X\}$自由生成的加性范畴，其中态射唯一地按加性扩展。在$\mathbf{Perm}(\mathfrak{F};\mu)$上存在张量积 $\otimes$，使得

$$\mathrm{Vec}_X \otimes \mathrm{Vec}_Y = \bigoplus_{Z\in \mathrm{Amalg}(X,Y)} \mathrm{Vec}_Z,$$

其具有预期的张量性质 [HS24]。

单位对象为 $\mathbb{1} = \mathrm{Vec}_\varnothing$，所有对象均为自对偶对象，其求值（作用于直和项）和余求值分别由投影到对角 amalgam以及包含对角 amalgam给出。对态射的作用使刚性性质得以成立；更多详情请参见 [HNS24] 。由构造可知，Vec的范畴维数$_X$ 为 $\mu(X)$），而自同态的迹在对角 amalgam情形下等于 $\mu(X)$，否则为零。

我们再回顾一种构造。

定义 6.3. 范畴的*Karoubi* 包络 $\mathcal{C}^{\mathrm{kar}}$ 的对象为 (X,e)，其中 $X\in\mathcal{C}$ 且 $e\colon X\to X$ 是一个幂等元。态射 $(X,e)\to(Y,f)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 $m\colon X\to Y$，满足 $m=f\circ m\circ e$，复合继承自 $\mathcal{C}$。

注 6.4. 为明确起见，本文在 $\mathbb{C}$上进行研究。所有构造和结论（包括关于测度的结论）在任意特征为 $\neq 2$ 的域 k 上仍然成立，证明完全相同。

6.3. **寡形群视角**。 对于一个 Fra¨ıss´e 类 $\mathfrak{F}$，令 Ω 为其 Fra¨ıss´e 极限。根据第 2 节的讨论，群 $G=\mathrm{Aut}(\Omega)$ 在 Ω 上的自然作用是寡形的。存在一个相对版本的 G，即 $(G,\mathscr{E})$，它是由传递的 $\mathscr{E}$-光滑 G-集组成的类，其中 $\mathscr{E}$是 Ω 的有限子集的逐点稳定子所构成的集合。回到这一视角，我们便能建立适用于 Fra¨ıss´e 类及其上的测度的范畴论结果。

回顾一下，给定 $\mathfrak{F}$ 上的测度 μ，存在唯一对应的 $(G,\mathscr{E})$ 上的测度 μ^*，使得若 $i\colon X\to Y$ 是 $\mathfrak{F}$ 中的嵌入，并诱导出有限型$\mathscr{E}$-光滑 G 集合之间的映射 $i^*\colon\Omega^Y\to\Omega^X$，其中 Ω^X 是 Ω 的嵌入 $X\to$ 的集合，则 $\mu^*(i^*)=\mu(i)$。我们类似地定义 $\mathbb{C}$-线性刚性对称幺半

范畴 $\mathbf{Perm}(G,\mathscr{E};\mu^*)$。其对象是 $\mathsf{Vec}_{\mathscr{X}}$，其中 $\mathscr{X}$ 是有限型 $\mathscr{E}$-光滑G-集；态射 $\mathsf{Vec}_{\mathscr{X}}\to\mathsf{Vec}_{\mathscr{Y}}$ 由 G-不变的 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$ 矩阵给出，复合由矩阵乘法给出，并依赖于积分理论，相关理论见 HS24, §7]。该范畴的张量积在对象上的定义为 $\mathsf{Vec}_{\mathscr{X}}\otimes\mathsf{Vec}_{\mathscr{Y}}=\mathsf{Vec}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}$。根据 HS24 定理6.9，第 45], 页，存在范畴等价

$$\mathbf{Perm}(G,\mathscr{E};\mu^*)\cong\mathbf{Perm}(\mathfrak{F};\mu)$$

其中 Vec_X 对应于 Vec_{Ω^X}，而 $\mathrm{Hom}(\mathsf{Vec}_X,\ \mathsf{Vec}_Y)$ 通过将 $\Omega^Y\times\Omega^X$ 上的 G-轨道与 X 和 Y 的融合相对应，从而对应于 $\mathrm{Hom}(\mathsf{Vec}_{\Omega^X},\ \mathsf{Vec}_{\Omega^Y})$。因此，我们可以来回转换（$G$，$\mathscr{E}$）和 $\mathfrak{F}$ 的性质；对于某些结果而言，这一点尤其有用，因为从前者的角度考察这些结果更为方便。

6.4. **半单性判据**。现在我们引入一个判据，用于判断由 Fra¨ıss´e 类产生的半单张量范畴。

命题 6.5。设 μ 是一个取值于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$的 *Fra¨ıss´e* 类 $\mathfrak{F}$ 上的正则测度，其中 $N\geq 1$为某个整数。若对于每个结构 $X\in\mathfrak{F}$，$|\mathrm{Aut}(X)|$ 的每个素因子都整除 $\overline{N}$，则 $\mathbf{Perm}(\mathfrak{F};\ \mu)$的 *Karoubi* 包络（记作 $\mathbf{Rep}(\mathfrak{F};\ \mu)$）是一个半单张量范畴。

设 Ω 是 $\mathfrak{F}$ 的 Fra¨ıss´ 极限，G 是 Ω 的自同构群。我们使用相应的测度 μ^*，其定义在 $(G,\mathscr{E})$ 上，且其值也取自 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$。令 $\mathscr{E}^+$ 为 G 的所有开子群构成的集合，其中每个开子群都以有限指数包含 $\mathscr{E}$ 的某个成员。

引理 6.6. 每个定义在 $(G,\mathscr{E})$ 上的 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$值正则测度 μ^*，都唯一延拓为定义在 $(G,\mathscr{E}^+)$ 上的 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$值正则测度 μ^+。

证明。我们沿用 [NS24，定理 215] 和 [HNS24，引理 44]的证明。令$V\in\mathscr{E}^+$。根据定义，存在某个有限的 $A\subset\Omega$，使得若 X 是 A的代数闭包，则有以下有限指数包含关系

$$G(X)\subset G(A)\subset V\subset G[X]$$

其中 $G[X]$ 是 G 中将 X 作为集合固定的子群。由此可得

$$\mu^+(G/V)=[V:G(X)]^{-1}\cdot\mu^*(G/G(X)).$$

由于 $|\mathrm{Aut}(X)|=[G[X]:\ G(X)]$ 的每个素因子都整除 N，因此 $[V:\ G(X)]$, 的每个素因子也都整除 N，这意味着 $\mu^+(G/V)$ 是定义良好的 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$值测度。但 μ^* 是正则的，因此 $\mu^+(G/V)$ 是 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$ 中的一个单位元，而 μ^+ 也正则，证毕。□

备注 6.7。注意，前面的引理给出了一个同构

$$\Theta(G,\mathscr{E})\left[1/N\right]\cong\Theta(G,\mathscr{E}^+)\left[1/N\right],$$

因此，如果考虑更一般的环值测度，只要 N 在环中可逆，相应测度就相等。

命题 *6.5* 的证明。由引理 6.6，考虑刚性对称幺半范畴 $\mathbf{Perm}(G,\ \mathscr{E}^+;\ \mu^+)$，其中 μ^+ 是一个正则 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$-值测度，定义在 $(G,\ \mathscr{E}^+)$ 上，并且限制到(μ^* 上的正则测度 $G,\ \mathscr{E}$)。由于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]$ 对所有 p 都可以模 $p\nmid N$ 约化，且 $\mathscr{E}^+$ 在有限指数包含下向上封闭，

我们应用 [HS24, 定理 7.11] ，得到该范畴中的幂零端同态的范畴迹为 0。结合 μ^+ 的正则性，根据 [HS24, 命题 7.19],，$\mathrm{Perm}(G, \mathscr{E}^+; \mu^+)$ 中的自同态代数是半单的。因此，作为 $\mathrm{Perm}(G, \mathscr{E}^+; \mu^+)$ 的全子范畴，$\mathrm{Perm}(G, \mathscr{E}; \mu^*)$ 中的自同态代数也同样是半单的。这意味着 $\mathrm{Perm}(G, \mathscr{E}; \mu^*)$ 的 Karoubi 包络是一个半单张量范畴。因此，命题可由我们在 6.3 节中的讨论得出。□

最后，给定一个（不一定正则的）测度 μ，其支撑为 $\mathfrak{F}'$，诱导正则测度为 μ'，我们可以通过一个称为半单化的过程，将由此得到的两个范畴联系起来 [EO19，§2。3] 如下所示。

命题6.8 ([HNS24，推论4.6，第24]页。 若 $\mathbf{Rep}(\mathfrak{F}'; \mu')$ 是半单的，则 $\mathbf{Rep}(\mathfrak{F}; \mu)$ 中的幂零自同态的范畴迹为 0，且 $\mathbf{Rep}(\mathfrak{F}'; \mu')$ 是 $\mathbf{Rep}(\mathfrak{F}; \mu)$的半单化。

6.5. **结果**。 回顾由诱导子类组成的集合 $\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$，其中每个诱导子类包含颜色数为 n 的树，树中颜色沿每条根叶路径单调递增，并且包含 $X_{i,\ i}$ 当且仅当 $i \in I$。这样的诱导子类共有 2^n 个，每个都配备了一个诱导正则测度 μ_n^I。以下是本文的核心构造，这是我们在前文各节中逐步铺垫的内容。

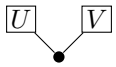
定理6.9。 对于每个整数 $n \geq 1$ 和每个子集 $I \subseteq [n]$，范畴$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}; \mu_n^I)$ 都是半单张量范畴。

我们将通过应用命题 6.5 来证明上述定理。由于 μ_n^I 在其诱导子类上总是正则的，只需验证半单性判据。

引理 6.10。 对于每个 $n \geq 1$ 和 $T \in \partial\mathfrak{T}_3(n)$，存在某个非负整数 k，使得 $|\mathrm{Aut}(T)| = 2^k$ 。

证明。 令 $\mathrm{Aut}(X)$ 表示保持边关系和关系 S 的整棵树（也包括节点）的自同构群。注意，$\mathrm{Aut}(T)$ 是 $\mathrm{Aut}(X)$ 的子群，因此只需证明 $|\mathrm{Aut}(X)|$ 是 2 的幂。

我们对 $|X|$ 使用归纳法。对于基例 $|X| = 1$， X 是只有一个叶的树，其唯一的自同构是恒等映射，因此 $|\mathrm{Aut}(X)| = 1$。现在，给定一棵树 T，假设它的根分出子树 U 和 V：



如果 $U \ncong V$，那么 $\mathrm{Aut}(X)$ 分别作用于 U 和 V，因此 $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(U) \times \mathrm{Aut}(V)$。由于 $|U|$，$|V| < |X|$，根据归纳假设，

$$|\mathrm{Aut}(X)| = |\mathrm{Aut}(U)||\mathrm{Aut}(V)|$$

确实是 2 的幂。

如果 $U \cong V$，那么存在一个自同构 s，它交换根的子节点，从而也交换 U 和 V。注意，$\{1, s\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 对正规子群 $\mathrm{Aut}(U) \times \mathrm{Aut}(V) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(X)$ 进行置换，因此我们有

$$\mathrm{Aut}(T) \cong (\mathrm{Aut}(U) \times \mathrm{Aut}(V)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

这意味着

$$|\mathrm{Aut}(X)| = 2|\mathrm{Aut}(U)||\mathrm{Aut}(V)|.$$

根据归纳假设，这仍然是 2 的幂。 □

定理6.9的证明至此完成。对于每个子集 $I \subseteq [n]$，令 $\tilde{\mu}_n^I$ 表示 μ_n^I 到 $\partial\mathfrak{T}_3(n) \supseteq \partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$的一个扩张。

推论6.11。令 $n \geq 1$为一个整数。那么，$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n); \tilde{\mu}_n^I)$ 中的幂零端同态的范畴迹为0，且$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n); \tilde{\mu}_n^I)$ 的半单化为$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}; \mu_n^I)$。

证明。根据定理6.9，$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}; \mu_n^I)$ 是一个半单张量范畴。的支撑是 $\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$，其诱导正则测度为 μ_n^I，因此由命题6.8可得该推论。 □

最后，我们明确证明我们的范畴具有超指数增长，这是由测度产生的张量范畴的一个本质性质。

命题6.12. 对于每个 $n \geq 1$ 以及每个非空的 $I \subseteq [n]$，张量范畴$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}; \mu_n^I)$ 具有超指数增长。

证明. 我们先解决 $n = 1$ 的情形，由此对更大的 n该结果容易得出。对每个结构 X，令 $f_m(X)$为在自同构意义下用 $\{1, \ldots, m\}$ 标记 X的元素的方式数（其中每个元素至少有一个标记）。例如，若 X 是具有两片叶子的树结构，则对所有 $m \geq 2$，$f_m(X) = 2^{m-1} - 1$。令 T 为单叶树结构。由张量积的定义，我们得到

$$\mathrm{Vec}_T^{\otimes m} = \bigoplus_{|X| \leq m} \mathrm{Vec}_X^{\oplus f_m(X)}$$

其中Vec的每个副本$_X$来自不同的嵌入选择（i_1，.....，i_m）：$T^m \to X$，其个数恰好有 $f_m(X)$个。现在，由于$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(1)_I^{\mathrm{ord}}; \mu_1^I)$是一个半单张量范畴（定理6.9），不等式

$$\mathrm{length}(X^{\otimes m}) \leq \dim \mathrm{End}(X^{\otimes m}) \leq \mathrm{length}(X^{\otimes m})^2$$

对范畴中的所有对象 X 均成立，因此我们转而考虑

$$\mathrm{End}(\mathrm{Vec}_T^{\otimes m}) = \mathrm{End}\left(\bigoplus_{|X| \leq m} \mathrm{Vec}_X^{\oplus f_m(X)}\right) = \bigoplus_{|X|, |X'| \leq m} \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Vec}_X^{\oplus f_m(X)}, \mathrm{Vec}_{X'}^{\oplus f_m(X')}\right).$$

特别地，

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{End}(\mathrm{Vec}_T^{\otimes m}) &\geq \dim \bigoplus_{|X| = |X'| = m} \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Vec}_X^{\oplus f_m(X)}, \mathrm{Vec}_{X'}^{\oplus f_m(X')}\right) \\
&= \sum_{|X| = |X'| = m} f_m(X) f_m(X') \, |\mathrm{Amalg}(X, X')| \\
&\geq \left(\sum_{|X| = m} f_m(X)\right)^2.
\end{aligned}$$

注意，括号内的和恰好是 $\partial\mathfrak{T}_3(1)$ 中带标号的 m 元结构的个数，它等于 $(2m-3)!! = (2m-3)(2m-5)\cdots 3 \cdot 1$，由

[OEI25，A001147]。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{length}(X^{\otimes m}) &\geq \sqrt{\dim \operatorname{End}(\operatorname{Vec}_T^{\otimes m})} \\ &\geq \sum_{|X|=m} f_m(X) \\ &= (2m-3)!! \\ &= \exp\left(\Theta(m \log m)\right),\end{aligned}$$

它是超指数增长。 □

注记 6.13。 如果 I 为空，则$X_{i,i} \notin \partial\mathfrak{T}_3(n)_I^{\mathrm{ord}}$对所有 $i \in [n]$都成立。因此，其 Fra¨ıss´e 极限是有限的（含有 2^n 个元素），所以$\mathbf{Rep}(\partial\mathfrak{T}_3(n)_\varnothing^{\mathrm{ord}}; \mu_n^\varnothing)$是一个具有指数增长的对称融合范畴，因而根据 Deligne 定理，它等价于某个仿射超群概形的表示范畴。

Appendix 附录A. Measures on $\partial\mathfrak{T}_3(2)$ and their supports

下表列出了每个 36 个测度在 $\partial\mathfrak{T}_3(2)$上的取值。特别地，所列取值对应于 $\Theta(\partial\mathfrak{T}_3(2))$中的不可约标记结构，它们生成了测度环的其余部分。最后一列表示测度的支撑（5.2、5.3）；如果支撑有限，则标记为“平凡”。

	$B(1)$	$C(1,\ 1)$	$C(1,\ 2)$	$B(2)$	$C(2,1)$	$C(2,2)$	支撑
μ_1	-0.5	-0.5	-0.5	0	0	-1	
μ_2	-0.5	-0.5	-0.5	0	0	0	
μ_3	-0.5	-0.5	0	0	0	-0.5	
μ_4	-0.5	-0.5	0	0	0	0	
μ_5	0	-1	0	-0.5	-0.5	-0.5	$\partial\mathfrak{T}_3(1)$
μ_6	0	-0.5	0	-0.5	0	-0.5	
μ_7	0	0	0	-0.5	-0.5	-0.5	
μ_8	0	0	0	-0.5	0	-0.5	
μ_9	-1	-1	-1	1	0	0	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nt-1}}$
μ_{10}	0.5	0	0.5	-0.5	0	-0.5	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nr-2}}$
μ_{11}	-0.25	-0.25	-0.25	-0.5	0	-0.5	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{ord}}$
μ_{12}	1	0	0	-1	-1	-1	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nt-2}}$
μ_{13}	-0.5	-0.5	0	0.5	0.5	0	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{nr-1}}$
μ_{14}	-0.5	-0.5	0	-0.25	-0.25	-0.25	$\partial\mathfrak{T}_3(2)^{\text{rev}}$
μ_{15}	0	-2	0	0	-1	-1	
μ_{16}	0	-1	-1	0	0	0	
μ_{17}	0	-1	0	0	0	-1	
μ_{18}	0	-1	-1	0	0	-2	
μ_{19}	0	-1	0	0	0	0	
μ_{20}	0	-0.5	0	0	0.5	0	
μ_{21}	0	0	0	0	-1	-1	
μ_{22}	0	0	0	0	0	-1	
μ_{23}	0	0	0	0	0	0	
μ_{24}	0	0	0.5	0	0	-0.5	
μ_{25}	0	0	0	0	0.5	0	
μ_{26}	0	0	0.5	0	0	0	平凡
μ_{27}	0	-2	0	1	0	0	
μ_{28}	0	-1	0	1	1	0	
μ_{29}	0	0	0	1	0	0	
μ_{30}	0	0	0	1	1	0	
μ_{31}	1	0	0	0	0	0	
μ_{32}	1	0	1	0	0	-1	
μ_{33}	1	0	0	0	0	-2	
μ_{34}	1	0	1	0	0	0	
μ_{35}	1	0	0	2	2	0	
μ_{36}	2	0	2	1	0	0	

References

[Cam87] Peter J. Cameron, *Some treelike objects*,《牛津大学数学季刊》（第 2 辑）**38** （1987），155–183，参见 https://doi.org/10.1093/qmath/38.2.155。

[Cam95] , *Counting two-graphs related to trees*, 《电子组合学杂志》2（1995），研究论文 4，约 8 页，参见 https://doi.org/10.37236/1198。[Del02] 皮埃尔·德利涅， *Catégories tensorielles*, 《莫斯科数学杂志》2（2002），227–248，参见 http://mi.mathnet.ru/mmj54。[EGNO17] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik， *Tensor categories*，美国数学学会，2017 年。[EO19] Pavel Etingof 和 Victor Ostrik， *On semisimplification of tensor categories*，arXiv:1801.04409 [math.RT]。参见 https://arxiv.org/abs/1801.04409，2019 年。[Fra53] Roland Fra¨ıss´e, *Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels*, 《巴黎科学院院报》237（1953），540–542。[GS26] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman, *Macaulay2 a software system for research* , , 参见, 。[*in algebraic geometry* http://www2.macaulay2.com 2026
HNS24] Nate Harman、Ilia Nekrasov 和 Andrew Snowden， *Arboreal tensor categories*，arXiv:2308.06660 [math.RT]。参见 https://arxiv.org/abs/2308.06660，2024 年。[HS24] Nate Harman 和 Andrew Snowden， *Oligomorphic groups and tensor categories*，arXiv:2204.04526 [math.RT]。参见 https://arxiv.org/abs/2204.04526，2024 年。[Kno06] Friedrich Knop, *A construction of semisimple tensor categories*, 《巴黎科学院数学报告》 **343** 2006 15 18, https://doi.org/10.1016/j.crma.2006. ( ), – 参见。[05.009
Kno07] , *Tensor envelopes of regular categories*, 《数学进展》214（2007），571–617，参见 https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.03.001。[Kri23] Sophie Kriz, *Quantum Delannoy categories* https://krizsophie. , 参见, 。[github.io/QuantumDelannoyCategory23111.pdf 2023
Nek24] Ilia Nekrasov， *Tensorial measures on ω-categorical structures*，密歇根大学 Deep Blue 文档库。参见 https://deepblue.lib.umich.edu/items/949af992-59ad-4437-82a5-fefa8d6f4585 2024 , 。[NS24] Ilia Nekrasov 和 Andrew Snowden， *Upper bounds for measures on distal classes*，arXiv:2407.19131 [math.RT]。参见 https://arxiv.org/abs/2407.19131，2024 年。[OEI25] OEIS基金会， *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*，在线发布于 https://oeis.org，2025 年。[Sno23a] Andrew Snowden， *Measures for the colored circle*，arXiv:2302.08699 [math.CO]。参见 https://arxiv.org/abs/2302.08699，2023 年。[Sno23b] , *Some fast-growing tensor categories*，arXiv:2305.18230 [math.RT]。参见 https://arxiv.org/abs/2305.18230，2023 年。[Sno24a] , *On the representation theory of the symmetry group of the Cantor set*，arXiv:2308.06648 [math.RT]。参见 https://arxiv.org/abs/2308.06648，2024 年。[Sno24b] , *The thirty-seven measures on permutations*，arXiv:2404.08775 [math.CO]。参见 https://arxiv.org/abs/2404.08775，2024 年。

Jackson-Reed High School, Washington, D.C., USA
Email address: chithanh08dgs@gmail.com
Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA
Email address: rud@mit.edu