arXiv:2603.03706v1 [cond-mat.mes-hall] 4 Mar 2026

mumax⁺中的多模腔磁子学：从铁磁体和反铁磁体中的相干耦合到耗散耦合

Gyuyoung Park,[1,*] OukJae Lee,[1] 和 Biswanath Bhoi[2,†]

[1] *Center for Semiconductor Technology, Korea Institute of Science and Technology (KIST), 5 Hwarangno 14-gil, Seongbuk-gu, Seoul 02792, Korea*[2] *Nano-Magnetism and Quantum Technology Lab, Department of Physics,Indian Institute of Technology (Banaras Hindu University), Varanasi, Uttar Pradesh - 221005, India*（日期：2026年3月4日）

微波腔光子与磁子激发之间的相干耦合可实现量子转导、磁子介导纠缠以及磁子数分辨探测。光子-磁子耦合的微磁模拟通常需要修改核心求解器，或实现完整的电磁求解器。本文为mumax⁺（一种GPU加速的开源微磁框架）提出双层腔磁振子学扩展。第一层由CUDA 内核组成，这些内核在基于图形处理器的RK45自适应时间步进器内将 N 腔模常微分方程与LLG方程同时积分，从而消除逐步的图形处理器↔CPU传输；空间分辨模式分布 $u_n(\mathbf{r})$同时进入耦合（通过CUDA 归约内核得到的加权磁化平均）和反馈（$H_{\rm rf}(\mathbf{r},t)=\sum_n h_{0,n}\,u_n(\mathbf{r})\,\mathrm{Re}[a_n(t)]$），从而在集成到上游构建后实现对非均匀自旋波模的选择性寻址。第二层是一个轻量级Python 协同仿真类，它通过算子分裂RK4积分在无需重新编译的情况下复现相同的均匀模物理；本文所有基准仿真均使用该层。共旋耦合约定 $m^- = m_x - im_y$ 与自洽场转换 $h_0 = 2g/\gamma$ 确保两层中的拉比动力学在物理上正确。我们通过八项基准仿真验证该实现：(i) 磁子极化激元反交叉谱（RMSE= 17 兆赫，为 $2g$的17%），(ii) 真空拉比振荡（三种耦合强度下周期误差为 $< 6\%$），(iii) 跨越弱到强耦合区间的协作性相图，其中 $C > 1$ 的劈裂得以分辨（在 $C = 6.7$处测得21.3兆赫，理论值为20.0兆赫），(iv) 依赖于腔模分布的耦合选择定则，(v) 具有磁子介导腔间能量传递的多模极化激元杂化，(vi) 通过空间重叠工程实现的模式选择性耦合，(vii) 采用N´eel矢量谱学的反铁磁磁子-腔耦合，以及(viii) 由耗散光子-磁子耦合产生的异常反交叉，展示了从能级排斥到能级吸引的转变。数值收敛性通过算子分裂时间步长研究加以验证（$\Delta t = 0.25$–4 ps，所有步长的误差均为 $< 3\%$）。

I. 引言

高-Q腔中的微波光子与亚铁磁材料中的磁子激发相干杂化，形成磁振子-极化激元准粒子，其谱劈裂、时间动力学和空间模式结构均可通过外加磁场 [1–4, 19, 26]调控。钇铁石榴石（YIG）球体 [图 1(a)]是标准平台：较低的吉尔伯特阻尼（$\alpha \sim 10^{-4}$）带来协同性 $C = g^2/(\kappa\gamma_m) \gg 1$，使系统稳处于强耦合区 [3–5]。如今，实验应用已涵盖相干磁振子-量子比特耦合 [6]、单磁振子探测 [24] 、耗散性磁振子-光子相互作用 [18] 以及例外点物理 [16]。当多个腔模参与其中时，会呈现更丰富的物理现象：暗极化激元态——即与磁振子解耦的腔模叠加态——通过虚磁振子交换 [10, 11], 介导间接的光子-光子能量传递，而每个模式的空间分布则通过重叠积分 [8, 12, 20]决定所涉及的自旋波模式。模拟这些现象需要将腔光子动力学与微磁学磁化强度动力学进行自洽积分，这正是本文的研究重点。

从模拟的角度来看，捕捉光子–磁振子耦合需要将腔光子动力学与磁化强度动力学结合起来进行积分。文献中存在两种计算方法：(i) 将集总腔常微分方程（ODE）嵌入微磁学求解器的时间步进循环中 [31], ；以及 (ii) 将完整的时域有限差分（FDTD）电磁求解器与LLG方程耦合 [32]。第一种方法物理意义直观且计算开销较小；第二种方法能够捕捉电磁延迟效应和空间模结构，但计算成本高出几个数量级。最近，Mart´ınez-Losa del Rinc´on 等 [31] 为mumax³ 扩展了腔耦合模块，并在GPU加速的微磁学环境中验证了基于常微分方程的方法。

本文介绍了适用于 mumax⁺ 框架 [30], 的双层腔磁振子学扩展。mumax³ 是近期发表的、可扩展的 GPU加速微磁学框架，基于 mumax [29] 构建。第一层由自定义 CUDA 内核组成，可在GPU自适应时间步进器中将腔常微分方程与 LLG方程一并积分，

* proslaw@kist.re.kr
† biswanath.phy@iitbhu.ac.in

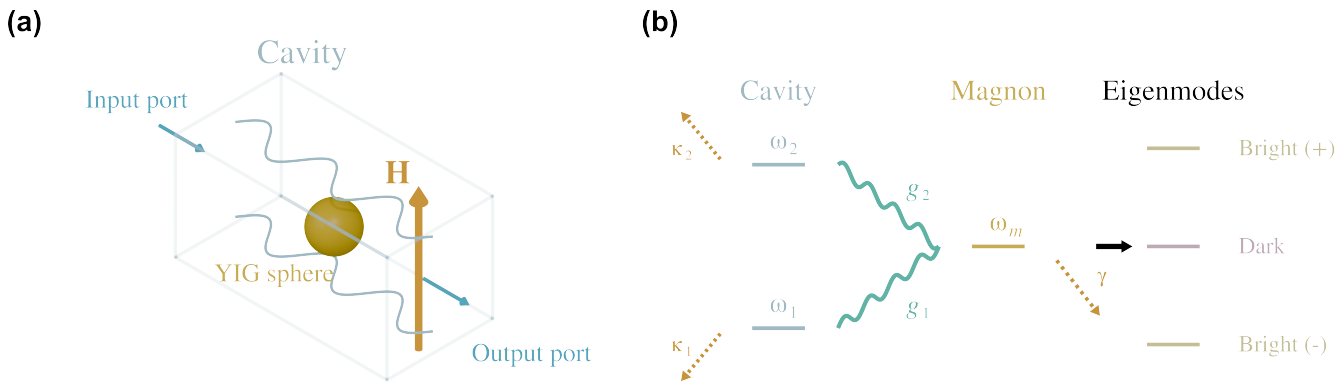


图 1. (a) 中心放置亚铁磁YIG球的三维微波腔。驻波射频场（正弦曲线）与均匀磁子进动耦合。沿$\hat{z}$ 方向的静态外场 $\mathbf{H}$ 设定磁子频率 $\omega_m = \gamma B_0$ ($B_0 = \mu_0 H$)。微波信号经由耦合端口输入和输出。(b) 双模腔-磁子系统的能级图。两个腔模（ω_1、 ω_2）以耦合强度 g_1、 g_2与单个磁子模（ω_m）耦合；虚线箭头表示耗散（κ_1、 κ_2、 γ）。杂化本征模由两个亮极化激元分支和一个与磁子解耦的暗模 $|D\rangle \propto g_2|1\rangle - g_1|2\rangle$ 组成。

无需每个时间步都进行主机传输，即可实现原生性能。我们实现了多模腔求解器（multimode cavity.cu），支持N 独立耦合的模式；还实现了空间分辨的模场分布模块（cavity mode profile.cu），借助 CUDA归约核函数实现与非均匀自旋波模的选择性耦合。-第二层是一个轻量级 Python协同仿真类，利用 mumax$^+$ Python API——特别是空间平均磁化读出和可写的外加场接口——通过在 CPU 上进行算子分裂四阶龙格–库塔法积分，复现相同的物理过程，为原型开发提供无需编译的途径。两层采用完全相同的物理机制：与 m^-的共旋耦合、自洽关系 $h_0 = 2g/\gamma$，并支持相干和耗散耦合通道。与文献 [31], 中的 C语言级扩展相比，CUDA原生层可提供相当的 GPU 驻留性能，而 Python层则以略微牺牲性能为代价，实现快速部署。

在构建理论框架（第 II 节）并介绍双层实现方案——CUDA 原生求解器和 Python协同仿真（第 III 节）之后，我们通过八项基准仿真，将该实现与解析理论进行验证（第 IV 节）。

II. 理论框架

A. 单模腔–磁振子耦合

我们考虑一个频率为 ω_c 的单模微波腔，它与亚铁磁样品 [1, 17]中频率为 ω_m 的均匀（Kittel）磁子模耦合。在旋波近似（RWA）下，腔光子模 $a \sim e^{-i\omega t}$ 与横向磁化分量 $m^- = m_x - im_y \sim e^{-i\omega t}$同向旋转，而非反向旋转的 $m^+ = m_x + im_y \sim e^{+i\omega t}$。输入-输出形式体系中的耦合动力学方程为 [19, 25]

$$\frac{da}{dt} = (-i\omega_c - \kappa)\, a + ig\, m^- + \eta(t), \tag{1}$$

$$m^-(t) = m_x(t) - i\, m_y(t), \tag{2}$$

其中， $a(t)$ 为复腔振幅， $\kappa = \omega_c/(2Q)$ 为腔振幅衰减率， g 为磁振子–光子耦合强度， $\eta(t)$ 为外部微波驱动。本文中所有频率、耦合强度和衰减率均以角频率单位（ rad/s）表示。

腔通过沿 $\hat{x}$ 方向施加的射频磁场，将反馈作用传递给磁化强度:

$$H_{\rm rf}(t) = h_0\, \mathrm{Re}[a(t)], \tag{3}$$

其中， h_0 是转换因子（单位腔体振幅对应的 T），$\gamma = 1.76 \times 10^{11}$ rad/(s T) 是旋磁比。从物理上看， h_0 将无量纲腔振幅（$|a|^2$ 与腔内光子数成正比）转换为作用于样品的实际射频磁场。它由腔模的零点磁场涨落决定，$h_{\rm zpf} = \sqrt{\mu_0 \hbar \omega_c/(2V_{\rm mode})}$，~~其中$V_{\rm mode}$ 是~~有效模体积；同时也取决于集体自旋增强： $g = \gamma h_{\rm zpf}\sqrt{2sN_s}$ ，其中 s 是有效自旋， N_s 是参与自旋的数量 [1, 26]。因此，较小的模体积或较大的自旋系综都会增大 g 和 h_0。自洽耦合要求反作用场强度与正向耦合 g相匹配。为推导 h_0，我们围绕饱和基态 $\boldsymbol{m} \approx \hat{z}$ （小角度进动，$m_z \approx 1$）对 LLG 方程进行线性化，其中 $\boldsymbol{m} = (m_x, m_y, 1)$，并且$m^- = m_x - im_y$ 是归一化的横向磁化振幅（$|\boldsymbol{m}| = 1$）。在静磁场 $B_0\hat{z}$ 和

横向射频场 $H_{\rm rf}\hat{x}$ 作用下，的线性化运动方程为 [9, 25]

$$\dot{m}^{-} \approx -i\omega_m\, m^{-} + \frac{\gamma h_0}{2}\, a, \tag{4}$$

其中， $1/2$ 这一因子源于对 $\mathrm{Re}[a] = (a + a^{*})/2$ 进行分解，并在旋波近似下仅保留共旋分量$a \sim e^{-i\omega t}$ 。因此，腔到磁振子耦合率为 $\gamma h_0/2$。请注意，磁振子衰减率 $\gamma_m = \alpha\omega_m$ 并未显式出现在线性化方程（4）中；在协同仿真中，它通过在图形处理器上积分求解的完整非线性 LLG 方程进行自洽处理，该方程包含吉尔伯特阻尼力矩 $\alpha\, \boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}$。因此，磁振子耗散是通过微磁求解器进入耦合动力学的，而不是作为额外的唯象项加入磁振子运动方程。将其与方程（1）中的正向（磁振子到腔）耦合 g 相等，可得自洽条件

$$h_0 = \frac{2g}{\gamma}. \tag{5}$$

该条件假设耦合具有互易性，即磁振子到腔和腔到磁振子的相互作用强度相等。对于光子–磁振子耦合非互易的系统，例如由耗散性或界面 Dzyaloshinskii–Moriya 相互作用 [18]介导的系统，必须分别引入正向和反向耦合系数 $g_{\rm f} \neq g_{\rm b}$ ，其中 $h_0 = 2g_{\rm b}/\gamma$确保反向（腔到磁振子）通道满足自洽条件。

B. 极化激元本征频率

将式（1）–（3）在磁基态附近线性化，可得到两个杂化磁振子–极化激元模，其本征频率为 [17, 26]

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_c + \omega_m}{2} \pm \sqrt{g^2 + \left(\frac{\omega_c - \omega_m}{2}\right)^2}. \tag{6}$$

在简并点 $\omega_c = \omega_m$，最小频率劈裂为 $2g$，即真空拉比劈裂 [1]。式（6）对应厄米（无损）极限。引入耗散后，通过将 $\omega_c \to \omega_c - i\kappa$ 和 $\omega_m \to \omega_m - i\gamma_m$ 替换为下列形式，可得到复本征值:

$$\tilde{\omega}_{\pm} = \frac{\omega_c - i\kappa + \omega_m - i\gamma_m}{2} \pm \sqrt{g^2 + \left(\frac{\omega_c - i\kappa - \omega_m + i\gamma_m}{2}\right)^2}. \tag{7}$$

实部 $\mathrm{Re}(\tilde{\omega}_{\pm})$ 给出极化激元频率，并在强耦合区呈现反交叉；虚部 $\mathrm{Im}(\tilde{\omega}_{\pm})$ 描述杂化线宽：远离共振时，一个模式呈腔特性（线宽 $\sim \kappa$），另一个呈磁振子特性（$\sim \gamma_m$），两者在交叉点交换特性。对于 $g \gg |\kappa - \gamma_m|$，无损耗表达式 Eq. (6) 对实部的近似精度为 $(\kappa + \gamma_m)$ 阶 $^2/g^2$。

C. 协同性与耦合机制

协同性 [5, 19]

$$C = \frac{g^2}{\kappa\gamma_m}, \tag{8}$$

其中， $\gamma_m = \alpha\omega_m$ 是磁振子振幅衰减率，它决定耦合区制。对于 $C < 1$ （弱耦合），模式杂化受到耗散掩盖，无法分辨出谱劈裂。对于 $C > 1$（强耦合），劈裂 $2g$ 超过总线宽，因而出现可分辨的反交叉 [3, 4]。在高-Q钇铁石榴石球系统中，已实现超过 10^7 的协同性 [12]。

D. 基特尔频率

对于处于沿 B_0 磁化轴方向的静态外场中的均匀磁化球体，均匀进动（基特尔）模频率为 [27]

$$\omega_m = \gamma B_0. \tag{9}$$

扫描 B_0 可调节 ω_m，使其经过 ω_c，从而在频谱中产生特征性的反交叉。高阶磁静力模（沃克模 [28]）也可以与腔耦合，但在当前的均匀模模拟中不予考虑。

E. 空间模式分布

当磁性样品的尺寸达到腔模波长的显著比例时，射频场会呈现空间依赖性。此时，有效的磁振子–光子耦合由腔模场分布与磁子模 [8, 12, 20]之间的重叠积分决定:

$$g_{\rm eff} = g_0 \left\langle u(\mathbf{r}) \right\rangle = g_0 \frac{1}{V} \int u(\mathbf{r})\, dV, \tag{10}$$

其中， $u(\mathbf{r})$是归一化的腔模场分布，积分范围为样品体积 V。对于矩形腔体，驻波场分布为 [9]

$$u(\mathbf{r}) = \cos\!\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \cos\!\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \cos\!\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right), \tag{11}$$

其中（n_x， n_y， n_z）表示腔模。对于位于腔体中心且覆盖整个模体积的样品，与空间均匀的 Kittel 磁振子的重叠积分对任意 $n_i \neq 0$ 都为零，因为正负波瓣在积分时相互抵消。一般而言，重叠取决于样品相对于模式波长的位置和尺寸；当样品打破腔场的对称性 [8, 12] 时，也可能与高阶模产生非零重叠。在本次模拟中，

样品占据整个网格并位于模体积中心，因此选择定则严格成立。高阶腔模仍可与空间对称性匹配的自旋波模耦合 [8, 21, 22]。

F. 多模腔扩展

对于 N 个与单个磁振子耦合的腔模，腔方程可推广为 [10, 11]

$$\frac{da_j}{dt} = (-i\omega_j - \kappa_j)\, a_j + i g_j\, m^- + \eta_j(t), \tag{12}$$

$$H_{\mathrm{rf}}(t) = \sum_{j=1}^{N} h_{0,j}\, \mathrm{Re}[a_j(t)], \tag{13}$$

其中 $h_{0,\ j} = 2g_j/\gamma$。对于具有相同耦合强度（$g_1 = g_2 = g$）的 $N = 2$ 个模式，如 [图 1(b)], 所示， 3×3 耦合矩阵

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \omega_1 & g_1 & 0 \\ g_1 & \omega_m & g_2 \\ 0 & g_2 & \omega_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

给出三个本征值：两个亮极化激元分支和一个暗模 $|D\rangle \propto g_2|1\rangle - g_1|2\rangle$，该暗模在交叉点处与磁振子解耦 [10]。非对角线上的零（$\mathcal{H}_{13} = \mathcal{H}_{31} = 0$）反映了这样的假设：两个腔模之间没有直接耦合；它们的相互作用完全由共享磁振子模介导。当两个模式属于同一个多模腔——即同一结构中的不同谐振模——且钇铁石榴石球位于两个模式分布的空间重叠区域内时，这一假设在物理上是合理的，因此每个模式都通过各自的射频场分布独立地与磁振子耦合 [式（10）]。相反，如果腔模属于物理上分离的谐振器，那么磁性样品必须放置在两个腔的场区域内，例如位于公共耦合总线的中心 [11]；并且应将任何残余的直接光子-光子耦合（例如通过倏逝场产生的耦合）作为非零项纳入 $\mathcal{H}_{13}$。暗模无需激发磁振子即可实现腔模之间的间接能量传递，这是一种为量子转导提出的机制 [11]。

G. 反铁磁磁振子模

在具有交换场 H_E 和单轴各向异性场 H_A 的双亚晶格反铁磁体中，零场反铁磁共振（AFMR）频率为 [33, 34]

$$\omega_{\mathrm{AFMR}} = \gamma\mu_0\sqrt{2H_E H_A + H_A^2}. \tag{15}$$

沿易轴施加的外场 B 将其分裂为两个分支，

$$\omega_{\pm} = \omega_{\mathrm{AFMR}} \pm \gamma B, \tag{16}$$

适用于低于自旋翻转转变的情况，即 $B_{\mathrm{sf}} = \mu_0\sqrt{2H_E H_A + H_A^2}$。两种模式都通过净磁化强度 $\boldsymbol{m}_{\mathrm{tot}} = (\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2)/2$与腔耦合，形成一个 3×3 耦合哈密顿量

$$\mathcal{H}_{\mathrm{AFM}} = \begin{pmatrix} \omega_+ & g & 0 \\ g & \omega_c & g \\ 0 & g & \omega_- \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其本征值给出三条极化激元分支。奈尔矢量 $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2)/2$ 不与均匀腔场耦合，因此呈现出没有杂化能隙的裸磁振子谱。在 $B = 0$ 处，两个磁振子模在 ω_c 处简并；二者相干贡献，使真空拉比劈裂增强至 $2\sqrt{2}\, g$ [35]。

III. 实现

A. CUDA 原生求解器

第一层将腔体常微分方程直接集成到 mumax⁺ 图形处理器时间步进器中，作为 DynamicEquation，使腔体振幅和磁化强度在单个统一的 RK45 步骤中推进，无需主机端介入。

a. 多模腔内核（*multimode cavity.cu*）。MultimodeCavityRHSQuantity 类用于计算 N 腔模的右端项。状态向量（$a_{1、\mathrm{re}}$、 $a_{1、\mathrm{im}}$、**.....**、 $a_{N、\mathrm{re}}$、 $a_{N、\mathrm{im}}$、0）存储在单元 GPU 场上，每个模式的常微分方程 [式（12）] 由主机逐模式计算，并使用从图形处理器获得的加权磁化强度平均值。组合后的射频反馈场在图形处理器上累加：没有空间分布的模式贡献均匀场，而具有空间分布的模式则为每个模式启动 CUDA 内核 ScaledModeProfileField，逐单元计算$h_{0、n}\, u_n$**(r)** Re $[a_n]$。

b. 空间分辨模式分布（*cavity mode profile.cu*）。模式分布u_n**(r)**作为标量场存储在铁磁体网格上。单块 CUDA 归约内核（kWeightedFieldAverage）计算加权空间平均值

$$\langle u_n\, m_\alpha \rangle = \frac{1}{N_{\mathrm{geo}}} \sum_i u_n(\mathbf{r}_i)\, m_\alpha(\mathbf{r}_i), \tag{18}$$

替代耦合项中的均匀平均值。第二个内核（k SpatialCavityRFField）计算空间变化的反馈场 H_{rf}**(r** t**)** =$h_0\, u$**(r)**Re$[a(t)]$。对于基模（ $u = 1$ ），两个内核都会简化为标准的均匀运算。

CUDA 内核已完成，可集成到 mumax⁺ 构建系统中；所需的 Ferromagnet 类接口扩展（腔模式访问器、DynamicEquation 注册以及 Python 绑定）已在随附的头文件中说明

该扩展。本研究中的基准仿真使用下文介绍的 Python 协同仿真层，该层针对均匀模态情形实现相同的物理过程；对于大网格模拟以及通过空间分辨的分布与 $k \neq 0$ 自旋波模耦合，CUDA原生层则必不可少。

B. Python协同仿真

Python类CavityMagnon封装了腔体常微分方程与协同仿真循环，提供一条无需编译的路径，本文所有基准测试均采用该路径：

```
for i in range(nsteps):
    # 1. Read magnetization from GPU
    m = magnet.magnetization.average()
    m_plus = m[0] + 1j * m[1]

    # 2. Step cavity ODE (CPU, RK4)
    #    uses m^- = conj(m^+) internally
    a = cavity.step_rk4(a, m_plus, t, dt)

    # 3. RF feedback field (h0 = 2g/gamma)
    H_rf = h0 * a.real

    # 4. Update RF field on magnet
    magnet.bias_magnetic_field = (H_rf, 0, 0)

    # 5. Advance LLG on GPU
    world.timesolver.run(dt)
```

清单1. Python协同仿真循环（第2层）。

静磁场 B_{ext} 设置在world对象上，而时变射频场施加于磁体层级；由于mumax⁺ 在内部对二者求和，这种分离可避免重复计数。保护子句可防止同时使用两个层级，否则射频场会被施加两次。Python层会在每一步产生图形处理器→CPU传输开销（第IIID节），但对于本基准测试所用的小网格已足够，并在重新编译不切实际时提供一条快速原型设计路径。

C. 腔体常微分方程积分

腔体振幅 $a(t)$ 采用四阶龙格–库塔法（RK4）进行积分。我们选择 RK4 而非低阶方法（例如前向欧拉法），因为腔体常微分方程以 $\omega_c \sim 2\pi \times 5$ 吉赫的频率振荡；要在谱分析所需的数千个振荡周期内控制振幅和相位漂移，一阶方法必须采用小到不切实际的时间步长，而 RK4 在 Δt 中可提供四阶精度，并且在采用与 LLG 求解器相同的步长时，能够忠实地保持振荡振幅。在每个 RK4 子步中，磁化强度 m^- 保持不变（算子分裂近似）；当 $\Delta t \ll 1/\max(\omega_c, \omega_m)$ 时，该近似是有效的。腔体右端项实现了共旋耦合：

```
def cavity_rhs(self, a, m_plus, t):
    m_minus = np.conj(m_plus)
    return (-1j*self.omega_c - self.kappa)*a \
           + 1j*self.g_eff * m_minus \
           + self.drive(t)
```

清单2。腔体常微分方程右端项。

第 2 行中的共轭运算将 $m^+ = m_x + im_y$（从 mumax⁺ 读取）转换为共旋转的 $m^- = m_x - im_y$。

D. 性能考量

CUDA原生层完全消除了每步的主机传输：腔振幅、加权磁化强度平均值和射频反馈场都驻留在图形处理器上，并由自适应RK45步进器与 LLG 方程一同推进。唯一的开销是逐模式计算腔体常微分方程右端项，每个模式需要进行一次 CUDA归约（加权平均）和一次场核函数计算（射频反馈）——对于典型的 $N \leq 8$ 个模式而言，这可以忽略不计。

对于 Python协同仿真层，主要开销是每步将平均磁化强度从图形处理器传输到 CPU（ magnetization.average()）。将每个协同仿真步的墙钟时间作为网格尺寸的函数进行基准测试（图 12），结果显示，从 8×8（64 个细胞）到 64×64（4096 个细胞），耗时恒定为 $\sim$4.4 毫秒/步；这表明，对于这些小网格，图形处理器到 CPU 的传输以及 Python开销（$\sim$4 毫秒/步）超过了图形处理器 LLG计算的耗时。对于更大的网格（ 256×256 及以上），图形处理器 LLG 的计算成本最终会超过主机传输开销，从而恢复受图形处理器限制的扩展能力；不过，此类网格还会耦合到 $k \neq 0$ 个自旋波模，因此需要采用空间分辨的 CUDA 层，而非均匀的 Python协同仿真。本文的基准测试采用 Python层，这足以应对本文使用的 $8 \times 8 \times 1$ 网格。CUDA原生层完全消除了每步的主机传输，因此是进行生产规模空间分辨仿真的合适途径。

IV. 基准仿真

所有模拟均采用类钇铁石榴石材料参数：$M_s = 140$ kA/m、 $A_{\text{ex}} = 3.5$ pJ/m、 $\alpha = 3 \times 10^{-4}$ [3]，并使用单元尺寸为 10 nm 的 $8 \times 8 \times 1$ 网格。禁用偶极相互作用，使均匀进动频率简化为 $\omega_m = \gamma B_0$ [式（9）]，，从而将耦合物理与形状相关的退磁效应分离。磁化强度初始化为沿 $\hat{z}$，mumax⁺ 的自适应时间求解器在每个协同仿真步推进 LLG 方程。表 I 总结了全部八项基准仿真的模拟参数。

A. 反交叉谱

强光子–磁振子耦合的标志是在

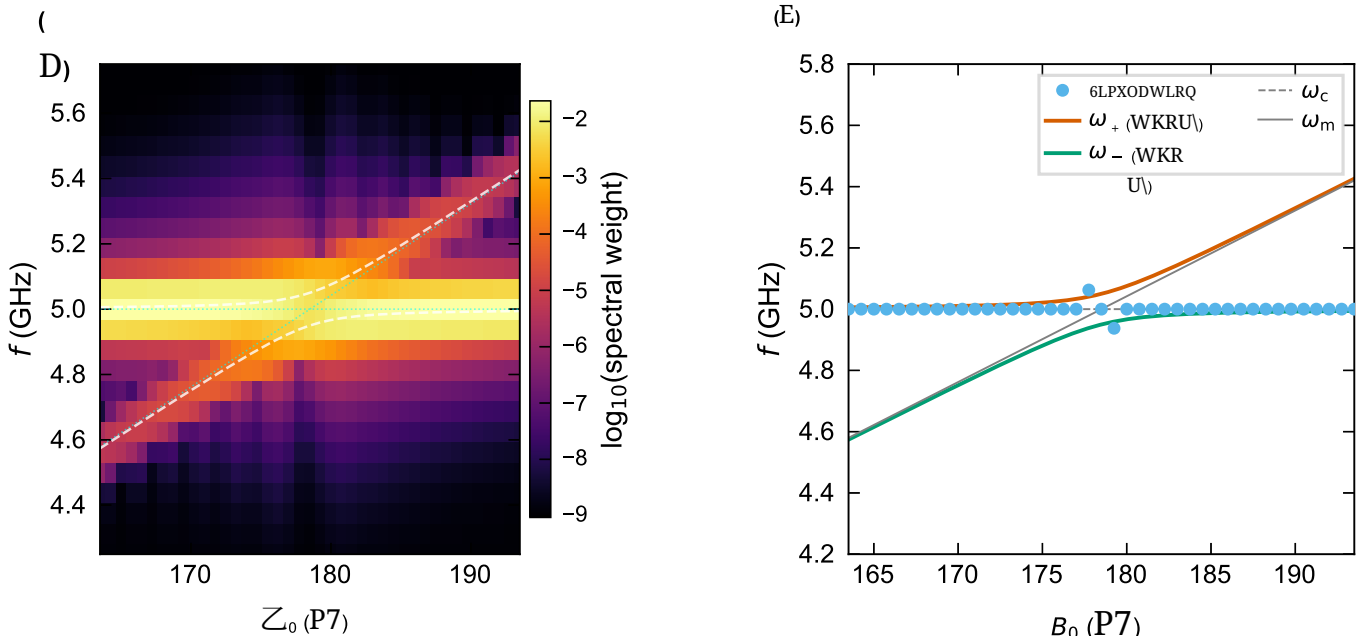


图2. 磁子-极化激元反交叉。(a) 组合谱权重 $|\mathrm{FFT}(m^-)|^2 + |\mathrm{FFT}(a)|^2$ 随 B_0 和频率的变化。白色虚线：解析极化激元分支 [方程（6）]；青色点线：未耦合的 ω_c 和 ω_m（B_0）。(b) 提取的峰值频率（圆圈）与解析理论（实线）对比。参数： $\omega_c/(2\pi) = 5$ 吉赫， $Q = 5000$, $g/2\pi = 50$ （ ）兆赫。

磁子频率扫过腔共振频率 [2–4]时，频谱中出现反交叉。我们将 B_0 从 164 扫至 194 毫特斯拉，共分 41 步，经过 $B_{\mathrm{res}} = \omega_c/\gamma \approx 179$ 毫特斯拉。在每个磁场下，使用短高斯脉冲（$\sigma = 20$ 皮秒， $t_0 = 0.1$ 纳秒）激发腔，并以 $\Delta t = 1$ 皮秒的时间步长演化耦合动力学 16 纳秒，得到 $\Delta f = 62.5$ 兆赫的频率分辨率，足以分辨 $2g/(2\pi) = 100$ 兆赫的拉比分裂。选择高斯时间包络，是因为其傅里叶变换同样为高斯形，能够提供平滑的宽带激发，且没有频谱旁瓣；这确保分析窗口内的所有极化激元模式都以相近的振幅受到激发。sinc脉冲 $\eta(t) \propto \mathrm{sinc}[(t - t_0)/\tau]$会产生矩形功率谱，原则上同样适用，但其缓慢衰减的时间振荡可能在有限长度的模拟中引入截断伪影。合成频谱权重|快速傅里叶变换$(m^-)|^2 + |$快速傅里叶变换$(a)|^2$ 如图2(a)所示。

两个极化激元分支在 B_{res}处相互排斥，最小能隙为 $2g/(2\pi) = 100$ 兆赫。模拟得到的谱权重集中在极化激元分支上，并紧密遵循解析曲线 [方程（6），白色虚线] 。提取的峰值频率 [图2(b)]在整个磁场范围内均与理论极化激元色散吻合。

B. 真空拉比振荡

在共振时（$\omega_m = \omega_c$），杂化系统表现出光子与磁振子自由度之间以真空拉比频率 $\Omega_R = 2g$ [1, 23] 进行相干能量交换。我们以 $a(0) = 0.01$初始化腔，并观测其随时间的演化。初始振幅选择得足够小（$|a(0)|^2 = 10^{-4} \ll 1$），以确保系统深处于线性区，使旋波近似和式（4）的线性化耦合仍然有效（$m_z \approx 1$，小角度进动）；同时，初始振幅又足够大，使由此产生的磁化振荡（$\sim 10^{-4}$）明显高于微磁学求解器的数值噪声底。

图 3(a) 显示了光子数 $|a(t)|^2$ 和磁振子振幅 $|m^-|^2$ 在 $g/(2\pi) = 20$ 兆赫下的变化。正如耦合振子模型所预期的那样，这两种粒子数以反相方式振荡，周期为 $T_R = \pi/g = 25$纳秒。缓慢衰减的包络反映了有限线宽 κ 和 γ_m。图 3(b) 证实，对于所有三种测试耦合强度（$g/(2\pi) = 20$、50 和 100 兆赫），模拟得到的拉比周期都与解析预测精确吻合。这种一致性依赖于自洽耦合条件 $h_0 = 2g/\gamma$[式 (5)]：若不满足该条件，拉比频率就会偏离$2g$，因为正向（磁振子→腔）和反向（腔→磁振子）耦合速率不平衡。

C. 协同性相图

协同性 C [式（8）]决定了光子–磁振子杂化是否能在光谱上分辨 [5, 12]。图 4(a) 展示了解析计算得到的 $C(g, \kappa)$ 分布图，其中 $C = 1$ 边界将弱耦合区间与强耦合区间分

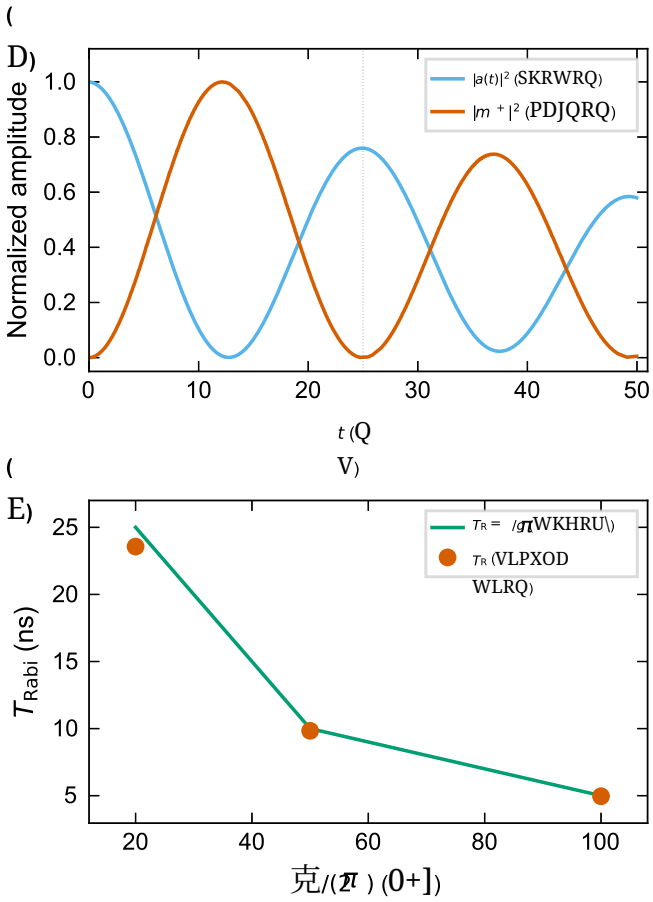


图 3. 真空拉比振荡。(a) 光子（$|a|^2$）和磁振子（$|m^-|^2$）布居随时间的变化，参数为 $g/(2\pi)$ = 20 兆赫，$T_R = 25$（纳秒）。能量在腔与磁振子模之间以拉比周期 $T_R = \pi/g$ 相干振荡，并因有限的 κ 和 α而逐渐衰减。(b) $g/(2\pi) = 20$、50 和 100 兆赫时，拉比周期随耦合强度的变化。圆点：模拟；曲线：解析预测 $T_R = \pi/g$。

隔开。

我们在三个代表性点［（图 4(a) 中的圆点）］进行模拟：

- **弱耦合**：$g/(2\pi) = 0.5$ 兆赫，$\kappa/(2\pi)$ =50 兆赫（$C \approx 0.003$）。在 ω_c 处只有一个窄峰，没有劈裂［（图 4(b) 底部）］。
- **中等耦合**：$g/(2\pi)$ = 10 兆赫，$\kappa/(2\pi) = 10$ 兆赫（$C = 6.7$）。在 4.991 和 5.013 吉赫处出现两个可分辨峰，实测劈裂为 21.3 兆赫，而理论预测值为 $2g/(2\pi) = 20.0$ 兆赫（误差为 6.5%），这证实了 $C > 1$ 产生了光谱可分辨的杂化。
- **强耦合**：$g/(2\pi) = 50$ 兆赫，$\kappa/(2\pi)$ =1 兆赫（$C = 1667$）。两个极化激元峰清晰分离，间距为 $2g/(2\pi) = 100$ 兆赫。

弱耦合和强耦合谱通过以下方式获得：在共振（$\omega_m = \omega_c$）处施加宽带高斯脉冲后，演化 100 纳秒（$\Delta f = 10$ 兆赫）。中等情形需要更高的频率分辨率来解析较小的劈裂：我们演化 200 纳秒，并对快速傅里叶变换应用 4×补零，从而得到有效的频率网格间距 $\Delta f_{\mathrm{grid}} = 1.25$ 兆赫，远低于预期的$2g/(2\pi) = 20$ 兆赫劈裂。三个状态下的谱特征—— $C \ll 1$下无法分辨、 $C > 1$下可以分辨，以及 $C \gg 1$下出现明显劈裂——证实协同仿真正确捕捉到了从弱耦合到强耦合的耗散限制的转变 [7, 14]。

D. 腔模分布效应

腔模与基特尔磁振子之间的耦合取决于它们的空间重叠 [式（10）]。图 5 展示了仿真网格上的三种腔模分布：均匀（$n_x = 0$）、单节点（$n_x = 1$）和双节点（$n_x = 2$）。均匀基特尔磁振子的重叠积分为：对于均匀模式为 $\langle u \rangle = 1.00$，对于两种高阶模均为$\langle u \rangle = 0.00$，这与居中全体积样品的选择定则 [8]一致。

图 6 比较了三种模式分布下随磁场扫描得到的反交叉谱。只有均匀模式轮廓[面板（a）] 产生了反交叉能隙（$2g_{\mathrm{eff}}/(2\pi)$ =100 兆赫），而高阶模式轮廓 [面板（b,c）]则显示磁振子模式与腔模相交且没有相互作用。正如选择定则所预期的，在这一对称几何结构中，均匀基特尔磁振子仅与空间均匀的腔模耦合。原则上，可通过同一框架实现与空间对称性匹配的高阶自旋波模式的耦合 [21, 22]。

E. 多模极化激元杂化

当两个腔模与同一磁振子耦合时，系统本征态为杂化极化激元，其谱可由方程（14）的本征值求得 [10, 11]。我们通过模拟两个频率接近简并的腔模来研究这一情况，它们的频率分别为 $\omega_1/(2\pi) = 4.95$ 吉赫和$\omega_2/(2\pi) = 5.05$ 吉赫（间隔为 $\Delta\omega/(2\pi) = 100$ 兆赫 =$2g$），且均以 $g/(2\pi) = 50$ 兆赫的耦合强度与磁振子耦合。在 $\Delta\omega = 2g$处，中间本征态由两个腔模和磁振子的等量贡献构成（各占~1/3 的权重）。在严格简并极限 $\Delta\omega \to 0$下，磁振子分量消失，中间本征态变为暗光子叠加态（$|a_1\rangle - |a_2\rangle$）$/\sqrt{2}$ [10]。

图 7(a) 显示了当 B_0 扫过 B_{res} ≈178 毫特斯拉附近的共同共振区域时的谱权重图。可以看到三个极化激元分支，并存在相互重叠的反交叉。暗模表现为一条穿过交叉区域、却未与磁振子发生杂化的分支 [图 7(b)]，，这与解析本征值高度一致。

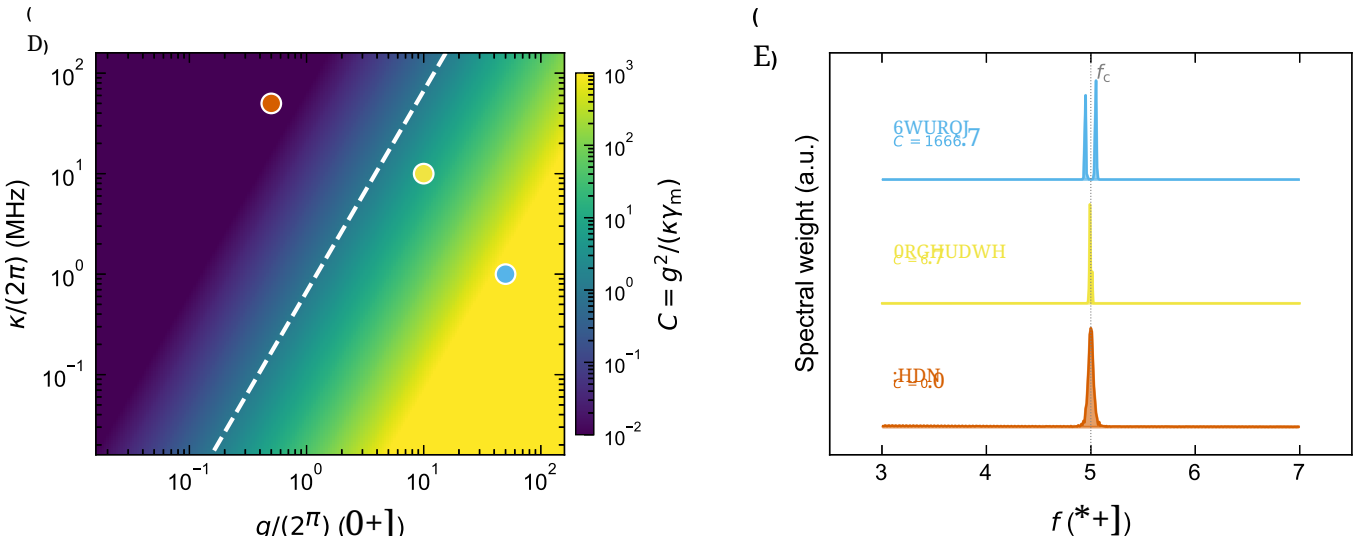


图 4. 协作性相图。(a) 在 (g,κ) 平面上的解析协作性 $C(g,\kappa)$；白色虚线： $C=1$ 边界。圆圈标出三个模拟点。(b) 各种状态下共振处的谱权重（$B_0=B_{\rm res}$）。强耦合（$C=1667$）：两个分辨开的极化激元峰，相隔 $2g/(2\pi)=100$ 兆赫。中等（$C=6.7$）：两个分辨开的峰，劈裂为 21.3 兆赫（理论值：20.0 兆赫）。弱耦合（$C\approx 0$）：单个窄峰，没有可见的劈裂。

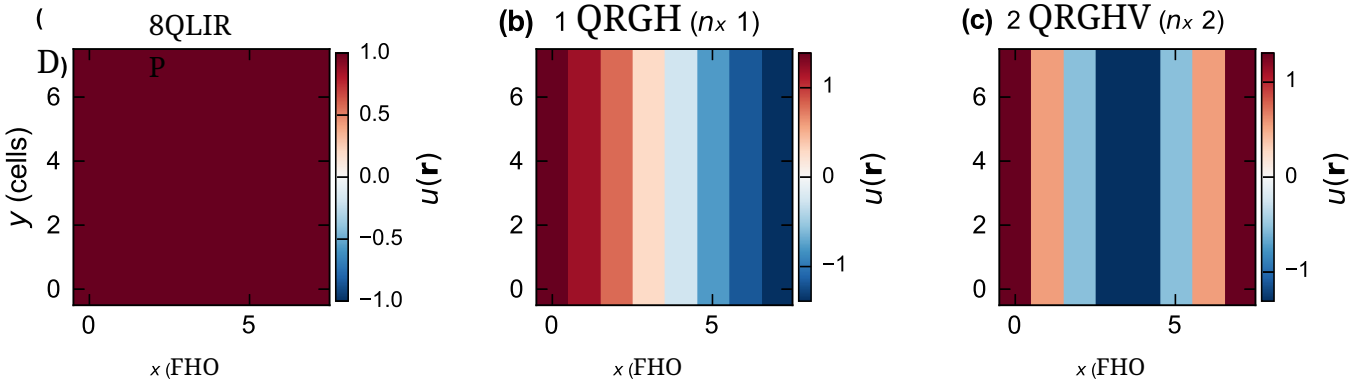


图 5. 8×8 网格上三个腔模的空间分布。(a) 均匀（$n_x=0$）：空间恒定的 $u(\mathbf{r})=1$。(b) 单节点（$n_x=1$）： $u(\mathbf{r})=\cos(\pi x/L_x)$。(c) 双节点（$n_x=2$）： $u(\mathbf{r})=\cos(2\pi x/L_x)$。均匀基特尔磁振子的重叠积分 $\langle u\rangle$ 在 (a) 中为 1.0，在 (b、c) 中则因正负波瓣相消而为零 [式 (10)]。

在中点 $\omega_m=(\omega_1+\omega_2)/2$处，多模式动力学变得清晰可见 [图 7(c)]。当模式 1 初始被激发时 $[a_1(0)=0.01$、$a_2(0)=0]$，三个模式会周期性地交换能量：模式 1 逐渐衰减并激发磁振子，磁振子随后激发模式 2。$|a_1|^2$ 与 $|a_2|^2$ 的反相振荡展示了由磁振子介导的腔间能量传递，这是量子转换方案背后的机制 [6, 10, 11]。在$\Delta\omega=2g$ 处，磁振子作为具有相当振幅的主动中介参与其中；在简并极限$\Delta\omega\ll 2g$下，传递实际上变为虚过程，磁振子保持未被激发状态 [11]。

F. 模式选择性耦合

将空间模场分布（第 IIE 节）与多模框架（第 IIF 节）相结合后，每个腔模都可以针对特定的自旋波模式 [20,21]。我们模拟了两个共存的腔模：TE_{101}（均匀模式轮廓， $\langle u_1\rangle=1$），频率为 $\omega_1/(2\pi)=5.0$吉赫；以及 TE_{102}（单节点模式轮廓，$\langle u_2\rangle=0$），频率为 $\omega_2/(2\pi)=5.3$ 吉赫。两者的裸耦合均为 $g_0/(2\pi)=50$ 兆赫。

图8(a,b)展示了两种模式的空间分布。合并频谱 [图 8(c)] 仅在 ω_1附近出现反交叉，而TE_{102} 模式穿过磁振子线且不发生相互作用。模式分辨频谱 [图8(d,e)] 证实了这一点：TE_{101} 产生完整的反交叉能隙，而TE_{102} 与基特尔模之间没有能隙。图8(f)总结了依赖于重叠

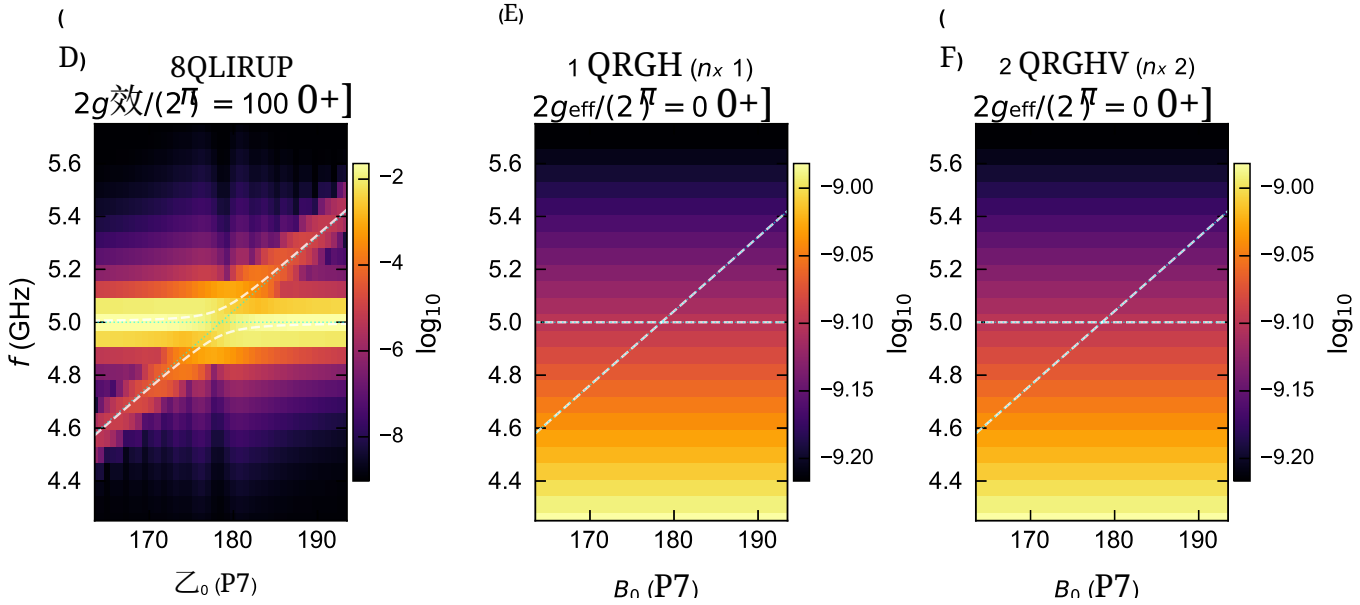


图6. 模式轮廓依赖的反交叉。三个腔体模式轮廓与均匀基特尔磁振子耦合时的谱权重图。(a) 均匀模式轮廓（$\langle u\rangle = 1$）：出现完整反交叉，反交叉能隙为 $2g_{\rm eff}/(2\pi) = 100$ 兆赫。(b) 单节点模式轮廓（$\langle u\rangle = 0$）：无反交叉；磁振子与腔模彼此穿越，不发生相互作用。(c) 双节点模式轮廓（$\langle u\rangle = 0$）：与 (b) 相同。虚线：解析极化激元分支 [式（6）]。参数：$g_0/(2\pi) = 50$ 兆赫，$Q = 5000$。

有效耦合：TE_{101} 以全强度耦合到基特尔模（$g_{\rm eff}/(2\pi) = 50$ 兆赫），但不耦合到更高阶自旋波模式，而TE_{102}仅耦合到 $k = 1$ 驻波自旋波模式。我们强调，图8(c–e)中的协同仿真仅验证了均匀基特尔模耦合（$k = 0$）：对于TE_{101}，$\langle u_1 \cdot \phi_0\rangle = 1$ 给出完全耦合；对于TE_{102}，$\langle u_2 \cdot \phi_0\rangle = 0$ 不产生耦合。这两项结果均由谱图证实。图8(f)中 $k \neq 0$ 模式的重叠积分由模式分布 $\phi_k(\mathbf{r}) = \cos(k\pi x/L_x)$通过$g_{\mathrm{eff},k} = g_0\langle u_n \cdot \phi_k\rangle$解析地 计算得到，尚未经模拟验证。直接模拟高阶腔模与 $k \neq 0$ 自旋波模式之间的耦合需要空间分辨的CUDA 内核（第III A节），其中射频场 $H_{\rm rf}(\mathbf{r}) = h_0\, u_n(\mathbf{r})$ Re$[a_n]$ 逐单元变化，且加权磁化平均 $\langle u_n\, m^-\rangle$取代均匀平均。用于此目的的 CUDA 内核已经完成（第III A节）；将其集成到 mumax⁺构建系统中，即可对$k \neq 0$ 选择定则进行端到端验证。

这种模式选择性是寻址磁振子器件中各个自旋波模式 [20–22]以及实现磁振子数分辨读出的先决条件 [24]。

G. 反铁磁腔磁振子学

为展示该框架处理多亚晶格的能力，我们使用 mumax⁺ [30] 原生的反铁磁体类，将腔与双亚晶格反铁磁体耦合。CavityMagnonAFM子类从 magnet.sub1 中读取亚晶格磁化强度，并从 magnet.sub2 中读取亚晶格磁化强度，构建用于腔耦合的净磁化强度，并独立追踪 N´eel 矢量。所选反铁磁参数（$M_s = 200$kA/m、$K = 100$ J/m^3, 胞内交换 $J_{\rm cell} = -0.390$ pJ/m）使 $f_{\rm AFMR} \approx 5$ GHz 处于标准微波腔可达的吉赫频段；实际反铁磁体通常在太赫兹频率下共振 [33, 34]。

图9(a,b)显示了 mumax⁺ 协同仿真所得的奈尔矢量谱快速傅里叶变换$(n^-)|^2$，其中 B_0 从 0 扫至 50 毫特斯拉。谱峰追踪裸磁振子频率 $\omega_\pm(B) = \omega_{\rm AFMR} \pm \gamma B$，验证了双亚晶格动力学与式（16）一致。由于$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2)/2$ 在亚晶格交换下具有反对称性，因此它不会与均匀腔场耦合，从而展现出没有反交叉能隙的未杂化磁振子色散 [面板（b）]。式（17）给出的极化激元本征值叠加在面板（a）上，标示出腔传输中可能出现反交叉的位置 $|a(\omega)|^2$；依照构造，这种杂化结构在奈尔谱中不可见，而这本身就是反铁磁体独有、没有铁磁对应物的光谱特征。

在 $B = 0$处，简并磁振子模式与腔相干耦合。式(17)的耦合模理论[图9(c)] 预测拉比周期为 $T_R = \pi/(\sqrt{2}\,g)$ ≈7.1纳秒，比铁磁情形–（在 $g/(2\pi) = 50$ 兆赫时为$\pi/g = 10$ 纳秒）短 $\sqrt{2}$ 倍。两个磁振子分支以相等振幅振荡，证实了对称参与。

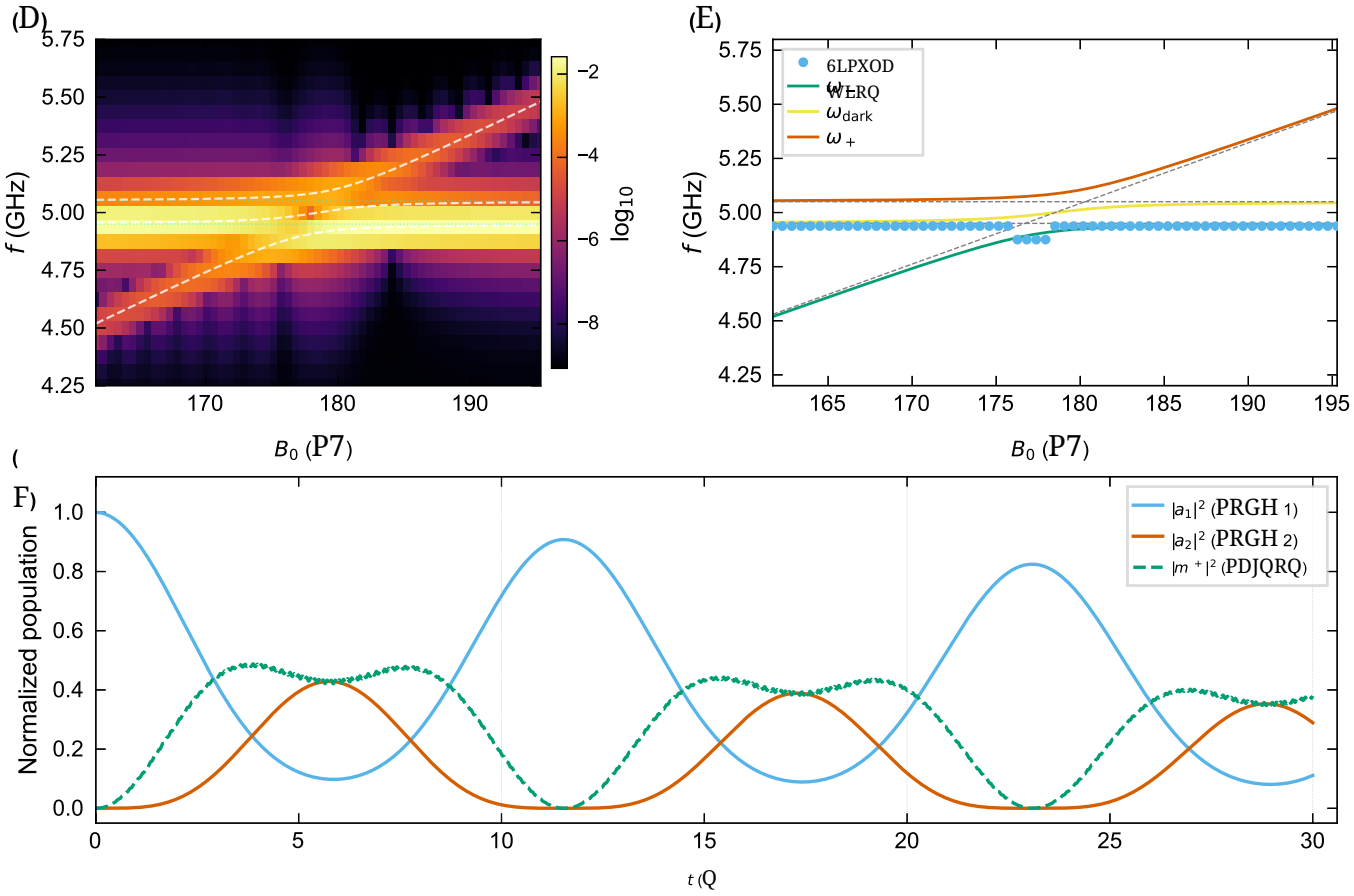


图 7. 两个近简并腔模的多模极化激元杂化（$\omega_1/(2\pi) = 4.95$ 吉赫，$\omega_2/(2\pi) = 5.05$ 吉赫，间隔 $\Delta\omega/(2\pi) = 100$ 兆赫 $= 2g$）与单个磁振子耦合，其 $g_1/(2\pi) = g_2/(2\pi) = 50$ 兆赫。（a）谱权重图显示了三个极化激元分支，并在 $B_{\mathrm{res}} \approx 178$ 毫特斯拉附近出现重叠的反交叉。虚线：3×3 耦合矩阵 [式（14）]的本征值。（b）提取的峰值频率（圆圈）与解析理论的对比。中间分支（ω_{dark}）以最小能隙穿过交叉区域，并在 $\Delta\omega/2g \to 0$时趋近暗态极限。（c）中点处的多模动力学（$\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$）：仅初始激发模式1时，所有三个模式均周期性地交换能量；$|a_1|^2$ 与 $|a_2|^2$ 的反相振荡展示了磁振子介导的腔间能量传递。所有布居均以 max $|a_1|^2$ 归一化。$Q = 5000$（反交叉），$Q = 10\,000$（动力学）。

H. 耗散耦合导致的异常反交叉

标准光子-磁子耦合是相干的（哈密顿型）：耦合常数 g 以纯虚系数 ig进入腔体常微分方程，从而在简并点 [17, 26]产生能级排斥。然而，当耦合通道同时引入反应性（保相）分量和耗散性（移相）分量时，耦合常数会获得实部 [18, 36]:

$$\frac{da}{dt} = (-i\omega_c - \kappa)\, a + (ig + g_d)\, m^- + \eta(t), \qquad (19)$$

其中，g 是相干耦合强度，g_d 是耗散耦合强度。Bhoi等人 [36] 通过实验证明，调节与YIG薄膜耦合的开口环谐振器的几何形状，可以连续调节比值 g_d/g，从而将正常（凸形）反交叉转变为异常（凹形）反交叉。

混合耦合下的极化激元本征频率由 $(\omega - \omega_c + i\kappa)$ $(\omega - \omega_m + i\gamma_m) = \tilde{g}^2$得出，其中有效耦合常数 $\tilde{g} = g - ig_d$ 将常微分方程耦合 $(ig + g_d)$ 映射到本征值问题中。由此可得

$$\tilde{\omega}_\pm = \frac{\tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}_m}{2} \pm \sqrt{\tilde{g}^2 + \left(\frac{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_m}{2}\right)^2}, \qquad (20)$$

其中 $\tilde{\omega}_c = \omega_c - i\kappa$ 和 $\tilde{\omega}_m = \omega_m - i\gamma_m$。对于纯相干耦合（$g_d = 0$），$\tilde{g}^2 = g^2 > 0$，式（20）化简为式（7）：在简并点，实部以 $2\sqrt{g^2 - (\kappa - \gamma_m)^2/4} \approx 2g/(2\pi) = 100$ 兆赫的间距分裂（能级排斥）。对于纯耗散耦合（$g = 0$），$\tilde{g}^2 = -g_d^2 < 0$，因此共振处的判别式为纯虚数。$\tilde{\omega}_\pm$ 的实部收敛至同一频率，而虚部以 $2g_d/(2\pi) = 100$ 兆赫的间距分裂（能级吸引）。

为在协同仿真中展示这一效应，我们重新

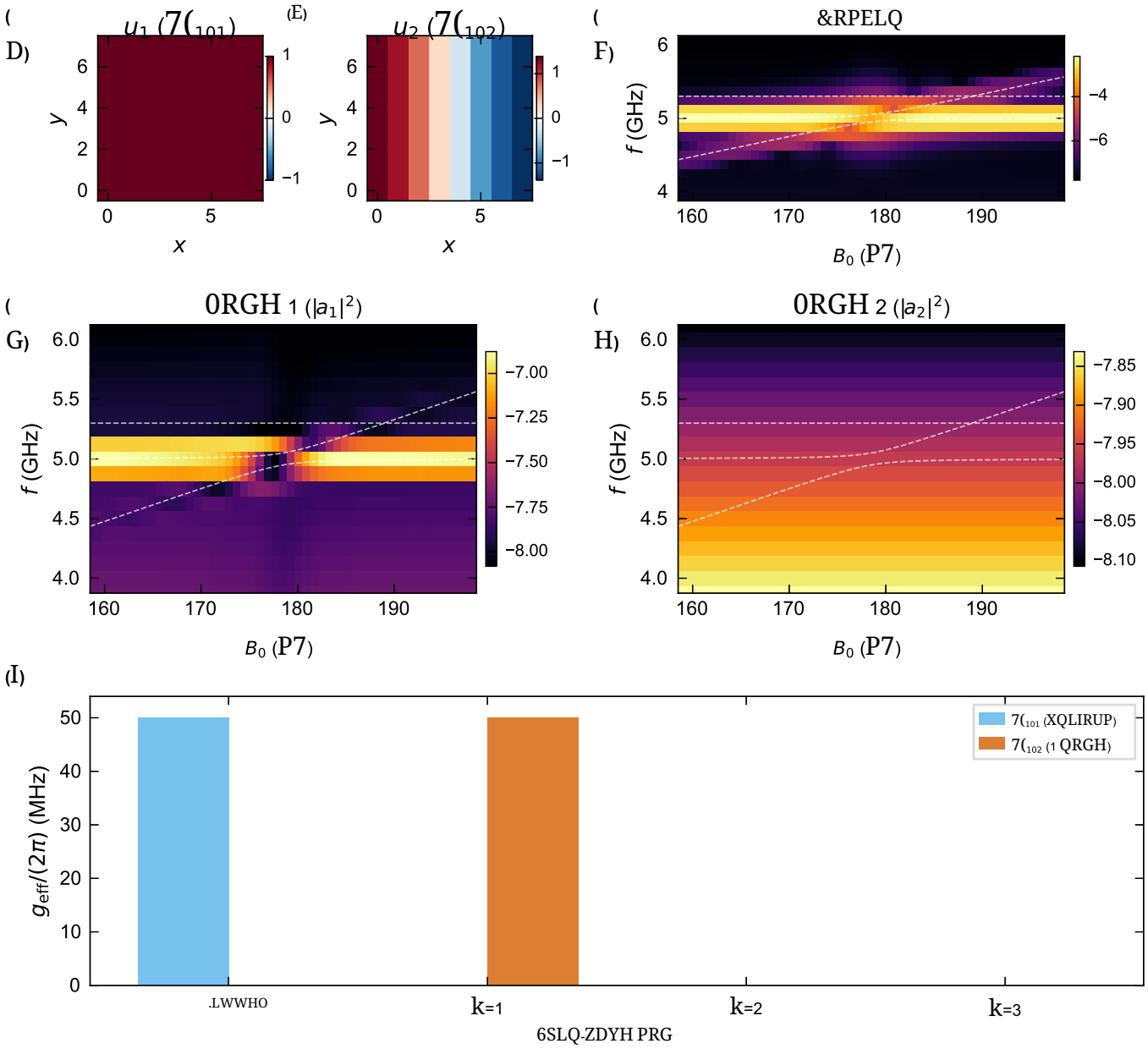


图 8. 通过空间重叠工程实现模式选择性耦合。(a,b) 两个腔模的空间分布：TE_{101} （均匀）和 TE_{102} （单节点）。(c) 两个模式的总谱权重。(d) 模式1（$|a_1|^2$）中的谱权重：在 $B_{res} \approx 179$ 毫特斯拉处与基特尔磁振子发生明显反交叉。(e) 模式2（$|a_2|^2$）中的谱权重：没有反交叉，证实其与基特尔模的重叠为零。(f) 每个腔模与前四个磁振子模之间的有效耦合 $g_{eff}/(2\pi)$。TE_{101} 仅与基特尔模耦合；TE_{102} 与 $k = 1$ 驻波自旋波模耦合。参数： $\omega_1/(2\pi) = 5.0$ 吉赫，$\omega_2/(2\pi) = 5.3$ 吉赫， $g_0/(2\pi) = 50$ 兆赫。

进行第IV A节的扫场方案，涵盖三种耦合机制：(a) 纯相干耦合（$g_d = 0$），(b) 相等的相干耦合与耗散耦合（$g_d = g$），以及 (c) 纯耗散耦合（$g = 0$ $g_d/(2\pi) = 50$ 兆赫）。通过向CavityMagnon类添加单个参数 g diss 来实现耗散耦合，该参数作为方程 (19) 中的实系数代入常微分方程。

图10展示了在 $B_0 = 163.5$–193.5 毫特斯拉范围内进行 21 个点的扫场所得的频谱，扫场条件为 $\omega_c/(2\pi) =$ 5 GHz。纯相干情形 [面板（a）] 再现了图2中的标准反交叉：两条极化激元分支在交叉点（$B_0 \approx 178.4$ 毫特斯拉）处相互排斥，形成 $2g/(2\pi) = 100$ 兆赫的频率间隙，而线宽保持相等。混合情形 [面板（b） $g_d = g$]保留了 100 MHz 的频率间隙，但引入了强烈的线宽不对称性（$\Delta\Gamma/(2\pi) \approx 200$ 兆赫），使得一条极化激元分支变宽，而另一条变得更尖锐。纯耗散情形 [面板（c）] 显示出反

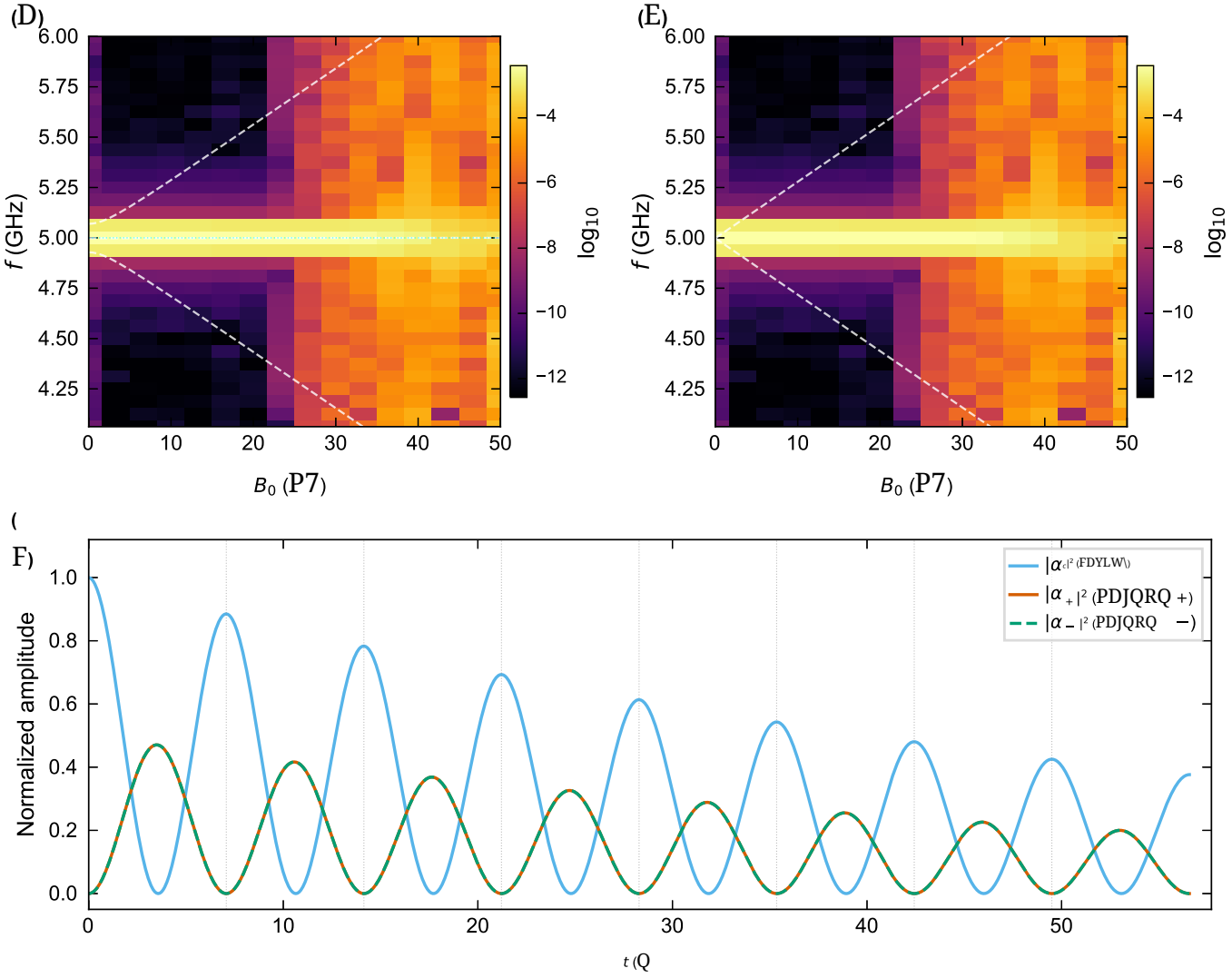


图 9. 反铁磁腔磁振子学。(a) 来自 mumax⁺ 协同仿真的 N´eel 矢量频谱 $|\mathrm{FFT}(n^{-})|^2$。白色虚线：根据公式 (17) 得到的三个极化激元本征值，指示腔传输中反交叉出现的位置；青色点线：裸腔频率 ω_{c0}。N´eel 频谱跟踪磁振子模 $bare\,(B)$，因为 $\boldsymbol{n}$ 不与腔耦合。(b) 相同频谱，叠加了解析结果 $\omega_{\pm}(B) = \omega_{\mathrm{AFMR}} \pm \gamma B$（白色虚线），证实其与公式 (16) 定量吻合。(c) 根据耦合模理论 [公式 (17)]，在 $B = 0$ 处的拉比振荡：$|\alpha_c|^2$（蓝色）、$|\alpha_+|^2$（朱红色）和 $|\alpha_-|^2$（青绿色，虚线）。两个磁振子分支同等参与，拉比周期 $T_R = \pi/(\sqrt{2}\,g) \approx 7.1$ 纳秒短于铁磁体的 $\pi/g = 10$ 纳秒，这是由于两个简并模式相干耦合所致。反铁磁参数：$M_s = 200$ 千安/米，$\mu_0 H_E = 15.9$ 特斯拉，$\mu_0 H_A = 1.0$ 毫特斯拉，$f_{\mathrm{AFMR}} \approx 5.0$ 吉赫。

交叉：在交叉点处，频率间隙闭合为零，而线宽分裂达到$2g_d/(2\pi) = 100$ 兆赫——谱权重集中在交叉点处，而不是从该处排斥开来，色散曲线向内弯曲，这正是能级吸引的标志 [36]。在这三种情形中，模拟谱均与公式（20）的复本征值（白色虚线）一致。

V. 讨论

该扩展提供了两条互补的部署路径。CUDA原生层（multimode cavity.cu、cavity mode profile.cu）将腔体常微分方程作为 DynamicEquation 集成到图形处理器时间步进器中，从而消除每步的主机传输，并通过专用 CUDA 内核实现空间分辨模式分布。这在架构上类似于用于 mumax³ [31], 的 C级腔扩展，但通过模态轮廓加权归约内核 [公式（18）]增加了多模支持和空间分辨耦合。Python协同仿真

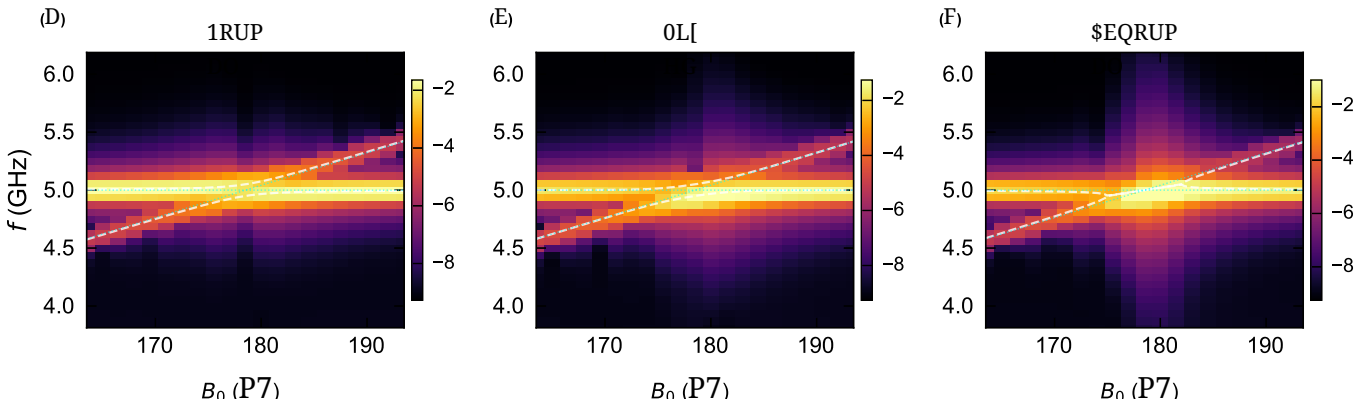


图 10. 正常与反常反交叉。(a) 纯相干耦合（$g_d = 0$）：极化激元分支呈现能级排斥，在共振处的频率间隙为 100 兆赫。(b) 相等的相干与耗散耦合（$g_d = g$）：频率间隙仍然存在，但线宽变得高度不对称。(c) 纯耗散耦合（$g = 0$, $g_d/(2\pi) = 50$ 兆赫）：在交叉点处，频率间隙闭合至零，而线宽发生劈裂（能级吸引）。白色虚线：由公式 (20) 得到的复本征值；青色点线：未耦合的 ω_c 和 $\omega_m(B_0)$。

层无需重新编译即可复现相同的物理过程，而切换腔体模型——非线性克尔项 [15],参量驱动——只需编辑 Python 常微分方程。对于需要空间分辨电磁场的应用（例如大型样品或光子晶体腔），仍有必要采用文献 Ref. [32] 中的完整 FDTD–LLG 方法。

有两项实现选择对于定量准确性至关重要。首先，耦合必须作用于共旋分量 m^- [公式 (1)]；若使用 m^+，则会得到定性相似的反交叉谱，但会在拉比动力学中引入系统误差， [25, 26], 尤其是在接近超强耦合区间时 [13]。其次，需要满足自洽条件 $h_0 = 2g/\gamma$ [公式 (5)]，以确保真空拉比劈裂等于 $2g$，且振荡周期等于 π/g；拉比周期随耦合强度变化的 $1/g$ 标度关系 [图 3(b)] 可作为独立验证。

主要限制由集总腔近似和算符分裂近似决定。射频场被假定在每个仿真单元内空间均匀，当样品远小于腔体波长时该假定成立。在当前模拟中，磁性样品占据一个由10 nm细胞组成的 $8 \times 8 \times 1$ 网格，总样品尺寸为 $80 \times 80 \times 10$ nm^3, ，而5 GHz下的腔体波长为 $\lambda = c/f \approx 6$ cm——比样品大约五个数量级。典型实验用钇铁石榴石球（直径 ∼0.3–1 mm）置于三维微波腔（尺寸∼cm）内，同样满足 $d \ll \lambda$，从而验证了集总腔近似。算符分裂对 Δt为一阶：单步误差为 $\mathcal{O}(g\,\omega_c\,\Delta t^2)$, 来自腔与LLG 子系统之间的对易子项，并在仿真时间 T 上累积为全局误差 $\mathcal{O}(g\,\omega_c\,T\,\Delta t)$。在 $g/(2\pi) = 50$兆赫下的收敛测试（图11）证实了这一标度关系：拉比周期误差从 $\Delta t = 1$ 皮秒时的0.26%线性增长到4皮秒时的2.6%。一个充分的稳定性条件是 $\Delta t < 1/\max(\omega_c, \omega_m)$；在5 GHz下，这给出 $\Delta t < 32$皮秒，远高于默认的1皮秒。不会出现刚性问题，因为腔（$\omega_c \sim 2\pi \times 5$ 吉赫）和磁振子（$\omega_m \sim \omega_c$）子系统在可比的时间尺度上振荡；只有当$\kappa \gg \omega_c$ 或 $g \gg \omega_c$ （超强耦合）时才会出现刚性问题，而这超出了当前旋波近似的适用范围。所有模拟均在 $g/\omega_c \approx 0.01$ 下运行，安全地位于旋波近似（$g/\omega_c < 0.1$）之内；超强极限则需要超越旋波近似 [13]。Python协同仿真层仅读取空间平均磁化，因此只与均匀基特尔模耦合；非均匀自旋波模（$k \neq 0$）需要采用具有空间分辨模式分布的CUDA原生层（第III A节），其内核已实现并验证，但尚未集成到上游mumax$^+$ 构建中。耗散耦合现已通过 g diss参数（第IV H节）得到支持，从而能够模拟异常反交叉和能级吸引现象 [18, 36]。

如 IVG 节所示，通过 mumax$^+$ Antiferromagnet 类，该框架可自然扩展至多子晶格磁体。真实反铁磁体的反铁磁共振频率位于太赫兹范围 [33, 34]；本文采用吉赫参数，是为了直接与铁磁基准比较，并展示场劈裂的磁振子色散及 N´eel 光谱学物理。扩展至补偿亚铁磁体和合成反铁磁体也遵循相同模式，只需使用相应的子晶格交换参数。

在解析本征值图 [图 2(b)、7(b) 和 9(a)] 中，仅显示极化激元频率的实部，对应于厄米极限。通过式 (7)（及其 3×3推广）纳入虚部，将揭示杂化线宽：远离磁振子–腔交叉时，线宽趋近裸值 κ 和 γ_m，而在共振处则平均为（$\kappa + \gamma_m$）/2，这是相干强耦合的标志 [17, 26]。协同仿真谱已在完全普遍的意义上捕捉了这些耗散效应，即通过

LLG 求解器中的吉尔伯特阻尼以及常微分方程中的腔衰减率；提取模拟线宽（例如通过洛伦兹拟合）并与虚部特征值理论进行比较，将提供一项额外的定量基准。

在定量准确性方面：17 兆赫的反交叉均方根误差（占 $2g/(2\pi)$ 的 17%）主要由快速傅里叶变换的频率分辨率决定（在$\Delta t = 1$ 皮秒内执行 16 000 个步骤，分辨率为 $\Delta f = 62.5$ 兆赫），这使峰值定位精度受限于 $\sim \Delta f/2 \approx$ 31 兆赫，与观测到的均方根误差相当。这意味着误差反映的是测量 局限（离散频谱分箱），而非协同模拟的物理不准确性。协同性扫描（模拟 3）直接证明了这一点：将时间轨迹延长至 200 000 个步骤并进行 $4\times$ 补零（$\Delta f_{\text{eff}} = 1.25$ 兆赫）后， $C = 6.7$ 处的实测劈裂提高至 21.3 兆赫，与预测值 20.0 兆赫相比，误差为 6.5%；此时误差受有限线宽而非频率箱宽度限制。同样，由于时域可观测量不受快速傅里叶变换分箱的限制，拉比周期在 $g/(2\pi) = 20$ 兆赫时与 $T_R = \pi/g$ 的偏差在 5.7% 以内，在 100 兆赫时则仅为 0.9%。提高频谱分辨率很简单：延长模拟时间、进行补零或采用洛伦兹峰值拟合，都可以将 Δf 降至所需水平，而无需修改协同模拟本身。

VI. 总结

我们介绍了 mumax⁺ 的双层腔磁振子学扩展：(i) CUDA 内核（multimode cavity.cu、cavity mode profile.cu）¯，可在图形处理器时间步进器中结合空间分辨模式分布，求解 N 模腔体常微分方程；(ii) Python 协同仿真类，可在无需重新编译的情况下快速进行原型设计。八项基准仿真——反交叉谱、拉比振荡、依赖于协同性的线形、模式分布选择规则、多模极化激元杂化、模式选择性自旋波寻址、通过 N´eel 矢量进行反铁磁磁振子光谱，以及由耗散耦合导致的异常反交叉——均与解析理论吻合，误差在快速傅里叶变换频率分辨率范围内。源代码可在 https://github.com/gyuyoungpark/mumax-plus-extensions 获取。

致谢

本研究由韩国科学技术研究院（KIST）机构项目资助。

代码可用性

mumax⁺ 的完整开源代码可在 https://github 上获取，采用 GPLv3 许可证。

表 I. 八项基准测试的模拟参数。通用材料（模拟 1–6、8）：钇铁石榴石（$M_s = 140$ kA/m、$A_{\text{ex}} = 3.5$ pJ/m、 $\alpha = 3 \times 10^{-4}$）。除模拟 7（$\Delta t = 4$ ps）外，均使用 $\Delta t = 1$ ps。 *中等情况（模拟 3b）：执行 200k 步，并采用 $4\times$ 补零（$\Delta f_{\text{grid}} = 1.25$ 兆赫）来分辨 20 MHz 的劈裂。 †模拟 8 涵盖三个耦合区间：纯相干（$g/(2\pi) = 50$ MHz、 $g_d = 0$）、混合（$g_d = g$）和纯耗散（$g = 0$, $g_d/(2\pi) = 50$ MHz）。

Sim	$\omega_c/(2\pi)$ (吉赫)	Q	$g/(2\pi)$ (兆赫)	步骤	Δf (兆赫)
1	5.0	5000	50	16 000	62.5
2	5.0	10 000	20–100	40–50k	—
3	5.0	不定	0.5–50	100k/200k*	10/1.25*
4	5.0	5000	50	16 000	62.5
5	4.95, 5.05	5000	50	16 000	62.5
6	5.0, 5.3	5000	50	8 000	125
7	5.0	5000	50	4 000	62.5
8†	5.0	5000	0/50	16 000	62.5

模拟 7 使用反铁磁材料：$M_s = 200$ kA/m、$K = 100$ J/m^3、$\alpha = 10^{-3}$ $J_{\text{cell}} = -0.390$ $a_{\text{lat}} = 0.35$ $A_{\text{ex}} = 3.5$ 、pJ/m、nm、pJ/m。

mumax⁺ 的完整开源代码可在 https://github.com/mumax/plus。本研究开发的扩展源代码——包括 CUDA 内核、Python 协同仿真类以及所有基准模拟脚本——可在 https://github.com/gyuyoungpark/mumax-plus-extensions 获取。

[1] ¨O. O. Soykal 和 M. E. Flatt´e, 《物理评论快报》**104**, 077202（2010 年）。[2] H. Huebl、C. W. Zollitsch、J. Lotze、F. Hocke、M. Greifenstein、A. Marx、R. Gross 和 S. T. B. Goennenwein, 《物理评论快报》**111**，127003（2013 年）。[3] Y. Tabuchi、S. Ishino、T. Ishikawa、R. Yamazaki、K. Us- ami 和 Y. Nakamura, 《物理评论快报》**113**，083603（2014 年）。[4] X. Zhang、C.-L. Zou、L. Jiang 和 H. X. Tang, 《物理评论快报》**113**，156401（2014 年）。[5] M. Goryachev、W. G. Farr、D. L. Creedon、Y. Fan、M. Kostylev 和 M. E. Tobar, 《物理评论·应用》**2**, 054002（2014）。[6] Y. Tabuchi、S. Ishino、A. Noguchi、T. Ishikawa、R. Ya- mazaki、K. Usami 和 Y. Nakamura, 《科学》**349**，405（2015）。[7] L. Bai、M. Harder、Y. P. Chen、X. Fan、J. Q. Xiao 和 C.-M. Hu, 《物理评论快报》**114**, 227201（2015）。[8] Y. Cao、P. Yan、H. Huebl、S. T. B. Goennenwein 和 G. E. W. Bauer, 《物理评论B辑》**91**, 094423（2015）。[9] B. Zare Rameshti、Y. Cao 和 G. E. W. Bauer, 《物理评论B辑》**91**，214430（2015）。[10] X. Zhang、C.-L. Zou、N. Zhu、F. Marquardt、L. Jiang 和 H. X. Tang, 《自然·通讯》**6**，8914（2015）。

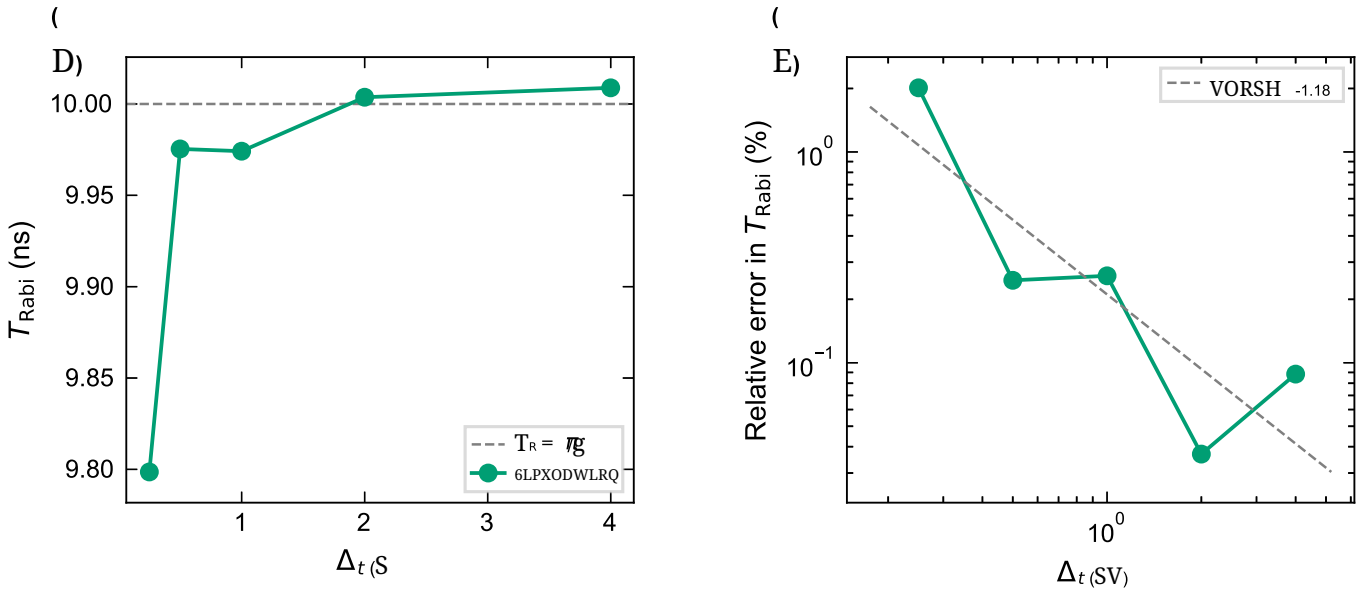


图11. 算子劈裂收敛性。(a) 提取的拉比周期 T_{Rabi} 与时间步长 $\Delta t = 0.25$–4 ps的关系，条件为 $g/(2\pi) = 50$兆赫；虚线：解析值 $T_R = \pi/g = 10$ 纳秒。(b) 提取的拉比周期相对于 Δt的相对误差。对于所有测试步长，误差均保持在3%以下；默认的 $\Delta t = 1$ ps给出0.26%的误差。

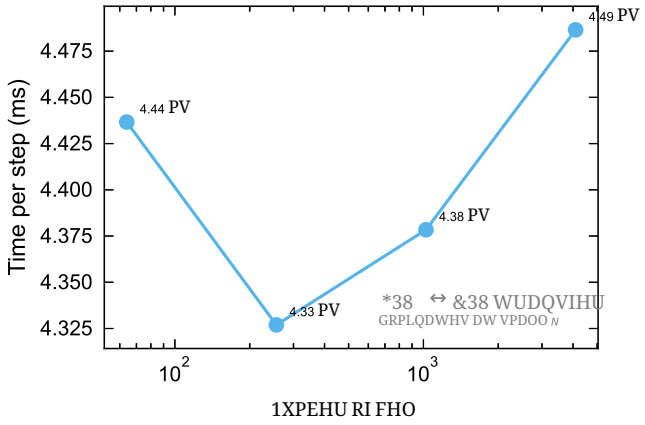


图12. 计算扩展性。每个联合模拟步的墙钟时间与网格单元数的关系（从 8×8 到 64×64）。在所测试范围内，每步代价大致保持在 ∼4.4 ms不变，证实对于这些网格尺寸，图形处理器↔CPU传输与Python开销相对于GPU LLG计算占主导。

[11] N. J. Lambert、J. A. Haigh 和 A. J. Ferguson，《应用物理学杂志》**117**，053910（2015）。[12] J. Bourhill、N. Kostylev、M. Goryachev、D. L. Creedon 和 M. E. Tobar，《物理评论B辑》**93**，144420（2016）。[13] N. Kostylev、M. Goryachev 和 M. E. Tobar，《应用物理快报》**108**，062402（2016）。[14] H. Maier-Flaig、M. Harder、R. Gross、H. Huebl 和 S. T. B. Goennenwein，《物理评论B辑》**94**，054433（2016）。[15] Y.-P. Wang、G.-Q. Zhang、D. Zhang、T.-F. Li、C.-M. Hu 和 J. Q. You，《物理评论B辑》**94**，224410（2016）。[16] D. Zhang、X.-Q. Luo、Y.-P. Wang、T.-F. Li 和 J. Q. You，《自然·通讯》**8**，1368（2017）。[17] M. Harder 和 C.-M. Hu，见 *Solid State Physics*，第 69 卷，R. E. Camley 和 R. L. Stamps 编（Academic Press，2018），第 47–121 页。[18] M. Harder、Y. Yang、B. M. Yao、C. H. Yu、J. W. Rao、Y. S. Gui、R. L. Stamps 和 C.-M. Hu，《物理评论快报》**121**，137203（2018）。[19] D. Lachance-Quirion、Y. Tabuchi、A. Gloppe、K. Us- ami 和 Y. Nakamura，Appl. Phys. Express **12**，070101（2019）。[20] G. Flower、M. Goryachev、J. Bourhill 和 M. E. Tobar，New J. Phys. **21**，095004（2019）。[21] Y. Li、T. Polakovic、Y.-L. Wang、J. Xu、S. Lendinez、Z. Zhang、J. Ding、T. Khaire、H. Saglam、R. Divan、J. Pearson、W.-K. Kwok、Z. Xiao、V. Novosad、A. Hoff- mann 和 W. Zhang，《物理评论快报》**123**，107701（2019）。[22] J. T. Hou 和 L. Liu，《物理评论快报》**123**，107702（2019）。[23] T. Wolz、A. Stehli、A. Schneider、I. Boventer、R. Macedo、A. V. Ustinov、M. Kl¨ aui 和 M. Weides，Commun. Phys. **3**，3（2020）。[24] D. Lachance-Quirion、S. P. Wolski、Y. Tabuchi、S. Kono、K. Usami 和 Y. Nakamura，《科学》**367**，425（2020）。[25] M. Harder、B. M. Yao、Y. S. Gui 和 C.-M. Hu，J. Appl. Phys. **129**，201101（2021）。[26] B. Zare Rameshti、S. Viola Kusminskiy、J. A. Haigh、K. Usami、D. Lachance-Quirion、Y. Nakamura、C.- M. Hu、H. X. Tang、G. E. W. Bauer 和 Y. M. Blanter，Phys. Rep. **979**，1（2022）。[27] C. Kittel，《物理评论》**73**，155（1948）。[28] L. R. Walker，《物理评论》**105**，390（1957）。[29] A. Vansteenkiste、J. Leliaert、M. Dvornik、M. Helsen、F. Garcia-Sanchez 和 B. Van Waeyenberge，AIP Ad- vances **4**，107133（2014）。[30] L. Moreels、I. Lateur、D. De Gusem、J. Mulkers、J. Maes、M. V. Milo˘sevi´c、J. Leliaert 和 B. Van Waeyenberge，

npj Comput. Mater. **12**，71（2026）。[31] S. Mart´ınez-Losa del Rinc´on、J. Rom´an-Roche、A. Mart´ın-Megino、D. Zueco 和 M. J. Mart´ınez- P´erez，arXiv:2410.00966（2024）。[32] Z. Yao、R. Jambunathan、Y. Zeng 和 A. Nonaka，国际高性能计算与应用期刊**36**，167（2022）。[33] F. Keffer 和 C. Kittel，《物理评论》**85**，329（1952）。

[34] T. Kampfrath、A. Sell、G. Klatt、A. Pashkin、S. M¨ ahrlein、T. Dekorsy、M. Wolf、M. Fiebig、A. Leitenstorfer 和 R. Huber，《自然·光子学》**5**，31（2011）。[35] M. Bia-lek、W. Knap 和 J.-Ph. Ansermet，《物理评论·应用》**19**，064007（2023）。[36] B. Bhoi、B. Kim、S.-H. Jang、J. Kim、J. Yang、Y.-J. Cho 和 S.-K. Kim，《物理评论B辑》**99**，134426（2019）。