arXiv:2603.03712v1 [cs.CR] 4 Mar 2026

互联网恶意软件传播：通过具有复发和干预的SEIRV流行病模型研究动力学与控制

SamiranGhosh[a,1] **V Anil Kumar**[a]

[a] CSIR第四范式研究所，风洞路，班加罗尔 - 560037，印度

摘要。 当今庞大的数字生态系统中，恶意软件攻击构成了严重威胁。因此，理解恶意软件传播动力学并设计有效的控制策略至关重要。在本研究中，我们提出了一种基于常微分方程构建的通用SEIRV模型，用于研究恶意软件传播。我们证明了系统的正性和有界性，推导出恶意软件传播阈值，并分析无恶意软件平衡点的局部和全局稳定性。我们确定了控制空间中界定流行区域的分界线，并证明了向前分岔的存在。利用归一化前向敏感性指数，我们确定了对传播阈值影响最大的参数。我们进一步考察了关键流行病学特征对传播率的非线性依赖关系，包括最大感染人数、感染峰值时间和感染者总数。我们提出了一种结合模拟退火方法的混合梯度全局优化框架，以确定有效且经济的控制策略。最后，我们利用“含PE API调用的Windows恶意软件数据集”中的感染数据对所提出的模型进行校准，并研究干预开始时间对避免的病例数的影响，发现延迟干预与避免的病例数之间存在指数衰减关系。

关键词： 恶意软件传播；流行病模型；SEIRV模型；动力系统；舱室模型；混合梯度优化；模拟退火

1 引言

物联网可定义为一个由智能物体组成的网络，这些物体能够自主组织、共享信息并适应环境变化 [35]。它们配备了特定的

[1] Co通讯作者。电子邮箱：samiran.4pi@csir.res.in

功能，例如传感器、软件、处理单元和通信能力，物联网设备已成为日常生活中不可或缺的一部分。物联网设备的数量呈指数级增长，其应用遍及智能家居、可穿戴技术、医疗保健、远程监控设备、交通系统等多个领域。过去十年，全球物联网设备数量呈指数级增长。图 1 展示了全球物联网连接设备数量以及针对物联网设备的攻击数量不断上升的趋势。

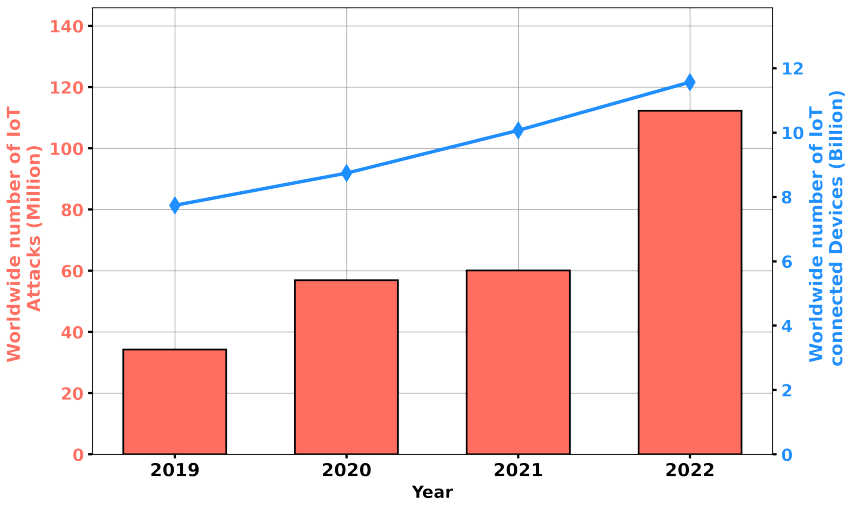


图 1：全球物联网攻击数量和物联网连接设备数量分别以红色柱形和蓝色折线表示。红色柱形对应左侧纵轴，蓝色折线对应右侧纵轴。这些数据的参考文献为[31, 14]。

保障这个庞大且不断发展的数字生态系统的安全仍是一项重大关切，因为网络攻击持续构成严重威胁。图 1展示了物联网网络攻击不断上升的趋势，以及物联网连接设备数量的关键统计数据。这些物联网设备之所以容易受到攻击，既有技术局限性的原因，也与人类行为有关。由于使用默认凭据、缺乏强大的安全功能以及未能定期进行软件更新，这些设备可能会感染恶意软件。物联网网络中的恶意软件传播通常始于攻击者通过命令与控制（C&C）服务器进行通信，随后该服务器将恶意软件传播到已感染的物联网设备，并进一步扩散至其他易受攻击的设备（见图 2）。物联网设备常见的恶意软件攻击类型包括勒索软件、病毒、蠕虫、僵尸程序、特洛伊木马等。 [37]。攻击者利用勒索软件锁定设备，并要求支付赎金以恢复设备。僵尸程序试图远程控制设备并组成僵尸网络，用于发起大规模攻击，例如分布式拒绝服务攻击。特洛伊木马会伪装成合法程序，诱使用户安装，实际上却具有恶意。蠕虫能够在网络中自动复制和传播，并感染设备。病毒则通过注入可复制的恶意代码来感染文件或软件，并

通过受感染的文件或软件传播到其他设备。根据统计数据，勒索软件攻击每 10 秒就会发生一次；截至 2023年，超过 70% 的公司遭受过此类攻击[28]。这些频繁且令人担忧的攻击预示着网络世界将蒙受巨大的全球损失。

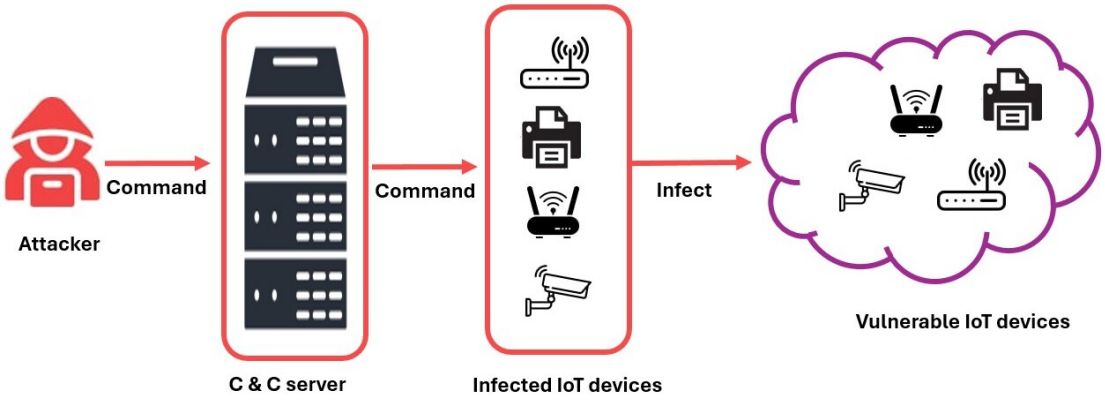


图2：物联网设备中的感染传播。

要更好地控制恶意软件传播，就有必要了解物联网设备网络中的恶意软件传播动力学。与生物流行病类似，物联网网络中的恶意软件传播可以使用成熟的生物流行病理论进行建模。具体而言，SI（易感 → 感染者）、SIR（易感 → 感染者 → 康复）和 SEIR（易感 → 暴露 → 感染者 →康复）模型被用于描述恶意软件传播 [11, 47, 1]。通过引入活跃阶段、休眠阶段、免疫阶段、用户意识、警报机制等其他方面构建的更复杂模型，也已得到研究，以捕捉更具体的特征 [41, 46, 2, 17]。若干研究聚焦于恶意软件传播的控制策略，并使用庞特里亚金极大值原理（PMP）求得局部最优控制 [21, 18, 34]。下一节将对相关文献进行详细综述。据我们所知，该领域仍存在以下一些研究空白：

- 在恶意软件传播的背景下，流行病进程的若干关键特征，例如最大感染人数、达到最高感染水平所需的时间，以及控制参数空间中的流行病增长区域，在生物流行病研究中已得到充分认识，但在恶意软件传播领域尚未得到深入研究。

- 尽管现有文献中已有关于恶意软件传播最优控制的研究，但我们发现，大多数现有工作依赖于诸如庞特里亚金极大值原理之类的局部优化技术。然而，这些局部优化技术高度依赖于控制参数的初始猜测，尤其是当代价函数为非凸时。在这种情况下，局部最优控制很有可能不同于全局最优控制。由于多舱室流行病

模型高度非线性，相应的成本函数往往是非凸的。因此，局部优化方法可能无法达到全局最优解。

本文重点弥补恶意软件传播理论中的上述空白。本研究的主要贡献如下：

- 提出一个通用的 SEIRV（易感者 → 暴露者 → 感染者 → 康复者 → 接种者）模型，用于描述恶意软件传播的特征；证明该模型的适定性，并推导恶意软件传播阈值的解析表达式。
- 研究无恶意软件平衡点和地方病平衡点的稳定性，以及前向分岔的存在性。
- 利用归一化前向敏感性指数，识别模型中对恶意软件传播阈值影响最大的参数。
- 研究传播率和控制参数对重要流行病特征的影响，例如最大感染人数、感染峰值时间，以及控制参数空间中的流行病增长区域。
- 开发一种混合梯度模拟退火全局优化算法，可应用于多舱室 SEIRV 型模型，以获得全局最优控制。
- 通过将感染数量拟合到从“WindowsMalwareDataset with PE API Calls”获得的病毒传播数据，校准所提出的模型 [9, 29]。

本文其余部分组织如下：在第2节，我们简要介绍相关流行病模型的文献综述。在第3节，我们建立该模型，证明其正性与有界性，推导恶意软件传播阈值及流行病增长区域的解析表达式，并研究无恶意软件平衡点与地方病平衡点的稳定性。在第4节，我们提出一种基于梯度的混合全局优化方法。采用数值模拟得到的模型结果在第5节中讨论。所提出的模型在第6节中使用Windows恶意软件数据集进行校准。最后，结论在第7节给出。

2 Epid流行病模型：从生物流行病到网络疫情

用于描述生物流行病传播动力学的数学模型基础，由 D. Bernoulli 于 18 世纪奠定，并由 W. O. Kermack 和 A. G. McKendrick 在 20 世纪初进一步发展 [25, 26, 27]。此后，流行病建模领域出现了多项进展，用于描述和控制生物流行病[7, 22, 33, 4]。

上世纪末，Cohen 和 Murray 提出，可以利用生物疫情模型分析网络世界中的恶意软件传播 [12, 38]。1991年，Kephart 和 White 首次提出易感-感染-易感模型（易感 $\rightarrow$感染者 $\rightarrow$易感），用于研究网络系统中的恶意软件传播 [24]。在此之后 [24], ，网络世界中的流行病建模也取得了多项进展。

基于多舱室流行病模型的概念，研究人员针对多种类型的网络提出了模型，例如物联网网络 [32, 16], 对等网络[42, 15], 无标度网络 [19, 13], 和 Wi-Fi网络 [30]。文献 [44]探讨了将博弈论方法用于流行病建模。

网络在多个维度上呈现异质性，例如 (a) 用户层异质性、(b) 设备层异质性和 (c) 软件层异质性。A. Alexeev 等人研究了这种异质性对恶意软件传播的影响[3]。此外，先进的网络架构包含多种拓扑结构，文献 [20]分析了网络拓扑的影响。近年来，研究人员还开始将机器学习技术与舱室流行病模型相结合，以更好地了解恶意软件的传播进程 [43]。此外，文献 [36], 中的作者将随机性纳入舱室模型，以考虑物联网僵尸网络传播过程中的不确定性。文献 [10]介绍了针对特定链路类型（例如，基于基础设施的（INF）、设备到设备（D2D）等）和特定恶意软件类型（例如，物联网（IoT）恶意软件、无线传感器网络（WSN）恶意软件）的 SIR 型多舱室模型的若干进展。

恶意软件传播的最优控制是网络疫情研究中的一个重要领域。广义而言，控制策略分为两类：对易受攻击设备进行疫苗接种，以及对感染设备进行治疗。文献 [21]中的作者利用庞特里亚金极大值原理（PMP），研究了确定性模型中的最优控制问题。此外，诸如文献 [18, 34] 等研究也利用 PMP 探讨了各种控制策略。据我们所知，现有网络疫情文献大多采用 PMP 等局部优化方法；这类方法对初始猜测较为敏感，且可能无法处理非凸成本函数。受这一局限性的启发，本文旨在针对分舱流行病模型开发一种基于梯度的模拟退火全局优化算法，以获得更加可靠的控制解。

3 SEIRV 模型的构建

本节将建立一个由常微分方程（ODEs）系统构成的多舱室流行病模型，用于描述物联网设备中的恶意软件传播。本文采用一个详细的 SEIRV型模型，以准确捕捉自传播恶意软件在物联网设备中的动态变化。物联网设备的总人口记为 $N(t)$，该数值并非固定不变，而是会随新设备加入人口以及设备因老化而自然死亡而变化。设备总人口随后被划分为若干舱室，例如易感者（$S(t)$）、暴露者（$E(t)$）、感染者（$I(t)$）、康复者（$R(t)$）和接种疫苗者（$V(t)$）。请注意，我们不考虑

人口统计中的自然死亡设备，并且对于所有时间 $t \geq 0$， $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + V(t)$。下面简要介绍人口的不同舱室：

易感（$S(t)$）： 易受恶意软件攻击的设备。设备可能因未安装补丁、使用默认凭据或存在其他安全漏洞而易受恶意软件攻击。

暴露（$E(t)$）： 已感染但尚未将感染传播给其他设备的设备。该舱室主要用于体现因等待恶意软件通过命令与控制（C&C）服务器激活而产生的时间延迟。

感染者（$I(t)$）： 已感染且能够成功将感染传播给其他设备的设备。在该舱室中，设备已被恶意软件完全攻陷。这些设备可能成为僵尸网络的一部分，并扫描网络以传播恶意软件。

康复（$R(t)$）： 已安装补丁、完成安全加固或清除恶意软件的设备。这些设备会立即获得免疫力；然而，由于恶意软件不断演变，若用户在重新安装软件或升级软件后未能保护设备，设备仍可能再次变为易感状态。

接种疫苗（$V(t)$）： 不会受到恶意软件威胁、且在易感阶段通过疫苗接种得到保护的设备。

在每个实时时刻 t，新设备会以速率 Λ凭借其默认凭据加入易感群体，而设备也会因设备老化以速率 μ自然死亡。一旦恶意软件成功进入物联网网络，易感设备就会因与感染设备交互而以速率 β暴露。随后，暴露设备经过一定时间延迟后，会以速率 α变为具有传染性。从易感舱室和暴露舱室中，设备也可能直接以速率 η_1 和 η_2 分别进入康复舱室，前提是用户自行重置默认凭据或重置设备。在此，我们考虑两种标准且广泛采用的控制策略：为易感设备接种疫苗，以及治疗感染设备；其中，“疫苗接种”指对易受攻击设备进行免疫，以降低其易感性；“治疗”则指对已感染设备进行消毒或使其康复。易感设备以速率 c_1接种疫苗，并可能以速率 σ_2失去免疫力。感染设备通过治疗以速率 c_2康复。如果用户未能保护其系统免受恶意软件不断演变的威胁，康复设备可能会失去免疫力，并以速率 σ_1 重新加入易感群体。这种传播动态如图3 所示，其控制常微分方程组如下：

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \eta_1 S(t) + \sigma_1 R(t) + \sigma_2 V(t) - c_1 S(t) - \mu S(t), \tag{3.1a}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \eta_2 E(t) - \mu E(t), \tag{3.1b}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - c_2 I(t) - \mu I(t), \tag{3.1c}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \eta_1 S(t) + \eta_2 E(t) + c_2 I(t) - \sigma_1 R(t) - \mu R(t), \tag{3.1d}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = c_1 S(t) - \sigma_2 V(t) - \mu V(t), \tag{3.1e}$$

初始条件为：$S(0) = S_0 \geq 0$，$E(0) = E_0 \geq 0$，$I(0) = I_0 \geq 0$，$R(0) = R_0 \geq 0$，以及 $V(0) = V_0 \geq 0$.

模型（3.1）中涉及的所有参数值均假定为非负。参数的详细说明列于表1。值得注意的是，表 1 中的参数值仅用于说明，因为本研究旨在探讨恶意软件传播的定性特征，并开发有助于未来相关研究的方法。然而，参数值取自现有文献中的默认值，详见表 1。

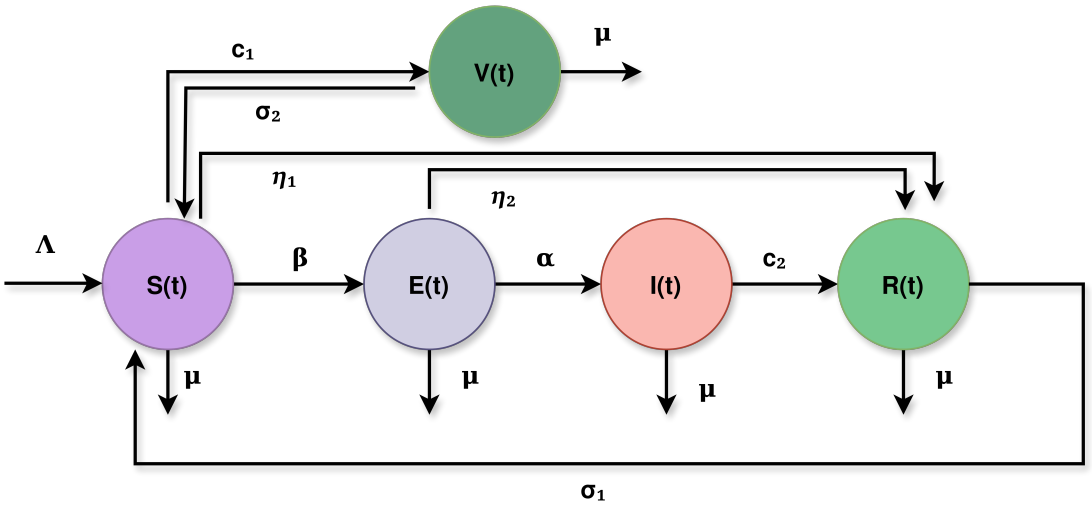


图3：模型（3.1）的示意图。

3.1 正性与有界性

设备总数必须始终保持非负且有界。因此，确保控制系统 (3.1) 满足这两个性质至关重要。利用 [48], 中的方法，我们证明系统 (3.1) 的正性。设，$X(t) = (S(t)\ E(t)\ I(t)\ R(t)\ V(t)) \in \mathbb{R}^5_{0+}$. 于是

$$\left.\frac{dS(t)}{dt}\right|_{S(t)=0, X(t)\in\mathbb{R}^5_{0+}} = \Lambda + \sigma_1 R(t) + \sigma_2 V(t) \geq 0, \quad \left.\frac{dE(t)}{dt}\right|_{E(t)=0, X(t)\in\mathbb{R}^5_{0+}} = \beta S(t) I(t) \geq 0,$$

$$\left.\frac{dI(t)}{dt}\right|_{I(t)=0,X(t)\in\mathbb{R}^5_{0+}} = \alpha E(t)\geq 0, \quad \left.\frac{dR(t)}{dt}\right|_{R(t)=0,X(t)\in\mathbb{R}^5_{0+}} = \eta_1 S(t)+\eta_2 E(t)+c_2 I(t)\geq 0,$$
$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{V(t)=0,X(t)\in\mathbb{R}^5_{0+}} = c_1 S(t)\geq 0.$$

因此，这证明 $\mathbb{R}^5_{0+}$ 在系统 (3.1) 下是不变的。为证明解的有界性，我们将 (3.1) 中的所有方程相加，得到：

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t),$$

其中，$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + V(t)$。这意味着

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + \left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right) e^{-\mu t} \leq \max\left\{N(0), \frac{\Lambda}{\mu}\right\} =: \widetilde{N}, \quad \forall t > 0.$$

这表明，在每个时间点，t 设备总数都有界。

参数	描述	取值范围	来源
β	恶意软件传播率	4×10^{-9}	[16]
α	E 到 I 传播率	0.25	[16]
Λ	新接入设备的速率	0.2292×10^6	[16]
η_1	从 S 开始的平均迁移率 R 在僵尸网络增长和衰退阶段的衰退阶段	0.10415	[16]
η_2	从 E 到的平均迁移率 R 在僵尸网络增长和衰退阶段的衰退率	0.10415	[16]
σ_1	从 R 到 S的复发率	0.00417	[16]
σ_2	从 V 到 S的迁移率	0.00417	假设
c_1	易感设备的疫苗接种率 设备	(0, 1)	假设
c_2	感染者的治疗率 设备	(0, 1)	假设
μ	设备自然死亡率	0.0004	[40]

表1：模型参数的详细信息及其对应值。

3.2 无恶意软件平衡点

在本小节中，我们推导系统（3.1）的无恶意软件稳态，并确定其稳定性。在网络疫情的背景下，无恶意软件平衡点（MFE）代表一种稳定的网络状态，其中没有设备遭到入侵或受到攻击——也就是说，

不存在活跃的感染系统。这种情况可能对应于恶意软件已被成功清除，或预防措施（如防火墙、补丁和防病毒系统）已有效遏制疫情暴发。我们通过令导数为零并求解以下代数方程组，求得无恶意软件平衡点（MFE）：

$$\Lambda - \beta S(t)I(t) - \eta_1 S(t) + \sigma_1 R(t) + \sigma_2 V(t) - c_1 S(t) - \mu S(t) = 0, \tag{3.4a}$$
$$\beta S(t)I(t) - \alpha E(t) - \eta_2 E(t) - \mu E(t) = 0, \tag{3.4b}$$
$$\alpha E(t) - c_2 I(t) - \mu I(t) = 0, \tag{3.4c}$$
$$\eta_1 S(t) + \eta_2 E(t) + c_2 I(t) - \sigma_1 R(t) - \mu R(t) = 0, \tag{3.4d}$$
$$c_1 S(t) - \sigma_2 V(t) - \mu V(t) = 0. \tag{3.4e}$$

在无恶意软件平衡点（MFE）处，我们假设不存在暴露个体或感染个体，即 $E = I = 0$. 然后求解系统（3.4），可得到无恶意软件平衡点（MFE） $\mathcal{E}^0 = (S^0,\ E^0,\ I^0,\ R^0,\ V^0)$，其表达式为:

$$\begin{aligned} S^0 &= \frac{\Lambda}{\eta_1 - \frac{\sigma_1\eta_1}{\sigma_1+\mu} + c_1 + \mu - \frac{c_1\sigma_2}{\sigma_2+\mu}}, \\ E^0 &= 0, \quad I^0 = 0, \\ R^0 &= \frac{\eta_1 S^0}{\sigma_1+\mu}, \quad V^0 = \frac{c_1 S^0}{\sigma_2+\mu}. \end{aligned}$$

要使无恶意软件平衡点 $\mathcal{E}^0$具有可行性， $\mathcal{E}^0$的所有分量都应为非负数。显然，对于任意正的参数值， E^0、 I^0、 R^0 和 V^0 均为非负数。此外， S^0 的分母可写为 $\eta_1 - \frac{\sigma_1\eta_1}{\sigma_1+\mu} + c_1 + \mu - \frac{c_1\sigma_2}{\sigma_2+\mu} = \frac{\eta_1\mu}{\sigma_1+\mu} + c_1 + \frac{c_1\mu}{\sigma_2+\mu}$，这证明了无恶意软件平衡点的非负性。

3.3 恶意软件传播阈值与无恶意软件平衡点的稳定性

恶意软件传播阈值（$\mathcal{R}_c$）可定义为：在完全易感的网络中，单个感染设备所导致的二次感染设备数量。该阈值十分重要，因为它表明恶意软件传播会增长还是衰减。为了推导 $\mathcal{R}_c$ 根据 [45], 中所述的下一代矩阵方法，我们确定系统（3.1）的恶意软件传播阈值。在此表述中，舱室 S、 R 和 V 被归类为未感染类，而 E 和 I 则代表感染类。矩阵 $\mathcal{F}$ 对应新感染的出现率，而矩阵 $\mathcal{V}$ 表示用于计算感染舱室转移的转移项。这些矩阵如下:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SI \\ \alpha E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha E + \eta_2 E + \mu E \\ c_2 I + \mu I \end{pmatrix}.$$

通过在无恶意软件平衡点 $\mathcal{E}^0$ 处对 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{V}$ 求值，可得到相应的雅可比矩阵，分别如下：

$$F = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial E} & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial E} & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I} \end{array} \right) \Bigg|_{\text{at } \mathcal{E}^0} = \left(\begin{array}{cc} 0 & \beta S^0 \\ \alpha & 0 \end{array} \right),$$

and

$$V = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial E} & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial E} & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I} \end{array} \right) \Bigg|_{\text{at } \mathcal{E}^0} = \left(\begin{array}{cc} \alpha + \eta_2 + \mu & 0 \\ 0 & c_2 + \mu \end{array} \right).$$

Then

$$FV^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{\beta S^0}{c_2+\mu} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\eta_2+\mu} & 0 \end{array} \right).$$

FV^{-1} 的谱半径决定了恶意软件传播阈值 $\mathcal{R}_c$，其表达式为：

$$\mathcal{R}_c = \sqrt{\frac{\beta S^0 \alpha}{(c_2+\mu)(\alpha+\eta_2+\mu)}}.$$

无恶意软件平衡点的稳定性由恶意软件传播阈值 $\mathcal{R}_c$ 刻画，我们有如下定理：

定理 1. 若 $\mathcal{R}_c < 1$，则无恶意软件平衡点 $\mathcal{E}^0$ 局部渐近稳定；若 $\mathcal{R}_c >$，则不稳定 1.

证明。为考察无恶意软件平衡点的局部渐近稳定性，我们推导整个系统（3.1）在无恶意软件平衡点 $\mathcal{E}^0$ 处的雅可比矩阵，由下式给出：

$$J = \begin{pmatrix} -(\eta_1 + c_1 + \mu) & 0 & -\beta S^0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & -(\alpha + \eta_2 + \mu) & \beta S^0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -(c_2 + \mu) & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & c_2 & -(\sigma_1 + \mu) & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & -(\sigma_2 + \mu) \end{pmatrix}.$$

J 的特征方程由下式给出：

$$(\lambda + \mu)\left(\lambda^2 + L_1\lambda + L_2\right)\left(\lambda^2 + L_3\lambda + L_4\right) = 0, \tag{3.5}$$

其中，

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha + c_2 + \eta_2 + 2\mu \ > 0, \\ L_2 &= (c_2+\mu)(\alpha+\eta_2+\mu) - \alpha\beta S^0 = (c_2+\mu)(\alpha+\eta_2+\mu)(1-\mathcal{R}_c^2), \\ L_3 &= c_1 + \eta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + 2\mu \ > 0, \\ L_4 &= c_1\mu + c_1\sigma_1 + \eta_1\mu + \eta_1\sigma_2 + \mu^2 + \mu\sigma_1 + \mu\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 \ > 0. \end{aligned}$$

关于 J 的特征值可由方程（3.5）的解确定，如下所示:

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-L_1 + \sqrt{L_1^2 - 4L_2}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-L_1 - \sqrt{L_1^2 - 4L_2}}{2},$$

$$\lambda_4 = \frac{-L_3 + \sqrt{L_3^2 - 4L_4}}{2}, \text{ and } \lambda_5 = \frac{-L_3 - \sqrt{L_3^2 - 4L_4}}{2}.$$

显然， λ_1、 λ_4和 λ_5 始终为负，而 λ_2 和 λ_3 的符号由 $\mathcal{R}_c$决定。注意，根据笛卡尔符号法则，λ_2 和 λ_3 不可能是共轭复数。假设 $\mathcal{R}_c < 1$。则 $L_2 > 0$，因此 $\lambda_2 < 0$和 $\lambda_3 < 0$。若 $\mathcal{R}_c > 1$，则$L_2 < 0$，因此 $\lambda_2 > 0$ 和 $\lambda_3 < 0$。证明完毕。 □

定理 2. 若 $\mathcal{R}_0 < 1$，则无恶意软件平衡点 $\mathcal{E}^0$ 在可行域 $\{(S, E, I, R, V) \in \mathbb{R}^5_{\geq 0}\}$内全局渐近稳定。

证明。 为证明全局稳定性，我们采用 [8]中所述的方法。考虑（E, I）的感染子系统:

$$\dot{E} = \beta S(t)I - (\alpha + \eta_2 + \mu)E, \tag{3.7}$$

$$\dot{I} = \alpha E - (c_2 + \mu)I. \tag{3.8}$$

由于对于所有 t， $S(t) \leq N(t) \leq N$，因此我们可以将（E, I）与以下线性比较系统进行比较

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\widehat{E}\\ \widehat{I}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\widehat{E}\\ \widehat{I}\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix}-(\alpha + \eta_2 + \mu) & \beta\widetilde{N}\\ \alpha & -(c_2 + \mu)\end{pmatrix},$$

具有相同的非负初始数据。该系统是合作系统，因此根据比较原理， $0 \leq Et\ It \leq Et\ It$对所有 $t \geq 0$均成立，其中（E， I）是上述线性系统的解。

线性矩阵 A 的迹 $\text{tr}(A) = -\alpha + \eta_2 + \mu - c_2 + \mu < 0$，其行列式为

$$\det(A) = (\alpha + \eta_2 + \mu)(c_2 + \mu) - \alpha\beta\widetilde{N}.$$

注意到 $S^0 \leq N$，并利用 $\mathcal{R}_0$ 的定义可得，

$$\mathcal{R}_0 < 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\beta\alpha\widetilde{N}}{(\alpha + \eta_2 + \mu)(c_2 + \mu)} < 1,$$

因此 $\det(A) > 0$。所以 A 的两个特征值均为实数且为负，线性 系统是指数稳定的，即存在常数 C， $\lambda > 0$，使得 $\|(E(t)\ I(t))\| \leq Ce^{-\lambda t}\|(\widehat{E}(0)\ \widehat{I}(0))\|$。由比较可知， $E(t) \to 0$ 和 $I(t) \to 0$ 呈指数衰减，当$t \to \infty$时。

现在，考虑子系统（S， R， V），令（E， I） $=(0,\ 0)$。根据系统（3.1），我们有

$$\begin{pmatrix}\dot{S}\\ \dot{R}\\ \dot{V}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(\eta_1+c_1+\mu) & \sigma_1 & \sigma_2\\ \eta_1 & -(\sigma_1+\mu) & 0\\ c_1 & 0 & -(\sigma_2+\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\ R\\ V\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Lambda\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

考虑

$$B=\begin{pmatrix}-(\eta_1+c_1+\mu) & \sigma_1 & \sigma_2\\ \eta_1 & -(\sigma_1+\mu) & 0\\ c_1 & 0 & -(\sigma_2+\mu).\end{pmatrix}$$

矩阵 B 的特征方程为：

$$\lambda^3+L_1\lambda^2+L_2\lambda+L_3=0,$$

其中，

$$L_1=a+b+d,$$
$$L_2=ab+ad+bd-\sigma_1\eta_1-\sigma_2c_1,$$
$$L_3=abd-\sigma_1\eta_1d-\sigma_2c_1b,$$
$$a=\eta_1+c_1+\mu, b=\sigma_1+\mu, d=\sigma_2+\mu.$$

显然， $L_1>0$。现在，

$$\begin{aligned}L_2 &= [(\eta_1+c_1+\mu)(\sigma_1+\mu)-\sigma_1\eta_1]+bd+[(\eta_1+c_1+\mu)(\sigma_2+\mu)]\\ &= [\eta_1\mu+(c_1+\mu)(\sigma_1+\mu)]+bd+[(\eta_1+\mu)(\sigma_2+\mu)+c_1\mu]>0.\end{aligned}$$

接下来，

$$\begin{aligned}L_3 &= abd-\sigma_1\eta_1d-\sigma_2c_1b=d(ab-\sigma_1\eta_1)-\sigma_2c_1b\\ &= d\left[(\eta_1+c_1+\mu)(\sigma_1+\mu)-\sigma_1\eta_1\right]-\sigma_2c_1b\\ &= d\left[\eta_1\mu+(c_1+\mu)b\right]-\sigma_2c_1b\\ &= d\eta_1\mu+b\left[(c_1+\mu)(\sigma_2+\mu)-\sigma_2c_1\right]\\ &= d\eta_1\mu+b\left[c_1\mu+\mu(\sigma_2+\mu)\right]>0.\end{aligned}$$

经过一些代数化简， $L_1L_2-L_3$ 可写为：

$$\begin{aligned}L_1L_2-L_3 &= a^2b+ab^2+a^2d+ad^2+b^2d+bd^2+2abd-\sigma_1\eta_1(a+b)-\sigma_2c_1(a+d)\\ &= (a+b)\left[ab-\sigma_1\eta_1\right]+(a+d)\left[ad-\sigma_2c_1\right]+b^2d+bd^2+2abd\\ &= (a+b)\left[(\eta_1+c_1+\mu)(\sigma_1+\mu)-\sigma_1\eta_1\right]\\ &\quad +(a+d)\left[(\eta_1+c_1+\mu)(\sigma_2+\mu)-\sigma_2c_1\right]+b^2d+bd^2+2abd\\ &= (a+b)\left[\eta_1\mu+(c_1+\mu)(\sigma_1+\mu)\right]\end{aligned}$$

$$+(a+d)\left[(\eta_1+\mu)(\sigma_2+\mu)+c_1\mu\right]+b^2d+bd^2+2abd>0.$$

因此，根据劳斯-赫尔维茨条件，矩阵 B 的所有特征值实部均为负。因此，对于上述定义的S^0、 R^0、 V^0子系统，S、 R、 V是全局渐近稳定的。因此，利用 [8], 中讨论的定理，我们可以得出，无病平衡点 $\mathcal{E}^0$ 对于系统3.1是全局渐近稳定的，条件是 $\mathcal{R}_0<1$。证明完毕。

□

3.4 地方病平衡点的存在性

关于地方病平衡点的存在性，我们有如下定理。

定理 3. 系统 (3.1) 具有唯一地方性平衡点 (S^e,E^e,I^e,R^e,V^e) 当且仅当 $\mathcal{R}_0>1$。

证明。 我们将地方病平衡点（EE）记为 (S^e,R^e,E^e,I^e,V^e)。

由关于 I 的方程，在系统 (3.1) 的地方病平衡点处

$$0=\alpha E-(c_2+\mu)I \quad\Longrightarrow\quad E^e=\frac{c_2+\mu}{\alpha}\,I^e.$$

利用上述方程以及关于 E 的方程，在系统 (3.1) 的地方病平衡点处

$$0=\beta S-(\alpha+\eta_2+\mu)\frac{c_2+\mu}{\alpha} \quad\Longrightarrow\quad S^e=\frac{(\alpha+\eta_2+\mu)(c_2+\mu)}{\beta\alpha}.$$

根据 V 系统（3.1）在地方病平衡点处的方程

$$0=c_1S-(\sigma_2+\mu)V \quad\Longrightarrow\quad V^e=\frac{c_1}{\sigma_2+\mu}S^e.$$

根据 R 系统（3.1）在地方病平衡点处的方程

$$0=\eta_1S+\eta_2E+c_2I-(\sigma_1+\mu)R \quad\Longrightarrow\quad R^e=\frac{\eta_1S^e+\eta_2E^e+c_2I^e}{\sigma_1+\mu}.$$

最后，将上述关系代入地方病平衡点处的 S 方程，得

$$\begin{aligned}0&=\Lambda-\beta S^eI^e-(\eta_1+c_1+\mu)S^e+\sigma_1\frac{\eta_1S^e+\eta_2E^e+c_2I^e}{\sigma_1+\mu}+\sigma_2\frac{c_1}{\sigma_2+\mu}S^e\\&=A_0\;-\;A_1\,I^e,\end{aligned}$$

其中,

$$A_0=\Lambda-(\eta_1+c_1+\mu)S^e+\sigma_1\frac{\eta_1S^e}{\sigma_1+\mu}+\sigma_2\frac{c_1S^e}{\sigma_2+\mu},$$

$$A_1=\left(\beta S^e-\frac{\sigma_1c_2}{\sigma_1+\mu}-\frac{\sigma_1\eta_2}{\sigma_1+\mu}\frac{c_2+\mu}{\alpha}\right).$$

Thus

$$I^e = \frac{A_0}{A_1} = \frac{\Lambda - (\eta_1 + c_1 + \mu)S^e + \sigma_1 \frac{\eta_1 S^e}{\sigma_1+\mu} + \sigma_2 \frac{c_1 S^e}{\sigma_2+\mu}}{\beta S^e - \frac{\sigma_1 c_2}{\sigma_1+\mu} - \frac{\sigma_1 \eta_2}{\sigma_1+\mu}\frac{c_2+\mu}{\alpha}}.$$

注意， $S^0 = \Lambda/D$, 其中， $D = (\eta_1 + c_1 + \mu) - \sigma_1 \frac{\eta_1}{\sigma_1+\mu} - \sigma_2 \frac{c_1}{\sigma_2+\mu}$.

Now,

$$A_0 = \Lambda - S^e D = D(S^0 - S^e).$$

此外，注意到 $S^e = \frac{S^0}{\mathcal{R}_0^2}$.

这意味着

$$A_0 = \frac{DS^0}{\mathcal{R}_0^2}(\mathcal{R}_0^2 - 1).$$

因此，当且仅当 $\mathcal{R}_0 > 1$. 时， $A_0 > 0$

此外，

$$\alpha(\sigma_1 + \mu)A_1 = \mu\big(\sigma_1(\alpha + c_2 + \mu) + (\alpha + \eta_2 + \mu)(c_2 + \mu)\big),$$

这确保了 $A_1 > 0$。因此，当且仅当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时，地方病平衡点唯一存在。

□

3.5 局部稳定性 of the endemic equilibrium

为了研究地方病平衡点（S^e， E^e， I^e， R^e， V^e）的局部渐近稳定性，我们计算了地方病平衡点处模型（3.1）的雅可比矩阵，如下所示：

$$J = \begin{pmatrix} -(\omega_1 + \beta I^e) & 0 & -\beta S^e & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \beta I^e & -\omega_2 & \beta S^e & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\omega_3 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & c_2 & -\omega_4 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_5 \end{pmatrix},$$

其中，

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \eta_1 + c_1 + \mu, \ \omega_2 = \alpha + \eta_2 + \mu, \\ \omega_3 &= c_2 + \mu, \ \omega_4 = \sigma_1 + \mu, \ \omega_5 = \sigma_2 + \mu. \end{aligned}$$

J 的特征方程为：

$$\lambda^5 + H_1\lambda^4 + H_2\lambda^3 + H_3\lambda^2 + H_4\lambda + H_5 = 0, \tag{3.9}$$

其中

$$H_1 = \omega_5 + \omega_4 - \omega_3 + \omega_2 + \omega_1 + bI^e,$$

$$H_2 = -\big(c_1c_2 - \omega_5\omega_4 + \omega_5\omega_3 - \omega_5\omega_2 - \omega_5\omega_1 - \omega_5 bI^e + n_1c_1 + \omega_4\omega_3 - \omega_4\omega_2 - \omega_4\omega_1 - \omega_4 bI^e + abS^e + \omega_3\omega_2 + \omega_3\omega_1 + \omega_3 bI^e - \omega_2\omega_1 - \omega_2 bI^e\big),$$

$$\begin{aligned} H_3 = -\big(&c_1c_2\omega_4 - c_1c_2\omega_3 + c_1c_2\omega_2 + \omega_5 n_1c_1 + \omega_5\omega_4\omega_3 - \omega_5\omega_4\omega_2 - \omega_5\omega_4\omega_1 - \omega_5\omega_4 bI^e \\ &+ \omega_5 abS^e + \omega_5\omega_3\omega_2 + \omega_5\omega_3\omega_1 + \omega_5\omega_3 bI^e - \omega_5\omega_2\omega_1 - \omega_5\omega_2 bI^e \\ &- n_1c_1\omega_3 + n_1c_1\omega_2 + \omega_4 abS^e + \omega_4\omega_3\omega_2 + \omega_4\omega_3\omega_1 + \omega_4\omega_3 bI^e - \omega_4\omega_2\omega_1 - \omega_4\omega_2 bI^e \\ &+ abS^e\,\omega_1 + \omega_3\omega_2\omega_1 + \omega_3\omega_2 bI^e + n_2 bI^e c_1\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 = -\big(&-c_1c_2 abS^e - c_1c_2\omega_3\omega_2 + \omega_5 n_2 bI^e c_1 - \omega_5 n_1c_1\omega_3 + \omega_5 n_1c_1\omega_2 \\ &+ \omega_5\omega_4 abS^e + \omega_5\omega_4\omega_3\omega_2 + \omega_5\omega_4\omega_3\omega_1 + \omega_5\omega_4\omega_3 bI^e - \omega_5\omega_4\omega_2\omega_1 - \omega_5\omega_4\omega_2 bI^e \\ &+ \omega_5 abS^e\,\omega_1 + \omega_5\omega_3\omega_2\omega_1 + \omega_5\omega_3\omega_2 bI^e - c_1c_2\omega_4\omega_3 + c_1c_2\omega_4\omega_2 \\ &+ c_2 abI^e c_1 - n_2 bI^e c_1\omega_3 - n_1c_1 abS^e - n_1c_1\omega_3\omega_2 + \omega_4 abS^e\,\omega_1 + \omega_4\omega_3\omega_2\omega_1 + \omega_4\omega_3\omega_2 bI^e\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5 = {}&c_1c_2\omega_4 abS^e + c_1c_2\omega_4\omega_3\omega_2 - \omega_5 c_2 abI^e c_1 + \omega_5 n_2 bI^e c_1\omega_3 \\ &+ \omega_5 n_1c_1 abS^e + \omega_5 n_1c_1\omega_3\omega_2 - \omega_5\omega_4 abS^e\,\omega_1 - \omega_5\omega_4\omega_3\omega_2\omega_1 - \omega_5\omega_4\omega_3\omega_2 bI^e. \end{aligned}$$

特征多项式（3.9）的所有根均具有负实部，当且仅当满足以下劳斯–赫尔维茨条件：

1. $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, H_4 > 0, H_5 > 0,$
2. $H_1H_2 - H_3 > 0,$
3. $H_1H_4 - H_5 > 0,$
4. $(H_1H_2 - H_3)H_3 - H_1(H_1H_4 - H_5) > 0,$
5. $\big[\big((H_1H_2 - H_3)H_3 - H_1(H_1H_4 - H_5)\big)(H_1H_4 - H_5) - (H_1H_2 - H_3)H_5\big] > 0.$

由于地方病平衡点对应的雅可比矩阵的特征方程中出现的表达式过于复杂，无法进行进一步的解析研究，因此我们通过数值模拟展示结果。采用表 1 中提到的参数设置 $c_1 = 0.05,\ \ c_2 = 0.05,$ 特征方程（3.9）变为：

$$\lambda^5 + 14.704\,\lambda^4 + 5.192\,\lambda^3 + 0.170\,\lambda^2 + 0.00226\,\lambda + 5.02 \times 10^{-7} = 0,$$

且特征值由下式给出

$$\lambda = \{-14.295,\ -0.3546,\ -0.0504,\ -0.00457,\ -0.00457\}.$$

这保证了在上述参数设置下，地方病平衡点是局部稳定的。此外，通过数值分析，我们观察到模型中存在向前分岔（3.1）（见图4）。

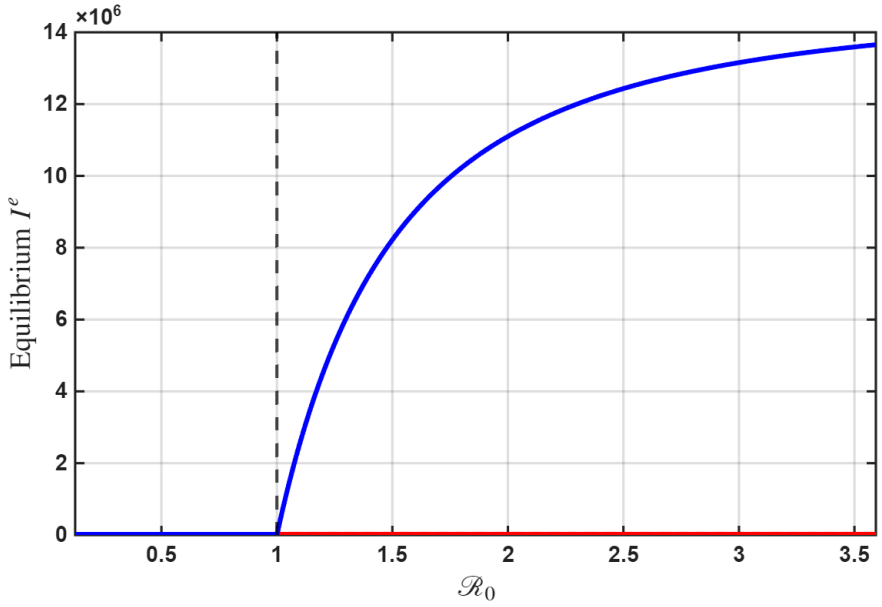


图 4：在表（3.1）所述的参数设置下，模型中存在向前分岔（1）。蓝色表示稳定平衡点，红色表示不稳定平衡点。

3.6 控制空间中的恶意软件增长与衰减区域

恶意软件传播阈值 $\mathcal{R}_c$ 是一个重要阈值，可用于划分恶意软件增长区域和衰减区域。当 $\mathcal{R}_c > 1$ 时，恶意软件会增长；当 $\mathcal{R}_c < 1$时，恶意软件不会增长。由于我们有两个控制参数 c_1 和 c_2，因此（c_1，c_2）参数空间可划分为这些区域。恶意软件灭绝区域与恶意软件增长区域之间的分界线由 $\mathcal{R}_c = 1$表征，这些区域分别定义如下：

$$\mathcal{S}_1 := \left\{(c_1, c_2) \in [0,1] \times [0,1] : \beta S^0 \alpha < (c_2 + \mu)(\alpha + \eta_2 + \mu)\right\},$$

and

$$\mathcal{S}_2 := \left\{(c_1, c_2) \in [0,1] \times [0,1] : \beta S^0 \alpha > (c_2 + \mu)(\alpha + \eta_2 + \mu)\right\}.$$

图5展示了 β取不同值时的区域。深色区域表示恶意软件增长区域，浅色区域表示恶意软件消亡区域。随着传播率 β 增加，参数平面（c_1，c_2）中的疫情增长区域也随之扩大。

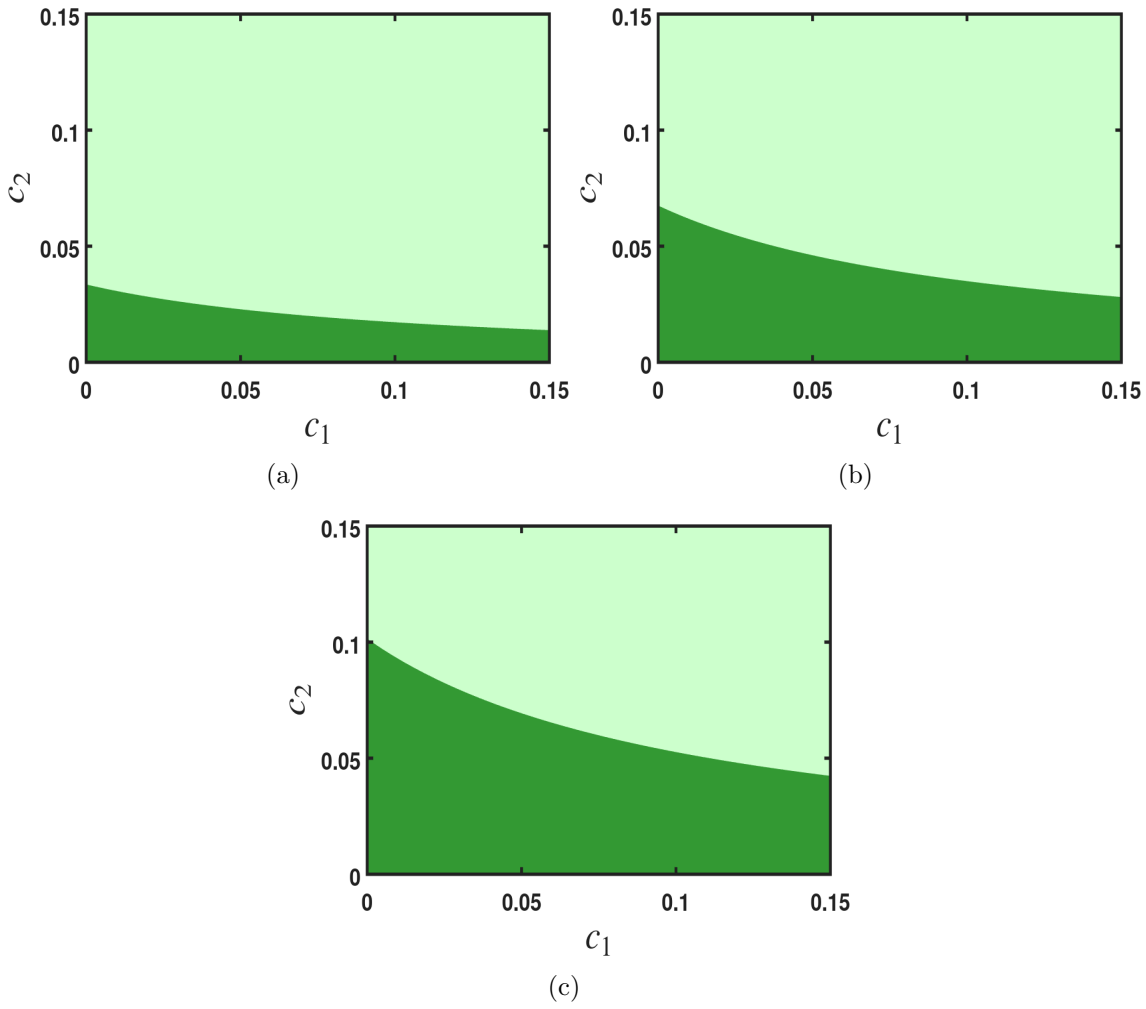


图5：(a) $\beta = 2 \times 10^{-9}$；(b) $\beta = 4 \times 10^{-9}$；(c) $\beta = 6 \times 10^{-9}$。深绿色区域对应恶意软件增长区域 $\mathcal{S}_2$，浅绿色区域对应恶意软件消亡区域 $\mathcal{S}_1$。其余参数的选取如表 1所示。

4 基于混合梯度的全局优化：使用模拟退火

在本研究中，我们考虑了两种主要的控制策略：为易感设备接种疫苗（c_1）以及治疗感染设备（c_2）。这些措施均需付出实施成本。我们的目标是确定这些控制措施的最优组合，使总成本最低，其中包括感染相关成本以及控制措施的相关成本。为此，我们构建了以下最优控制问题：

$$\min_{0\le c_1,c_2\le 1}\frac{m_0}{\mathcal{T}\widetilde{N}}\int_0^{\mathcal{T}} I(t;c_1,c_2)dt+k_1c_1+k_2c_2=\min_{0\le c_1,c_2\le 1}k_0\int_0^{\mathcal{T}} I(t;c_1,c_2)dt+k_1c_1+k_2c_2, \quad (4.10)$$

其中，$k_0=\frac{m_0}{\mathcal{T}\widetilde{N}}>0$，　$k_1>0$和 $k_2>0$。　$\mathcal{T}>0$是最大考察时间。注意，量 $\frac{1}{\mathcal{T}\widetilde{N}}\int_0^{\mathcal{T}} I(t;c_1,\ c_2)dt$ 表示在整个时段 $[0,\mathcal{T}]$内，在控制策略c_1 和 c_2的作用下，单位时间内感染人口所占的平均比例。m_0，　k_1 和 k_2 分别是与平均感染、易感者的疫苗接种以及感染者的治疗相关的成本。这里，我们推导一种基于梯度的优化算法，以最小化代价函数 [5, 6]。令

$$\mathcal{J}(c_1,c_2)=k_0\int_0^{\mathcal{T}} I(t;c_1,c_2)dt+k_1c_1+k_2c_2.$$

相应的伴随系统如下:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=-A^T\mathcal{H}+(0,0,1,0,0)^T,\ \mathcal{H}(\mathcal{T})=(0,0,0,0,0)^T, \quad (4.11)$$

其中,

$$A=\begin{pmatrix} -\beta I-\eta_1-c_1-\mu & 0 & -\beta S & \sigma_1 & \sigma_2\\ \beta I & -\alpha-\eta_2-\mu & \beta S & 0 & 0\\ 0 & \alpha & -c_2-\mu & 0 & 0\\ \eta_1 & \eta_2 & c_2 & -\sigma_1-\mu & 0\\ c_1 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2-\mu \end{pmatrix},$$

并且 $S=S(t;c_1,c_2)$、　$I=I(t;\ c_1,c_2)$。假设 $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3,\mathcal{H}_4,\mathcal{H}_5)^T$是伴随系统 (4.11) 的一个解。记 $C=(c_1,c_2)$。　$\mathcal{J}(C)$ 的方向导数可定义为

$$d\mathcal{J}(C)(\theta)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(C+\epsilon\theta),$$

其中，　$\theta=(\theta_1,\ \ \theta_2)\in\mathbb{R}^2$, $\epsilon>0$是一个任意小的数，使得 $C+\epsilon\theta\in[0,1]^2$。现在,

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(C+\epsilon\theta)=k_0\int_0^{\mathcal{T}}\frac{dI(t,C+\epsilon\theta)}{d\epsilon}dt+k_1\theta_1+k_2\theta_2.$$

记

$$\begin{aligned} U(t) &= (U_1(t),U_2(t),U_3(t),U_4(t),U_5(t))\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{d}{d\epsilon}\Big(S(t,C+\epsilon\theta),E(t,C+\epsilon\theta),I(t,C+\epsilon\theta),R(t,C+\epsilon\theta),V(t,C+\epsilon\theta)\Big). \end{aligned}$$

这意味着,

$$d\mathcal{J}(C)(\theta) = k_0\int_0^{\mathcal{T}} U_3(t)dt+k_1\theta_1+k_2\theta_2. \quad (4.13a)$$

由系统（3.1）可得

$$\frac{dU}{dt} = AU + B\theta, \tag{4.14a}$$

其中,

$$B = \begin{pmatrix} -S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & I \\ S & 0 \end{pmatrix}, \text{ with } S = S(t; c_1, c_2) \text{ and } I = I(t; c_1, c_2).$$

将（4.14）两边同乘以 $\mathcal{H}^T$，并对 t 从 0 到 $\mathcal{T}$ 积分，再利用条件 $U(0) = \mathcal{H}(\mathcal{T}) = (0, 0, 0, 0, 0)^T$，我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{H}^T \frac{dU}{dt} dt &= \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{H}^T AU dt + \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{H}^T B\theta dt, \\ \Rightarrow \quad -\int_0^{\mathcal{T}} \frac{d\mathcal{H}^T}{dt} U dt &= \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{H}^T AU dt + \int_0^{\mathcal{T}} \Big(\theta_1 (\mathcal{H}_5(t; c_1, c_2) - \mathcal{H}_1(t; c_1, c_2)) S(t; c_1, c_2) \\ &\quad + \theta_2 (\mathcal{H}_4(t; c_1, c_2) - \mathcal{H}_3(t; c_1, c_2)) I(t; c_1, c_2) \Big) dt. \end{aligned} \tag{4.15a}$$

现对伴随方程（4.11）取转置，然后将两边同乘以 $U(t)$，并对 t 从 0 到 $\mathcal{T}$ 积分，我们得到如下关系:

$$-\int_0^{\mathcal{T}} \frac{d\mathcal{H}^T}{dt} U dt = \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{H}^T AU dt - \int_0^{\mathcal{T}} U_3(t) dt. \tag{4.16a}$$

因此，由（4.13）、（4.15）和（4.16），$\mathcal{J}(C)$ 的方向导数为:

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(C)(\theta) &= \theta_1 \Big(k_1 - k_0 \int_0^{\mathcal{T}} (Q_5(t; c_1, c_2) - Q_1(t; c_1, c_2) S(t; c_1, c_2) dt \Big) \\ &\quad + \theta_2 \Big(k_2 - k_0 \int_0^{\mathcal{T}} (Q_4(t; c_1, c_2) - Q_3(t; c_1, c_2) I(t; c_1, c_2) dt \Big). \end{aligned} \tag{4.17a}$$

算法1： 混合梯度模拟退火

输入： 与成本相关的梯度函数 $\nabla\mathcal{J}(C)$，控制的初始值 $C^{(0)}=(c_1^{(0)},\ c_2^{(0)})\in[0,1]^2$，
容差级别 ϵ_k，δ_k，模型（3.1）中的所有其他模型参数
与模拟退火相关的参数：初始温度 T，冷却率 λ，
降温步数 N_c，每步的扰动次数 N

输出： 最优控制的全局估计 $C^*=(c_1^*,c_2^*)$

初始化 $C\leftarrow C^{(0)}$，$k\leftarrow 0$

重复

  基于梯度的局部搜索：

    沿正向时间求解系统(3.1)以得到 $S(t;C)$，$E(t;C)$，$I(t;C)$，$R(t;C)$和 $V(t;C)$

    求解伴随系统（4.11），按反向时间计算以获得 $\mathcal{H}$（t； C）

    使用（4.18）计算梯度 $\nabla\mathcal{J}$（C）

    执行局部下降步：

$$\widetilde{C}^{(i)}=C^{(i)}-\eta\cdot\nabla\mathcal{J}(C^{(i)})$$

    投影 $\widetilde{C}^{(i)}$ 在 $[0,1]^2$上：

$$C^{(k)*}=\Pi_{[0,1]^2}(\widetilde{C}^{(i)})$$

  若 $\mathcal{J}$（$C^{(k)*}$）$-\mathcal{J}$（$C^{(k)}$）$<-\epsilon_k$ **则**

    $C\leftarrow C^{(k)*}$

  end

  模拟退火阶段： 设置温度 T

  对于 $j=1$ **到** N_c，**执行**

    对于 $i=1$ **到** N，**执行**

      随机选择 $m\in\{1,2\}$

      如果 $m=1$ **则**

        仅对 C 的一个条目重新随机生成，以获得一个新点 $\tilde{C}$

      else

        对 C 的两个条目都重新随机生成，以获得一个新点 $\tilde{C}$

      end

      投影随机生成的 $\tilde{C}$ 到 $[0,1]^2$ 上

      计算 $\Delta\leftarrow\mathcal{J}(\tilde{C})-\mathcal{J}(C)$

      如果 $\Delta<-\delta_k$，**则**

        $C\leftarrow\tilde{C}$

      else

        从 $(0,1)$ 上的均匀分布中随机选取一个数 r

        如果 $r<T\exp(-\Delta/T)$，**则**

          $C\leftarrow\tilde{C}$

        end

      end

    end

    更新温度： $T\leftarrow\lambda T$

  end

  更新 $C^{(k+1)}\leftarrow C$，$k\leftarrow k+1$

直到满足收敛准则；

返回 C

我们将梯度定义如下：

$$\nabla \mathcal{J}(C) = \begin{pmatrix} k_1 - k_0 \int_0^{\mathcal{T}} (Q_5(t; c_1, c_2) - Q_1(t; c_1, c_2) S(t; c_1, c_2) dt \\ k_2 - k_0 \int_0^{\mathcal{T}} (Q_4(t; c_1, c_2) - Q_3(t; c_1, c_2) I(t; c_1, c_2) dt \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

方向导数的这一表达式有助于构建概念性的基于梯度的迭代算法，以确定最优控制对（c_1^*，c_2^*）。此外，可以采用 [5]中所述的方法证明最优控制的存在性。

现在，为了确定全局最优解，我们采用结合模拟退火的混合下降算法，这是一种 [49]中讨论的全局搜索算法。式（4.18）所推导出的表达式提供了到达局部最优解的下降方向，而模拟退火方法的随机性有助于避开局部最优解并达到全局最优解。该算法的详细步骤见算法1。通过数值模拟实现该算法的结果将在结果部分介绍。

5 数值模拟

我们采用经典的四阶龙格–库塔方法对系统（3.1）进行数值求解，并研究各种动力学和控制方面。除非另有说明，数值模拟中使用的所有参数值均取自表1。求解系统时的初始值设为：$(S(0)\ E(0)\ I(0)\ R(0)\ V(0)) = (1 \times 10^9,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$。在这一数值框架下，我们考察关键参数的敏感性、传播率对流行病学特征的影响、控制参数对感染动态的作用，以及全局最优控制策略的评估。

5.1 敏感性分析

我们计算归一化前向敏感性指数 [39]相对于 $\mathcal{R}_c$，以概览导致恶意软件传播呈增长或衰减特性的最重要参数。我们考虑以下参数：β，c_1，c_2，η_1，η_2，σ_1，σ_2，并在 $\mathcal{R}_c$中计算它们的归一化前向敏感性指数，使用表1中特定参数的取值。变量 $\mathcal{G}$ 相对于参数 ξ 的归一化前向敏感性指数由下式给出：

$$\mathcal{X}_{\mathcal{F}}^{\xi} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} \times \frac{\xi}{\mathcal{F}}, \tag{5.19}$$

其中，$\mathcal{G}$ 显式依赖于 ξ。若 $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}^{\xi} = k$，则意味着当 ξ 的值增加1%时，$\mathcal{G}$ 将增加 $|k|$%（若 k 为正）或减少 $|k|$%（若 k 为负），而所有其他参数值保持不变。敏感性指数见表2和图6。敏感性指数表明，σ_1、σ_2、β 与恶意软件传播阈值 $\mathcal{R}_c$呈正相关，而 c_1、c_2、η_1、η_2 与 $\mathcal{R}_c$呈负相关。此外，β（恶意软件传播率）、c_1（易感设备的疫苗接种率）、c_2（对

感染设备通过重装进行的治疗）以及 η_1 （用户发起的设备和密码重置率）似乎是四个最显著的参数。

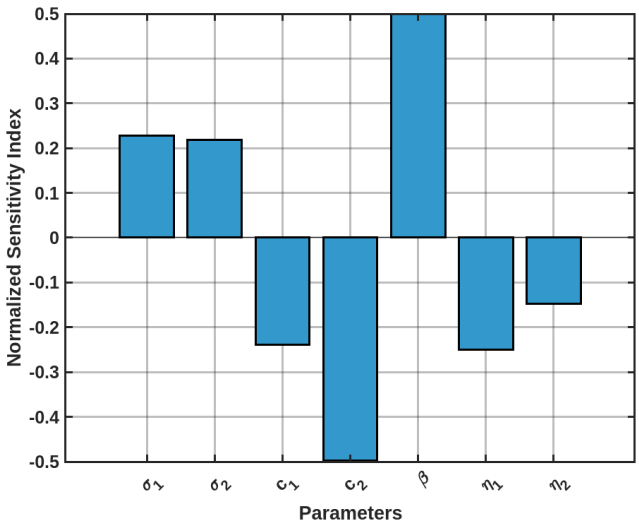


图 6：参数对恶意软件传播阈值的归一化前向敏感性指数 $\mathcal{R}_c$。

$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{\sigma_1}$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{\sigma_2}$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{c_1}$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{c_2}$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{\beta}$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{\eta_1}$	$\mathcal{X}_{\mathcal{R}_c}^{\eta_2}$
0.2277	0.2186	-0.2396	-0.4983	0.5	-0.2495	-0.1469

表 2：参数对 $\mathcal{R}_c$ 的归一化前向敏感性指数。

5.2 传播率的影响

敏感性分析表明，传播率 β 是影响最显著的参数之一。因此，有必要研究 β 对一些关键流行病学特征的影响。对于特定时间区间 $[0, \mathcal{T}]$ 内的感染者曲线 $I(t)$，以下三个重要特征可以量化感染进程的严重程度：

- **最大感染人数**。 最大感染人数记为 I_{max}，定义为

$$I_{max} = \max_{t\in[0,\mathcal{T}]} I(t).$$

- **达到最大感染人数的时间**。 达到最大感染人数的时间是感染者曲线 $I(t)$达到最大值的时间。它记为 t_m ，定义为

$$t_m = \arg\max_{t\in[0,\mathcal{T}]} I(t).$$

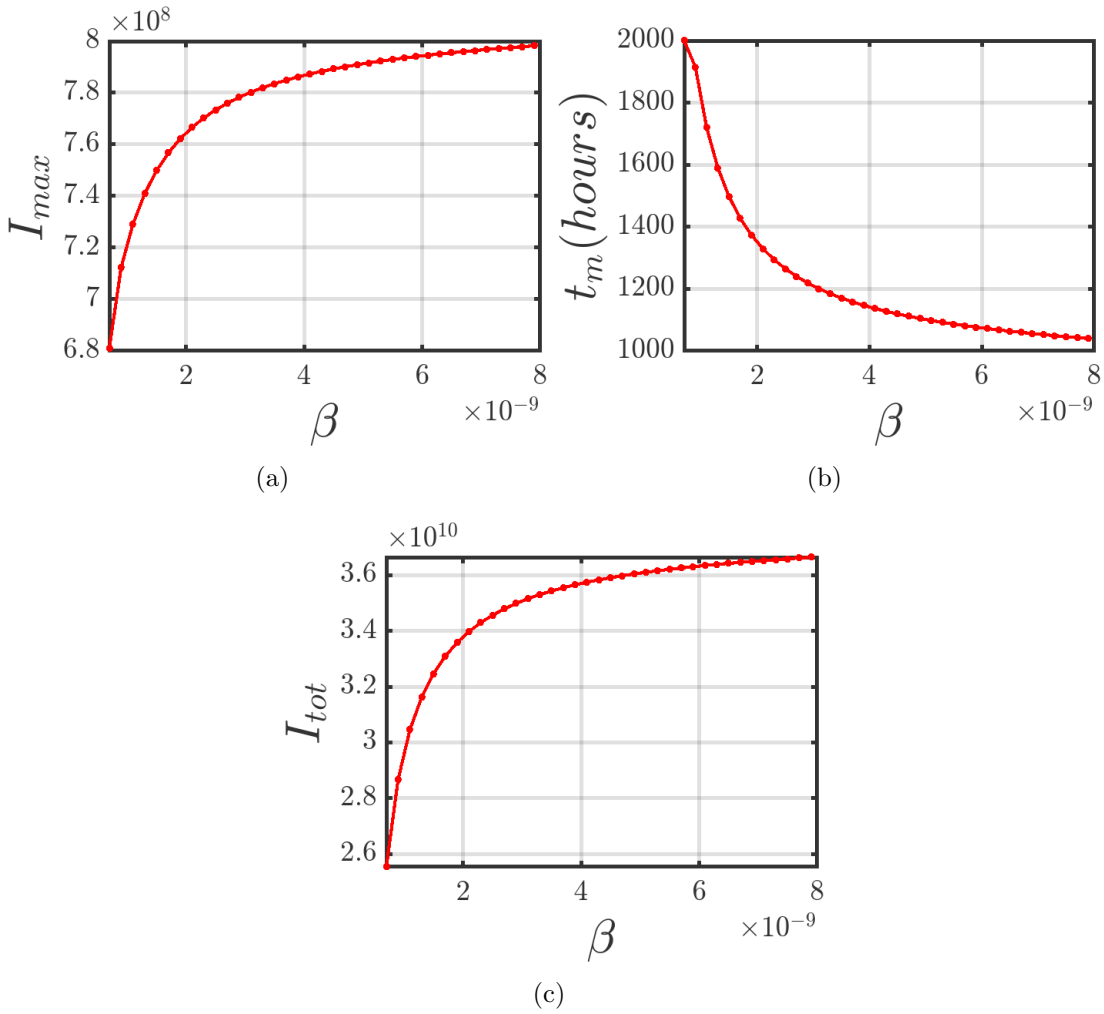


图7： β 对（a）最大感染人数 I_{max}；（b）达到最大感染人数的时间 t_m；以及（c）感染者总数 I_{tot}的影响。该仿真在以下条件下进行： $c_1 = c_2 = 0$ 其余参数按表1所述取值。

- 感染者总数。 </style}在区间 $[0, \mathcal{T}]$内的感染者总数记为 I_{tot} ，定义为

$$I_{tot} = \alpha \int_0^{\mathcal{T}} E(t)dt.$$

请注意，术语 $\alpha E(t)$ 表示每天加入感染舱室的新设备数量，因此从 0 积分到 $\mathcal{T}$ 可得 I_{tot}。

图7展示了 β 对 $I_{\max}$、 t_m和 I_{tot}的影响。观察发现， $I_{\max}$ 会随着 β的增加而增加；然而，$I_{\max}$ 的增长速度会减缓，且 $I_{\max}$ 达到

当 β取较大值时趋于饱和。对于 I_{tot} 与 β之间的关系，也可以得出类似的观察结果。然而，t_m 与 β呈反比关系。如果传播率增加，感染个体的最大数量就会更早达到。这一观察确实有助于更准确地了解关键时间，并据此做好更充分的准备。

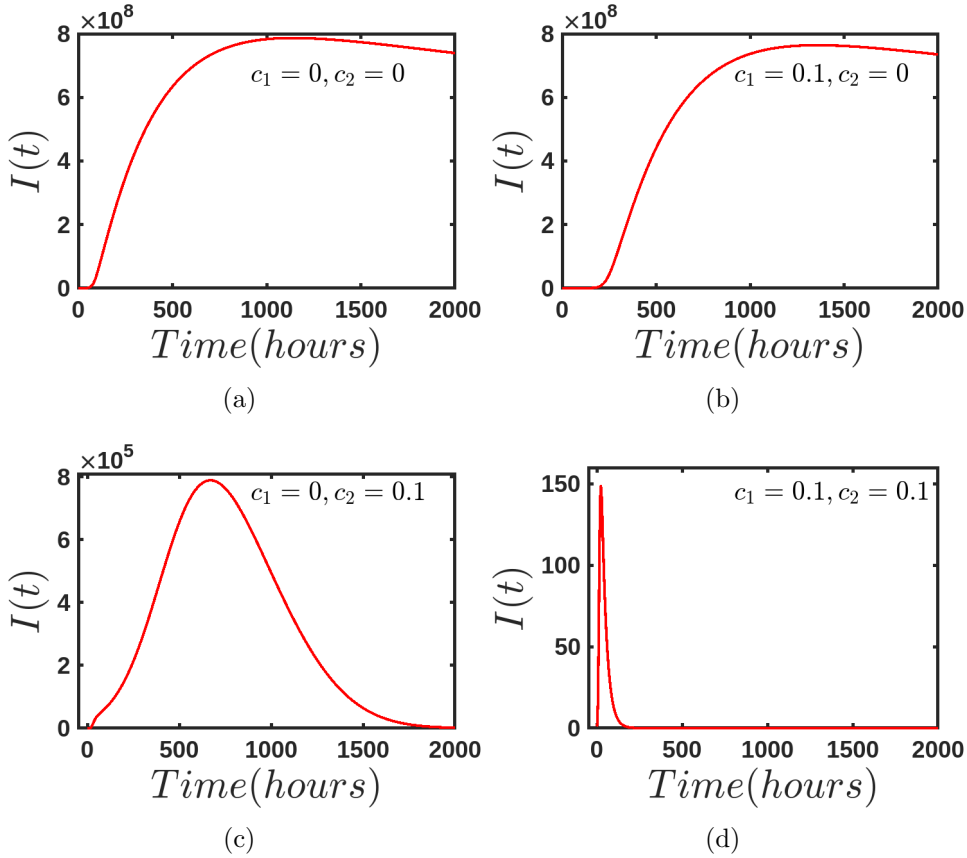


图8：疫苗接种（c_1）和治疗（c_2）对受感染设备数量的影响。其余参数按表1中的说明选取。

5.3 控制措施与传播率的综合影响

不同干预策略（如疫苗接种或治疗）强度的影响，很大程度上取决于恶意软件传播的速度。在本小节中，我们研究干预强度（例如，c_1、c_2）与传播率β的综合影响。结果见图9。图9 上方的面板展示了 c_1对 I_{max}、t_m和 I_{tot} 的影响，其中 β取不同值。当 β较小时，提高 c_1 会显著降低感染峰值 I_{max} 和累计感染数

I_{tot}，同时推迟感染峰值时间 t_m。然而，随着 β 增大，c_1 的效果会减弱；即使 c_1取值较大，I_{max} 和 I_{tot} 仍然居高不下，这表明强传播可能会削弱这种干预的效果。下方的面板展示了 c_2的影响。在 β的整个取值范围内，提高 c_2 都会持续降低 I_{max}；即使传播率较高，也能显著抑制感染峰值。此外，较高的 c_2 值会显著降低总感染负担 I_{tot}，并缩短疫情持续时间。这些结果表明，在高传播率情景下，c_2 在控制恶意软件传播方面相对更有效，而 c_1 主要在传播率相对较低时有效。

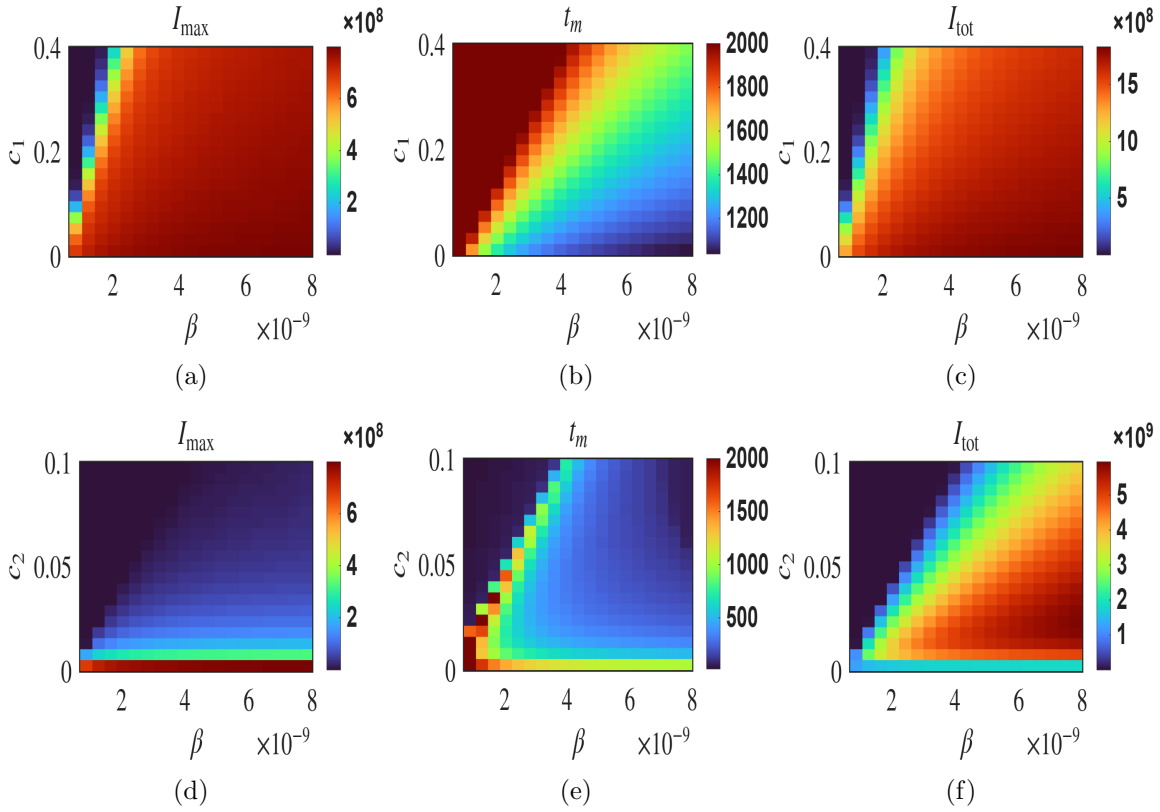


图9：传播率 β 和干预强度对恶意软件动力学的综合影响。面板(a)–(c)展示了在 c_1 取不同值时对 $I_{\max}$、t_m和 I_{tot}的影响，分别对应 β的不同取值。面板(d)–(f)展示了 c_2 对 $I_{\max}$、t_m和 I_{tot}的相应影响。其余参数如表1所述。上方面板中，c_2 固定为0；下方面板中，c_1 固定为0。

5.4 疫苗接种和治疗的影响

当物联网设备网络中出现流行病时，两种可立即采取的控制措施是为易感设备接种疫苗，以及治疗感染设备。在实施这两种控制措施时，自然会产生一个问题：哪种控制措施最有效？两者结合又会如何影响流行病进程？为回答这一问题，我们考虑了四种不同情景：(i) 不进行疫苗接种和治疗（$c_1 = c_2 = 0$）；(ii) 仅进行疫苗接种，不进行治疗（$c_1 = 0.1,\ c_2 = 0$）；(iii) 仅进行治疗，不进行疫苗接种（$c_1 = 0,\ c_2 = 0.1$）；(iv) 同时进行疫苗接种和治疗（$c_1 = c_2 = 0.1$）。图 $I(t)$ 展示了这四种情景下感染舱室的结果。结果表明，在没有采取任何控制措施的情况下，感染数量最高达到 8×10^8。仅实施疫苗接种未能显著降低感染数量，其数量级仍为 10^8。相比之下，仅实施治疗时，感染数量可有效降至 10^5的数量级。此外，同时实施疫苗接种和治疗可成功遏制流行病进程，使感染数量保持在150以下。因此，这些发现引出了一个问题：应如何选择疫苗接种和治疗的最优组合来应对流行病。

5.5 控制的全局最优分配

本小节通过数值模拟展示算法1的性能。原系统（3.1）和伴随系统（4.11）采用龙格-库塔四阶方法求解。我们假设 $\mathcal{T} = 2000,\ m_0 = 1,\ k_1 = 0.2$，以及 $k_2 = 0.3$。尽管这些成本参数的取值是假设的，仅用于说明，但该算法也可以采用其他成本值以类似方式实施。不过，此处选取的数值遵循成本结构 $m_0 \geq k_2 \geq k_1$。我们将感染成本归一化为 1，作为比较控制参数相对成本的基准。治疗感染设备通常涉及恶意软件移除、数据恢复、硬件更换等复杂流程，可能需要人工操作并导致系统停机时间。相比之下，为易感设备接种疫苗通常可以自动完成，并以较低成本大规模实施。基于这一考虑，我们选择了上述成本值。不过，也可以根据需要调整成本参数，并重复运行同一算法。

我们从初始选择 $(c_1,\ c_2) = (0.1,\ 0.1)$ 开始，然后使用基于梯度的搜索找到局部极小值。接着，我们采用模拟退火方法，初始温度为 $T = 0.02$，冷却率为 $\lambda = 0.9$。模拟退火部分的迭代次数设置得足够大，以避免过早退出该过程。

代价函数的代表性收敛历史如图10所示。最优解似乎为 $(c_1^*, c_2^*) = (0.01, 0.08)$，对应的代价函数最小值为$\mathcal{J}(c_1^*, c_2^*) = 0.028$。此外，为确保（0.01, 0.08）是全局最优解，我们从（c_1, c_2）平面上的不同点（例如 (0.1, 0.35)、(0.25, 0.2)、(0.35, 0.1) 和 (0.1, 0.1)）开始，在所有情况下，算法1都得到了相同的全局最优解

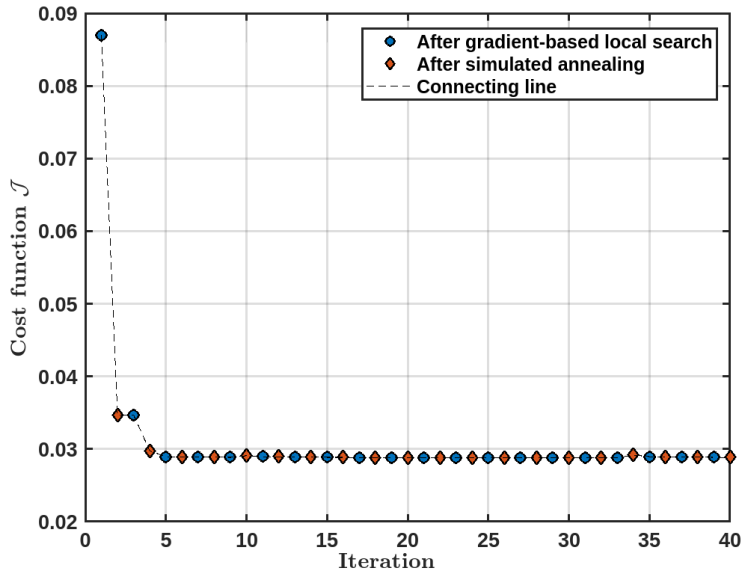


图 10：代价函数随迭代变化的代表性收敛趋势 $\mathcal{J}$ s.

(0.01,0.08). 然而，达到全局最优解所需的迭代步数会随起始点而变化。不同起始点的迭代收敛轨迹如图 11所示。

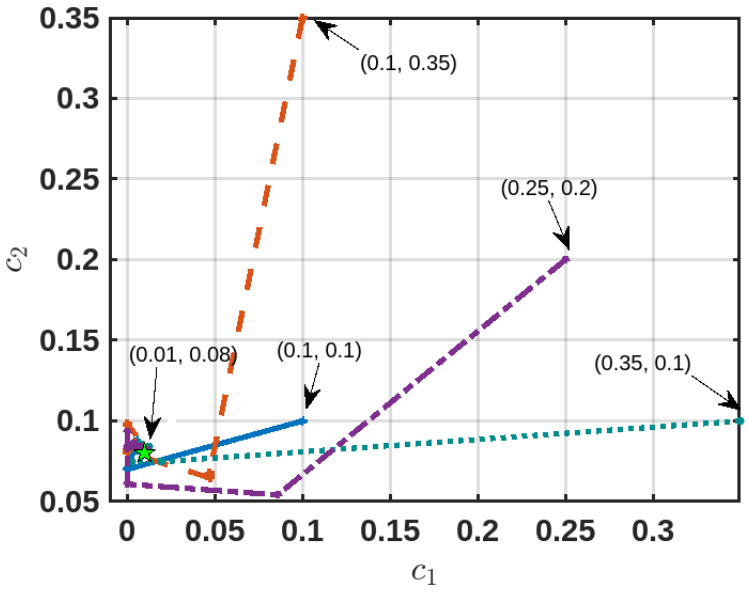


图11：不同起始点在（c_1， c_2）平面中的迭代收敛轨迹。绿色星号表示全局最优解（c_1^*， c_2^*）= （0.01，0.08）。

全局最优解（c_1^*，c_2^*）＝（0.01，0.08）表明，对易感者以1%的比例接种疫苗，并以8%的比例治疗感染者，可获得最优结果。为从控制力度总量的角度进行解读，我们将相对控制率定义如下：

$$\widehat{c}_1^* = \frac{c_1^*}{c_1^* + c_2^*} \approx 11\%, \quad \text{and} \quad \widehat{c}_2^* = \frac{c_2^*}{c_1^* + c_2^*} \approx 89\%.$$

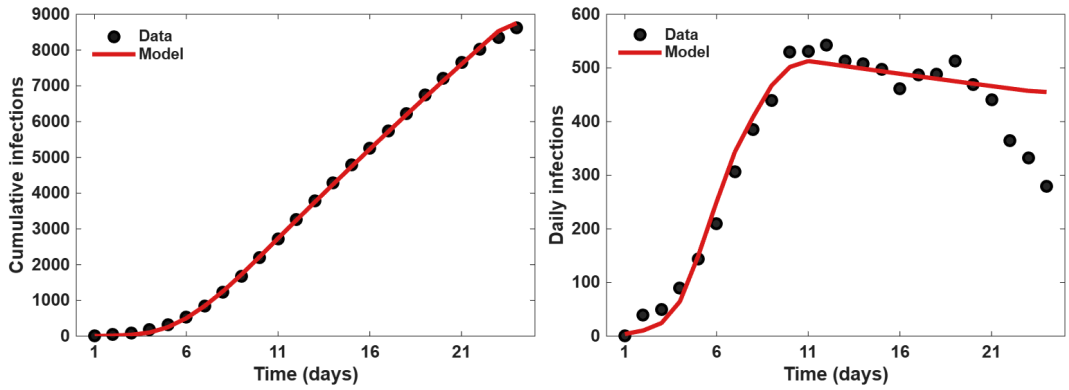
这表明，11%的总控制力度应投入预防（即为易感设备接种疫苗），89%应投入缓解（即治疗感染设备）。

6 使用Windows恶意软件数据集进行模型校准

本节通过将感染数量拟合到从“含PE API调用的Windows恶意软件数据集”获得的病毒传播数据上，来校准所提出的模型（3.1）[9, 29]。利用该病毒传播数据估计传播率 β 。通过最小化观测到的流行病数据与相应模型输出之间的平方误差和（SSE），估计模型参数，所使用的目标函数为SSE

$$\mathrm{SSE}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \hat{y}_i(\boldsymbol{\theta})\right)^2,$$

其中，y_i 表示在观测时刻 i报告的病例数，$\hat{}y_i(\boldsymbol{\theta})$是依赖于参数向量 $\boldsymbol{\theta}$的模型预测值，N 是观测总数。因此，参数辨识问题可表述为无约束优化问题 $\min_{\boldsymbol{\theta}}$ SSE($\boldsymbol{\theta}$)。



(a) (b)

图12：使用病毒传播真实数据进行模型拟合。(a) 累积数据拟合；(b) 对应的每日数据拟合。

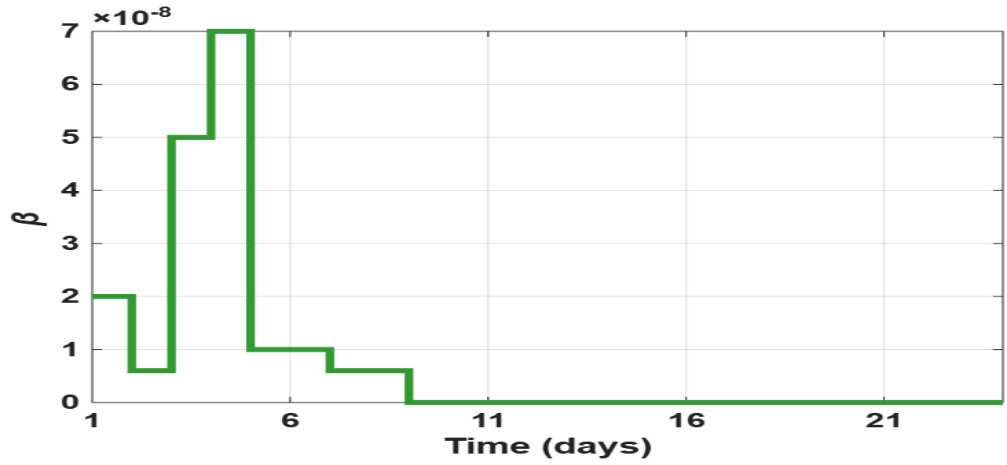
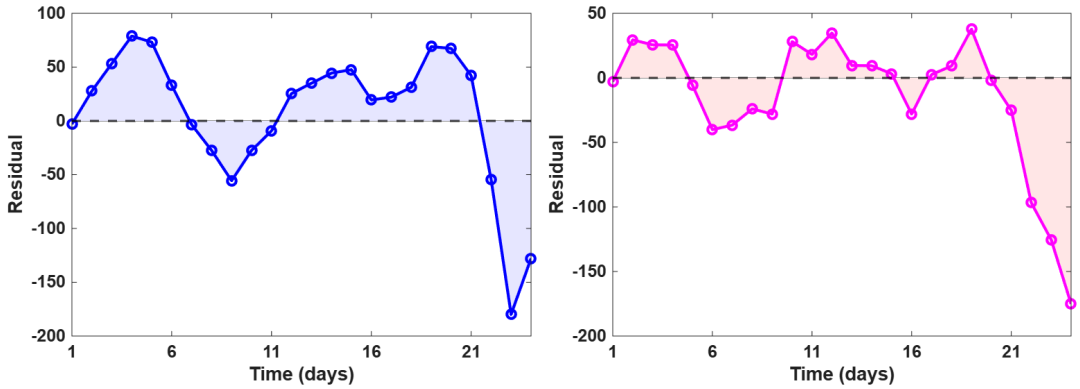


图13：通过累积数据拟合得到的 β 估计值。



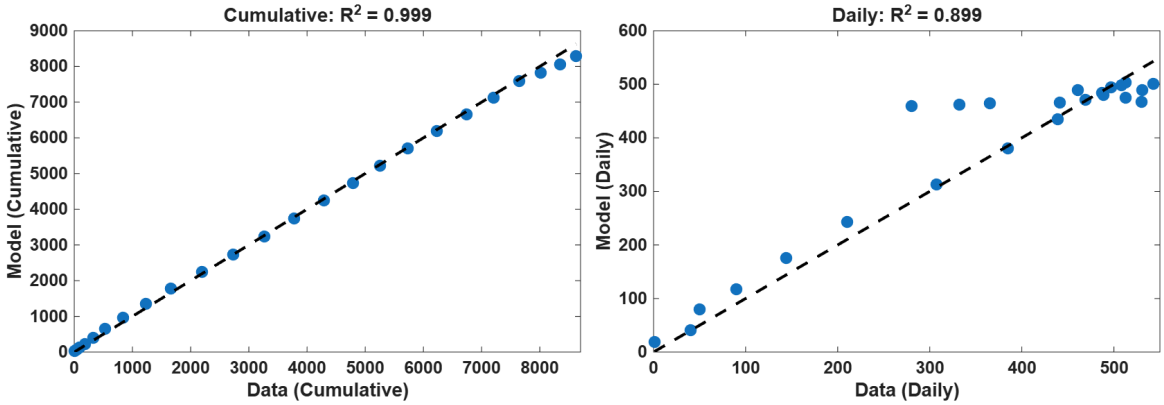
(a) (b)

图14：与图12中的拟合相对应的残差图：（a）累积数据拟合的残差；（b）每日数据拟合的残差。

为求解该问题，我们采用一种混合优化策略：先进行基于梯度的搜索，再使用 MATLAB 例程`fminsearch` [23]进行无导数精化。求解器 `fminsearch`基于 Nelder–Mead 单纯形法，旨在寻找标量目标函数 $\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^p} f(\boldsymbol{\theta})$，的局部极小值，且无需导数信息。每次迭代中，由 $p+1$ 个候选点组成的单纯形会通过反射、扩张、收缩和缩小等几何变换进行更新。例如，反射点的计算公式为

$$\boldsymbol{\theta}_r = \boldsymbol{\theta}_c + \alpha\left(\boldsymbol{\theta}_c - \boldsymbol{\theta}_h\right),$$

其中，$\boldsymbol{\theta}_c$ 表示剔除最差顶点 $\boldsymbol{\theta}_h$后单纯形的质心，$\alpha > 0$ 表示



(a) (b)

图15：图中拟合对应的 R^2 值：12： （a）累积数据拟合的 R^2 值； （b）每日数据拟合的 R^2 值。

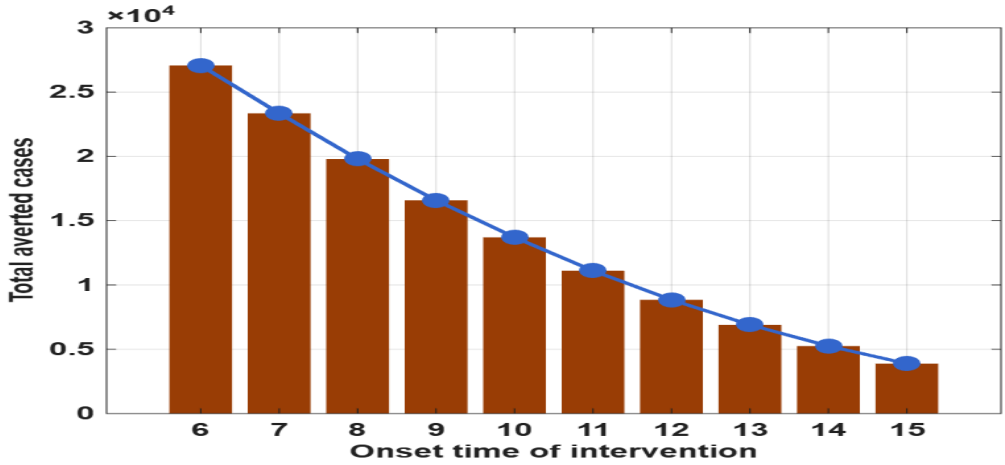


图16：避免的病例总数随干预开始时间变化的曲线。

反射系数。迭代将持续进行，直至满足针对目标函数值或参数变化设定的收敛准则。模型拟合结果如图12所示。黑点表示观测数据，红色曲线表示模型预测轨迹。模型拟合采用累计感染数据，以估计传播率 β，相应的拟合结果见图12(a)。每日感染数据的拟合结果见图12(b)。模型较好地再现了累计感染曲线；然而，在观测期末段，每日感染曲线仍存在一些偏差。估计得到的时变传播率 $\beta(t)$如图13所示。它可以

可以看出， β 最初有所上升，在 $t = 5$左右达到峰值，随后逐渐下降。拟合优度分析（包括残差图和决定系数（R^2））分别见图14 和图 15。由于拟合中缺少与干预相关的数据，我们没有明确考虑干预措施，并假设其平均影响已由每周变化的传播率体现。不过，我们使用校准模型评估了干预策略启动时间的定性影响。图 16 展示了避免的病例总数随干预启动时间的变化。结果表明，避免的病例数与干预措施引入时间之间呈指数衰减关系。

7 结论

数学模型是研究恶意软件如何传播并评估可能控制措施的一种有效方法。本文提出了一个通用的 SEIR型流行病模型，并利用常微分方程组描述物联网网络中恶意软件传播的特征。我们证明了该系统的正性和有界性。此外，我们解析推导了恶意软件传播阈值以及控制空间中流行区域分界线的表达式。我们还研究了无恶意软件平衡点的局部渐近稳定性和全局稳定性。此外，我们证明了地方病平衡点在 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时存在，并观察到系统中存在向前分岔（3.1）。通过归一化前向敏感性指数，我们确定传播率、两个控制参数，以及用户发起设备重置率和凭据重置率，是影响恶意软件传播阈值最敏感的四个参数。

我们还研究了传播率（β）与最大感染人数（$I_{\max}$）、达到最大感染人数的时间（t_m）以及感染者总数（I_{tot}）之间的明确依赖关系。观察发现，这三个量与β均呈非线性关系。起初， $I_{\max}$ 和 I_{tot} 随 β增加，之后在 β超过某个值时趋于平稳；而 t_m 与 β呈反向非线性关系。这些趋势可以解释为：在 β较低时，传播率上升会加快疫情传播，从而带来更高的峰值（$I_{\max}$）和更大的疫情规模（I_{tot}）。然而，超过某个阈值后，易感人群会更快耗尽，限制疫情进一步增长，并使曲线趋于饱和。相反，随着 β 增加，感染传播得更快，达到峰值（t_m）所需的时间随之缩短，这也解释了这种反向非线性关系。这些明确的关系有助于揭示感染曲线的特征，并更清楚地理解其动态变化。

我们提出了一种适用于 SEIRV 型模型的混合梯度全局优化控制算法。据我们所知，我们首次将模拟退火的概念应用于 SEIRV 型多仓室流行病模型的控制。我们明确推导了与 SEIRV 模型相关的代价函数的梯度下降方向，以便局部搜索最优解；随后通过模拟退火进行随机搜索，以获得全局最优解。值得注意的是，

我们算法的推导过程很容易应用于任何由常微分方程描述的多仓室流行病模型，不过，不同模型的梯度推导可能有所不同。这种全局搜索在一定程度上有助于获得更好的控制策略。

优化算法的实施取决于特定的前提条件，例如感染和控制的成本系数，这些系数可能根据具体情境固定。不过，作为说明，我们展示了如果 $m_0 = 1$、 $k_1 = 0.2$和$k_2 = 0.3$（遵循成本结构 $m_0 \geq k_2 \geq k_1$），那么（c_1^*， c_2^*） = （0.01，0.08），也就是说，治疗与疫苗接种相结合似乎是全局最优控制。在总控制力度中，约11%应分配给疫苗接种，约89%应分配给治疗。

本研究基于SEIRV的表述，为理解物联网恶意软件的传播动态提供了理论基础，并展示了如何将经典流行病学思想应用于网络安全领域。未来研究的一个自然方向是，在模型中纳入现代物联网生态系统的更多特征，例如设备异质性、多层网络结构，以及各异的补丁或更新周期。现实中的物联网恶意软件通常表现出适应性和设备特异性行为；因此，将时间依赖或状态依赖参数纳入模型，可使建模框架更加灵活。另一个有前景的方向是整合实证信息——例如网络日志、威胁情报数据或基于专家意见的成本系数——以校准模型参数并进一步提升可解释性。通过纳入经济信息、系统层面的实施评估和专家意见，可以更贴近现实地估算成本系数（m_0、 k_1和 k_2），从而更好地反映控制恶意软件传播的实际成本效益。这些进展将有助于衔接理论见解与现实世界的物联网安全实践，增强该建模框架的实际意义。

数据可用性

本研究中使用或提及的所有数据来源均在文章中注明。 cle.

致谢

本研究部分经费由印度政府电子和信息技术部（MeitY）通过网络安全研究与发展计划资助。

作者贡献声明

SG 和 VAK 共同提出了该问题。SG 进行了解析分析和数值仿真，并撰写了论文主体。VAK 参与了结果的解读，并对研究进行了指导和审阅。

利益冲突

作者不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] Asma Al Kindi、Dawood Al Abri、Ahmed Al Maashri 和 Fahad Bait-Shiginah。社交物联网中的恶意软件传播行为分析。《国际通信系统期刊》，32(15):e4102，2019。

[2] David Aleja、Gonzalo Contreras-Aso、Karin Alfaro-Bittner、Eva Primo、Regino Criado、MiguelRomance 和 StefanoBoccaletti。网络疫情的分舱模型。*Chaos, Solitons & Fractals*，161:112310，2022。

[3] Alexander Alexeev、Diana S Henshel、Mariana Cains 和 Quan Sun。异构网络中的恶意软件传播。载于*2016*年电气电子工程师学会第*12*届无线与移动计算、网络与通信国际会议（*WiMob*），第1–5页。电气电子工程师学会，2016年。

[4] Saida Amine、Karam Allali 等。《时滞双毒株流行病模型与一般发病率的动力学》。《*Chaos, Solitons & Fractals*》，153:111527，2021。

[5] Sebastian Anit¸a、Viorel Arn˘autu 和 Vincenzo Capasso。《生命科学与经济学中的最优控制问题导论：从数学模型到使用 *MATLAB*® 进行数值模拟》。施普林格科学与商业媒体，2011。

[6] Viorel Barbu。《微分系统优化中的数学方法》，第310卷。施普林格科学与商业媒体，2012。

[7] Fred Brauer、Carlos Castillo-Chavez 和 Zhilan Feng。《流行病学中的数学模型》，第32卷。施普林格，2019。

[8] Carlos Castillo-Chavez、Zhilan Feng 和 Wenzhang Huang。关于 r_0的计算及其在全局稳定性中的作用。《新发和再发传染病的数学方法：导论》，1:229，2002。

[9] Ferhat Ozgur Catak、Javed Ahmed、Kevser Sahinbas 和 Zahid Hussain Khand。使用卷积神经网络进行数据增强的恶意软件检测。*Peerj com-puter science*，7:e346，2021。

[10] Bo-Rui Chen、Shin-Ming Cheng 和 Maina Bernard Mwangi。基于移动性的物联网恶意软件传播流行病模型。*IEEE Access*，10:107929–107941，2022年。[11] Shin-MingCheng、Weng Chon Ao、Pin-YuChen 和 Kwang-Cheng Chen。广义社交网络中的恶意软件传播建模。*IEEE*通信快报，15(1):25–27，2010年。

[12] Fred Cohen。计算机病毒：理论与实验。计算机与安全，6(1):22–35，1987年。[13] Aresh Dadlani、Muthukrishnan Senthil Kumar、Kiseon Kim 和 Khosrow Sohraby。无标度网络上的恶意软件传播模型的稳定性与免疫分析。*IEEE*通信快报，18(11):1907–1910，2014年。[14] Muhammad Sani Danladi 和 Muhammet Baykara。低功耗广域网技术：未解决的问题、挑战与潜在应用。计算机工程研究评论，9(2)，2022年。[15] Liping Feng、Xiaofeng Liao、Qi Han 和 Lipeng Song。点对点僵尸网络建模与分析。自然与社会中的离散动力学，2012(1):865075，2012年。[16] M Todd Gardner、Cory Beard 和 Deep Medhi。利用SEIRS流行病模型研究物联网僵尸网络攻击。载于*DRCN 2017*-可靠通信网络设计；第*13*届国际会议，第1–8页。VDE，2017年。[17] Antonio Carlos B Godoi 和 Jos´e Roberto C Piqueira。带警报的时空恶意软件遏制模型。混沌、孤子与分形，173:113618，2023年。[18] Jos´e Diamantino Hern´andez Guill´en、 ´Angel Mart´ın del Rey 和 Roberto Casado Vara。恶意软件传播模型的最优控制。数学，8(9):1518，2020年。[19] Soodeh Hosseini 和 Mohammad Abdollahi Azgomi。基于谣言传播过程的无标度网络恶意软件传播模型。计算机网络，108:97–107，2016年。[20] Soodeh Hosseini、Mohammad Abdollahi Azgomi 和 Adel Torkaman Rahmani。考虑软件多样性与拓扑动力学的恶意软件传播模型。载于*2014*年第*11*届国际信息安全与密码学会议，第73–78页。电气电子工程学会，2014年。[21] Okosun Kazeem、Ogunlade Samson 和 Bonyah Ebenezer。计算机病毒传播的最优控制分析。*Int. J. Netw. Secur.*，20(5):971–982，2018年。[22] Matt J Keeling 和 Pejman Rohani。人类和动物传染病建模。普林斯顿大学出版社，2008年。[23] Carl T Kelley。优化迭代方法。SIAM，1999年。[24] Jeffrey O Kephart 和 Steve R White。计算机病毒的有向图流行病学模型。载于计算：微观与宏观视角，第71–102页。世界科技出版公司，1992年。[25] William Ogilvy Kermack 和 Anderson G McKendrick。对流行病数学理论的贡献。*Proc Math Phys Eng Sci*，115(772):700–721，1927年。

[26] William Ogilvy Kermack 和 Anderson G McKendrick。流行病数学理论的贡献。II——地方性流行问题。*Proc Math Phys Eng Sci*，138(834):55–83，1932年。[27] William Ogilvy Kermack 和 Anderson G McKendrick。流行病数学理论的贡献。III——地方性流行问题的进一步研究。*Proc.Math. Phys. Eng. Sci.*，141(843):94–122，1933年。[28] Viacheslav Kovtun、Krzysztof Grochla、Mohammed Al-Maitah、Saad Aldosary 和 Tetiana Gryshchuk。基于 SIR 模型熵极值动态解释的网络疫情传播预测。*Egyptian Informatics Journal*，28:100572，2024年。[29] Viacheslav Kovtun、Krzysztof Grochla、Mohammed Al-Maitah、Saad Aldosary 和 Wojciech Kempa。用于预测网络疫情早期发展情况的熵极值模型。*Computational and Structural Biotechnology Journal*，24:593–602，2024年。[30] Duc Tran Le、Thong Trung Tran、Khanh Quoc Dang、Reem Alkanhel 和 Ammar Muthanna。Wi-Fi网络路由器的恶意软件传播模型。*IEEE Access*，10:61873–61891，2022年。[31] Samir Lemeˇs。软件工程在工业4.0中的作用。载于产业实施基础技术与模型会议论文集，第4卷，第57–88页，2023年。[32] Li Li、Jufu Cui、Rui Zhang、Hui Xia 和 Xiangguo Cheng。复杂网络的动态：工业物联网中的恶意软件传播建模与分析。*IEEE Access*，8:64184–64192，2020年。[33] Fangzhou Liu、Dong Xue、Xinghu Yu、Zhihong Zhao、Shiying Lin、Songlin Zhuang、Charo I del Genio、Stefano Boccaletti 和 Huijun Gao。通过交通管理灵活缓解流行病。*Chaos, Solitons & Fractals*，194:116211，2025年。[34] Wanping Liu 和 Shouming Zhong。网络恶意软件传播建模与最优控制策略。*Scientific reports*，7(1):42308，2017年。[35] Somayya Madakam、Ramya Ramaswamy 和 Siddharth Tripathi。物联网（IoT）：文献综述。*Journal of computer and communications*，3(5):164–173，2015年。[36] Arash Mahboubi、Seyit Camtepe 和 Keyvan Ansari。物联网僵尸网络传播的随机建模：移动恶意软件传播建模简述。*IEEE access*，8:228818–228830，2020年。[37] Jelena Milosevic、Nicolas Sklavos 和 Konstantina Koutsikou。物联网软件和硬件中的恶意软件。2016年。

[38] William Hugh Murray。流行病学在计算机病毒研究中的应用。*Computers& Security*，7(2):139–145，1988年。[39] Sk Shahid Nadim、Indrajit Ghosh 和 Joydev Chattopadhyay。新冠肺炎的短期预测与预防策略：基于模型的研究。*Applied mathematics andcomputation*，404:126251，2021年。[40] Pascal Sungu Ngoy、Kaninda Musumbu 和 Duncan Kioi Gathungu。结合流行病模型与深度学习研究网络攻击。载于*2021*年国际计算机通信与人工智能会议 *(CCAI)*，第150–154页。电气电子工程师学会，2021年。[41] Baihao Peng、Junfeng Liu 和 Jun Zeng。从抑制恶意软件传播的角度对休眠-唤醒机制进行动态分析。*IEEE Transactions on NetworkScience and Engineering*，2025年。[42] Krishna K Ramachandran 和 Biplab Sikdar。恶意软件在去中心化对等网络中的传播动态。*IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*，8(4):617–623，2010年。[43] Marcos Severt、Roberto Casado-Vara 和 Angel Mart´ín del Rey。基于蒙特卡洛的方法与物理信息神经网络参数估计方法在物联网网络恶意软件识别中的比较。*Technologies*，11(5):133，2023年。[44] Theodoros Spyridopoulos、Konstantinos Maraslis、Alexios Mylonas、Theo Tryfonas 和 George Oikonomou。用于恶意软件传播防范成本效益分析的博弈论方法。*Infor mation Security Journal: A Global Perspective*，24(4-6):164–176，2015年。[45] Pauline Van den Driessche 和 James Watmough。疾病传播舱室模型的再生数与阈下地方性流行平衡。*Math-ematical biosciences*，180(1-2):29–48，2002年。[46] Tianbo Wang、Chunhe Xia、Sheng Wen、Hui Xue、Yang Xiang 和 Shouzhong Tu。Sadi：一种研究社交蠕虫在层次网络中传播的新模型。*IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*，16(1):142–155，2017年。[47] Yunkai Wei、Yue Tao、Ning Yang 和 Supeng Leng。基于兴趣的重叠社区中的恶意软件传播建模。*IEEE Access*，7:121374–121387，2019年。[48] Xia Yang、Lansun Chen 和 Jufang Chen。单物种非自治时滞扩散模型的持久性与正周期解。*Computers & mathematicswith applications*，32(4):109–116，1996年。[49] Ka Fai Cedric Yiu、Yanqun Liu 和 Kok Lay Teo。用于全局优化的混合下降法。*Journal of global optimization*，28:229–238，2004年。