arXiv:2603.03716v1 [math.GT] 4 Mar 2026

双曲三维流形中具有固定欧拉示性数的多项式多个曲面

MARC LACKENBY，ANASTASIIA TSVIETKO VA

Abstract. 我们给出了一个上界，用于估计有限体积双曲3-流形 M（闭或带尖点）中适当嵌入的紧致本质可定向且彼此不同痕的曲面数量，这些曲面的欧拉示性数至少为某个常数χ。该上界是 M体积的多项式函数，其次数随 $|\chi$线性变化。

1. Introduction

嵌入不可压缩曲面在3-流形理论中发挥着核心作用。因此，一个自然的问题是：一个三维流形中包含多少个具有给定欧拉示性数的本质适当嵌入曲面？对于双曲三维流形，这个数量是有限的，但一般而言则是无限的。因此，将讨论范围限制在双曲三维流形上是合理的。

近年来，人们一直在研究三维流形中曲面数量这一问题。可以固定三维流形，考察曲面数量如何随曲面的亏格或欧拉示性数变化。沿这一方向最早的工作分别出自 Haken（研究嵌入正规曲面）和 Kneser（研究同时嵌入三维流形中的曲面）。后来，Masters [26], 以及 Kahn和Markovic [22]研究了一个相关问题，即关于浸入π_1单射曲面的问题。他们证明，在闭双曲三维流形中，属为 g 的这类闭连通曲面（按同伦分类）的数量呈 g^{2g} 增长。最近，这一结果被推广到带尖点双曲三维流形中的拟Fuchsian曲面子群[17]。（此前，Calegari、Marques 和 Neves 也在 [7] 的第 4 节中统计了闭三维流形中的拟Fuchsian曲面子群。）对于嵌入曲面（按同痕分类），数量可能更少。在 [12], 中，Dunfield、Garoufalidis 和 Rubinstein 证明，对于一个固定的双曲三维流形（满足一些温和的约束，且不含嵌入的闭不可定向本质曲面），闭嵌入本质曲面的数量（曲面可能不连通），除有限多个取值外，是关于欧拉示性数的拟多项式。在所有这些结果中，要得到精确表达式，都需要固定三维流形： [26, 22] 中的常数以及 [12] 中的拟多项式都取决于该三维流形。

如果不固定三维流形，而是固定曲面的欧拉示性数，则可以得到通用的且多项式的上界。这里所说的通用，是指该表达式和常数对于所有三维流形都由一个明确的通用公式给出。

定理 1.1。 存在常数 c_1 和 c_2 ，使得下述性质成立。设M 是一个体积有限、体积为 $\mathrm{vol}(M)$ 的可定向双曲三维流形，可以是闭的，也可以带有尖点。在 M 中，欧拉示性数至少为 χ 的适当嵌入的可定向本质曲面，按同痕分类，其数量至多为 $(c_1\mathrm{vol}(M))^{c_2|\chi|}$。

我们的定理为许多链环的外部中的本质曲面数量给出了一个简单的上界。请注意，对于带尖点的三维流形，该定理既适用于闭曲面，也适用于具有非空边界的曲面。

推论 1.2. 存在常数 c_1' 和 c_2，使其具有以下性质。设 K是三维球面中的一个双曲链环，其交叉数为 $c(K)$。那么，在 K 的外部中，欧拉示性数至少为 χ的适当嵌入的可定向本质曲面，在同痕意义下的数量至多为 $(c_1' c(K))^{c_2|\chi|}$。

我们将在第9节给出这一结论的证明。

还要注意，上述结果中对可定向曲面的限制可以避免。

推论 1.3。 定理 *1.1* 的结论可推广到满足 π_1-单射和边界-π_1-单射条件的不可定向曲面。

这里，适当嵌入三维流形 M 中的紧曲面 S 是边界-π_1-单射的，是指对于任意一条端点位于 ∂S 中的弧 α（不一定是嵌入的），若存在 M 中将 α 同伦到 ∂M 的同伦，则存在 S 中将 α 同伦到 ∂S 的同伦。推论 1.3 的证明也见第9节。

1.1. **相关工作**。 我们的主要结果的证明受到 Hass、Thompson 和 Tsvietkova 关于三维球面中的素交替链环补空间及其德恩填充的研究启发。我们的推论 1.2 可与他们给出的两个明确且普适的上界进行比较：一个适用于闭曲面，另一个适用于跨越曲面；两者都关于链环交叉数呈多项式增长。在他们的证明中，曲面被分解成若干部分，然后利用欧拉示性数论证来控制部分的数量。虽然我们也采取了类似步骤，但这里所用的技术本身截然不同，几何方法尤其复杂得多，因此能够达到更高程度的普适性。

另一项相关工作是 Purcell 与 Tsvietkova 的工作 [31, 32]。文中针对一大类带尖点的三维流形及其德恩填充，建立了通用、显式且多项式的上界。这些带尖点的三维流形是某些链环在紧致、可定向、不可约三维流形（可能带边界）中的补集。这些链环须在某个闭合可定向嵌入曲面上具有“良好”的投影。（“良好”是指交错、在某种自然意义下为素的，并且可棋盘染色。）此类三维流形的集合与可定向双曲三维流形的集合有非空的交，但二者互不为对方的真子集。我们的证明技巧颇为不同，几何性要强得多。相比之下， [32], 以及它所依赖的论文 [31] ，是将经典纽结理论中的拓扑方法加以推广，从而得到其界。

本文的技巧利用了稳定极小曲面与三维双曲流形三角剖分之间的相互作用。具体而言，我们使这类曲面相对于“厚”三角剖分处于正规位置，同时保持其稳定且极小。鉴于正规曲面理论和极小曲面在三维流形拓扑学与几何学中占据核心地位，我们有理由期待，本文发展的工具还将有其他应用。

Appleboim [1], 最近也探讨了极小曲面与正规曲面之间的相互作用，不过他并未研究我们论文的核心问题——计数问题，而且他的方法细节也与我们的不同。在若干重要差异中，Appleboim 的曲面被置于准正规位置（一种放宽了要求的

正规位置）。我们还严格控制环境三维流形三角剖分中的四面体数量：为此，我们对三角剖分作扰动，而不是反复细分。最后，我们考虑的三维流形不一定是紧致的。

“厚”三角剖分的概念在本文中十分重要，其定义将在下文给出，沿用 Breslin [2, 3], 的研究，并对 Breslin 的一些技术性结果和引理作了改进。例如，Colding、Gabai 和 Ketover [9], 曾利用这类三角剖分对海加德分解进行分类；Edelsbrunner 等人 [14]则在算法背景下研究了这类三角剖分。

1.2. **致谢**。M.L. 得到了工程和物理科学研究理事会的部分资助（项目编号 EP/Y004256/1）。A.T. 得到了 NSF CAREER 项目（DMS-2142487）、NSF 研究项目（DMS-2005496、DMS-1664425，原编号 DMS-1406588）、高等研究院 DMS-1926686 项目以及冲绳科学技术大学的部分资助。A.T. 感谢 Jessica Purcell 提请我们注意有关德劳内和厚三角剖分的一些相关研究。为实现开放获取，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿件采用 CC BY 公共版权许可。

2. Overview of the proof

证明概要如下。

设 M 是一个紧致可定向三维流形，其内部具有有限体积双曲结构。我们的目标是求出一个上界，限定在 M中适当嵌入、按同痕等价计数且欧拉示性数至少为某个常数 χ 的本质可定向曲面 F 的数量。这也给出了欧拉示性数恰好等于某个常数的曲面的数量上界。

根据马古利斯引理 [23], ，存在一个具有以下性质的普适常数 $\epsilon_3 > 0$ 。对于任意 $\mu < \epsilon_3$， M 的内部都可分解为一个“厚”部 $M_{[\mu,\infty)}$ 和一个“薄部” $M_{(0,\mu)}$。薄部的每个连通分支都同胚于 $T^2 \times (1, \infty)$ 或 $S^1 \times \mathrm{int}(D^2)$。前一种情况下，该连通分支是 $M - \partial M$某个端的邻域，称为“尖点”。后一种情况下，该连通分支是长度小于 μ 的某条测地线的正则邻域。此时，不妨假设 $M - \partial M$ 没有长度小于 μ 的测地线，这样 $M_{(0,\mu)}$ 的连通分支就只有尖点。在这种情况下， $M_{[\mu,\infty)}$ 同胚于 M。

Thurston [35] 的一个著名结果表明， $M_{[\mu,\infty)}$ 具有一个至多使用 $O(\mathrm{vol}(M))$ 个四面体的三角剖分 T，其中隐含常数依赖于 μ。由于 F 是本质的，它可以相对于 T通过同痕变换变为正规形式。这意味着它与每个四面体相交于一个由三角形和正规四边形组成的集合，如图1所示。关于正规曲面理论的基础，我们建议读者参阅马特维耶夫的著作 [27]。 T 中不同正规圆盘类型的数目为 $7|T|$，其中 $|T|$ 是 T 中四面体的数目。因此， F由一个包含 $7|T|$个非负整数的列表表示，这些整数统计每种类型的正规圆盘的数目。这个整数列表在同痕意义下决定了 F 。

假设我们能够使 $F \cap T$的正规圆盘总数至多为 $N|\chi(F)|$，其中 N是某个普适常数。接下来，我们来说明如何给出曲面数量的上界。

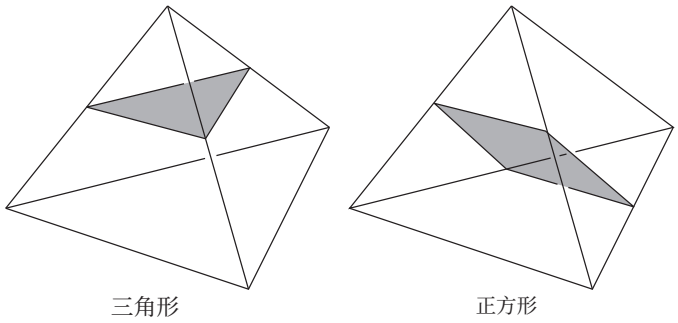

FIGURE 1. 四面体中的一个正规圆盘是三角形或正方形，如图所示。

要对欧拉示性数至少为 χ的 F 的可能情况数目进行界定，只需计算和不超过 $N|\chi|$ 的非负整数 $(7|T|)$ 元组的数量。这里，每个整数表示 $|T|$ 个四面体之一中某种类型的圆盘数量。

我们可以对 $(7|T|+1)$ 元组运用组合数学中的“插板法”，其中最后一个整数表示 $N|\chi|$ 与 $F \cap T$ 的正规圆盘数量之差。于是， $F \cap T$ 的选项数为

$$\binom{N|\chi| + 7|T|}{N|\chi|}.$$

由于

$$\binom{n}{k} \leq n^k/k!$$

我们得到一个上界

$$\frac{(N|\chi| + 7|T|)^{N|\chi|}}{(N|\chi|)!}.$$

由于 $|T|$ 是 $O(\mathrm{vol}(M))$，我们得到可能性数量的一个上界 r F，其增长速度为

$$\frac{\big(O(\mathrm{vol}(M)) + N|\chi|\big)^{N|\chi|}}{(N|\chi|)!}.$$

或者，我们也可以如下得到曲面数量的一个较简单上界。我们可以把 $F \cap T$ 的正规圆盘看作标记了从 1 到至多 $N|\chi|$ 的整数。对于每个这样的圆盘，我们从至多 $7|T|$ 种类型中选择一种。不同的选择可能会得到相同的正规曲面。此外，许多选择也不会得到正规曲面。不过，选择的数量至多为 $O(\mathrm{vol}(M))^{N|\chi(F)|}$。

这只控制了 F 与 $M_{[\mu,\infty)}$ 之间交的可能数量。然而，其余部分 $M_{(0,\mu)}$ 的拓扑非常简单，因此 $F \cap M_{(0,\mu)}$ 几乎由曲线 $F \cap \partial M_{[\mu,\infty)}$ 决定，而这些曲线的可能数量我们已经控制住了。

因此，我们的主要任务是将 $F \cap T$的正规圆盘总数限制在 $|\chi(F)|$的线性函数之内。根据 Freedman、Hass 和 Scott [15],以及 Ruberman [33]的结果， F 可以经过同痕变换成为一张嵌入的极小曲面（或者成为另一种可能的情况，我们稍后会讨论）。于是，它继承了一个黎曼度量

其截面曲率为 κ，且处处不大于 -1； -1是 $M-\partial M$上度量的截面曲率。根据高斯-博内定理，

$$\operatorname{area}(F)=\int_F 1\,dA\le\int_F -\kappa\,dA=-2\pi\chi(F),$$

其中 dA 是 F上的面积形式。因此， F 的这一代表的面积以 $|\chi(F)|$的一个线性函数为上界。由此，试图证明 F 的一个正规代表所含正规圆盘的数目同样以 $|\chi(F)|$的一个线性函数为上界，是合理的。这是我们面临的主要技术挑战。

现在我们逐节给出本文剩余部分更为详细的概述。

Thurston [35], 所构造的、其四面体数目关于流形体积呈线性的三角剖分，遗憾的是并不能满足我们的需要。尽管其四面体数目以 vol(M) 的一个线性函数为上界，但它缺少我们所要求的额外性质。因此，我们必须利用 Breslin [3]的构造来修改这一三角剖分。

双曲三维空间中的四面体 Δ 对正实数 θ、 A 和 B 称为 (θ,A,B)-厚，如果其二面角均不小于 θ，且每条边的长度都介于 A 和 B 之间。双曲三维流形的三角剖分称为 (θ,A,B)-厚，如果每个四面体都与 $\mathbb{H}^3$ 中的一个 (θ,A,B)-厚四面体等距。Breslin 证明了，任意双曲三维流形 M 都有一种三角剖分，使得位于 $M_{[\mu/2,\infty)}$ 中的四面体均为 (θ,A,B)-厚。这里， μ 是任意小于 Margulis 常数的正实数。在 Breslin 的结果中， θ（μ）、 A（μ）和 B（μ）仅依赖于 μ，而不依赖于流形 M。

遗憾的是，这对于我们的目的而言仍不完全足够，原因有二。首先，我们希望处理的是 $M_{[\mu/2,\infty)}$的三角剖分，而不是 M 的三角剖分。然而， $M_{[\mu/2,\infty)}$ 的边界并非分片全测地的，因此当这个边界非空时，不可能用双曲测地四面体对 $M_{[\mu/2,\infty)}$ 进行三角剖分。此外，当 M 含有一条长度仅比 $\mu/2$ 略小的测地线时， $M_{[\mu/2,\infty)}$ 的边界可能具有非常小的单射半径。因此，我们处理 M 的一个“肥厚”部分，记为 $M_{\text{肥厚}\mu/2}$；它由 $M_{[\mu/2,\infty)}$ 附加 $M_{(0,\mu/2)}$ 的若干连通分支得到，这些连通分支是长度介于 $\mu/4$ 和 $\mu/2$ 之间的测地线的正则邻域。我们希望对一个与其同痕的流形进行三角剖分，而不是对 $M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 本身进行三角剖分。

其次，我们还需要知道 $\theta(\mu)$、 $A(\mu)$、 $B(\mu)$ 如何依赖于 μ。我们将证明， $\theta(\mu)$ 可以取为一个常数 θ，与 μ无关，并且 $A(\mu)$ 和 $B(\mu)$ 可以分别选取为 $a\mu$ 和 $b\mu$，其中 a和 b为普适常数。这一点在第 3 节中讨论。该证明是对 Breslin 的论证所作的一个简单但技术性的改编，因此被放到附录中。

因此，我们在此阶段固定常数 θ、 a 和 b。然而，我们将把 μ 的选取推迟到本文后面。因此，在此阶段，我们尚未固定我们的三角剖分 T。

如上所述，我们的目标是将本质的可定向适当嵌入曲面 F 同痕变换为极小曲面，以便应用高斯-博内定理。Freedman、Hass 和 Scott [15] 以及 Ruberman [33]证明了这通常是可行的。我们将在第 4 节讨论这部分内容。另一种可能的结论是，不将 F 同痕变换为极小曲面，而是使最终曲面成为嵌入的非定向极小曲面的薄正则邻域的边界

F'。再经过一次小的同伦，将 F 变为一个浸入极小曲面，该曲面对 F'作双覆盖。

在我们的论证中， F 能够实现为稳定极小曲面这一点至关重要。第 4 节讨论了这个术语的定义。接着，Schoen 的一个定理 [34]（另见 Colding 和 Minicozzi [11]）表明，双曲 3-流形中的稳定极小曲面的主曲率存在一个统一上界 C。因此，任意点 F 附近的“小”圆盘看起来“近乎全测地”。在第 6 节中，我们通过定义（η， δ）-几乎恒定法向量，对这一概念作出精确定义。这里， η 是我们考察的尺度，而δ 是这些法向量的“变化”程度。对于后一个概念，我们必须谨慎，因为我们比较的是 M中不同点处的向量。Schoen 定理的一个推论是，对于每个 $\delta > 0$，都存在一个 $\eta > 0$，使得在 F的任意点 x 附近，只要 η 小于 M 在 x处的单射半径，曲面就具有（η， δ）-几乎恒定法向量。重要的是， η 只取决于 δ，而不取决于流形 M 或曲面 F。

我们的下一步是构造 M 的一个三角剖分，使其与 F“充分横截”。我们将在第 7 节中精确定义这一概念。它包含若干条件，其中最主要的一条是，四面体的边不能太接近与 F 相切。要精确定义这一点，同样需要谨慎，因为我们比较的是基于 M 上不同点的向量。但主要结论是，当一个曲面“近乎全测地”且与某个三角剖分充分横截时，它与每个四面体的交都是正规圆盘。构造该三角剖分的方法是，对第 3 节中构造的三角剖分 T 作重心细分 T'，然后对其进行扰动，同时保持其边和面为全测地的。在第 8 节中，我们将证明，只要所选尺度 μ 足够小，总能对 T' 作出这样的扰动。因此，现在我们固定 $\mu > 0$，使这一性质成立。请注意，尽管我们对 T' 作了扰动，这个三角剖分仍与 T 的重心细分组合等价。

我们证明，这种扰动后的重心细分是 (θ'''， $a'''\mu$， $b'''\mu$)-厚的，其中 θ'''、 a''' 和 b''' 是普适常数。这意味着，在 $M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 中， F 的每个点附近都有一个面积存在统一下界的正规圆盘。因此， $M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 中正规圆盘的数量有一个由面积(F) 的线性函数 $\leq -2\pi\chi(F)$ 给出的上界。于是，本节开头给出的论证便得出所需的结论：在同痕意义下， $F \cap M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的可能情况数量有上界。

在第9节中，我们还将考察 F 如何位于 M 的薄部，从而完成证明。

3. Triangulating a fat part of the 3-manifold

3.1. 厚薄分解。设 M 是一个黎曼流形，并设 $\mu > 0$。 M 的 μ-薄部是由满足以下条件的点 $x \in M$ 构成的子集：M 在 x 处的单射半径小于 $\mu/2$，通常记作 $M_{(0,\mu)}$。厚部分是薄部的补集，通常记作 $M_{[\mu,\infty)}$。由此可将其分解为不相交并 $M = M_{(0,\mu)} \cup M_{[\mu,\infty)}$。

当 M 是有限体积的可定向双曲 n流形时，由于马古利斯引理[23]，薄部连通分支的结构已得到充分理解。该引理断言，存在一个普适常数 $\epsilon_n > 0$，它仅取决于维数 n，并且具有如下性质：对于任意 $\mu < \epsilon_n$， μ-薄部有两类连通分支：

(1) 尖点：这是无界连通分支，与一个平坦的（$n-1$）维流形和一条直线的乘积微分同胚。(2) 马古利斯管：这是长度为 $<\mu$ 的闭测地线在 M 中的邻域。它们有界，且与一个圆和一个（$n-1$）维圆盘的乘积微分同胚。

特别地，可定向的完备有限体积双曲流形总是微分同胚于某个紧致流形的内部，该流形的边界可以为空。对于可定向的有限体积双曲三维流形，其薄部因此是实心环面和尖点的不交并。

具有如下性质的值 $\epsilon_n > 0$： ϵ_n-薄部的连通分支总是仅具有上述形式，称为（n维）Margulis 常数。现在我们固定一个三维马古利斯常数 ϵ_3。例如，根据 Meyerhoff 的工作中的定理2，0.104 是这样一个常数 [29]。此外，已知 $\epsilon_3 \leq 0.766$ （见 [16, 定理1.5(2)]）。

尽管我们的论证至关重要的一点是，存在一个适用于所有有限体积双曲三维流形的通用三维马古利斯常数 ϵ_3，但我们仍需研究可能远小于 ϵ_3的尺度。因此，我们将考虑正的 $\mu < \epsilon_3$，并分析 $M_{(0,\mu)}$ 和 $M_{[\mu,\infty)}$。于是，我们将讨论 M的“薄部”或“厚部”。

3.2. **的肥部** M。</style}本文以下部分均假设 M 是一个有限体积的完备双曲三维流形。

定义3.1。设 $\mu > 0$ 是一个小于三维马古利斯常数的实数。那么 $M_{(0,\mu/2)}$ 由尖点和测地线长度小于 $\mu/2$的实心环面邻域组成。令 $\text{Thin}^{\geq \mu/4}$ 表示 $M_{(0,\mu/2)}$ 中那些作为测地线正则邻域、且测地线长度至少为 $\mu/4$的连通分支之并。定义 $M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 为 $M_{[\mu/2,\infty)} \cup \text{Thin}^{\geq \mu/4}$。

因此，$M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 是通过附加薄部中的若干连通分支从 $M_{[\mu/2,\infty)}$ 得到的。这些连通分支是测地线的正则邻域，其长度不至于太短：至少为 $\mu/4$。另请注意，$\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 是$\partial M_{[\mu/2,\infty)}$中某些连通分支的并。

3.3. **用“厚”三角剖分对** M **的肥部进行三角剖分**。本小节旨在描述 M 肥部的一种具有多种性质的三角剖分。其中一项性质如下。

定义 3.2. 设 Y 是双曲三维流形 M 的一个三维子流形。若其每个 3-单形都与双曲三维空间中的某个四面体等距，则称 Y 的三角剖分为测地三角剖分。

定义 3.3. 设 Y 是双曲三维流形M的一个三维子流形。若 Y的三角剖分是测地的，且其每个四面体的二面角均不小于 θ，边长均属于 $[A, B]$，则称其为(θ, A, B)-厚三角剖分，其中θ、 A 和 B为正实数。

定理 3.4（Breslin 的 [3] 中的定理2）。设 μ 是一个小于三维马古利斯常数的正实数。存在正数$A := A(\mu)$ $B := B(\mu)$，以及 $\theta := \theta(\mu)$，满足以下性质。任意完备双曲三维流形 M 都存在一个测地三角剖分，使得其中位于厚部分 $M_{[\mu/2,\infty)}$ 内的每个四面体都是（θ， A， B）-厚的。

我们需要这一结果的一个精细版本，它适用于任意小的尺度（但关注的是有限体积双曲流形）。

定理 3.5 (Breslin 定理的推广)。 存在实数 $0 < a \leq b \leq 1/40$ 和 $\theta > 0$，使其具有以下性质。设 μ 为任意小于三维马古利斯常数的正实数，且 M 为一个完备有限体积双曲三维流形。那么，在 $M_{[\mu/4,\infty)}$中存在一个与 $M^{fat}_{\mu/2}$ 同痕的子集 M 的$(\theta, a\mu, b\mu)$-厚三角剖分。

由于这一结果的证明主要是对 Breslin 的论证进行技术性分析和调整，我们将其推迟到附录中。

4. Stable minimal surfaces

4.1. 背景。 关于三维空间中曲面的基础知识及其曲率，读者可参阅例如 [36] 的第 3 节。

回想一下， $M - \partial M$ 是一个完备、可定向且具有有限体积的双曲三维流形。一般而言，若 F 是黎曼三维流形 N 中的一个曲面，那么浸入 f （在我们的情形中是嵌入）将 F 映入 N，并通过将每个切空间上的二次型拉回，在 F 上诱导出一个黎曼度量。 f 的面积定义为 F 在该诱导度量下的面积。在黎曼流形 M 中光滑嵌入或浸入的曲面 F，若其所有点处的平均曲率均为零，则称为极小曲面。等价地，对于 f [10, 的任意紧支撑变分， f 的面积变化率为零。第 1 节。3],

极小曲面不一定会在其同伦类或同痕类中使总面积达到最小。一般而言，极小曲面只是总面积函数的临界点。如果一个曲面在某一类曲面中具有有限面积，且其面积达到该类所有可能总面积的下确界，那么它就是该类中的最小面积曲面。在合理的曲面类中，最小面积曲面必定是极小曲面，反之则不成立。还可以证明，极小曲面在局部是最小面积的，即支撑在曲面足够小区域内的变分不会使面积减小。

非正式地说，如果二次变分非负，则极小曲面是稳定的。关于稳定极小曲面的精确定义和自包含的定义，例如参见[28], ，其中所考虑的曲面是稳定的 H-曲面（对于 H=0， H-曲面与极小曲面相同）。极小面积曲面是稳定的。

回顾一下，如果一个映射将紧致子集的原像映射为紧致集，则称该映射是适当的。我们将使用的主要存在性结果如下。下一小节将概述证明这一结论的结果。

定理 4.1。 设 M 是一个紧致可定向三维流形，其内部具有有限体积的完备双曲度量。设 F 是 M 中一个连通的适当嵌入本质可定向曲面，且不是球面或圆盘。则以下情况之一成立：

(1) 内部(F) 在内部(M) 中与一个嵌入曲面适当同痕，该曲面在其同伦类中具有最小面积，因此是稳定极小的；*(2)* 内部(F) 在内部(M) 中与一个最小面积不可定向曲面的正则邻域边界适当同痕，该曲面 G适当嵌入在 M的内部；此外，存在一个同伦将内部(F) 变为浸入曲面，该曲面双覆盖 G ，并且在其同伦类中具有最小面积。

在第二种情形下，我们称 F 是 G的可定向双覆盖。注意，在这种情形下，int(F)和 G 都是稳定且极小的。我们还称 F 几乎同痕于 G的双覆盖。

4.2. **相关结果综述**。 现在我们汇总证明定理 4.1 所需的结果。

以下结果断言，在一个同伦类中存在最小面积曲面。当 M 是闭流形时，这可由 Freedman、Hass 和 Scott 的定理 1.1 得出 [15], ; 一般情形则是 Ruberman 的推论 3.12[33]。

定理 4.2. 设 M 是一个紧致可定向三维流形，其内部承载有限体积双曲度量；设 F 是一个非球面、圆盘或环面的紧致连通可定向曲面。若 $g:(F,\partial F)\to(M,\partial M)$ 是一个不可压缩且边界不可压缩映射，则存在一个最小面积映射 $f:\mathrm{int}(F)\to\mathrm{int}(M)$，它与 g适当同伦。

以下结果保证所得的最小面积曲面要么是嵌入的，要么是某个嵌入曲面的可定向双覆盖。当曲面是闭曲面时，这是 Freedman、Hass、Scott 的定理 5.1 的推论 [15], 但一般情形由 Ruberman 的定理 3.16 给出 [33]。

定理 4.3. 设 M 是一个紧致可定向3维流形，其内部具有有限体积双曲度量，并设 F 是一个紧致连通可定向曲面。设 $f:\mathrm{int}(F)\to\mathrm{int}(M)$ 是一个最小面积映射，且该映射适当、不可压缩并且边界不可压缩，同时 f 适当同伦于一个嵌入。则以下两种情况之一成立：

(1) f 是一个嵌入，或 *(2)* f 是一个嵌入的极小不可定向曲面的可定向双覆盖。

作为上述定理的推论，初始嵌入曲面可以通过适当同伦变为一个嵌入的最小面积曲面，或一个嵌入的最小面积不可定向曲面的可定向双覆盖。以下结果表明，该同伦可以通过同痕实现。

定理 4.4。 设 M 是一个边界不可压缩的紧致可定向不可约三维流形。设 F 和 F' 是适当嵌入的本质曲面，使得$\mathrm{int}(F)$和$\mathrm{int}(F')$在$\mathrm{int}(M)$中适当同伦。那么 F和 F' 环境同痕。

当 F 和 F' 是闭曲面时，这是 Waldhausen 定理[37, 推论 5.5]的结果。当 F 和 F' 有非空边界时，该结果归功于 Johannson [20, 命题 19.1]。

5. Consequences of minimality

因此，我们现在聚焦于一张连通的稳定极小曲面，它可以是可定向的，也可以是不可定向的。为方便起见，我们将这张曲面称为 F。不过，若它不可定向，我们真正感兴趣的是它的可定向双覆盖。

引理 5.1. 设 x 是嵌入在双曲三维流形 M 中的一张 π_1-单射极小曲面 F 上的一点。曲面 F 继承自 M 的黎曼度量。设 r 是小于或等于 x 在 M 中的单射半径的任意实数。用 $B_F(x,r)$ 表示 F 上以 x 为中心、半径为 $r>0$ 的开圆盘，则 $B_F(x,r)$ 的面积至少为 πr^2。

证明。回忆一下，对于黎曼三维流形 M中的曲面 F，在 F 上任意一点 x 处的内蕴高斯曲率为 $K_i = K_e + K_M$，其中 K_M 是 M的截面曲率，而 K_e 是该曲面的外蕴曲率。这里K_M 等于 -1，因为 M 是双曲的。曲率 K_e 是两个主曲率的乘积。由于 F是极小的，主曲率符号相反或均为零，因此 K_e 非正。因此，
$K_M + K_e \leq -1$。

考虑指数映射 $\exp : T_xF \to F$，其中 T_xF 是点 x处 F 的切空间。我们可以赋予 T_xF 由 F上的诱导黎曼度量所导出的自然欧氏度量。对于截面曲率至多为 -1 的曲面，指数映射不会缩短距离。证明这一点时，例如可以使用铰链比较定理（例如参见 [8]或 [30]）。

对于以下理由，将指数映射限制在 T_xF 中以原点为中心、半径为 r 的开球上时，它也是到其像上的一个同胚。若指数映射不是单射，那么在 F 中将存在一条以 x 为基点、从 x 出发并回到 x、长度小于 $2r$ 的测地线 γ。由于 F 的截面曲率为负，这样的测地线将代表 $\pi_1(F,x)$ [21, Theorem 6.9.1] 的一个非平凡元素。我们假设 F 是 π_1-单射的。因此，γ 代表 $\pi_1(M,x)$ 的一个非平凡元素。然而，r 至多是 M 的单射半径，因此任何以 x 为基点且长度小于 $2r$ 的曲线，在 M 中都是零伦的，这就产生了矛盾。

T_xF 中半径为 r 的球的面积为 πr^2。由于指数映射不会缩短距离，且限制在以原点为中心、半径为 r 的球上时是到其像上的同胚，我们可以推出，半径为 r 的球的面积在该映射下不会减小，即 $\pi r^2 = \text{area}(B_{\mathbb{E}^2}(0,r)) \leq \text{area}(B_F(x,r))$。□

根据高斯-博内定理，可以将曲面F的面积上界估计为 $-2\pi\chi(F)$，其中 $\chi(F)$ 是该曲面的欧拉示性数。

引理 5.2. 设 η 为任意正实数。设 F 是双曲三维流形 M 中一个 π_1-单射极小曲面。那么，在 F 中存在一个至多包含$8|\chi(F)|/\eta^2$ 个圆盘的集合，这些圆盘的半径为 η，并覆盖 $F \cap M_{[\eta,\infty)}$。这里的距离 η 是根据 M中 F 上的诱导黎曼度量计算的。

证明。选取 $F \cap M_{[\eta,\infty)}$ 中的一个极大点集 $x_1,\ldots,x_k$，使得对于每个 $i \neq j$，x_i，x_j 之间的距离至少为 η。根据极大性，$F \cap M_{[\eta,\infty)}$ 中的任意其他点到某个 i的距离都小于 η，因此可以用以 $x_1,\ldots,x_k$为圆心、半径为 η的圆盘覆盖 $F \cap M_{[\eta,\infty)}$。同时，以$x_1,\ldots,x_k$ 为圆心的 $\eta/2$圆盘两两不相交。

由此得到的圆盘数量 k 的上界，就是 F 的总面积上界 $2\pi|\chi(F)|$除以 F 中半径为 $\eta/2$ 的圆盘面积下界；根据引理 5.1，该面积至少为 $\pi(\eta/2)^2$。因此，圆盘数量至多为 $2\pi|\chi(F)|/(\pi(\eta/2)^2) = 8|\chi(F)|/\eta^2$。□

注意，上述引理中的界关于曲面的欧拉示性数呈线性关系。

6. Consequences of stability

双曲三维流形中的双侧稳定极小嵌入曲面的主曲率有一个普适常数 C 作为上界。这可由以下定理得出。

如果法丛存在全局标准正交基，则该曲面具有平凡法丛。当曲面浸入一个可定向三维流形时（如本例），这等价于该曲面可定向。

对于曲面 F，用 A 表示其第二基本形式。回顾一下，第二基本形式是一种双线性形式，可用一个 2×2 矩阵 A 表示如下。若有一点 $x \in F$ 和向量 X，Y 属于 T_xF，则 $A(X, Y) = -\langle \nabla_X N, Y \rangle$，其中 N 是单位法向量场。（参见 [11] 中的 1.2 小节。）显然， A 是对称的。主曲率就是这个对称矩阵的特征值。

定理 6.1 (Schoen 的 [34] 定理 3，另见 Colding 和 Minicozzi 教科书中的定理 2.10 [11])。对于每个实数 k，都存在满足以下性质的 $\eta > 0$。设有一个浸入稳定极小曲面 F，它位于 M 中，且具有平凡法丛。令 $r_0 \in (0, \eta]$，并对 F 中的一点 x，令 $B_F(x, r_0)$属于 $F - \partial F$。假设 M的截面曲率 K_M满足 $|K_M| \leq k^2$。那么存在常数 $C'(k)$，它仅依赖于 k，并且对所有 $0 < \sigma \leq r_0$、$sup_{B_F(x,r_0-\sigma)}|A|^2 \leq C'\sigma^{-2}$均成立。

该定理的表述方式保证了对于每个 x 和 r_0，都存在这样的常数 C'。Schoen 指出，常数 C' 仅取决于 [34]中球$B_M(x, r_0)$的曲率。特别是， C'不依赖于 F。对于双曲流形 M， $K_M = -1$，因此一旦固定了 x 和 r_0，常数 C' 对每个双曲三维流形和曲面都相同。

推论 6.2. 存在一个普适常数 C，使得完备双曲三维流形 M 中任意具有平凡法丛的浸入稳定极小曲面 F 的主曲率均不超过 C。

证明。设 x 是 F中的任意一点。我们可以令 $r_0 = \eta$，并令 $\sigma = \eta/2$。 □

现在我们来考察上述推论的结果。它意味着，在足够小的尺度上，曲面 F 是“近乎全测地的”。下面的定义将对此作精确描述，其中我们比较曲面上邻近点处的法向量。为了进行比较，我们在 M中取一个基点x，并考虑指数映射 $\exp_x$: $T_xM \to M$。曲面 F在 $\exp_x^{-1}$下的原像是 T_xM中的一个曲面。由于 T_xM 是欧几里得空间，我们可以比较基于 T_xM不同点的向量。特别地，如果这些向量非零，那么它们之间就有一个良定义的角，可通过对其中一个向量进行平行移动得到。

定义 6.3。设 F 是黎曼流形 M 中一个光滑浸入的曲面。设 x 是 M 中的一点。设 η 和 δ 是正实数。若对于曲面 $\exp_x^{-1}(F) \cap B(0, \eta)$ 上任意一对法向量，它们之间的角至多为 δ 或至少为 $\pi - \delta$，则称 F 在 x 附近具有（η，δ）-几乎恒定法向量。这里，$\exp_x$: $T_xM \to M$ 是指数映射，而 $B(0, \eta)$ 是 T_xM 中以原点为中心、半径为 η 的球，其中 T_xM 赋予其典范欧几里得度量。由于 T_xM 是欧氏空间，即使两个非零向量基于 T_xM 中不同的点，我们也可以讨论它们之间的角。

下面的结论众所周知，但稍后会成为我们的一个关键事实。因此，我们陈述这一结果，并简要概述其证明。

推论 6.4. 对于任意 $\delta > 0$，存在一个 $\eta \in (0,\ \epsilon_3)$，具有以下性质。对于完备双曲三维流形 M 中任意具有平凡法丛的浸入稳定极小曲面 F，以及其中任意一点 x，任意两个法向量之间的角，只要它们属于 $\exp_x^{-1}(F) \cap B(0,\ \eta)$ 的任一连通分支，便至多为 δ 或至少为 $\pi - \delta$。

证明。固定 $\mathbb{H}^3$中的一点 $\tilde{x}$。令 $p\colon \mathbb{H}^3 \to M$ 为万有覆盖映射。我们可以令 $p(\tilde{x}) = x$。于是存在一个交换图（其中 $(Dp)_{\tilde{x}}$表示 p 在 $\tilde{x}$处的导数）：

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{x}}\mathbb{H}^3 & \xrightarrow{\exp_{\tilde{x}}} & \mathbb{H}^3 \\ \downarrow{\scriptstyle (Dp)_{\tilde{x}}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T_xM & \xrightarrow{\exp_x} & M \end{array}$$

竖直映射均为局部等距映射。因此，x 处的指数映射可由单一映射 $\exp_{\tilde{x}}$ 来刻画；在等距意义下，该映射与 x 和 M无关。因此，将其限制在 $B(0,\eta)$上时，$\exp_x$ 及其逆映射的迭代协变导数的大小存在一个界。该界仅取决于导数的阶数，而与 M、x和 $\eta < \epsilon_3$无关。因此，由推论 6.2可知，曲面 $\tilde{F} = \exp_x^{-1}(F) \cap B(0,\eta) \subset T_xM$ 的主曲率一致有界。于是，根据引理~2.4，在 [11], 中若 η 充分小，则 F 的每个连通分支都是图形状的，具体而言：对于 F中的任意一点 y，包含 y 的 F 连通分支是一个以 T_yF为定义域、函数为 u 的~图像。此外，根据引理 2.4以及其后在 [11] 中的说明，$|\nabla u|$至多为 η的常数倍。因此，u 的图像近似于一个线性函数的图像。所以，只要选取充分小的 η，就能确保 y 处的法向量与包含 y 的 F 之连通分支~上任意一点处的法向量之间的角至多为 δ 或至少为 $\pi - \delta$。□

当 η 至少等于 x处的单射半径时，上述推论的结论是：$F \cap B_M(x,\ \eta)$ 的每个连通分支在 x 附近都具有 $(\eta,\ \delta)$-几乎恒定法向量。类似但更简单的证明（此处省略）可得以下结果。

引理 6.5. 对于任意 $\delta > 0$，存在一个 $\eta \in (0,\ \epsilon_3)$，使其具有以下性质。对于双曲三维空间中半径至多为 η 的任意球 B，以及位于全测地超平面内并适当嵌入 B 的任意圆盘 D，D 在 B 的任意点附近都具有 $(\eta,\ \delta)$- 几乎恒定法向量。

命题 6.6. 设 F 是光滑且适当嵌入黎曼流形 M 中的曲面。设 x 是 M 中的一点。设 η 和 δ 为正实数。假设，对 $\exp_x^{-1}(F) \cap B(0,\ \eta)$ 的任意连通分支，任意两个法向量之间的角至多为 δ 或至少为 $\pi - \delta$。那么，对于任意 $\lambda \in (0,\ 1)$，$F \cap B_M(x,\ \lambda\eta)$ 在 x 附近，对于 $\delta' = 4\delta + 2\sin^{-1}(\lambda)$，具有 $(\lambda\eta,\ \delta')$-几乎恒定法向量。

证明。</style>几乎恒定法向量在 附近的定义是用指数映射 *exp* 来表述的。具体而言，我们考虑欧几里得空间 中球 $(0,\ \eta)$ 内曲面$\tilde{F} = \exp_x^{-1}(F)$ 的法向量。注意，$\tilde{F}$ 是光滑嵌入于 $B(0,\ \eta) \cap T_xM$ 中的。因此，只需考虑这个欧几里得空间中的曲面。

我们不妨假设 $\delta' < \pi/2$，否则无事可证。因此，$\delta < \pi/2$。令 F_1和 F_2为 $F \cap B(0,\ \eta)$ 中与 $B(0,\ \lambda\eta)$ 相交的连通分支。令 p_1

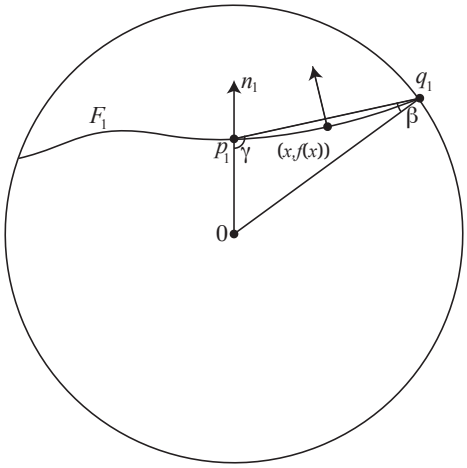

FIGURE 2. 图示为 $B(0,\eta)$与经过 0、 p_1 和 q_1的平面P 之间的交。

且 p_2 为 F_1 和 F_2 中在欧几里得度量下距原点最近的点。~我们将证明， n_1 和 n_2 在 F 于 p_1 和 p_2 处的法向量之间的角至多为 $\delta'' = 2\delta + 2\sin^{-1}(\lambda)$，或至少为 $\pi - \delta''$。由于 F_1和 F_2具有 (η, δ)-几乎恒定法向量，这就意味着，对于 F_1 和 F_2，任意两个法向量之间的角至多为 $\delta' = 2\delta + \delta''$，或至少为 $\pi - \delta'$，正如所需。注意，由于 $\delta' < \pi/2$，我们有 $\pi/2 - \delta''/2 > \delta$。

请注意，由于 p_i 是 F_i 上距离 0 最近的点，法向量 n_i 与向量 $\overrightarrow{0p_i}$平行，除非 p_i 是原点。

我们断言 ∂F_i 非空。否则， F_i 就是嵌入于 $B(0, \eta)$内部的闭曲面。然而，考察具有给定法向量的支撑超平面可知，它有两个彼此垂直的单位法向量。这与以下假设矛盾： F_i 的任意两个法向量之间的角至多为 $\delta < \pi/2$ 或至少为 $\pi - \delta$。

令 q_i为 $\partial F_i = F_i \cap \partial B(0,\eta)$上的任意一点。我们断言，向量 $\overrightarrow{p_iq_i}$与 n_i之间的角介于 $\pi/2 - \delta$和 $\pi/2 + \delta$之间。当 p_i不是原点时，令 P为经过0、 p_i 和 q_i的平面。当 p_i 为原点时，令 P为包含 n_i 和 $\overrightarrow{0q_i}$的平面。在这两种情况下， P都包含 n_i。为该平面指定正交的（x， y）坐标，使得 n_i 指向 y 方向。（见图2。）由于F_i 在0和 $\delta < \pi/2$附近具有（η， δ）-近乎常值法向， F_i的任何法向量都不垂直于 n_i。因此， $F_i \cap P$是定义在（$-\eta$，η）中某个区间上的光滑函数 f的图像。对该函数应用中值定理，存在 f定义域中的某个 x，使得该图像在（x， $f(x)$）处的切线与连接 p_i 和 q_i的直线具有相同的斜率。该切线位于 F_i的某个切平面内，因此，由于 F_i 具有（η， δ）-近乎常值法向，该切线与 n_i之间的角介于 $\pi/2 - \delta$ 和 $\pi/2 + \delta$之间。这就证明了该断言。

设 A_i（对于 $i = 1,2$）为 $\partial B(0,\eta)$ 中由满足以下条件的点 q 构成的环形带： n_i（平移至原点后）与向量 $\overrightarrow{0q}$之间的角介于 $\pi/2 - \delta''/2$ 和 $\pi/2 + \delta''/2$之间。我们断言 $\partial F_i = F_i \cap \partial B(0,\eta)$ 位于A_i中。当 $p_i = 0$ 时，这可直接由前述断言得出。因此我们可以

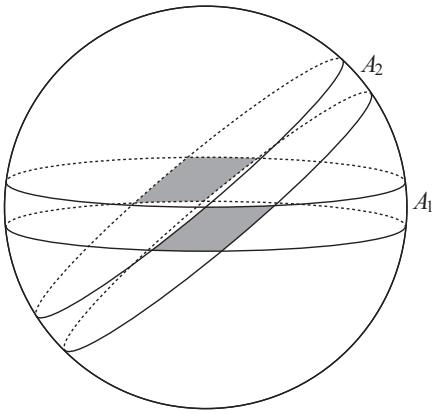

FIGURE 3. 环带 A_1 和 A_2 在 $\partial B(0,\ \eta)$ 中。如果n_1 与 n_2 之间的角大于 δ''，那么 $A_1 \cap A_2$ 由两个圆盘组成。

假设 $p_i \neq 0$。回想一下， q_i 是 ∂F_i上的一个点。将 $0p_iq_i$ 视为平面 P中的一个三角形。设 β 和 γ 分别为该三角形在顶点 q_i 和 p_i 处的内角。应用正弦定理，得到

$$|\sin\beta| = \frac{|\overrightarrow{0p_i}|}{|\overrightarrow{0q_i}|}|\sin\gamma| \leq \frac{|\overrightarrow{0p_i}|}{|\overrightarrow{0q_i}|} \leq \lambda,$$

因为 $p_i \in B(0,\ \lambda\eta)$ 且 $q_i \in \partial B(0,\ \eta)$。所以， $\beta \leq$ 正弦$^{-1}(\lambda)$。角 p_i0q_i 等于$\pi - (\gamma + \beta)$。根据前述断言， $\pi - \gamma$位于 $\pi/2 - \delta$和 $\pi/2 + \delta$之间。因此，角 p_i0q_i 位于 $\pi/2 - \delta -$ 正弦$^{-1}(\lambda)$ 和 $\pi/2 + \delta +$正弦$^{-1}(\lambda)$ 之间。角 p_i0q_i 是 n_i 与 $\overrightarrow{0q_i}$之间的角。因此，正如所声称的， ∂F_i 确实位于 A_i 中。

我们断言， ∂F_i 的每个连通分支绕环带 A_i的环绕数都是一。由于 F_i 嵌入在 M 中，且 ∂F_i 位于 A_i中，环绕数至多为 1。下面排除环绕数为 0 的情况。环带 A_i 由若干区间叶状分解，每个区间都是与一个经过原点且包含 n_i的平面的交弧。如果 ∂F_i 的某个连通分支绕 A_i的环绕数不是一，那么由于 ∂F_i 位于 A_i中， ∂F_i 在某点 q处必与这些区间之一相切。因此， q 处 F_i 的法向量将位于一个平面内，该平面垂直于此区间在 q 处的切向量。这意味着该法向量与 n_i 之间的角介于 $\pi/2 - \delta''/2$ 和 $\pi/2 + \delta''/2$之间。这与该角至多为 δ 或至少为 $\pi - \delta$的假设矛盾，因为正如证明开头所述， $\pi/2 - \delta''/2 > \delta$。

如果 n_1 与 n_2 之间的角大于 δ'' 或小于 $\pi - \delta''$，那么 $A_1 \cap A_2$ 将由两个圆盘组成。（见图 3。）对于每个这样的圆盘 D， ∂D 将由四条弧串接而成：第一条位于 ∂A_1 的一个连通分支中，第二条位于 ∂A_2 的一个连通分支中，第三条位于 ∂A_1 的另一个连通分支中，第四条位于 ∂A_2 的另一个连通分支中。由于 ∂F_1 绕 A_1 的环绕数为一，且 ∂F_2 绕 A_2 的环绕数为一，我们推断 ∂F_1 和 ∂F_2 必须在 D 中相交。这与 F_1 和 F_2 是嵌入曲面 F 的不同 ˜ 连通分支这一事实矛盾。

因此，我们得出结论： n_1 与 n_2 之间的角至多为 δ'' ，或至少为$\pi - \delta''$，如所需。□

推论 6.7。 对于任意 $0 < \delta < \pi/2$，都存在一个具有以下性质的 $\eta > 0$ 。对于完备双曲三维流形 M 中任意具有平凡法丛的适当嵌入稳定极小曲面 F，以及其中的任意一点 x，在 M 附近， F具有（$2\delta\eta/\pi$， 6δ）几乎恒定法向量。

证明。 根据推论 6.4，$\exp_x^{-1}(F) \cap B(0, \eta)$ 的任意一个分支的任意两个法向量之间的角不大于 δ，或不小于 $\pi - \delta$。令 $\lambda = \sin\delta$。那么根据命题 6.6， F 在 x 附近的 $\delta' = 4\delta + 2\sin^{-1}(\lambda)$ 范围内具有（$\lambda\eta$， δ'）-几乎恒定法向量。因此，由于$\lambda = \sin\delta \geq (2/\pi)\delta$，它在 x 附近也具有（$2\delta\eta/\pi$， 6δ）-几乎恒定法向量。（最后一个不等式成立是因为 $0 < \delta < \pi/2$。）□

7. Triangulations transverse to a surface

回想一下，定理 3.5 给出了 M 的一个子集的三角剖分 T，该子集与 $M_{\mu/2}^{\mathrm{fat}}$ 同痕且位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$ 中。这个三角剖分是（θ， $a\mu$， $b\mu$）-厚的。在下一节中，我们将修改 T，使其与给定的极小曲面 F“横截”。但我们首先需要精确定义横截性的概念，因为我们研究的是具有几何性质的曲面，因此需要的不只是拓扑横截性。我们将考察三角剖分中的每个四面体 Δ，并考虑其中的某个点 x。我们将考察 x 附近的各种对象，例如曲面 F，或 Δ 的边和面。我们需要考虑与这些对象相关的各种向量之间的角，例如 F 在其某点 F 处的切向量，或 Δ 的某条边在该边上一点处的切向量。这些向量通常不以 M 的同一点为基点。为了比较它们，我们将使用指数映射 $\exp_x\colon T_xM \to M$。我们将利用 $\exp_x^{-1}$，把所考察的向量 v_1 和 v_2 拉回为以 T_xM 中各点为基点的向量。由于 T_xM 是欧几里得空间，因此尽管这两个向量以 T_xM 中不同的点为基点，我们仍可明确地谈论它们在三维空间中的夹角。不过需要谨慎，因为指数映射 $\exp_x$ 不是等距变换。因此，它不一定会把某点处指向 $\exp_x^{-1}(F)$ 的一个单位法向量映射为指向 F 的单位法向量。

我们引入以下记号。当点 x in M 已被固定，且 $\tilde{\eta}$ 小于 M 在 x 处的单射半径时，对于 M 的任意子集 A，我们令 A 表示 $\exp_x^{-1}(A) \cap B(0, \eta)$。注意，$\exp_x$ 诱导了从 $B(0, \tilde{\eta})$ 到 $B_M(x, \eta)$ 的微分同胚，并将 A 映到 $A \cap B_M(x, \eta)$。

定义 7.1。 设 Δ 是双曲三维流形 M 中的一个测地四面体。设 x 是 Δ 中的一点。设 $\eta > 0$ 小于 M 在 x 处的单射半径，并设 $0 < \delta < \pi/2$。如果对于 Δ 的任意一条边 e 上、与 x 的距离小于 η 的每一点 y， $\tilde{y}$ 处的 $\tilde{e}$ 与~~u 之间的角小于 $\pi/2 - \delta$ 或大于 $\pi/2 + \delta$~~，则称 T_xM 中的单位向量 u 关于 Δ 的边是 (η, δ)- 非垂直的。

定义 7.2。 设 F 是平滑嵌入于 M 的曲面，且 Δ 是嵌入于 M 的测地四面体。若 F 在尺度 $\eta > 0$ 下与 Δ 充分横截，且它与 Δ 的顶点不相交，并且满足 $F \cap \Delta = \emptyset$，或者存在某个 x 属于 Δ，以及某个 $\delta \in (0, \pi/6)$，使得

(1) Δ 位于以 x为中心、半径为 $\eta/4$ 的球内；(2) F 在 x 附近具有如定义 6.3所述的$(\eta, \delta/5)$-几乎恒定法向量；(3) $F \cap \Delta$的某一点处的单位法向量 $v_{\tilde{F}}$与 Δ的边是$(\eta, 2\delta)$-非垂直的；

(4) η 足够小，使得对于 Δ的任意面 R， R的任意$\tilde{}$两点处的单位法向量之间的角至多为 δ；(5) η 足够小，使得对于 Δ的任意边 e， $\tilde{e}$的任意两点处的单位切向量之间的角至多为 δ。

当曲面与三角剖分中的每个四面体都充分横截时，我们得到以下重要结论。

命题 7.3. 设 Δ 是 M 中的一个测地四面体。假设 F 是适当嵌入 M 中的双侧曲面，并且在尺度 η 下与 Δ 充分横截。那么 F 与 Δ 的交由正规圆盘组成。此外，对于 F 中的任意点 p，以 p 为中心、半径为 $\eta/2$ 的球在 F 中（配备其黎曼度量）至多与这些正规圆盘中的一个相交。

证明。 固定点 $x \in \Delta$，并令单位法向量 $v_{\tilde{F}}$ 如定义 7.2 所述。

如定义 7.2 中所假设的， F 不经过 Δ 的顶点。它与 Δ 的边也横截相交；否则， F 与某条边 e 的交集中会存在一点 y，使得 e 在 y 处的单位切向量 v 落在 y 在 F 处的切平面内。于是， $\tilde{e}$ 在 $\tilde{y}$ 处的单位切向量落在曲面 F 的$\tilde{}$切平面内。但这意味着该向量$\tilde{}$与 F 在 $\tilde{y}$ 处的法向量之间的角为 $\pi/2$。由于 F 在$\tilde{}$ x附近具有（η, $\delta/5$）几乎恒定的法向量，该法向量与 F 的单位法向量 $v_{\tilde{F}}$ 之间的角至多为 $\delta/5$，或至少为 $\pi - \delta/5$。因此， $v_{\tilde{F}}$ 与 $\tilde{e}$ 的单位切向量之间的角至少为 $\pi/2 - \delta/5$ 且至多为 $\pi/2 + \delta/5$。这与假设 $v_{\tilde{F}}$ 与 Δ 的边（η, 2δ）非垂直相矛盾。

类似的论证表明， F 与每个面横截。否则，存在某个点 y，位于 F 与 Δ 的某个面 R 的交中，且在该点， F 和 R 的单位法向量重合。任取包含在该面中的一条边 e，以及 e上的任意一点 y'。根据定义 7.2 (4)， $\tilde{R}$ 在点 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{y}'$ 处的单位法向量之差至多为 δ。因此， e在 $\tilde{y}'$ 处的单位切向量与 $\tilde{F}$ 在 $\tilde{y}$ 处的单位法向量之间的角，相差至少 $\pi/2 - \delta$ 且至多 $\pi/2 + \delta$。同样，这与假设$v_{\tilde{F}}$和 Δ的边是（η, 2δ）非垂直的矛盾。

因此， $F \cap \Delta$ 是 Δ中的一个适当嵌入曲面，其边界与$\partial\Delta$横截。

假设 $F \cap \Delta$ 的一个连通分支 D 不是正规圆盘。那么以下情况至少有一种成立：

(1) D 与 Δ 的一条边相交多次；(2) D 与 Δ 的一个面之间的某个交连通分支是一条闭曲线；(3) D 不是拓扑圆盘。

情形 1。假设 D 与 Δ 的一条边 e 相交不止一次。那么存在一个嵌入在 Δ 中的圆盘 C，使得 ∂C 由 e中的一条弧和 F中的一条弧α 串接而成，并且 ∂C 在 C 中的某个领圈邻域剩余部分与 $\partial\Delta$ 和 F不相交。设 y_1 和 y_2 是 F 上弧$\alpha \cap C$端点处的两个点。选取 F 上的单位法向量的连续取向，即所有法向量都位于双侧曲面的同一侧。由于 F 与 Δ充分横截， F的单位法向量 $v_{\tilde{F}}$$\tilde{}$与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{y}_1$ 和 $\tilde{y}_2$处的切向量所成的角至多为 $\pi/2 - 2\delta$，或至少为 $\pi/2 + 2\delta$。由于 F 具有（η, $\delta/5$）-几乎恒定法向量， F 在 $\tilde{y}_1$ 处的法向量$\tilde{}$与切向量所成的角至多为 $\pi/2 - \delta$，或至少为 $\pi/2 + \delta$

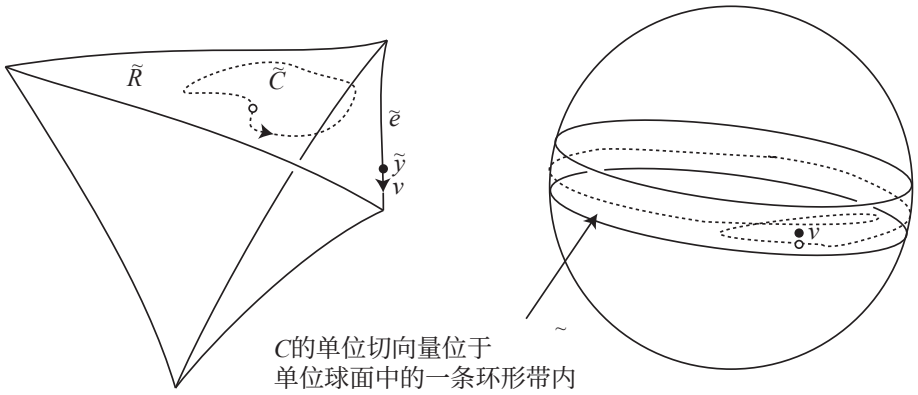

FIGURE 4. 一条简单闭曲线 C （ $R \cap F$ 的）对应于一条简单闭曲线 C （ $R \cap F$的）。 C 的某个单位切向量几乎平行于某点 $\tilde{y}$ 处、某条边（ R的）上的一个单位切向量。

$\tilde{e}$ 在 $\tilde{y}_1$处的向量。设这个角至多为 $\pi/2-\delta$。在 $\tilde{y}_2$处也同样如此，但由于路径 α, F 在 $\tilde{y}_1$ 和 $\tilde{y}_2$ 处的单位法向量要么都背向彼此，要么都朝向彼此。因此， $\tilde{e}$ 在 $\tilde{y}_2$ 处的切向量与 F 在 $\tilde{y}_2$ 处的单位法向量之间的角至少为 $\pi/2+\delta$。所以， $v_{\tilde{F}}$ 与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{y}_1$ 处的单位切向量之间的角至多为 $\tilde{y}_1$ ，也至多为$\pi/2$。而 $v_{\tilde{F}}$ 与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{y}_2$ 处的单位切向量之间的角至多为$\tilde{y}_2$ ，也至少为 $\pi/2$。当我们沿着 $\tilde{e}$ 从 $\tilde{y}_1$ 走到 $\tilde{y}_2$时， $\tilde{e}$ 的切向量连续变化。因此，在 $\tilde{e}$ 上的某个点 $\tilde{y}$ ， $\tilde{e}$ 的切向量与 $v_{\tilde{F}}$ 所成的角恰好为 $\pi/2$。这与假设 $v_{\tilde{F}}$是（η, 2δ）-横截于 Δ矛盾。

情况 2。假设对于 Δ的某个面 R ，其中存在一条简单闭曲线$R \cap F$。

设 C是 $R\cap F$的一条简单闭曲线。这对应于 $R\cap F$的一条曲线 C。虽然 R 接近欧氏，但并非严格欧氏。在 C的每个点，其单位切向量都位于 R的一个切平面内。将这些平面分别平移，使其经过 T_xM中的原点。每个这样的平面都与单位球面相交，在 T_xM 中形成一个大圆。沿着 C绕行时，这些大圆可能会变化，但变化幅度至多为 δ角。于是， C 的单位切向量位于这个单位球面中的一个环形带 A 内，其宽度至多为 δ；沿着 C绕行时， C 的切向量描出一条闭路径，恰好绕这个环形带一周。（参见图4。）

选取 e 的一条边 R 以及 e上的某个点 y 。这对应于 R 的一条边 $\tilde{e}$ 以及 T_xM中的一个点 $\tilde{y}$ 。平移 R 在 $\tilde{e}$ 处的切平面，使其经过 T_xM中的原点。于是， $\tilde{e}$ 的单位切向量变成了单位球面上的一个点 v 。它位于环形带 A内。因此，必定存在一个切向量，使其与 C的夹角小于 δ ，并且该切向量位于 v范围内。于是，该点处 F的法向量与 v的夹角大于 $\pi/2-\delta$且小于 $\pi/2+\delta$。因此，法向量 $v_{\tilde{F}}$与 v的夹角大于 $\pi/2-2\delta$且小于 $\pi/2+2\delta$。这与 $v_{\tilde{F}}$是横截于Δ的（η, 2δ）相矛盾。

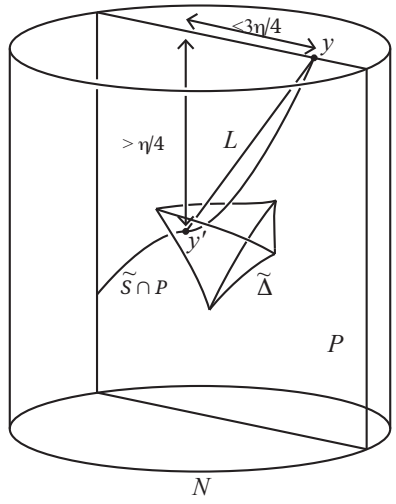

FIGURE 5. 包含四面体 Δ 的圆柱体 N in T_xM。

情形 3。假设 D 不是圆盘，但情形 1 和 2 均不成立。

由于 F 与 $\tilde{S}$ 在 x 处相切，且 $\tilde{S}$ 在 $F \cap B(0,\eta)$ 内无临界点，因此 $F \cap B(0,\eta)$ 是 $\tilde{S}$ 在 x 处的一个邻域。因此，存在 $\eta > 0$，使得 $\tilde{S}$ 在 $B(x,\eta)$ 内的法向量与 v_F 的夹角小于 $\pi/10$。令 $\mathcal{P}$ 为从 T_xM 到 F 的投影映射，即沿着与 v_F 平行的方向投影到经过原点且垂直于 v_F 的平面上。于是，$\mathcal{P}$ 限制在 $F \cap B(0,\eta)$ 上时没有临界点。因此它是一个浸入。取以原点为中心的 T_xM 中的一个圆柱体 N（即原点是其高度的中点），其两个端圆盘垂直于 v_F。选取 N，使两个端圆盘的半径为 $\eta/2$，高度为 η。因此，N 位于以原点为中心、半径为 η 的球内。此外，由于 Δ 位于以 x 为中心、半径为 $\eta/5$ 的球内，一个同胚副本 $\tilde{\Delta}$ 位于 N 中。见图 5。令 S 为包含 D 的 $F \cap N$ 的连通分支。

断言 1. $\tilde{S}$ 的边界位于 ∂N 的曲面部分。

如果断言 1 成立，则 S 的边界在 S 与该端圆盘的交中取一点 y，并在 $\tilde{D}$ 中取一点 y'。用一条欧氏直线 L 联接这两点。由于 $y' \in \tilde{D} \subset \tilde{\Delta}$，点 y' 到原点的距离至多为 $\eta/4$。因此，从 y' 到包含 y 的端圆盘的距离至少为 $\eta/4$。于是，在半径为 $\eta/2$ 的端圆盘所在平面内，y 与 y' 的垂直投影之间的距离至多为 $\eta/4 + \eta/2 = 3\eta/4$。因此，由边为 $\eta/4, 3\eta/4$ 的直角三角形可知，L 与包含该端圆盘的平面所成的角至少为 $\tan^{-1}(1/3)$。

令 P 为经过 $\tilde{S}$ 上一点且垂直于端圆盘的平面。我们将证明，可知存在一个切向量平行于 L 的点 $\tilde{S}$。由于 $\tan^{-1}(1/3) > \pi/10$，我们由此推断，在 S 的这个点，其法向量与 v_F 的夹角大于 $\pi/10$。但这与如下假设矛盾：在 x 附近，F 的法向量几乎恒定（η，$\delta/5$），因为 $\delta < \pi/2$。由此证明了断言 1。

根据断言 1，$\tilde{S}$ 是该圆盘上的浸入。因此，它是该圆盘的一个覆盖映射；由于圆盘是单连通的，它是一个同胚。由此可推得，S 是一个圆盘。因此，D 是平面的（即亏格为零），因为 D 是 S 的子集。但它的边界是连通的，因为它由

$\partial\Delta$中至多四条正规弧串接而成，因为情形 1 和情形 2 均不成立。因此， D 是一个圆盘。于是，情形 3 不成立。

因此，我们已经证明情形 1、2 和 3 均不成立，从而 F 与Δ 相交于正规圆盘。

现在我们证明该命题的最后一个断言。取一点 $p \in F$，并设以 p 为中心、半径为 $\eta/2$ 的球与$\Delta \cap F$的两个正规圆盘 D_1 和 D_2 相交。这两个圆盘在 F中由一条长度至多为 η的路径联接。此外，根据定义 7.2(1)，D_1 和 D_2 到 x 的距离均至多为 $\eta/5$ 。因此， D_1 和D_2 位于 $F \cap B(x,\eta)$的同一个连通分支 F' 中。现在，对于Δ中的任意两个正规圆盘，必定存在一条它们都相交的边。设 D_1 和 D_2 都与边 e 相交。在 F'上选取一个横向定向，并在e上选取一个定向。利用这些定向，我们可以如下理解以下断言：对于 $F' \cap e$中的任意一点 z， F'的横向定向与 e上的定向是一致或不一致的。根据充分横截定义中的 (2)， $\tilde{F}'$ 在 $\tilde{z}$处的单位法向量与 $v_{\tilde{F}}$或 $-v_{\tilde{F}}$的夹角至多为 $\delta/5$。因此，根据该定义中的 (3)， $\tilde{F}'$ 的单位法向量与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{z}$ 处的切向量的夹角至多为 $\pi/2 - 9\delta/5$ 或至少为 $\pi/2 + 9\delta/5$。在前一种情况下，我们称 F'和 e的定向在 z处相容；在后一种情况下，则称其不相容。现在， $F' \cap e$ 中在 e中相邻的两个点处的定向不可能同时相容或同时不相容，因为这样我们就能在 $B(x,\eta)$中构造一条与 F' 相交一次的闭环。于是，该闭环在$B(x,\eta)$中必定是同调非平凡的；但后者是一个三维球，因此矛盾。现在固定 z_1 为 $F' \cap e$ 中的一个点，并令 z_2 为一个相邻点。设定向在 z_1 处相容，而在 z_2处不相容。根据定义 7.2 的 (4)， $\tilde{e}$ 在 $\tilde{z}_1$ 处和 $\tilde{z}_2$ 处的切向量之间的夹角至多为 δ。因此， $\tilde{F}'$ 在 z_2 处的法向量与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{z}_1$处的切向量之间的夹角大于 $\pi/2 + 4\delta/5$ 。现在考虑F'中连接 z_2与 z_1的一条路径。在该路径上的某一点处， $\tilde{F}'$的法向量与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{z}_1$处的切向量之间的夹角为 $\pi/2$。因此，根据定义 7.2 的 (2)， $v_{\tilde{F}}$ 的法向量与 $\tilde{e}$ 在 $\tilde{z}_1$ 处的切向量之间的夹角介于 $\pi/2-\delta/5$ 与 $\pi/2+\delta/5$之间。这与定义 7.2 的 (3)——$v_{\tilde{F}}$关于Δ的边是 $(\eta, 2\delta)$-非垂直的假设——相矛盾。□

8. Barycentric subdivision

我们的目标是在双曲三维流形 M 中找到一个余维零子流形的三角剖分，使其能够与任意稳定极小曲面充分横截。我们将从定理 3.5 给出的三角剖分 T开始，它是$(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚的，其中 $\mu > 0$经过了适当选择。回忆一下， θ、 a 和 b 是定理 3.5 给出的固定常数。我们所需的三角剖分在组合意义上将等于 T的重心细分 T'。本节将为该三角剖分的顶点定义一种几何位置，然后通过移动顶点来扰动三角剖分，使其与给定曲面 F充分横截。

考虑双曲平面上的一个三角形，其边为测地边。将它的顶点 v_1、 v_2、 v_3排序。按如下方式定义该三角形的有序重心。首先，取连接 v_1 和 v_2的测地线的中点。然后从该点向 v_3作一条测地线，并沿此测地线走三分之一的距离。

设 Δ 是一个双曲四面体。将其顶点按 $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ 排序。定义 Δ 的有序重心如下。从有序重心开始

从 v_1， v_2， v_3 出发，沿测地线前往 v_4。沿这条测地线前进四分之一处的点，就是 Δ 的有序重心。

Δ 的有序重心细分是测地三角剖分，其中每个顶点都是 Δ的某个单形的有序重心。由于顶点本身也是单形，我们将每个旧顶点与新顶点一并纳入。这里，每个单形的顶点上的序是 Δ的顶点上给定序的限制。

现设 T 是双曲三维流形的一个三维子流形的测地三角剖分。在其顶点上选取一个全序。则 T 的有序重心细分是通过将 T 的每个四面体替换为其有序重心细分而得到的。

引理 8.1. 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $0 < a \leq b \leq 1/40$，存在 $\theta' \in (0, \pi)$ 和 $0 < a' \leq b' \leq 1/40$，具有如下性质。若 μ 是任意一个不超过三维马古利斯常数的正实数，且 Δ 是$(\theta, a\mu, b\mu)$-厚的双曲四面体，则Δ 的有序重心细分中的每个四面体都是$(\theta', a'\mu, b'\mu)$-厚的。

证明。 我们将考虑双曲 3-空间 $\mathbb{H}^3$ 中所有 $(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚双曲四面体的集合，其中一个特定顶点固定在 $\mathbb{H}^3$ 中的某个基点。其余三个顶点是 $\mathbb{H}^3$ 中的点，因此我们可以将每个这样的双曲四面体视为 $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ 中的一个点。我们对 μ 有一个上界。假设我们还有一个形如 $\mu \geq c$ 的正下界，其中 $c > 0$ 是某个常数。那么所有 $(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚四面体组成的集合将是 $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$ 的一个紧致子集。此外，有序重心细分中相邻面的最小内角是定义在这个紧致集合上的连续函数。因此，其最小值由某个 $(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚四面体取得。由此我们将得到这些角的正下界。同理，我们也会得到有序重心细分中四面体边长的正上界和正下界。然而，我们并未假设 μ 有正下界。因此，我们按如下方式进行论证。

我们令 $\mathbb{H}^3_{1/\mu}$ 表示双曲空间的庞加莱球模型，并将其缩放至欧氏半径为 $1/\mu$。我们将 v_1 置于此球的原点。于是，每一种 v_2、v_3、v_4 的选择都确定了 $\mathbb{H}^3_{1/\mu} \times \mathbb{H}^3_{1/\mu} \times \mathbb{H}^3_{1/\mu}$中的一个点。一个点 v若与 v_1 的双曲距离为 d，则其到原点的欧几里得距离为 $(1/\mu)\tanh(d/2)$。因此，若这4个点确定的四面体是$(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚的，那么 v_2、v_3、v_4 就位于以原点为中心、半径介于 $(1/\mu)\tanh(a\mu/2)$ 与 $(1/\mu)\tanh(b\mu/2)$ 之间的壳层内。回顾一下，μ 介于 ϵ_3 和 0 之间；当 μ 趋近于 0 时，这些四面体会越来越接近欧氏四面体。由此可得四面体边长的上下界，具体如下。令 S 表示 $\mathbb{E}^3$ 的紧致子集，它由到原点的距离介于 $(1/\epsilon_3)\tanh(a\epsilon_3/2)$ 与 $b/2$之间的点组成。我们用 S 中的三个点以及参数 μ来表示该四面体。因此，该四面体对应于 $S \times S \times S \times (0, \epsilon_3]$ 中的一个点。令 C表示 $S \times S \times S \times (0, \epsilon_3]$中对应于$(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚四面体的点集。令 C为其在 $S \times S \times S \times [0, \epsilon_3]$中的闭包。 $C \setminus C$中的每个点都确定一个$(\theta,\ a,\ b)$-厚的欧氏四面体，因为同样地，当 $\mu \to 0$时， $S \times S \times S \times (0, \epsilon_3]$ 中的四面体会越来越接近欧氏四面体。因此，对 C中的每个点，都有一个定义良好的有序重心细分，它要么位于 $\mathbb{H}^3$ 中，要么位于 $\mathbb{E}^3$中。在此细分中，

四面体的最小内角是 C上的连续函数。因此，根据 C的紧致性，这个最小内角可通过对某个$(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚双曲四面体 Δ 进行重心细分，或对某个$(\theta,\ a,\ b)$-厚欧氏四面体进行重心细分而取得。特别地，这些内角存在一个正的下界 θ' 。类似地，我们还可以考虑 C 上的函数，该函数等于重心细分中四面体的最小边长与 μ 之比。此函数是连续函数，并可延拓为 C上的连续函数。因此，同样存在一个正的下界a'。所以，Δ 的重心细分中的每个四面体，其边长至少为 $a'\mu$。通过类似的论证，这些边长也存在上界 $b'\mu$ 。因此，对于任意$(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚四面体 Δ，Δ 的有序重心细分中的四面体都是$(\theta',\ a'\mu,\ b'\mu)$-厚的。□

注8.2。上述证明中的论证可以更一般地应用，作为建立（$\theta,\ a\mu,\ b\mu$）-厚四面体性质的一种方法，其中 $\mu \in$（$0,\ \epsilon_3$]。令 C为这类四面体所构成的空间，将其视为 $S\times S\times S\times$（$0,\ \epsilon_3$]的一个子集，并令 C为其在 $S\times S\times S\times[0,\epsilon_3]$中的闭包。假设 $f\colon\ C\to\mathbb{R}$ 是某个连续函数，并且可连续延拓至C。例如，在上述证明中，我们取f 为给定（$\theta,\ a\mu,\ b\mu$）-厚四面体的重心细分中各四面体的最小二面角。 f 的连续性以及C 的紧致性意味着， f 有下界，且其极小值在 C中的某一点处取得。如果我们可以将 f在 $C-C$ 上的限制解释为与欧氏四面体相关联的某个几何量，那么我们就有望证明该极小值严格为正。我们将这种论证方式称为“利用连续性和紧致性”。

注8.2 推出以下引理。这里，我们考察双曲四面体的各个面，以及每个面中的三个内角。令 f 为所有面中的这类角的极小值，即得此结果。

引理 8.3. 给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $0<a\le b\le 1/40$，存在一个正实数 θ_2 ，具有以下性质。若 μ 是任意不超过三维马古利斯常数的正实数，且 Δ 是一个$(\theta, a\mu, b\mu)$-厚双曲四面体，那么对它的每个面，该面中的每个内角都至少为 θ_2。

现在我们可以调整重心细分了。

引理 8.4. 对于任意 $0<a\le b\le 1/40$ 和 $0<\theta<\pi$，存在 $\delta''>0$、$\theta''\in(0,\pi)$ 和 $0<a''\le b''\le 1/40$ ，具有以下性质。对于任意$0<\mu\le\epsilon_3$、任意$(\theta, a\mu, b\mu)$-厚双曲四面体 Δ、其顶点上的任意全序，以及在 Δ的顶点处对单位向量 v_1、.....、 v_4 的任意赋值，都可以对 Δ的有序重心及其二维面的有序重心进行扰动，使得以下条件成立：

(1) 每个面的扰动后的重心仍位于该面内；*(2)* Δ 的结果三角剖分是$(\theta'', a''\mu, b''\mu)$-厚的；*(3)* 对于 Δ的扰动后的重心细分中不位于 Δ的一条边上的每条边 e ，以及 Δ的每个顶点 x ，存在一个指向$\exp_x^{-1}(e)$ 的单位切向量，其与给定的、位于 x的单位向量 v_i 之间的角至多为$(\pi/2)-\delta''$，或至少为$(\pi/2)+\delta''$。

证明。根据引理 8.1，存在常数 $0<a'\le b'\le 1/40$ 和 $\theta'>0$ ，使得 Δ 的重心细分是 $(\theta',\ a'\mu,\ b'\mu)$-厚的。因此，根据引理 8.3，存在

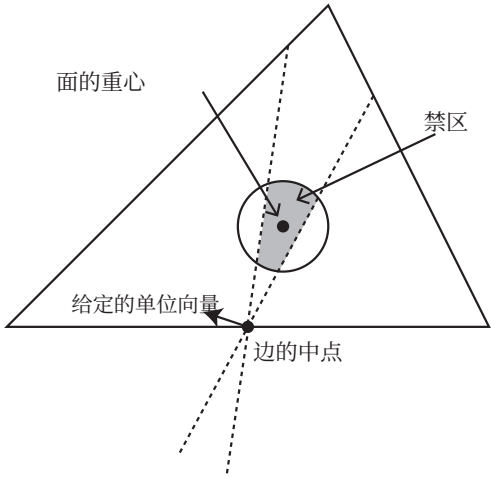

FIGURE 6. 已指定一个单位向量。这会限定一个区域，扰动后的重心不得位于其中。圆盘 D 显示了距重心 $c\mu/2$ 以内的点。圆盘内的阴影区域为禁区，扰动后的重心必须避开该区域。

存在一个常数 $c > 0$ ，使得 Δ的每个二维面的重心到 Δ 的每条边的距离至少为 $c\mu$。我们将把这个重心扰动至多 $c\mu/2$的距离。因此，它仍将位于该面的内部。扰动后点的可能位置位于以重心为中心、半径为 $c\mu/2$ 的圆盘 D 内，且该圆盘的面积至少为 $\pi（c\mu/2）^2$。从该面的三个顶点分别连向扰动后的重心，会产生三条新边。同样，从 Δ 的各条边的中点连向扰动后的重心，也会产生三条新边。我们需要确保它们在这六个点 p_1、.....、p_6 处的单位切向量，与给定向量 v_1、.....、v_4 中的每一个的夹角至多为（$\pi/2$）$-\delta''$，或至少为（$\pi/2$）$+\delta''$。因此，从 p_i发出一片禁区，扰动后的重心不能位于其中。该禁区与 D 的交的面积，对于某个常数 d，至多为 $d\mu^2\delta''$ 。原因如下。每个向量 v_j 和每个 p_i 都会在 D 中产生一个区域，该区域由一个四边形围成，其中两条边是 D 与从相关的 p_i 发出的两条射线的交（见图6），另外两条边分别与 D 相切并与这些射线横截。因此，其中两条边的长度至多为 D的直径，另外两条边的长度至多为某个常数乘以 $\mu\delta''$。（这可以用一个涉及正弦定理的简短论证加以验证。在这里，我们使用了 $\mu \leq \epsilon_3$这一假设。 μ 的任何其他统一上界在此处也都足够。）因此，六个禁区与 D 的交集的面积至多为 $6d\mu^2\delta''$。只要 δ'' 足够小，这一面积就小于 $\pi（c\mu/2）^2$ 。因此，只要 δ'' 足够小，我们就可以将各面的重心扰动至多 $c\mu/2$的距离，从而确保条件 (3)对位于 Δ的二维面内的边成立。

对 Δ的重心也可以采用类似的论证。存在一个常数 $c' > 0$，使得重心到Δ各个面的距离至少为 $c'\mu$ 。我们将对重心进行扰动，扰动距离至多为 $c'\mu/2$。因此，体积

可能扰动范围所成的球 B 的体积至少为（$4\pi/3$）（$c'\mu/2$）^{3}。同样，存在一些禁区，扰动后的重心不能落入其中。这些禁区来自有序重心细分中以 Δ 的重心为端点的14条边，以及四个给定向量 v_1、.....、v_4。每个禁区与 B 的交的体积至多为 $\mu^3\delta''$的某个常数倍。（这是因为该区域位于一个球内，该球半径为 $b'\mu$ ，球心是 Δ的扰动后重心细分的一个顶点。考虑这个球边界上的一条环形带，其核心曲线为一条大圆，角宽为 $2\delta''$。接着，以球心为锥点，对这条环形带作锥。每个禁区与 B 的交都包含在这样的锥内。）因此，若 δ'' 足够小，就存在一种扰动，可以避开所有这些禁区。

最后，我们验证所得的 Δ 三角剖分是某些常数 $\theta'' \in (0,\ \pi)$ 和 $0 < a'' \le b'' \le 1/40$ 下的（θ''，$a''\mu$，$b''\mu$）-厚的。与引理 8.1 一样，这由紧致性得出。可能的扰动集合是紧致的。因此，最小内角在某个 Δ 以及其重心和各个面的重心的某种扰动处取得。特别地，该最小值由某个$\theta'' > 0$从下方界定。类似地，最小和最大边长与 μ之比也分别在某些具体实例处取得，因此存在常数 a'' 和b''。□

上述引理用于扰动每个四面体的重心及其各个面的重心。但它保留了原三角剖分中每条边的中点不变。图7右侧展示了这类边的邻域。（图中的这类边就是边 e 。）现在我们分析这些邻域的几何学。

三角剖分双锥是一个带有测地三角剖分 T 的凸双曲多面体 P ，其构造如下。取圆或区间的一个三角剖分 T_1 。令 T_2 为只有一个 1-单形的区间的三角剖分。然后T 是 T_1 与 T_2的联接。

因此，三角剖分双锥具有以下性质，也可以将其作为另一种定义。存在一条指定的边 e ，它属于 T，称为其中央边。其端点位于 ∂P上，但其内部可能位于 int(P) 或 ∂P中。对于 T中的每个四面体 Δ ，以下条件均成立:

(1) e 是 Δ的一条边；(2) Δ 中不包含 e 的两个面位于 P的边界上；(3) 若 e 的内部位于 P的内部，则Δ 剩余的两个面，其内部位于 P 的内部（图7，左上方的多面体）；否则，除 P中恰好两个与 e 关联的面外，其余情况相同（图7，左下方的多面体）。

在将 T 描述为三角剖分 T_1 与 T_2 的联接时，这条边 e 是联接中 T_2 的副本。

三角剖分双锥的典范细分会多出一个顶点，位于 e 的中点处，并且每个四面体都细分为两个。（见图7：右侧的多面体展示了它们的典范细分。）这个新顶点称为新顶点。也可以通过将 T_2 细分为两个 1-单形，从而得到区间的新三角剖分 T_2' ，来描述这种细分。于是，典范细分就是 T_1 与 T_2' 的联接。

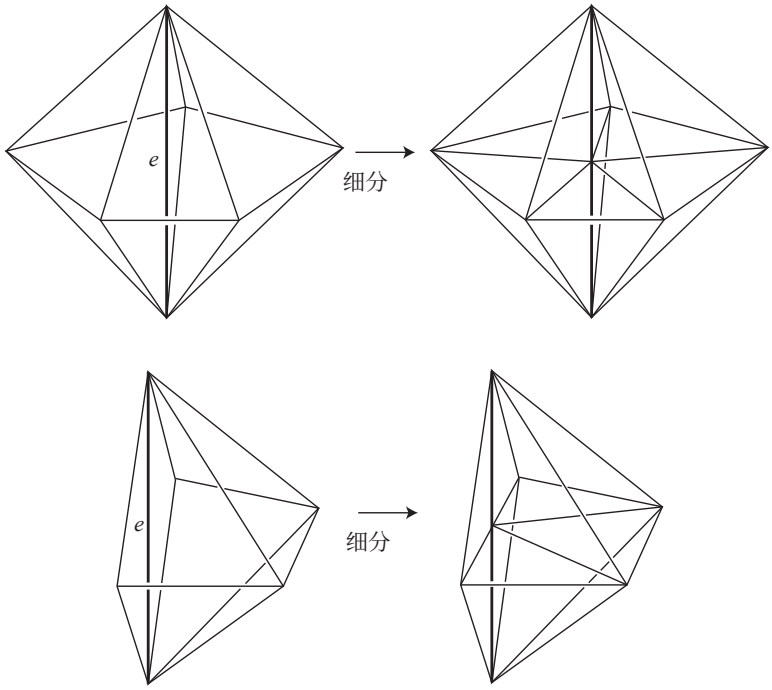

FIGURE 7. 左：三角剖分双锥，其中央边 e以粗体显示。右：它们的典范细分。

引理 8.5. 对于任意 $0 < a'' \leq b'' \leq 1/40$ 和 $\theta'' \in (0, \pi)$，存在 $\delta''' \in (0, \pi/2)$、$\theta''' \in (0, \pi)$ 以及 $0 < a''' \leq b''' \leq 1/40$，满足以下性质。设 T 是三角剖分双锥 P 的典范细分。假设对于某个正数 $\mu \leq \epsilon_3$， T 是 $(\theta'', a''\mu, b''\mu)$- 厚的。假设在其中央边两个端点处都选取了一个单位向量。那么可以扰动新顶点，使所得三角剖分是 $(\theta''', a'''\mu, b'''\mu)$-厚的，并且与新顶点相连的边方向上的单位向量和给定向量之间的角至多为$(\pi/2) - \delta'''$，或至少为$(\pi/2) + \delta'''$。如果新顶点位于 P 的边界上，则将其扰动到 P 的内部。

证明。 这与引理 8.4 中的论证非常相似。存在一个常数 c''，使得 T 的新顶点到 ∂P 中不包含该新顶点的面的距离至少为 $c''\mu$ 。我们将 P 与以新顶点为中心、半径为 $(c''\mu/2)$ 的球的交，视为可能扰动的集合 B 。两个给定向量分别产生禁区。这些禁区与 B 相交所得区域的体积至多为常数乘以 $\mu^3\delta'''$。因此，只要 δ''' 足够小，就能找到一个扰动。

所得的三角剖分是（θ'''， $a'''\mu$， $b'''\mu$）-厚的，这同样由连续性与紧致性论证得到（注8.2）。事实上，请注意， P的中央边周围的四面体数量存在统一上界。这是因为与该边相邻的每个四面体的内角都至少为 θ''，因此，这类四面体的数量在细分之前至多为 $2\pi/\theta''$ ，在细分之后至多为 $4\pi/\theta''$。因此， P 的组合可能性集合是有限的，并且

对于每一种这样的可能性，可能的（θ''，$a''\mu$，$b''\mu$）-厚三角剖分的空间给出为 $\mathbb{H}^3_{1/\mu}\times\cdots\times\mathbb{H}^3_{1/\mu}\times$ 的一个子集 C（0，ϵ_3]。如引理 8.1 的证明所示，我们可以通过添加极限点来取 C 的闭包 $\mu\to 0$。这是紧致的，因此再次利用连续性，可以得到所需的合适的 θ''' 和 $0<a'''\le b'''\le 1/40$。□

我们现在针对定理 3.5 中的一个三角剖分固定 θ、a 和 b。引理 8.1 随后为其重心细分给出 θ',a',b'，由此我们得到引理 8.4 中扰动重心细分的 θ'',a'',b''（扰动 2-单形与 3-单形的重心），进而由引理 8.5 得到 θ''',a''',b'''（扰动 1-单形的重心）。设 $\theta''''=(4/5)\theta'''$，设 $a''''=(4/5)a'''$，并设 $b''''=(5/4)b'''$。

命题 8.6。存在常数 $\mu>0$，具有以下性质。设 M 是一个双曲三维流形，且 T 是 $M_{[\mu/4,\infty)}$ 中一个三维子流形的 $(\theta,a\mu,b\mu)$- 厚三角剖分。给其顶点指定一个全序。设 F 是适当嵌入于 M 中、法丛平凡的任意稳定极小曲面。那么，存在对 T 的有序重心细分的一个扰动，使其$(\theta'''',a''''\mu,b''''\mu)$-厚，且在尺度 $\mu/8$ 下与 F 充分横截。

证明。引理 8.4 和 8.5 给出了常数 $\delta''>0$ 和 $\delta'''>0$。令 $\delta=$为 $\{\delta'',\delta'''\}/4$ 的最小值。

然后，推论 6.7（应用 $\delta/30$）给出 $\eta>0$，使得在 M 的每个点附近，F 都具有 $(\eta\delta/(15\pi)$ $\delta/5)$- 几乎恒定法向量。如有必要，我们可以减小 η，使下列性质也成立。对于 $\mathbb{H}^3$ 中的任意全测地平面 Π 以及 $\mathbb{H}^3$ 中的任意点 p，根据引理 6.5，$\exp_p^{-1}(\Pi)\cap B(0,\eta)$ 中任意两点处单位法向量之间的角相差至多 δ。类似地，对于 $\mathbb{H}^3$ 中的任意测地线 e 以及 $\mathbb{H}^3$ 中的任意点 p，$\exp_p^{-1}(e)\cap B(0,\eta)$ 中任意两点处单位切向量之间的角相差至多 δ。

我们设定 $\mu=8\eta\delta/(15\pi)$。于是，F 在 M 的每一点附近都具有 $(\mu/8,\delta/5)$-几乎恒定法向量。注意，$\delta\le\delta'''\le\pi/2$。因此，$\mu/8\le\eta/30$。

既然我们已经指定了 μ，令 T 为 $M_{[\mu/4,\infty)}$ 的一个三维子流形的 $(\theta,a\mu,b\mu)$-厚三角剖分。在其顶点上选取一个全序，并令 T' 为由此得到的有序重心细分。现在我们按如下方式，在 T 的每个顶点处指定一个单位向量。考虑这样一个点 p。如果 F 与 $B_M(p,\mu/8)$ 相交，则选取曲面 $\tilde F=\exp_p^{-1}(F)\cap B(0,\mu/8)$ 上某一点的一个单位法向量。另一方面，如果 F 与 $B_M(p,\mu/8)$ 不相交，则在 p 处任意选取一个单位向量。

现在使用引理 8.4，对 T 中每个面的重心以及 T中每个四面体的重心进行扰动。所得三角剖分是 $(\theta''$，$a''\mu$，$b''\mu)$-厚的。围绕 T的每条边，T'中的四面体组合起来构成一个双锥的典范细分。使用引理 8.5 扰动该边的中点，从而得到一个 $(\theta'''$，$a'''\mu$，$b'''\mu)$-厚三角剖分。如果 F 与此三角剖分的任何顶点相交，我们就对这些顶点进行极小扰动，确保所得三角剖分是 $(\theta''''$，$a''''\mu$，$b''''\mu)$-厚的。从组合意义上说，这仍然是 T'。

我们声称，F在尺度 $\mu/8$ 上与 T'的每个四面体都充分横截，这正是所需的。考虑 T'中的任意四面体 Δ'。它的四个顶点中有一个是 Δ的顶点。令 x 为这一点。

我们在上文中通过选取 η，使得定义 7.2 的性质 (4) 和 (5) 成立。由于 $b''''\le 1/32$，T' 的最大边长至多为 $b''''\mu\le\mu/32$，

由此得到充分横截定义中的 (1)。性质 (2) 是 F 具有 $(\mu/8, \delta/5)$-几乎恒定法向量，这一点我们已在上文验证。

现在我们来验证充分横截定义中的性质 (3)。如果 F 与 Δ' 不相交，则无需证明。因此，我们可以假设 $\tilde{F} \cap \tilde{\Delta}'$ 非空。设 $v_{\tilde{F}}$ 是 $\tilde{F} \cap \tilde{\Delta}'$ 上某点处的一个单位法向量。我们将证明，$v_{\tilde{F}}$ 与 Δ' 的边是 $(\eta,\ 2\delta)$-非垂直的。

我们已经在 x 处选取了单位向量 v，它是 F 上某点 $\tilde{}$ 处的单位法向量。由于 F 具有 $(\mu/8, \delta/5)$-几乎恒定法向量，因此我们推得 v 与 $v_{\tilde{F}}$ 之间的角至多为 $\delta/5$ 或至少为 $\pi - \delta/5$。

考虑 Δ' 的任意一条边 e。如果 e 至少有一个端点位于 Δ 的某个面的重心处，或位于 Δ 的重心处，那么引理 8.4 中对这些重心的扰动保证，$\tilde{e}$ 的一个单位切向量与 v 之间的角至多为 $(\pi/2) - \delta''$，或至少为 $(\pi/2) + \delta''$。另一方面，如果 e 的端点均不位于这些重心之一，那么引理 8.5 中对 T 的边中点所作的扰动保证，$\tilde{e}$ 的一个单位切向量与 v 之间的角至多为 $(\pi/2) - \delta'''$，或至少为 $(\pi/2) + \delta'''$。因此，v 与 $\tilde{e}$ 的某个单位切向量之间的角至多为 $(\pi/2) - 4\delta$，或至少为 $(\pi/2) + 4\delta$。所以，根据性质 (5)，v 与 $\tilde{e}$ 的每个单位切向量之间的角至多为 $(\pi/2) - 3\delta$，或至少为 $(\pi/2) + 3\delta$。于是，$v_{\tilde{F}}$ 与 $\tilde{e}$ 的每个单位切向量之间的角至多为 $(\pi/2) - 3\delta + (\delta/5)$，或至少为 $(\pi/2) + 3\delta - (\delta/5)$。这就验证了性质 (3)。□

我们还记录厚三角剖分的一些其他性质。

引理 8.7. 对于正实数 θ''''、a'''' 和 b''''，存在一个常数 k_0，使得在一个$(\theta''''$、$a''''\mu$、$b''''\mu)$-厚三角剖分中，与任意顶点关联的四面体数量至多为 k_0。

证明。这直接源于这样一个事实：在一个 $(\theta'''', a''''\mu, b''''\mu)$-厚四面体的任意顶点处，立体角都存在统一下界。□

引理 8.8. 存在一个常数 v，它取决于 θ''''、a'''' 和 b''''，并具有以下性质。设 Δ 是一个$(\theta''''$、$a''''\mu$、$b''''\mu)$-厚双曲四面体。那么，Δ 的体积至少为 $v\mu^3$。

证明。这同样可由连续性和紧致性（注8.2）推出：只需考察 $(\theta'''', a''''\mu, b''''\mu)$-厚四面体Δ空间上的函数 volume(Δ)$/\mu^3$。□

引理 8.9。存在一个常数 k，它取决于 θ''''、a'''' 和 b''''，并具有以下性质。设 T 是 M 中某个三维子流形的三角剖分，且该子流形是$(\theta''''$、$a''''\mu$、$b''''\mu)$-厚的，其中 μ 不大于三维马古利斯常数。那么，对于 M 中任意一点，T 中与其周围半径为 $b''''\mu$ 的球相交的四面体数量至多为 k。

证明。任何与以点 p 为中心、半径为 $b''''\mu$的球相交的（$\theta'''', a''''\mu, b''''\mu$）厚四面体，都包含在以 p为中心、半径为 $2b''''\mu$ 的球 B 内。由于 μ 有上界，B 的体积至多为某个常数 $c > 0$，记为 $c\mu^3$。根据引理 8.8，每个四面体的体积至少为 $v\mu^3$。因此，四面体的数量至多为 c/v。□

9. Conclusion of the proof

回想一下，我们取用了定理 3.5 中的一个三角剖分，并在第 8 节对其进行了修改，因此现在有固定的常数 θ''''、 a''''、 b'''' 和 μ。

命题 9.1. 存在一个常数 N，它取决于 θ''''、 a''''、 b'''' 和 μ，并具有以下性质。设 M 是一个双曲三维流形， T' 是 $M_{[\mu/4,\infty)}$中包含的 M 的一个三维子流形上的(θ''''、 $a''''\mu$、 $b''''\mu$)-厚三角剖分。假设 T' 在尺度 $\mu/8$下与一个适当嵌入的、双侧 π_1-单射极小曲面 F 充分横截。那么， $F \cap T'$ 的正规圆盘数量至多为 $N|\chi(F)|$。

证明。 根据引理 5.2，我们可以用半径为 $\mu/16$的圆盘覆盖 F ，圆盘数量至多为 $8|\chi(F)|/(\mu/16)^2$。根据引理 8.9，与任一这样的圆盘相交的 T'中的四面体数量至多为 k，其中 k 取决于 θ''''、 a''''、 b''''。根据命题 7.3 和定义 7.2，每个这样的圆盘与每个四面体的交至多包含一个正规三角形或正方形。因此， F中的正规圆盘数量至多为 $2048k|\chi(F)|/\mu^2 = N|\chi(F)|$，其中常数 N取决于 θ''''、 a''''、 b'''' 和 μ。□

注意，由于 T' 是（θ''''， $a''''\mu$， $b''''\mu$）-厚的，根据引理 8.8， T' 的每个四面体的体积至少为 $v\mu^3$ ，因此 T' 中四面体的数量至多为 $\text{volume}(M)/(v\mu^3)$。

假设曲面 F 满足命题 9.1 的假设。因此，我们现在也可以假设 F 与 T' 相交形成的正规圆盘不超过 $N|\chi（F）|$ 个。现在我们希望控制 F 在 T' 的补集中的可能情况数。这是 M 的一个三维子流形 M_{thin} ，它与 $M_{(0,\mu/2)}$ 的若干连通分支的并同痕。因此，根据马古利斯引理，它由若干个 $T^2 \times(1, \infty)$ 的副本和实心环面组成。

引理 9.2。 我们可以对 F 作同痕变换，使其满足以下条件：

(1) $F \cap M_{thin}$ 在 M_{thin} 中不可压缩；*(2)* $F \cap T'$ 由至多 $N|\chi(F)|$ 个正规圆盘组成。

证明。 假设 $F \cap M_{\text{thin}}$ 在 M_{thin} 中有一个压缩圆盘 D。那么 ∂D 围成 F 中的一个圆盘 D'。我们可以通过一次同痕，用 D 替换 D'。这会移除 $F \cap T'$ 的连通分支。因此， $F \cap T'$ 的剩余部分仍由至多 $N|\chi(F)|$ 个正规圆盘组成。我们可以重复这一过程，减少正规圆盘的数量，直到 $F \cap M_{\text{thin}}$ 不可压缩 □

因此，我们现在假设 F 满足上述引理的结论。注意， F 不再必然是极小的。如第 2 节所述， F 在 T' 中的可能情况数至多为

$$(*) \qquad \mathcal{F} = \binom{7|T| + N|\chi(F)|}{N|\chi(F)|},$$

或者， $O(\text{vol}(M))^{N|\chi(F)|}$。因此，我们可以控制 F 与 T' 相交的方式数量。

现在我们希望控制 F 在 M_{thin}中的可能情况数量，其中 M_{thin}是 M中 T'的补空间。假设我们已在 F内固定了一个正规代表

T'。由于 $F \cap M_{\text{thin}}$不可压缩且可定向，它由适当嵌入的圆盘、边界平行平环和边界平行环面组成。根据我们的假设， F 在 M中是本质的，因此环面可以排除。圆盘的位置由曲线 $F \cap \partial M_{\text{thin}}$在同痕意义下确定。现在我们来考虑环带。

引理 9.3。设 C_1、.....、C_{2n} 是 $T^2 \times \{0\}$ 中一组不相交本质简单闭曲线。那么，在保持边界不动的同痕意义下， $T^2 \times [0,1]$ 中以这些曲线为边界的互不相交真嵌入平环的集合数为 $\binom{2n}{n}$。

证明。在 $T^2 \times [0,1]$ 上存在乘积结构 $S^1 \times S^1 \times [0,1]$，使得每个 C_i 都具有 $S^1 \times p_i$ 的形式，其中 p_i 是 $S^1 \times \{0\}$ 上的某个点。一组以 $C_1 \cup \cdots \cup C_{2n}$ 为边界的真嵌入平环可以在保持边界不动的情况下同痕变换为 $S^1 \times \alpha_q$，其中弧 α_q 位于 $S^1 \times [0,1]$ 中。因此，我们需要计算环带 $S^1 \times [0,1]$中以边界上的给定点 p_1、.....、p_{2n} 为边界的真嵌入弧的数量。我们声称，在保持边界不动的同痕意义下，这类弧的数量为（$\binom{2n}{n}$）。

在这样的系统中对弧进行计数，对应于对匹配括号对进行计数：每条弧对应于一个匹配对，而每个点 p_i, i =1, ..., $2n$ 对应于一个左括号或右括号。具体而言，该集合中的每条弧平行于 $S^1 \times \{0\}$ 中的某个区间，我们将左括号和右括号指定给该区间的端点。注意，点 $p_1, \ldots, p_{2n}$ 呈环形排列（而不是像经典问题中那样排成一条直线），因此不可能出现不匹配的对。标准的组合论证将所有选项计数为 $\binom{2n}{n}$，这对应于从 $2n$ 个点中指定 n个为左括号，其余为右括号。□

引理 9.4. 设 $C_1, \ldots, C_{2n}$ 是实心环体边界上的一组互不相交的本质非子午线简单闭曲线。则在实心环体中、边界等于这些曲线的互不相交真嵌入平环的集合的个数，在固定边界的同痕意义下，至多为 $\binom{2n}{n}$。

证明。存在实心环体的一个Seifert纤维化，其中这些曲线 $C_1, \ldots, C_{2n}$是纤维。该Seifert纤维化的底空间是一个圆盘，可能带有唯一的一个奇异点，它对应于一条例外纤维。这些曲线投影到圆盘边界上的点$p_1, \ldots, p_{2n}$。这些环带是该圆盘中弧的原像，其端点为 $p_1, \ldots, p_{2n}$。这些弧避开奇异点（如果存在）。若存在奇异点，则将其从圆盘中移除，形成一个环带 $S^1 \times [0,1]$。若不存在奇异点，则移除一个与这些弧不相交的正则点。于是我们在 $S^1 \times [0,1]$ 中得到具有 $2n$ 个指定边界点的弧。此类弧的数目为$\binom{2n}{n}$，正如我们在引理 9.5的证明中所表明的那样。□

当曲线不是经线时，这个上界是精确的。然而，当它们是经线时，这个上界可能并不精确。

引理 9.5。设 C_1，...，C_n 是 $T^2 \times \{0\}$ 中一组不相交本质简单闭曲线。那么，在 $T^2 \times [0,1]$ 中满足以下条件的不相交真嵌入平环集合的数量（在固定 $T^2 \times \{0\}$ 的同痕意义下）至多为 3^n：没有任何平环与 $T^2 \times \{1\}$ 中的某个平环平行，并且与 $T^2 \times \{0\}$ 恰好相交于 $C_1 \cup \cdots \cup C_n$。

证明。 将这样一个平环集合记为 $\mathcal{C}$。 $\mathcal{C}$ 中的每个平环要么从 $T^2\times\{0\}$ 延伸至 $T^2\times\{1\}$，要么其两个边界分支都位于 $T^2\times\{0\}$ 中。我们首先考虑后一类的 k 个平环，并从 C_1，...， C_n 中选取 $2k$ 个连通分支作为其边界。共有（$\binom{n}{2k}$）种选取方式。根据引理 9.3，在固定 $T^2\times\{0\}$ 的同痕意义下，用平环将这些边界联接起来有 $\binom{2k}{k}$ 种方式。对于其中一些选取，不存在将这组 k 个平环扩展为一组 $\mathcal{C}$ 个不相交真嵌入平环的方法，使其与 $T^2\times\{0\}$ 恰好相交于 $C_1\cup\cdots\cup C_n$。当某个 C_i 被插入的平环之一与 $T^2\times\{1\}$ 分隔开时，就会发生这种情况。然而，当可以将这组 k 个平环扩展为 $\mathcal{C}$ 时，扩展方式是唯一的。因此，这样的 $\mathcal{C}$ 的可能数量至多为

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}.$$

每一项都是 $x^{n-2k}y^kz^k$ 在 $(x+y+z)^n$中的系数。因此，总和至多为 3^n。□

现在我们完成定理 1.1 的证明。回顾一下，我们已安排曲面 F与 T'相交处至多有 $N|\chi(F)|$ 个正规三角形和正规四边形，其中 N 是一个普适常数；由此得到 $F\cap T'$可能情况数的上界 (∗)。我们来考虑其中一种可能情况。于是，$F\cap\partial M_{\text{thin}}$是一个由至多 $4N|\chi(F)|$ 条正规弧组成的正规一维流形。界定 M_{thin} 中圆盘的曲线，也界定 $F\cap M_{\text{thin}}$的圆盘；这些圆盘在同痕意义下没有选择余地。根据引理 9.5 和 9.4， $F\cap M_{\text{thin}}$的环带可能情况数至多为 $3^{4N|\chi(F)|}$。因此，利用 (∗)，F在同痕意义下的可能情况总数至多为 $\mathcal{F}\cdot 3^{4N|\chi(F)|}$。

因此， F 的可能数量至多为 $(c_1\text{vol}(M))^{c_2|\chi|}$ ，其中 c_1 和 c_2 为普适常数。这就完成了定理 1.1 的证明。

推论 *1.2* 的证明。 设 K 是三维球面中的一个双曲链环。K 的外部有一个使用至多 $t=8c(K)$ 个四面体的三角剖分，因此根据 Gromov 和 Thurston 的一个结果 [35], , $S^3\setminus K$ 的双曲体积至多为 v_3t，其中v_3 是正则理想双曲四面体的体积。定理 1.1 表明，欧拉示性数至少为 χ 的互不同痕的适当嵌入可定向本质曲面的数量不超过 $(8v_3c_1c(K))^{c_2|\chi|}$。令 $c_1'=8v_3c_1$ 即完成证明。 □

推论 1.3. 定理 *1.1* 的结论可推广至满足 π_1-单射且边界-π_1-单射的不可定向曲面。

˜证明. 对于这样的曲面 S，可以考虑 S，即 S 的正则邻域的前沿。当 S 是 π_1-单射且边界-π_1-单射时， S 是不可压缩且边界不可压缩的。由于 S 是可定向的，定理 1.1 给出了在同痕意义下 S 的可能性数量上界。因此，这也给出了在同痕意义下 S的可能性数量上界，因为任意给定的 S 至多可由两种可能的 S产生。□

10. Appendix

在本附录中，我们概述以下结果的证明。

定理 3.5. 存在实数 $0 < a \le b \le 1/40$和 $\theta > 0$，满足以下性质。设 μ 是小于三维马古利斯常数的任意正实数，M 是一个完备的有限体积双曲*3*-流形。那么，存在一个$(\theta, a\mu, b\mu)$-厚三角剖分，其剖分对象是 M的一个子集，与 $M^{fat}_{\mu/2}$同痕，并且位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$。

如第 3 节所述，这是 Breslin 关于有限体积流形的下述结果的精细版本。

定理 3.4. 设 μ 为一个小于三维马古利斯常数的正实数。存在正常数 $A := A(\mu)$ $B := B(\mu)$，以及 $\theta := \theta(\mu)$，具有如下性质。任意完备双曲三维流形 M 都有一个三角剖分，使得位于厚部分 $M_{[\mu/2,\infty)}$ 中的每个四面体都是(θ, A, B)-厚的。

请注意，其他几位作者也构造了四面体数目受控的双曲三维流形的测地三角剖分。最初的构造归功于 Thurston [35], ，但那里的论证只是概述。完整细节由 Kobayashi 和 Rieck [24], 给出，他们特别关注流形的薄部非空的情形。类似地，当薄部非空时，我们的论证最为复杂。我们首先如下避开这一情形。

10.1. **空薄部**。现在，我们将给出定理 3.5 在 $M_{厚\mu/2}$等于整个 M，或等价地，薄部 $M_{(0,\mu/4)}$为空时的证明。特别地，在本小节中，M 是闭的。

我们先概述 Breslin 的论证。

Breslin 在 M 中选取了一个点集 $\mathcal{S}$，满足以下性质：

(1) 对任意 $p \in M$，以 p 为球心、以 inj(M, p)/5 为半径的球 B(p, inj(M, p)/5) 的内部包含 $\mathcal{S}$ 中的一个点；(2) $\mathcal{S} \cap M_{[\mu,\infty)}$ 中任意一点到 $\mathcal{S}$ 中其他任意一点的距离至少为 $\mu/100$；(3) 对任意 $p \in M_{[\mu,\infty)}$，$\mathcal{S}$ 中都有一点与之距离小于 $\mu/100$。

随后，Breslin 确保存在一个与 $\mathcal{S}$ 相关联的 M 的德劳内三角剖分。这个三角剖分的顶点集为 $\mathcal{S}$，并且 $\mathcal{S}$ 中四个点是一个四面体的顶点，当且仅当存在某个 M 中的点 p，它到这四个点的距离相等，且 $\mathcal{S}$ 中没有其他点比它们更靠近 p。上面的条件（1）保证 M 中的每个点 p 到 $\mathcal{S}$ 中某个点的距离至多为 inj(M, p)/5。这小于 M 在 p 处的单射半径，因此，$\mathcal{S}$ 中距离 p 最近的点位于 p 周围的一个球内，而该球与 $\mathbb{H}^3$ 中的一个球等距。因此，可以将 p 视为这四个点的外接球的球心。

为了确保德劳内三角剖分有定义，Breslin 需要假设上述条件（1），以及以下“一般位置”假设。该三角剖分与 $\mathcal{S}$ 的沃罗诺伊区域对偶。回顾一下，这是一个胞腔复形，其中每个 3-胞腔都包围 $\mathcal{S}$ 中的一个点 p。这个 3-胞腔定义为 M 中所有满足以下条件的点的集合：它们到 p 的距离不大于到 $\mathcal{S}$ 中任何其他点的距离。对于 $\mathcal{S}$ 的“一般位置”选取，可以预期任意一点至多有四个 3-胞腔相交。在这种情况下，M 内部的 0-胞腔恰好是四个 3-胞腔相交之处。这四个 3-胞腔包围 $\mathcal{S}$ 中的四个点，它们张成德劳内三角剖分的一个四面体。这个 0- 胞腔位于这四个顶点的外接球的球心处。由此可见，$\mathcal{S}$ 中不会有其他点落在这个外接球内。

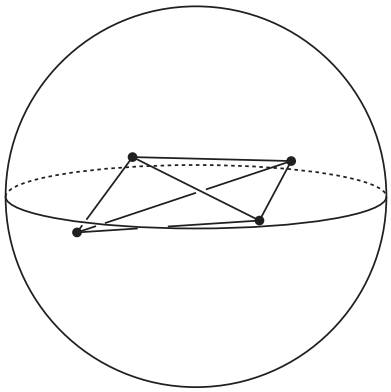

FIGURE 8. 一个四面体，其四个顶点靠近球面的赤道，形成一个瘦四面体。

随后，Breslin 通过移动 $\mathcal{S} \cap M_{[\mu,\infty)}$ 中的每个点至多 $\mu/1000$ 的距离，将 $\mathcal{S}$ 扰动为新的点集 $\mathcal{S}'$。所需的 M 三角剖分是与 $\mathcal{S}'$ 相关联的德劳内三角剖分。Breslin 进行这次扰动，是为了确保 $M_{[\mu,\infty)}$ 中生成的四面体为（θ， A， B）-厚。因此，他着手详细分析不厚的双曲四面体。此处考察的四面体，其边长介于 $\mu/100$ 和 $\mu/50$ 之间。实际上，由于需要稍微扰动顶点，这些条件应当略微放宽；Breslin 令 $A =$ （$4/5$）$\mu/100$ 且 $B =$（$11/10$）$\mu/50$。困难在于，仅凭这些约束无法保证四面体的内角有正的下界。然而，德劳内构造中 $M_{[\mu,\infty)}$ 里的四面体还有一个重要性质：外接球球心到四面体任一顶点的距离至多为（$11/10$）$\mu/100$。因此，Breslin 考察外接半径上界为 $R =$（$11/10$）$\mu/100$ 的四面体。同样，这个外接半径上界并不能保证二面角有正的下界。不过，Breslin 证明，存在极小二面角的情形极其有限。

具有介于固定常数 A和 B之间的边长、外接半径至多为 R，但某些二面角很小的四面体，其典型例子如下。考虑 $\mathbb{H}^3$中半径为 R 的球面。选取该球面的某个赤道，然后将四面体的四个顶点都放在赤道附近。（见图 8。）只要任意两个顶点之间的距离不太近，就可以保证边长有一个统一的下界。边长的上界为 $2R$。然而，显然二面角不存在正的下界。事实上，如果四个顶点都恰好位于赤道上，它们的凸包就会落在一个平面内，因此某些二面角将为零。上述这类四面体通常被称为“瘦四面体”，不过下文以及 Breslin 的论文中会以严格的方式定义这一术语。

Breslin 证明，当某个二面角很小时，四个顶点中的每一个都必定靠近由另外三个顶点确定的外接圆。他证明，靠近该外接圆的点集体积极小。因此，可以扰动其中一个点，使其避开这个点集，由此得到的四面体便不再是瘦四面体。于是，他一次扰动 $\mathcal{S}$ 一个点。当然，还需要

确保在这次扰动中，不会因先前某个四面体重新变成瘦四面体而破坏此前取得的进展。不过，坏点集体积极小这一事实保证，可以对每个点进行扰动，使所有与之相邻的四面体都不会变成瘦四面体。通过这种方式，Breslin 构造出集合 $\mathcal{S}'$，其中位于 $M_{[\mu,\infty)}$ 内的德劳内三角剖分的每个四面体都是（θ，A，B）-厚的，其中某个正常数为 θ。

注 10.1。这里简要说明 Breslin 的证明所依据的背景。Breslin 需要知道，黎曼流形中的给定点集可以经过扰动，使其成为德劳内三角剖分的顶点集；Breslin 使用 Leibon 和 Letscher 的一个定理证明了这一点 [25]。然而，后来发现 Leibon 和 Letscher 的结果并不正确 [4]。不过，现在可以利用 Boissonnat、Dyer 和 Ghosh 的工作 [6]，以另一种方式给出 Breslin 所需的结果。该方法假设流形中的初始点集 $\mathcal{S}$ 是一个 (τ_0,ϵ)-网，这意味着流形中的任意点到 $\mathcal{S}$ 中某个点的距离都小于~~ϵ，且 $\mathcal{S}$~~ 中任意两点之间的距离至少为 $\tau_0\epsilon$。[6]中的定理 3 表明，如果 $\mathcal{S}$ 是一个 (τ_0,ϵ)-网，且 ϵ 小于流形单射半径的四分之一，也小于流形截面曲率、维数和 τ_0的一个显式函数，那么就可以对 $\mathcal{S}$ 进行扰动，使所得点集成为流形的德劳内三角剖分的顶点集。因此，当 M 是一个闭双曲3-流形时，可以选取足够小的 ϵ，此时任意一个 $(1,\epsilon)$-网都满足 [6]中定理 3 的假设。此外，总能通过在 M中选取一个极大点集 $\mathcal{S}$来得到一个 $(1,\epsilon)$-网，其中任意两点之间的距离都不小于 ϵ。因此，对于单射半径有下界的闭双曲三维流形，可以用 [6] 中的定理 3 代替 [25]，完成 Breslin 的证明。然而，对于带有尖点的双曲三维流形 M，其单射半径为零，因此无法找到满足 [6] 中定理 3 假设的正 ϵ。尽管如此，仍可重现 [6] 中定理 3 背后的推理。这是因为 [6] 中的论证全都是“局部的”，也就是说，扰动 $\mathcal{S}$ 中的一个点时，允许的扰动集合只取决于 $\mathcal{S}$中“附近”的点集。（例如，参见 [13]中的注 2。）因此，当 $\mathcal{S}$ 是一个广义 (τ_0,ϵ)-网时，该论证同样适用；这意味着 M 中的每个点 p 到 $\mathcal{S}$中某个点的距离都小于 $\min\{\epsilon,\text{inj}(M,p)/5\}$，并且对于 $\mathcal{S}$中的每个 s，s 到 $\mathcal{S}$ 中任意其他点的距离都至少为 $\tau_0\min\{\epsilon,\text{inj}(M,s)/10\}$。注意，对于 $\tau_0\le 1$，M 中确实存在广义 (τ_0,ϵ)-网：选取 M 中的一个极大集合$\mathcal{S}$，使得 $\mathcal{S}$中任意两点 s 和 s' 之间的距离至少为 $\tau_0\min\{\epsilon,\text{inj}(M,s)/5,\text{inj}(M,s')/5\}$。因此，按照 [6],中的方法扰动 $\mathcal{S}$，即可得到 M的德劳内三角剖分的顶点集。

现在，我们将更详细地说明 Breslin 的总体方案，以及我们需要对其作出的修改。以下定义出自 Breslin。

定义 10.2. 设 Δ 是 $\mathbb{H}^3$ 中的一个测地四面体，且 p 是 Δ 的一个顶点。定义以下量：

(1) 令 R_Δ 为 Δ的外接半径；(2) 令 ℓ_Δ 为 Δ的最短边长度；(3) 令 c_p 为与 p相对的面的外接半径；(4) 令 d_p 为 p 到由与 p相对的面所确定的平面的距离。对于 σ, $\rho>0$，如果对于 Δ的某个顶点p，Δ 满足 $d_p/c_p\le\sigma$ 和 $R_\Delta/\ell_\Delta\le\rho$，则称其为一个（$\sigma$，$\rho$）-瘦四面体。

在我们和 Breslin 所考察的情形中， ℓ_Δ 介于 $A = (4/5)\mu/100$ 与$B = (11/10)\mu/50$之间。此外，由于这些四面体出现在德劳内三角剖分中， R_Δ 至多为 $B = (11/10)\mu/50$ 。同时， R_Δ 至少为 $A/2 = (2/5)\mu/100$。因此，R_Δ/ℓ_Δ 被普适常数从上、下两侧界定。于是，上述定义中的量 ρ可以固定为某个常数，这样第二个条件 $R_\Delta/\ell_\Delta \leq \rho$ 就自动满足了。因此，真正起关键作用的是 σ 。

以下内容（ [3]中的引理 2.1）进一步阐明了瘦四面体的性质。可以将其理解为：如果我们所考虑的四面体有某个很小的二面角，那么它必定是一个（σ， ρ）-瘦四面体，其中某个 σ很小。

引理 10.3。 如果测地四面体 Δ 位于 $\mathbb{H}^3$ 中，边长介于 A 和B之间，外接半径至多为 R，且它有某个二面角小于

$$\arcsin\left(\frac{\sinh(\sigma A/2)}{\sinh(B)}\right)$$

对于某个 $\sigma > 0$，那么 Δ 就是一个（σ， R/A）-瘦四面体。

Breslin 论文中的下一个引理（引理 2.2，见 [3]）讨论了 $\mathbb{H}^2$中测地三角形的高的下界。我们稍作改述，以便在边长都很小时，明确这个下界的性质。

引理 10.4。 设 $\mu > 0$ 有一个常数上界。那么， $\mathbb{H}^2$ 中边长介于 $a\mu$ 和 $b\mu$之间且外接半径至多为 $r\mu$的测地三角形，其高有下界 $y(a, b, r)\mu$，其中 $y(a, b, r) > 0$。

证明。 Breslin 首先考察边长至少为$a\mu$、外接半径至多为 $r\mu$，且高的垂足落在三角形某条边上（而非三角形外的边的延长线上）的三角形的高。Breslin 论证，这类三角形中最短的高出现在以下几何构形中：在双曲平面中取一个半径为 $r\mu$ 的圆。将该三角形的一个顶点 p 放在圆上，再将另外两个顶点 q 和 r 分别放在它两侧的圆上，且它们到 p的双曲距离均为 $a\mu$ 。所关注的高是从 p引出的高。显然，对于任意给定的 a、 b、 r和 μ，这个高都大于零；但我们还需考察当 $\mu \to 0$时，这条高的长度如何变化。因此，我们将圆心置于庞加莱圆盘模型的中心，然后对圆和三角形作因子为 $1/\mu$的欧几里得膨胀。于是，当 $\mu \to 0$时，该三角形逐渐逼近一个固定的欧氏三角形，其高的欧几里得长度有一个由 $Y(a, b, r) > 0$给出的下界。因此，反向进行膨胀后，原三角形的高的欧几里得长度有下界$Y(a, b, r)\mu$。庞加莱圆盘模型中的双曲长度不小于欧几里得长度，因此高的双曲长度也有相同的下界。

接着，Breslin 考虑边长介于 $a\mu$ 和 $b\mu$ 之间且外接半径不超过 $r\mu$的三角形的一般高情形。他证明，这样的一般高的长度至少为

$$\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sinh(a\mu)}{\sinh(b\mu)}\sinh(Y(a,b,r)\mu)\right).$$

作为 $\mu \to 0$,

$$\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sinh(a\mu)}{\sinh(b\mu)}\sinh(Y(a,b,r)\mu)\right) \sim \frac{a}{b}Y(a,b,r)\mu.$$

特别地，对于某个正的常数 $y(a,\ b,\ r)$，该常量有下界 $y(a,\ b,\ r)\mu$；该常数取决于 a、 b 和 r。□

以下是 [3]中的引理 2.3。它处理$(\sigma, R/A)$-瘦四面体 Δ。根据定义， Δ 的某个顶点 p 满足 $d_p/c_p \leq \sigma$。但该引理指出，对于 Δ的每个顶点v， d_v/c_v 都可以用 σ、 A、 B 和 R从上界定。

引理 10.5. 若 $\mathbb{H}^3$ 中边长介于 $a\mu$ 与$b\mu$ 之间且外接半径至多为 $r\mu$ 的测地四面体 Δ 对某个 $\sigma > 0$是$(\sigma, r/a)$-瘦四面体，则对 Δ的每个顶点 v， d_v/c_v 被常数 $N := N(\sigma, a, b, r)$ 从上界定。此外，可以选取N，使得在 $\sigma \to 0$ 以及 a、 b、 r 保持固定且 μ 有上界的情况下 $N \to 0$。

证明。 Breslin 证明 d_v/c_v 被常数 n 上界控制：$= n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu)$。我们必须考察当 $\mu \to 0$ 时 n 的行为。他令

$$n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu) = \frac{2}{a\mu} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sinh(b\mu)\sinh(\sigma r\mu)}{\sinh(y(a,b,r)\mu)}\right).$$

当 $\mu \to 0$时,

$$n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu) \sim \frac{2}{a\mu} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{b\sigma r\mu}{y(a,b,r)}\right) \sim \frac{2b\sigma r}{ay(a,b,r)}.$$

因此， $n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu)$ 被常数 $N(\sigma, a, b, r)$ 上界控制。此外，当 $\sigma \to 0$ 与 a, b, r 保持固定且 μ 有上界时，该量趋于零。□

在下述结果（即 [3], 中的引理 2.4）中，瘦四面体中每个顶点的位置由另外三个顶点所控制。具体而言，它必须靠近另外三个顶点的外接圆。这证实了图 8 中所给例子的一个关键特征：任意三个顶点的外接圆近似为球面的赤道。

引理 *10.6.* 若 $\mathbb{H}^3$ 中边长介于 $a\mu$ 与 $b\mu$ 之间、外接半径至多为 $r\mu$ 的测地四面体 Δ 对某个 $\sigma > 0$ 是 $(\sigma, r/a)$-瘦四面体，则 Δ 的任一顶点到其余三个顶点的外接圆的距离至多为 $K = k(\sigma, a, b, r)\mu$，其中 k 为常数。此外，可以选取 $k(\sigma, a, b, r)$，使得当 $\sigma \to 0$ 与 a、 b、 r 保持固定且 μ 有上界时， $k(\sigma, a, b, r) \to 0$。

证明。 Breslin 的引理 2.4 指出， Δ 中任一顶点到其余三个顶点所确定的外接圆的距离至多为 $K = K(\sigma,\ a\mu,\ b\mu,\ r\mu)$，其中 K 是一个函数。我们必须考察 K 随着 μ 变化时的行为。Breslin 将函数 K 定义如下：

$$K(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu) =$$

$$n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu)r\mu + \frac{2\tan(J(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu))\cosh(r\mu)\sinh(r\mu)}{\sinh(a\mu/2)}.$$

此处,

$$J(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu) = \pi - 4\arctan(e^{-n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu)r\mu}).$$

现在，由于 $\mu \to 0$和 a, b, r保持不变，因此 $e^{-n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu)r\mu}$的一阶项为

$$1 - (n(\sigma, a\mu, b\mu, r\mu)r\mu),$$

此外，在 $x=1$附近，反正切(x)的一阶项为 $\pi/4+(x-1)/2$。因此，4 反正切$(e^{-n(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)r\mu})$的一阶项为

$$\pi-2n(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)r\mu.$$

因此，一阶近似下，$J(\sigma,\ a\mu,\ b\mu,\ r\mu)$ 是

$$2n(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)r\mu.$$

因此，如 $\mu\to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{2\tan(J(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu))\cosh(r\mu)\sinh(r\mu)}{\sinh(a\mu/2)}&\sim\frac{4n(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)r^2\mu^2}{a\mu/2}\\&=8n(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)(r^2/a)\mu.\end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}K(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)&\sim n(\sigma,a\mu,b\mu,r\mu)(r+8r^2/a)\mu\\&\le N(\sigma,a,b,r)(r+8r^2/a)\mu.\end{aligned}$$

因此，K/μ 被一个函数 $k(\sigma,\ a,\ b,\ r)$ 所以上界约束；此外，根据引理 10.5，当 $\sigma\to 0$ 和 $a,\ b,\ r$ 保持不变且 μ 有上界时，该函数趋于零。□

以下内容摘自 Breslin [3, 节 2]。

定义10.7. 设 T 是 $\mathbb{H}^3$ 中的一个测地三角形，其边长属于 $[A,B]$，外接半径至多为 R，并设 $\sigma>0$。那么，T的（σ,A,B,R）瘦四面体区域是由满足以下条件的点 p 构成的集合：p 属于 $\mathbb{H}^3$，且由 p 与 T的顶点张成的四面体是一个边长属于 $[A,B]$、外接半径至多为 R的（$\sigma,R/A$）瘦四面体。

以下是 [3]中引理2.5的一个版本。

引理10.8. 设 T 是 $\mathbb{H}^3$ 中的一个测地三角形，其边长属于 $[a\mu,b\mu]$，外接半径至多为 $r\mu$。那么，T的（$\sigma,a\mu,b\mu,r\mu$）瘦四面体区域的体积至多为 v（σ,a,b,r）μ^3，其中某个连续函数为 v（σ,a,b,r）。此外，当 $\sigma\to 0$ 以及 a,b,r 保持固定且 μ 有上界时，v（σ,a,b,r）$\to 0$。

证明。由引理 10.6，对于 $K=k(\sigma,a,b,r)\mu$，薄片区域包含在 T 的外接圆的 K 邻域内。外接圆的半径至多为 $r\mu$。因此，由于 μ 有上界，这个 K 邻域的体积至多为 $v(\sigma,a,b,r)\mu^3$。由于当 $\sigma\to 0$ 和 a,b,r 保持不变且 μ 有上界时，$k(\sigma,a,b,r)\to 0$，我们可推得，当 $\sigma\to 0$ 和 a,b,r 保持不变且 μ 有上界时，$v(\sigma,a,b,r)\to 0$。□

如上所述，Breslin 在 M 中选取了一个点集合 $\mathcal{S}$，该集合具有以下三项性质：

(1) 对任意 $p\in M$，以 p 为中心、半径为 $\mathrm{inj}(M,\ p)/5$ 的球 $B(p,\ \mathrm{inj}(M,\ p)/5)$ 内部含有 $\mathcal{S}$ 的一个点；(2) $\mathcal{S}\cap M_{[\mu,\infty)}$ 中任意一点到 $\mathcal{S}$ 中所有其他点的距离至少为 $\mu/100$；(3) 任意 $p\in M_{[\mu,\infty)}$ 到 $\mathcal{S}$ 中某个点的距离都小于 $\mu/100$。

随后，Breslin 将 $\mathcal{S}$ 扰动为集合 $\mathcal{S}'$。沿用 Breslin 的说法，若 $\mathcal{S}'$ 中的每个点移动的距离至多为 $\mu/1000$，且 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 是德劳内三角剖分的顶点集，则称 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的良好扰动。我们用 p' 表示将 $\mathcal{S}$ 中的点 p 扰动后得到的点。

引理10.9。设 $p \in \mathcal{S} \cap M_{[\mu,\infty)}$。在 $\mathcal{S}$中，使得 $[p', q', r', s']$ 成为某个 $\mathcal{S}$ 的良好扰动 $\mathcal{S}'$ 所对应的德劳内三角剖分中的四面体的点三元组 $\{q, r, s\}$ 的数量，有一个绝对常数上界。

证明。在 [3], Breslin 的引理 3.1 中，Breslin 证明了三元组的数量有如下上界

$$\left(\frac{\mathrm{vol}(B(\mu/50 + \mu/500))}{\mathrm{vol}(B(\mu/200 - \mu/1000)}\right)^3.$$

这里，$B(R)$ 是 $\mathbb{H}^3$ 中半径为 R 的球。由于 $B(R)$ 的体积渐近为 $(4/3)\pi R^3$（当 $R \to 0$ 时），三元组的数量有一个绝对常数上界。

□

当 $M = M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 时，定理 3.5 的证明接下来与 Breslin 论文中的证明相同。我们选取 $\mathcal{S}$ 个点于 M 中，使其满足以下性质:

(1) $\mathcal{S}$ 中的任意两点之间的距离至少为 $\mu/100$；

(2) 任意一个 $p \in M$ 到 $\mathcal{S}$中的某个点的距离都小于 $\mu/100$。

我们为 $\mathcal{S}$中的点选定一个顺序，并将它们记为 $\{p_1, \ldots, p_k\}$。我们将依次扰动这些点，并将 p_i 的扰动记为 p'_i。令 $\mathcal{S}_i$ 表示扰动前 i 个点后的结果；因此 $\mathcal{S}_i = \{p'_1, \ldots, p'_i, p_{i+1}, \ldots, p_k\}$. 我们希望将 p_{i+1} 扰动为 p'_{i+1}。令 $\mathcal{U}_i$ 表示满足以下条件的三元组 $\{q, r, s\} \subseteq \mathcal{S}_i \setminus \{p_{i+1}\}$的集合: $[p'_{i+1}, q', r', s']$ 是某个 $\mathcal{S}$的良好扰动上的德劳内三角剖分中的一个四面体。根据引理10.9，$|\mathcal{U}_i|$ 有一个绝对常数的上界。我们选取 p_{i+1} 的扰动 p'_{i+1}，使其位于以 p_i 为中心、半径为 $\mu/1000$的球内，并避开 $\mathcal{U}_i$中每个三角形的薄片区域。我们还确保 $\mathcal{S}_i$ 处于一般位置，即它是某个德劳内三角剖分的顶点集。$\mathcal{S}_i$ 中的任意两点之间的距离都不小于$(4/500)\mu$，因此这是该德劳内三角剖分的边长下界。M 中的每个点到 $\mathcal{S}_i$中某个点的距离至多为 $(11/1000)\mu$。因此，这是该三角剖分中每个四面体的外接半径上界。所以，每个四面体的每条边的长度至多为$(11/500)\mu$。半径为 $\mu/1000$ 的球的体积至少为$(4/3)\pi(\mu/1000)^3$。根据引理10.8，每个薄片区域的体积至多为 $v(\sigma, a, b, r)\mu^3$，其中

$$a = 4/500, \qquad b = 11/500, \qquad r = 11/1000.$$

此外，$v(\sigma, a, b, r) \to 0$如 $\sigma \to 0$。因此，如果 σ足够小（即小于某个普适的正数），我们就能确保存在这样一个点p'_{i+1}。对 $\mathcal{S}$ 中的每个点重复此过程，即可得到所需的集合 $\mathcal{S}'$。令 $\mathcal{T}$为所得的德劳内三角剖分。由于其中没有瘦四面体，根据引理 10.3，我们可推知其每个二面角都有一个统一的正下界 θ。因此，$\mathcal{T}$是 M的一个（$a\mu$，$b\mu$，θ）-厚三角剖分。注意$b = 11/500 < 1/40$。这就完成了在 $M_{(0,\mu/4)}$ 为空的情况下定理 3.5 的证明。

10.2. 一般情形：薄部可能非空。现在我们证明在薄部 $M_{(0,\mu/4)}$ 可能非空的情况下，定理 3.5 仍成立。在这种情况下，$M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 具有非空的环面边界。

证明遵循与闭情形相同的总体思路。在 M 中选取点集合 $\mathcal{S}$，然后对其施加扰动，从而得到集合 $\mathcal{S}'$。目标是证明可以选择 $\mathcal{S}'$，使其成为德劳内

三角剖分的顶点集，且该三角剖分在 $M_{[\mu/4,\infty)}$ 中是厚的。关键的是，与 Breslin 的工作不同，我们还需要确保该三角剖分包含一个与 $\partial M_{\text{厚}\mu/2}$ 同痕的单纯子集。初始选择靠近 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的 $\mathcal{S}$ 时必须格外谨慎。因此，我们现在来确立该边界的若干几何性质。

引理 10.10. 设 X 是 $\text{cl}(M - M^{fat}_{\mu/2})$ 的一个连通分支，它是某条长度小于 $\mu/4$的测地线的 r-邻域。那么 $r \geq \mu/10$。

证明. 设 $\ell < \mu/4$ 为测地线的长度。考虑 ∂X 上的任意一点及其在 $\mathbb{H}^3$中的提升。与 ℓ 对应的覆盖变换沿着 ∂X的原像将该点平移距离 $\ell\cosh r$ ，并伴有一定角度的旋转。因此，这两点在 $\mathbb{H}^3$ 中的距离至多为 $2r + \ell\cosh r$。但根据 $M_{[\mu/2,\infty)}$的边界定义，这个距离至少为 $\mu/2$。因此，

$$2r + (\mu/4)\cosh r \geq 2r + \ell\cosh r \geq \mu/2.$$

现在假设 r 小于 $\mu/10$。由于 $\mu \leq 0.776$ [16, 定理1.5(2)], , 我们推得 $\cosh r \leq \cosh 0.0776 < 1.004$。所以，

$$2r \geq \mu\left(\frac{1}{2} - \frac{1.004}{4}\right)$$

因此得到 $r \geq (0.1245)\mu$，这与假设矛盾。 □

引理 10.11. $M^{fat}_{\mu/2}$ 的边界继承了一个黎曼度量，该度量为欧氏度量，且单射半径大于 $\mu/4$。

证明。 该度量是欧氏度量，因为$\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的每个连通分支的等距变换群都传递作用。环面的单射半径是最短闭测地线长度的一半。因此，考虑环面上一条以某点为基点的闭测地线。该测地线提升为 $\mathbb{H}^3$中环面的原像内的一条路径。如果这条路径的端点不同，那么它们的双曲距离至少为$\mu/2$。因此，它们的欧几里得距离大于 $\mu/2$，符合要求。另一方面，如果端点相同，那么这条测地线就是$M - M^{\text{fat}}_{\mu/2}$的闭包中的一个实心环面分支的子午线。它构成一个半径至少为r的圆的边界。因此，根据引理 10.10，它的长度至少为 $2\pi\sinh r \geq 2\pi r \geq (\pi/5)\mu > \mu/2$，符合要求。□

上述引理涉及 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 上的黎曼度量。我们还需要考虑 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 所继承的诱导度量，因为 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 是 M 的子空间。下面的引理比较这些度量在小尺度下的情形。

引理 10.12。 对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\zeta \in$ （0， $1/100$） ，使其具有以下性质。令 d_{eucl} 表示 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$ 上的欧几里得黎曼度量，令 d_{hyp} 表示其从 M 继承的度量。那么，对于 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$ 中满足 d_{hyp}（x、 y） $\leq \zeta\mu$ 的任意两点 x 和 y，我们有如下比较：

$$d_{hyp}(x, y) \leq d_{eucl}(x, y) \leq \min\{1.12, (1 + \epsilon)\}d_{hyp}(x, y).$$

证明。 $d_{hyp}(x,\ y) \leq d_{eucl}(x,\ y)$ 这一事实是自动成立的，因为 $d_{hyp}(x,\ y)$ 是由 M 中连接 x 与 y 的最短测地线实现的，而 $d_{eucl}(x,\ y)$ 是由 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 中的最短测地线实现的。

因此我们聚焦于第二个不等式。令 W为 $\text{cl}(N_{\zeta\mu}(\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}) - M_{\text{厚}\mu/2})$。于是，$W$是位于 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$上的一个领圈，处在 $M_{\text{厚}\mu/2}$的外侧，宽度为 $\zeta\mu$。根据引理

10.10， W 不会延伸到 $M - M_{\mu/2}^{\text{fat}}$的任何实心环面分支的核心测地线那么远。因此， W是不相交的 $T^2 \times [0,1]$副本的并。

令 $\partial_- W$为环面 $\partial W - \partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$。令 $p\colon\ W \to \partial_- W$为最近点收缩。于是， p 不会增加任何曲线的长度。此外， p 将 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$上的黎曼度量缩放一个介于 1 和 $\sinh(\mu/10 - \zeta\mu)/\sinh(\mu/10)$ 之间的因子，理由如下。考虑 $\mathrm{cl}(M - M_{\mu/2}^{\text{fat}})$ 的一个实心环面分支 Q。令 r 为 Q 的核心测地线到 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$的距离。由引理 10.10， $r \geq \mu/10$。这个边界为 Q 的管状邻域的子午圆周长为 $2\pi \sinh r$，而 p 将该子午圆映到一个周长为 $2\pi \sinh(r - \zeta\mu)$ 的圆。比值 $\sinh(r - \zeta\mu)/\sinh r$ 在 r 尽可能小时取最小值。令此最小值为 $\mu/10$ ，便得到所需的缩放因子。还必须考虑子午线以外方向上的缩放因子，也必须考虑 $M - M_{\mu/2}^{\text{fat}}$的尖点分支对应的缩放因子。不过，容易验证，如上所述，实心环面的子午线给出的缩放因子最小。

当 $\zeta \to 0$ 时，比例因子 $\sinh(\mu/10 - \zeta\mu)/\sinh(\mu/10)$ 趋于 1。因此，由于 μ 有上界，当 ζ 足够小时，比例因子至少为 $1/(1+\epsilon)$。此外，由于 $\mu \leq 0.776$ 和 $\zeta \leq 1/100$，比例因子至少为 $1/1.12$。□

在定理 3.5 的证明中，我们将从 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$ 的一个三角剖分开始。该三角剖分的边在 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$ 上的欧氏度量下是测地线，并围成三角形面。我们希望确保，当这些边和面在 M 中被拉直时，所得结果是 M 的三角剖分的一个单纯子集。为此，我们引入以下概念。

设 $\mathcal{S}$ 是 M 中的一组点，它构成某个德劳内三角剖分的顶点集，并且 $\mathcal{S} \cap \partial M$ 肥厚的$\mu/2$ 构成配备其欧几里得黎曼度量的 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$ 的德劳内三角剖分的顶点集。对于 $\epsilon > 0$，若对 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$ 的德劳内三角剖分中的任意三角形，其顶点为~~x、y、z~~，欧几里得外心为 w，则称 $\mathcal{S}$ 是 ϵ-鲁棒的，如果 w 与 $\mathcal{S} \setminus \{x,y,z\}$ 中任意一点之间的双曲距离至少为从 w 到 x、 y 和 z 的双曲距离的 $(1+\epsilon)$ 倍。

引理 10.13. 给定 $\epsilon \in (0,1)$，令 $\zeta \in (0, 1/100)$ 为引理 *10.12* 中的常数。则存在 $c \in (0, \zeta/2]$ 和 $\lambda \in (0,1)$，使其具有以下性质。设$\mathcal{S}$ 是一个 ϵ-稳健集，使得以 $\mathcal{S} \cap \partial M_{\mu/2}^{fat}$ 为顶点集的 $\partial M_{\mu/2}^{fat}$ 的德劳内三角剖分中，每条边的欧氏长度都属于 $[c\mu/4, c\mu/2]$。另假设 $\partial M_{\mu/2}^{fat}$ 中的每个点到$\mathcal{S} \cap \partial M_{\mu/2}^{fat}$中的某个点的欧几里得距离都小于 $c\mu/2$ 。令 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 在 M 中的一个扰动，其中每个点移动的双曲距离至多为 $c\lambda\mu/1000$，且 $\mathcal{S}'$ 构成 M 的德劳内三角剖分的顶点集。那么，对于 $\mathcal{S}$ 中任意三个在$\partial M_{\mu/2}^{fat}$ 的三角剖分中张成一个三角形的点，它们扰动后会在以 $\mathcal{S}'$ 为顶点集的 M 的德劳内三角剖分中张成一个三角形。

证明。 考虑顶点集为 $\mathcal{S} \cap \partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$ 的 $\partial M_{\mu/2}^{\text{fat}}$ 的德劳内三角剖分中的一个三角形 $[x,y,z]$。设 w 为其欧几里得外心。那么 $d_{eucl}(x,w) = d_{eucl}(y,w) = d_{eucl}(z,w)$。此外

$$2d_{eucl}(x,w) = d_{eucl}(x,w) + d_{eucl}(y,w) \geq d_{eucl}(x,y) \geq c\mu/4.$$

现在， w 位于三条弧 α_{xy}、 α_{xz} 和 α_{yz} 的交点处。这里， α_{xy} 是在欧几里得度量下到 x 和 y 距离相等的点集，而 α_{xz} 和

α_{yz} 的定义类似。设 x'、 y'、 z' 分别是 x、 y、 z的扰动。在 M 中，到 x' 和 y' 距离相等的点集在 w附近是一个超平面。它与$[x,y,z]$ 相交于一条弧，这条弧非常接近 α_{xy}。更准确地说，对于某个 δ，这两条弧彼此之间的距离至多为 $\delta c\mu$ ，其中 $\delta \to 0$ ，当 $c \to 0$ 和$\lambda \to 0$时。因此，存在一点 w'，位于 $N_{\delta c\mu}$（w）$\cap\, \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中，在双曲度量下到 x'、 y' 和 z'的距离相等。（要证明这样的点 w' 必定存在，可考察 $N_{\delta c\mu}$（w）$\cap\, \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$中到 x'和 y'距离相等的点的轨迹，以及它与到 x' 和 z'距离相等的点的轨迹的交点。）那么，对于 $\mathcal{S} \setminus \{x,y,z\}$中的任意其他点 p，其扰动 p'满足

$$\begin{aligned} d_{hyp}(w',p') &\geq d_{hyp}(w,p) - d_{hyp}(w',w) - d_{hyp}(p',p) \\ &\geq (1+\epsilon)d_{hyp}(w,x) - d_{hyp}(w',w) - d_{hyp}(p',p) \\ &\geq (1+\epsilon)d_{hyp}(w',x) - (2+\epsilon)d_{hyp}(w',w) - d_{hyp}(p',p) \\ &\geq (1+\epsilon)d_{hyp}(w',x') - (1+\epsilon)d_{hyp}(x',x) - (2+\epsilon)d_{hyp}(w',w) - d_{hyp}(p',p) \\ &\geq (1+\epsilon)d_{hyp}(w',x') - (2+\epsilon)c\lambda\mu/1000 - (2+\epsilon)\delta c\mu. \end{aligned}$$

第一、第三和第四个不等式均为三角不等式。第二个不等式是由假设 $\mathcal{S}$ 为 ϵ-稳健所得出的推论。现在 $d_{hyp}(w',x')/(c\mu)$远离零，因此只要 c和 λ 充分小，我们便可推出

$$(2+\epsilon)c\lambda\mu/1000 + (2+\epsilon)\delta c\mu < \epsilon d_{hyp}(w',x').$$

这表明，只要 c 和 λ 充分小，在双曲度量下， w' 到 x',y',z' 的距离比到 $\mathcal{S}'$ 中任何其他点的距离更近。因此， w' 在 $\mathcal{S}'$的沃罗诺伊区域中生成一个包含 x'、 y' 和 z' 的1-胞腔。与此对偶的是 $\mathcal{S}'$的德劳内三角剖分的一个面，其顶点为 x'、 y' 和 z'。由此，我们已证明 x'、 y' 和 z' 确实构成M的德劳内三角剖分的一个面。□

根据上述稳健性假设，我们现在从前一个引理得知，当在 M中将 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$的三角剖分拉直时，每个面都是 M的德劳内三角剖分中的单形。我们还要求，拉直后的 $\partial M_{\text{胖}\mu/2}$三角剖分构成一个与 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$同痕的曲面。下面的引理给出了实现这一点的方法。

引理 10.14. 设 $\mathcal{T}$ 是 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$ 的一个三角剖分，其中每个 *1*-单形在欧几里得黎曼度量下都是长度不超过 $\mu/8$的测地线。令 $\mathcal{T}'$ 由对每条边和每个面进行同伦变形，使其在 M中成为全测地的而得到。那么 $\mathcal{T}'$ 构成一个与 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$同痕的曲面的三角剖分。此外，该曲面包含于 $M_{[\mu/4,\infty)}$中。

证明。令 X 为 M 的子集，它是 $\mathcal{T}'$ 中单形的并集。它包含于 $M_{(0,\mu/2]}$ 中。存在映射

$$straight\colon \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2} \to X$$

通过拉直得到。形式上， $\mathcal{T}$的每个顶点都映射到 $\mathcal{T}'$中的同一顶点。 $\mathcal{T}$的每个 1-单形都以恒定速度参数化，并映射为 M中的一条恒速测地线。 $\mathcal{T}$的每个 2-单形都利用有序重心坐标映射到 X中的像单形，方式与第 8 节大致相同。

我们声称， X 避开了 cl($M - M_{\text{胖}\mu/2}$) 的实心环面分支中的核心测地线 γ 。反之，假设与γ有交点。该交点必位于 $\mathcal{T}$ 某个 1-单形的内部像中，或 $\mathcal{T}$ 某个 2-单形的像中。它不可能位于某个 1-单形的像中，因为该 1-单形的端点在 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$中必须具有相反的子午线坐标。因此，根据引理 10.11，连接这两个端点的 $\mathcal{T}$ 中的边长至少为 $\mu/4$。但我们假设每条边的边长至多为 $\mu/8$。该交点也不可能位于某个 2-单形的内部像中。若果真如此，该单形将与 γ 横截相交，因此该单形的边界必定来自 $\mathcal{T}$ 中一条环绕子午线的路径。但这类路径的长度至多为 3($\mu/8$)，而任何子午线的长度都大于 $\mu/2$。这就证明了所声称的结论。

存在一个从 cl($M - M^{\text{fat}}_{\mu/2}$) $-\gamma$到 $\partial M_{\text{胖}\mu/2}$ 的径向投影映射，定义如下。对于 cl($M - M^{\text{fat}}_{\mu/2}$) $-\gamma$ 中的每个点 x， $radial(x)$ 是它在$\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$中的最近点。因此，这限制为一个映射

$$radial\colon X \to \partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}.$$

我们断言，(*radial*) ∘(*straight*) 在 $\mathcal{T}$ 的每个单形上的限制是映到其像上的保向微分同胚。这一点在位于尖点的边界环面中的单形情形下最容易看出（见图 9）。在该情形下，每个单形在 (*radial*) ∘ (*straight*) 下的像就是其自身。例如，考虑位于一个尖点边界中的 $\mathcal{T}$ 的一条边。该环面在 $\mathbb{H}^3$ 中的原像是一个 horosphere，我们可以把它取为水平欧几里得平面$\{(x, y, z) : z = 1\}$，即 $\mathbb{H}^3$ 的上半空间模型中的平面。 $\mathcal{T}$ 的这条边提升为该平面中的一条直弧。映射 $straight$ 把这条弧送到具有相同端点的一条双曲测地线，而该测地线是某个欧几里得圆的一部分。然后映射 $radial$ 把这段欧几里得圆弧送回原来的欧氏测地线。复合 (*radial*) ∘ (*straight*) 在 $\mathcal{T}$ 的这条边上并不是恒等映射。这是因为 $straight$ 以恒定的双曲速度沿该双曲测地线送出这条弧，因此当它与 $radial$复合后，便不再具有恒定的欧几里得速度。尽管如此，显然 (*radial*) ∘ (*straight*) 通过保向微分同胚，把位于一个尖点边界中的 $\mathcal{T}$ 的每个单形送回其自身。对于 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 中界定实心环面的那些连通分支里的单形，复合 (*radial*) ∘(*straight*) 不一定把每个单形送回其自身。但它通过保向微分同胚把每个单形映到其像上。

由此断言可得，复合映射 (*radial*) ∘(*straight*) 是从 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的每个连通分支到其自身的分支覆盖映射。（事实上，通过考察它在 $\mathcal{T}$ 的任一顶点的小邻域中的作用，容易看出它实际上是 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的局部同胚，但我们不必沿这条论证路线继续下去。）复合映射 (*radial*) ∘(*straight*) 与恒等映射同伦（经由欧几里得环面 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 中的直线同伦），因此其次数为 1。任何从环面到其自身的次数为 1 的分歧覆盖都是同胚。特别地，$straight$ 是单射。因为 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 是紧致的，且 X 是豪斯多夫的，所以 $straight$ 是到其像上的同胚。因此，其像 X 确实是一个曲面，并且 $\mathcal{T}'$ 构成它的一个三角剖分。

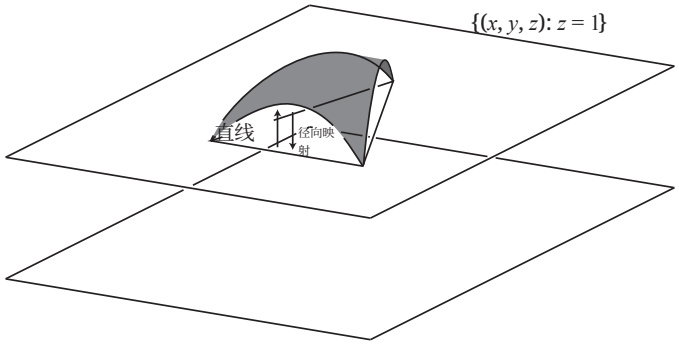

FIGURE 9. 将直线和径向映射应用于尖点环面三角剖分中的一个三角形。

注意， X 经由 $\mathrm{cl}(M - M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}) - \gamma$ 中的直线同伦与 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 同伦。 X与 $\partial M_{\text{加厚}\mu/2}$都是不可压缩的，并且嵌入于 $\mathrm{cl}(M - M_{\text{加厚}\mu/2}) - \gamma$ 中，而这样的曲面同痕当且仅当它们同伦。

最后要证明的是， X 中的每个单形都位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$中。取 X中的任意一点 x 。它位于 X的一个全测地单形中。从 x 到该单形任一顶点的距离，至多等于该单形各边的最大长度，而这至多为 $\mu/8$。因此，存在一条长度至多为 $\mu/8$ 的路径 p ，将 x与 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2} \subseteq M_{[\mu/2,\infty)}$中的一点 x' 连接起来。若存在一个以 x 为基点、长度小于 $\mu/4$的非平凡同伦环路，我们便可以据此构造一个以 x'为基点的非平凡同伦环路：先沿着 p 反向走到 x，再沿着以 x为基点的环路行进，最后沿着 p正向行进。这个环路的长度将小于$\mu/8 + \mu/4 + \mu/8 = \mu/2$，这与 x' 位于 $M_{[\mu/2,\infty)}$中的事实矛盾。

□

实际上，我们需要上述引理的一个加强版本：将三角剖分的顶点 $\mathcal{T}$稍微扰动，如下所示。

引理 10.15。 设 μ 为任意一个小于三维 *Margulis* 常数的实数，且设 $\tilde{a}$、b、θ 为满足 $0 < \tilde{a} < b < 1/10$ 且$\tilde{\theta} \in (0、\pi/2)$的正实数。设 $\mathcal{T}$是 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$ 的一个三角剖分，其中每个 *1*-单形在欧几里得黎曼度量下都是测地线，边长介于 $\tilde{a}\mu$ 与 $b\mu$之间，且内角至少为 $\tilde{\theta}$。设 $\mathcal{T}'$ 由以下方式得到：在 $\tilde{M}$中将 $\mathcal{T}$ 的顶点扰动至多$(5/12)\min\{\tilde{a}\mu/100, \tilde{a}\mu(\theta/2\pi)\}$ 的距离，然后对每条边和每个面作同伦变形，使其在 M中全测地。于是 $\mathcal{T}'$ 构成一个曲面的三角剖分，该曲面与 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$ 同痕。此外，该曲面包含于 $M_{[\mu/4,\infty)}$中。

在证明中，我们将需要以下关于欧几里得三角形扰动的初等事实。

引理 10.16。 设 $T = [x, y, z]$ 是一个欧氏三角形，其边长介于$\sim A$ 和 B之间，内角至少为 $\theta \in (0, \pi/2)$。那么，对于任意由 T 通过将每个顶点扰动小于$(A/2)\sin(\theta/2)$的距离得到的欧氏三角形$\sim T$ ，T 和 T 的定向相同，即扰动不会改变顶点的循环顺序。

˜ ˜证明。令 $\epsilon = (1/2)\sin(\theta/2)$。设 T 的顶点为 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 和 $\tilde{z}$，它们分别由 x、y 和 z 扰动得到，且每个顶点移动的距离都小于 ϵA。将 T 平移，使得平移后 $\tilde{x}$等于 x。平移后，$\tilde{y}$ 和 $\tilde{z}$ 到 y 和 z的距离至多为 $2\epsilon A$。只需证明 xy˜ ˜与 $x\tilde{y}$ 之间的角小于 $\theta/2$，且 xz 与 $x\tilde{z}$ 之间的角小于 $\theta/2$。这是因为根据假设，xy 与 xz 之间的角至少为 θ 且至多为$\pi - 2\theta$。因此，通过移动 y 和 z，$x\tilde{y}$ 与 $x\tilde{z}$ 之间的角仍为正值，且仍至多为 π。

我们考虑三角形 $[x, y, \tilde{y}]$。（关于 $[x, z, \tilde{z}]$，论证完全类似-˜。）设 X、Y 和 Y 分别为这三个顶点处的角。对 x 应用正弦定理，得到

$$\frac{\sin X}{|y\tilde{y}|} = \frac{\sin \tilde{Y}}{|xy|}$$

因此

$$\sin X = \frac{|y\tilde{y}| \sin \tilde{Y}}{|xy|} \leq \frac{2\epsilon A}{A} = 2\epsilon.$$

˜由于 $\epsilon = (1/2)\sin(\theta/2)$，我们得到该引理。

□

引理 *10.15* 的证明。存在一个映射 $f\colon\ \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2} \to M$，其定义方式与 $straight$ 类似，但首先要对给定的顶点进行扰动：我们将 $\mathcal{T}$ 的顶点扰动到 $\mathcal{T}'$ 中的对应顶点，然后将边和面拉直。f的像包含于$V = N_{(5/12)\min\{\tilde{a}\mu/100, \tilde{a}\mu\ (\tilde{\theta}/2\pi)\ \}}(M - M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2})$ 中。此外，按照引理 10.14 证明中的相同论证，它避开了 V的实心环面分支的核心测地线的并集，记为 γ，因为顶点的扰动距离足够小。令 X 为 f 的像。

还存在一个由最近点投影给出的映射 $radial_+\colon\ V - \gamma \to \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$。它限制为 $radial_+\colon\ X \to \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$。如引理 10.14 的证明所述，复合映射（$radial_+ \circ f$）可能不会将边映射为边，也不会将面映射为面。然而，这一次它还可能不会将顶点映射为顶点，因为存在我们的初始扰动。˜但由于以下原因，它将每个顶点 v 移动的欧几里得距离至多为 $\min\{\tilde{a}\mu/100, \tilde{a}\mu\ (\theta/2\pi)\ \}$。

初始扰动将 v 移到点 v'，该点至多相距

$$D = (5/12)\min\{\tilde{a}\mu/100, \tilde{a}\mu(\tilde{\theta}/2\pi)\}$$

。映射 $radial_+$ 将 v' 送到 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中最近的点 v''。因此，v'' 和 v' 之间的距离也至多为 D。由此，v 和 v'' 之间的双曲距离至多为 $2D$。设 v 和 v'' 在 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中的欧几里得距离为 d_{eucl}。由于 $2D < \mu/100$，由引理 10.12 可推得

$$d_{eucl} \leq (1.12)2D < (12/5)D,$$

如所需。

考虑 $\mathcal{T}$ 的任意一个面，它是欧几里得三角形 Δ。其顶点经 $(radial_+ \circ f)$ 移动，每个顶点移动的距离至多为 $(12/5)D$。现在，

$$(12/5)D \leq \tilde{a}\mu(\tilde{\theta}/2\pi) \leq (\tilde{a}\mu/2)\sin(\tilde{\theta}/2).$$

因此，根据引理 10.16，由这些顶点张成的欧几里得三角形与 Δ 具有相同的定向。与引理 10.14 的证明一样，$(radial_+ \circ$

f) 到 Δ 的限制是到其像上的微分同胚，且为保向映射。因此，映射 ($radial_+ \circ f$) 是从环面到其自身的分支覆盖映射，并且与恒等映射同伦，故它是一个同胚。因此， f 是到其像上的同胚，正如所需。同样，这个像曲面 X 在 cl($M - M^{\text{fat}}_{\mu/2}$) $-\gamma$ 中与 $\partial M_{\text{胖}\mu/2}$ 同伦，因而它们同痕。

最后，曲面 X 位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$中，理由如下。 X 中任意一点 x 到 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的距离至多为 $\tilde{b}\mu + 3(\tilde{a}\mu/100)$。这是因为 X 的每个顶点都位于 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 的 $\tilde{a}\mu/100$ 范围内，而 X 中的每个点到某个顶点的距离至多为$b\mu + 2(\tilde{a}\mu/100)$。如果存在一个以 x 为基点、长度小于 $\mu/4$的非平凡同伦环路，我们就可以用它构造一个以 $\partial M^{\text{fat}}_{\mu/2}$ 中某点 x' 为基点、长度小于 $2(\tilde{b}\mu + 3(\tilde{a}\mu/100)) + \mu/4 < \mu/2$的非平凡同伦环路。后一个不等式成立是因为 $0 < \tilde{a} < b < 1/10$。这个以 x' 为基点的环路的存在，与 x' 位于 $M_{[\mu/2,\infty)}$中的事实相矛盾。

□

我们还需要最后一个结果。它类似于定理 3.5，但针对的是欧几里得曲面的直线三角剖分。该结果基本上已在 [5] 中得到证明（见定理 4.1 [5]，该定理处理 $\mathbb{R}^n$ 的三角剖分）。

定理 10.17。 存在实数 $0 < \tilde{a} < b < 1/10$、 $\theta \in (0, \pi/2)$ 以及$\epsilon \in (0, 1/10)$，具有以下性质。设 μ 为任意正实数，令$c \in (0, 1/200)$，并设 T 是单射半径至少为 $\mu/4$ 的欧氏环面。令 $\mathcal{S}_\partial$ 为 T 中的一个极大点集，其中任意两点之间的距离都不小于 $c\mu$。那么，存在 $\mathcal{S}_\partial$ 对 $\mathcal{S}_\partial$ 在 T 中的一个扰动，使得每个点的移动距离至多为 $c\mu/1000$，从而

(1) 由 $\mathcal{S}_\partial$ 得到的德劳内三角剖分，其边长介于 $\tilde{a}\mu$ 和 $b\mu$ 之间，且内角至少为 θ；*(2)* 对于 $\mathcal{S}_\partial$中在 T 内恰有三个最近点的每个点， $\mathcal{S}_\partial$ 中的下一个最近点至少远出$(1 + 3\epsilon)$ 倍。

在闭情形中，定理 3.5 的证明通过在 M 中选取一个有限点集 $\mathcal{S}$，然后进行一次良好扰动，得到一个集合 $\mathcal{S}'$，它构成所需厚三角剖分的顶点。对于 $M^{\text{fat}}_{[\mu/2,\infty)}$ 有非空边界的情形，我们需要对 $\mathcal{S}$进行更多控制，具体如下。

命题 10.18. 设 $\tilde{a}$、 b、 θ 和 ϵ为定理 *10.17* 给出的常数。设 c 和 λ 为引理 *10.13* 给出的常数。存在 M 中的一个有限点集 $\mathcal{S}$，具有以下性质：

(1) $\mathcal{S} \cap \text{int}(M^{\text{fat}}_{[\mu/2,\infty)})$ 中的任意两点之间的距离至少为 $\mu/90$；*(2)* 任意 $p \in M_{[\mu/2,\infty)}$ 到 $\mathcal{S}$中的某个点的距离小于 $\mu/90$；*(3)* 对于 M中的每个点 p，以 p 为中心、半径为 $\text{inj}_p(M)/5$ 的球的内部至少包含 $\mathcal{S}$ 中的一个点。

此外，对于 $\mathcal{S}$ 的任意扰动 $\mathcal{S}'$，若每个点的移动距离至多为

$$D' = \min\{(5/12)\tilde{a}\mu/100, (5/12)\tilde{a}\mu(\tilde{\theta}/2\pi), c\lambda\mu/1000\}$$

其中这些点是 M 的德劳内三角剖分的顶点，而该德劳内三角剖分包含一个与 $\partial M^{fat}_{\mu/2}$ 同痕且位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$ 中的单纯子集 $\mathcal{Y}$。

证明。令 $\mathcal{S}_\partial$ 为 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 上的一个极大点集，其中任意两点之间的距离均不小于 $c\mu$。根据定理 10.17，我们可以将 $\mathcal{S}_\partial$ 扰动为 $\tilde{\mathcal{S}}_\partial \subset \partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$，使每个点的移动距离至多为 $c\mu/1000$；这样得到的 $\mathcal{T}$ 的德劳内三角剖分及其诱导黎曼度量的边长介于 $\tilde{a}\mu$ 和 $\tilde{b}\mu$ 之间，且内角至少为 $\tilde{\theta}$。此外，对于 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中在 $\mathcal{S}_\partial$（欧氏度量）中恰有 ˜ ˜个最近点的每个点，下一个最近点在 $\mathcal{S}_\partial$ 中至少远 $(1+3\epsilon)$ 倍（欧氏度量）。注意，经过此次扰动后，以这些点为中心、半径为 $(1001/1000)c\mu$ 的欧几里得球覆盖 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$，且任意两点之间的距离至少为 $(998/1000)c\mu$。因此，根据引理 10.12，以这些点为中心、半径为 $(1001/1000)c\mu$ 的双曲球覆盖 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$；根据引理 10.12，在双曲度量下任意两点之间的距离至少为 $(89/100)c\mu$。根据引理 10.15，将 $\mathcal{T}$ 的顶点在 M 中按至多为 ˜$(5/12)\min\{\tilde{a}\mu/100, \tilde{a}\mu(\theta/2\pi)\}$ 的距离进行扰动，然后拉直，所得结果是曲面 X 的一个三角剖分；该曲面与 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 同痕，并且位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$ 中。这就是命题所要求的单纯子集 $\mathcal{Y}$。

我们需要将 $\tilde{\mathcal{S}}_\partial$ 扩展为 M 中的一个点集 $\mathcal{S}$。定义如下：取 $\mathcal{S}\cap M_{\text{粗}\mu/2}$ 为满足以下性质的极大集合：

(1) $\mathcal{S}\cap M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 包含 $\tilde{\mathcal{S}}_\partial$；(2) 对任意 $p\in(\mathcal{S}\cap M_{\text{粗}\mu/2})\setminus\tilde{\mathcal{S}}_\partial$ 和 $q\in\mathcal{S}\cap M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$，$p$ 与q 之间的距离至少为 $\mu/90$。

然后通过向 $M-M_{\text{粗}\mu/2}$ 中添加点，将 $\mathcal{S}\cap M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 扩展为集合 $\mathcal{S}$，使得 (1) 和 (2) 仍然成立，此外还满足：

(3) 对任意 $p\in\mathcal{S}-M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$和 $q\in\mathcal{S}\cap M_{\text{粗}\mu/2}$，$p$与 q之间的距离至少为 $\mu/90$；(4) 对任意 $p\in M$，以 p为中心、半径为 $\mathrm{inj}(M,p)/5$ 的球 $B(p,\mathrm{inj}(M,p)/5)$ 的内部包含 $\mathcal{S}$ 中的一个点；(5) 对每个属于 $\mathcal{S}-M_{\text{粗}\mu/2}$ 的 p，p与 $\mathcal{S}-M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$中任意其他点之间的距离至少为 $\mathrm{inj}(M,p)/10$。

这保证了 $\mathcal{S}\cap M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中任意两点之间的距离至少为˜$(89/100)c\mu$。当至少有一个点属于 $\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_\partial$ 时，由于引理 10.13 中c 小于 $1/200$，根据 (2) 可得此结论；当两点都属于 $\tilde{\mathcal{S}}_\partial$时，我们已在上文观察到这一点。我们还注意到，$M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中的每个点到 $\mathcal{S}$ 中的某个点的距离都小于 $\mu/90$。否则，我们就可以将该点加入 $\mathcal{S}\cap M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$，这与其极大性矛盾。因此，以 $\mathcal{S}$ 为中心、半径为 $\mu/90$ 的球覆盖了 $M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$。

我们声称 $\mathcal{S}$ 是 ϵ-稳健的。任取 $\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中的三个点 x、y、z，它们在 $\mathcal{T}$中张成一个三角形。设 w 为它们的欧几里得外心。从 w 到 x、y、z 中任一点的欧几里得距离至多为 $(1001/1000)c\mu$。因此，从w 到 x、y、z 中任一点的双曲距离也至多为 $(1001/1000)c\mu \le \mu/199.$。根据定理 10.17，$\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中距离 w 次近的点在欧氏度量下至少远 $(1+3\epsilon)$。因此，根据引理 10.12，它在双曲度量下至少远 $(1+\epsilon)$倍，正如所需。此外，根据上文的 (2) 和 (3)，$\mathcal{S}\setminus\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$中的任一点到 x的双曲距离至少为 $\mu/90$，因此到 w的双曲距离至少为 $(\mu/90)-(\mu/199)$。这就证明了该断言。

现在考虑对 $\mathcal{S}$进行任意扰动 $\mathcal{S}'$，使每个点移动的距离至多为D'，并得到一个集合，该集合是 M的德劳内三角剖分的顶点集。设 $\mathcal{S}'_{\partial}$ 为由 $\tilde{\mathcal{S}}_{\partial}$产生的 $\mathcal{S}'$ 子集。

由引理 10.13， X 在顶点集为 $\mathcal{S}$的 M 德劳内三角剖分中是单纯的，符合要求。我们已经在上文验证， X 是一个与$\partial M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 同痕且位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$中的曲面。□

注意， $M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 中的每个点到 $\mathcal{S}'$中某个点的距离至多为$(\mu/90) + 2D' < \mu/80$。特别地，顶点集为 $\mathcal{S}'$的德劳内三角剖分中任意四面体的外心也满足这一点。因此，此三角剖分中的每条边长度都小于 $\mu/40$。

定理 3.5 证明的其余部分与闭情形相同。我们在命题 10.18 中的集合 $\mathcal{S}$ 上选取一个全序，然后逐点扰动这些点。令 $\mathcal{S}_i$ 为扰动前 i个点后的结果，并令 p_{i+1}为下一个要扰动的点。令 $\mathcal{U}_i$ 为满足以下条件的三元组 $\{q, r, s\} \in \mathcal{S}_i \setminus \{p_{i+1}\}$ 的集合：$[p'_{i+1}, q', r', s']$ 是顶点集为 $\mathcal{S}$的某个良好扰动所得德劳内三角剖分中的四面体。每个点的扰动距离至多为 D'，并且我们选择扰动，使其避开 $\mathcal{U}_i$中每个三角形的薄片区域。和前面一样，如果 σ 足够小，我们就能确保存在这样的 p_i扰动。对 $\mathcal{S}$ 中的所有点重复此过程，便得到一个扰动 $\mathcal{S}'$。由命题 10.18，顶点集为 $\mathcal{S}'$ 的德劳内三角剖分构成 M 的一个子集中的三角剖分，该子集与 $M^{\mathrm{fat}}_{\mu/2}$ 同痕且位于 $M_{[\mu/4,\infty)}$中。由于我们避开了所有薄片区域，它是一个$(\theta,\ a\mu,\ b\mu)$-厚三角剖分。定理 3.5 的证明至此完成。

References

[1] E. Appleboim, *Quasi Normality and PL Approximation of Least Area Surfaces in 3-Manifolds* 2311 , 预印本, https://arxiv.org/abs/ 。[2] *Thick triangulations of hyperbolic n-manifolds*W. Breslin, , 《太平洋数学杂志》241（2009）, 第 2, 215 225 [3] 期– W. Breslin, *Curvature bounds for surfaces in hyperbolic 3-manifolds*, 《加拿大数学杂志》62（ 2010 5, 994 1010 [3, 5, 7, 33, 34, 35, 36]）, 第期– J.-D. Boissonnat、R. Dyer 和 A. Ghosh, *Constructing intrinsic Delaunay triangulations of submanifolds* 8273, 2013, 1303 6493 , INRIA 研究报告 RR-, arxiv: 。。[5] *Delaunay stability via perturbations*J.-D. Boissonnat、R. Dyer 和 A. Ghosh, 《国际计算几何与应用杂志》 24 2 2014 125 152 [43] 第期（）, –。J.-D. Boissonnat、R. Dyer 和 A. Ghosh, 《计算数学基础》（ 2017 399 431 [32]）, –。[6] *Delaunay triangulation of manifolds* D. Calegari、F. C. Marques 和 A. Neves, *Counting minimal surfaces in negatively curved 3-manifolds* 171 8 1615 1648, 2022 , 《杜克数学杂志》, （）：–。[7] *Counting minimal surfaces in negatively curved* J. Cheeger、D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, 《北荷兰数学丛书》第9卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—牛津；美国 Elsevier 出版公司，纽约, 1975, 174 [10] 页。[8] T. H. Colding、D. Gabai、D. Ketover, *On the classification of Heegaard splittings*, 《杜克数学杂志》 167 2018 15, 2833 2856 [3]（）, 第期–。[9] T. Colding 和 W. Minicozzi, *Estimates for parametric elliptic integrands*, 《国际数学研究通报》2002（ 2002 291 297 [8]）, –。[10] T. Colding 和 W. Minicozzi, *A course in minimal surfaces*, 《数学研究生丛书》, [11] 121, 2011, 313 [6, 11, 12] 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，页。[12] *Counting essential surfaces in 3-manifolds* N. Dunfield、S. Garoufalidis、J. H. Rubinstein, , 《数学发明》（即将出版）, arXiv: 2007 10053 [1] 。[13] R. Dyer、G. Vegter、M. Wintraecken, *Riemannian simplices and triangulations*, 《几何专题》179（2015）91–138。 [32]

[14] H. Edelsbrunner、X.-Y. Li、G. Miller、A. Stathopoulos、D. Talmor、S.-H. Teng、A. ¨Ung¨or 和 N. Walkington, *Smoothing and cleaning up slivers*, 《第三十二届 ACM 计算理论年度研讨会论文集》, 2000年5月21日至23日, 美国俄勒冈州波特兰（F. Frances Yao 和 Eugene M. Luks 编）, ACM, 2000, 273 277 [3] 页–。M. Freedman、J. Hass、P. Scott, *Least area incompressible surfaces in 3-manifolds*, 《数学发明》 71 1983 3, 609 642 [4, 5, 9] （）, 第期–。D. Futer、J. Purcell、S. Schleimer, *Effective bilipschitz bounds on drilling and filling*, 《几何与拓扑》 26 2022 3, 1077 1188 [7, 37] （）, 第期–。X. H. Han、Z. Rao、J. Wan, *Counting surface subgroups in cusped hyperbolic 3-manifolds*, 预印本, arXiv: 2602 20098 [1] 。J. Hass、A. Thompson、A. Tsvietkova, *The number of incompressible surfaces in an alternating link complement* 6 2017 1611 1622 , 《国际数学研究通知》 （）, –。J. Hass、A. Thompson、A. Tsvietkova, *Alternating links have at most polynomially many Seifert surfaces of fixed genus* 70 2021 2, 525 534 , 《印第安纳大学数学杂志》 （）, 第期–。K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, 《数学讲义》 761, 1979 [9] 施普林格, 柏林, 。J. Jost, , Universitext, 施普林格, *Riemannian geometry and geometric analysis* 2017 [10] 。J. Kahn、V. Markovic, , 《几何与拓扑》 16 2012 601 624 [1] （）, –。D. Kazhdan、G. Margulis, Z. Skalsky 译, *A proof of Selberg's hypothesis*, 《苏联数学文集》 4 1968 147 152 [3, 6] （）, –。T. Kobayashi、Y. Rieck, *A linear bound on the tetrahedral number of manifolds of bounded volume (after Jörgensen and Thurston)*. 27 42 《三维中的拓扑与几何》, –。《当代数学》 560 2011 [30] , 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, G. Leibon、D. Letscher, *Delaunay triangulations and Voronoi diagrams for Riemannian manifolds*, 《第十六届计算几何年度研讨会论文集》（香港, 2000 341 349, 2000 [32] ）, – ACM, 纽约, 。J. D. Masters, , 《代数几何与拓扑》 5 2005 835 864 [1] （）, –。S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, 《算法与计算数学》, 9, 2003, +478 [3] 施普林格出版社, 柏林, xii 页。W. H. Meeks、J. Perez、A. Ros, *Stable constant mean curvature surfaces*, 《几何分析手册》第1卷, 301–380, 《高级数学讲义》（ALM）第7卷, 国际出版社, 马萨诸塞州萨默维尔, 2008 [8] 。R. Meyerhoff, *A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds*, 《加拿大数学杂志》39（ 1987 5, 1038 1056 [7] ）, 第期–。P. Petersen, *Riemannian geometry. Third edition*, 《数学研究生教材》第171卷。施普林格, 查姆, 2016, 499 [10] 页。J. Purcell、A. Tsvietkova, *Standard position for surfaces in link complements in arbitrary 3-manifolds* 2205 , 预印本, 06368 [2] https://arxiv.org/abs/ 。J. Purcell、A. Tsvietkova, *Polynomial bounds for surfaces in cusped 3-manifolds*, 预印本, https://arxiv.org/abs/ 2311 08567 [2] 。D. Ruberman, *Mutation and volumes of knots in S^3*, 《数学发明》90（1987）, 第1期, 189–215。[4, 5, 9] R. Schoen, *Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds*, 《极小子流形研讨会》, 第103卷, 《数学年刊研究丛书》, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1983, 111 126 [6, 11] –。W. P. Thurston, *The geometry and Topology of Three-Manifolds*, 电子版1.1（3月 2002 3 [3, 5, 29, 30] ）, http://www.msri.org/publications/books/gt m/ L. W. Tu, , , *Differential Geometry. Connections Curvature and Characteristic Classes*, 施普林格（ 2017 [8] ）。F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, 《数学年刊》（第2辑）87（1968）56–88。 [9]

Marc Lackenby 牛津
大学数学研究所

安德鲁·怀尔斯大楼 拉德克利夫天文台区
伍德斯托克路，牛津，OX2 6GG，英国
marc.lackenby@maths.ox.ac.uk

阿纳斯塔西娅·茨维特科娃 数学与计算机科学系 罗格斯大学纽瓦克分校 沃伦街101号，纽瓦克，NJ 07102，美国 a.tsviet@rutgers.edu