arXiv:2603.03720v1 [math.PR] 4 Mar 2026

对称稳定过程碰撞局部时的小球概率

Minhao Hong 和 Qian Yu

2026年3月5日

摘要

本文得到了两个独立对称 α–稳定过程碰撞局部时的小球概率，其参数为 α_1, $\alpha_2 \in (0,2]$满足$\max\{\alpha_1,\alpha_2\}>1$。证明基于通过围道积分得到矩母函数的渐近行为。

关键词： α–稳定过程；碰撞局部时；小球概率；围道积分。

学科分类：*2020*：主要分类 *60F05*，*60J55*；次要分类 *60G52*

1 引言

设 $X^{\alpha_1}=\{X_t^{\alpha_1},t\geq 0\}$ 和 $X^{\alpha_2}=\{X_s^{\alpha_2},s\geq 0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上两个相互独立的对称 α–稳定过程，其参数分别为 α_1，$\alpha_2\in(0,2]$,。本文中，我们固定一个完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t)$，使得所讨论的过程在该空间上有良好定义。若一个 $\{\mathcal{F}_t\}$-适应过程 $X=\{X_t,t\geq 0\}$ 的所有样本路径都属于 $D[0,\infty]$，则称其为具有 $\alpha\in(0,2]$ 的对称 α-稳定过程，条件是对任意 $t>s\geq 0$,

$$\mathbb{E}[e^{\iota u(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s]=e^{-(t-s)|u|^\alpha},u\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中 $X_0=0$。关于对称 α–稳定过程的更多内容，建议参阅 [1] 的第 2 节及其中的参考文献。

给定 $T>0$ 碰撞局部时 $L(T)$，它由 X^{α_1} 和 X^{α_2} 形式化地定义为

$$\widetilde{L}(T)=\int_0^T\delta(X_t^{\alpha_1}-\widetilde{X}_t^{\alpha_2})\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

其中 δ 是 $\mathbb{R}$中的狄拉克函数。

由于 δ 可以用热核近似

$$p_\varepsilon(x)=\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}},x\in\mathbb{R},$$

碰撞局部时 $L(T)$ 可近似为

$$\widetilde{L}_\varepsilon(T)=\int_0^T p_\varepsilon(X_t^{\alpha_1}-\widetilde{X}_t^{\alpha_2})\mathrm{d}t$$

~当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时。如果 $L_\varepsilon(T)$ 在 $L^p(p \geq 1)$ 中收敛到一个随机变量 $\varepsilon \downarrow 0$，则称~碰撞局部时 $L(T)$ 在 L^p 中存在。碰撞局部时通常用于粒子系统（例如参见 [2] ）和种群动力学（例如参见 [3] ）的建模。关于碰撞局部时的更多性质，建议参阅 [4], [5], [6] 及其中的参考文献。

~**注 1.1.** X^{α_1} 与 X^{α_2} 的碰撞局部时在 L^2 中存在，当$\max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 1$时。利用傅里叶变换，存在

$$\widetilde{L}_\varepsilon(T) = \int_0^T p_\varepsilon(X_t^{\alpha_1} - \widetilde{X}_t^{\alpha_2})\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|u|^2} e^{\iota u\cdot(X_t^{\alpha_1} - \widetilde{X}_t^{\alpha_2})}\mathrm{d}u\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

于是，对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[\widetilde{L}_\varepsilon(T) - \widetilde{L}_\eta(T)]^2 = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_{\{0<t_1<t_2<T\}}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(e^{-\frac{\varepsilon}{2}(|v_1-v_2|^2+|v_2|^2)} - e^{-\frac{\eta}{2}(|v_1-v_2|^2+|v_2|^2)}\Big)\\ \times \exp\Big(-(|v_1|^{\alpha_1}+|v_1|^{\alpha_2})t_1 - (|v_2|^{\alpha_1}+|v_2|^{\alpha_2})(t_2-t_1)\Big)\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\end{aligned}$$

由(1.1)和(1.3)可得。由于 $\left|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(|v_1-v_2|^2+|v_2|^2)} - e^{-\frac{\eta}{2}(|v_1-v_2|^2+|v_2|^2)}\right| \leq 1$且

$$\begin{aligned}&\int_{\{0<t_1<t_2<T\}}\int_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-(|v_1|^{\alpha_1}+|v_1|^{\alpha_2})t_1 - (|v_2|^{\alpha_1}+|v_2|^{\alpha_2})(t_2-t_1)\Big)\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\ &\leq \int_{\{0<t_1<t_2<T\}} t_1^{-\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}(t_2-t_1)^{-\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v\Big)^2 < +\infty,\end{aligned}$$

~~~由控制收敛定理可知，存在$\lim_{\varepsilon,\eta\downarrow 0}\mathbb{E}\,[L_\varepsilon(T) - L_\eta(T)]^2 = 0$，这意味着当 $\varepsilon \downarrow 0$时，$\widetilde{L}_\varepsilon(T) \xrightarrow{L^2} \widetilde{L}(T)$。此外，$(T)$ 是一个非负随机变量，因为此时~这一事实 $L_\varepsilon(T) \geq 0$ 。

~本文将研究 $L(T)$的小球概率，其中 L是两个相互独立的对称 α–稳定过程的碰撞局部时。小球概率关注非负随机变量 Z的 $\mathbb{P}(Z \leq \varepsilon)$在 $\varepsilon \downarrow 0$时的渐近衰减，是概率论和泛函分析中的一个基本问题。 [7] 综述了这一方向的总体进展。除了在小偏差理论和嵌入定理中的内在数学意义外，这类估计还对统计物理（如聚合物模型和临界现象）、量子场论（通过路径积分正则化），乃至现代机器学习（通过高维空间中的测度集中）具有深远影响。当 Z 表示局部时或其变体时，小球概率刻画了诸如随机粒子之间“几乎没有相互作用”等罕见事件发生的可能性，这与呈现弱耦合或稀疏碰撞的系统直接相关。

在经典的高斯情形中，过程为标准布朗运动（α =2），一些研究者考察了局部时及其变体的小球行为。 [8]表明，布朗运动的交叉局部时的小球概率满足

$$c\varepsilon^{\frac{2}{3}} \leq P\Big(\int_0^1\int_0^1 \delta(B_r - \tilde{B}_s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s \leq \varepsilon\Big) \leq C\varepsilon^{\frac{2}{3}} \tag{1.4}$$
~~~

˜其中， c 和 C为某些正实数常数， B 和 B 是相互独立的 1–维布朗运动。布朗运动的自交局部时的小球概率满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^2 \log P\Big(\int_0^1 \int_0^1 \delta(B_r - B_s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s \le \varepsilon\Big) = -c \tag{1.5}$$

对于某个正常数 c，该结论来自 [9]中的命题1以及德布鲁因陶伯里定理（ [10]的定理4.12.9）。

然而，许多现实世界中的扩散现象——从湍流和金融资产收益，到无序介质中的反常输运——都表现出重尾增量和长程依赖，这些特征难以用高斯建模加以解释。对称 α 稳定过程（$0 < \alpha < 2$）提供了一种自然且灵活的替代方案，能够捕捉此类系统中固有的跳跃不连续性和自相似性。尽管这些过程的样本路径不规则，但它们为研究复杂环境中的间歇性相互作用或罕见相遇提供了更为现实的框架。

本文将小球分析从高斯范式推广到非高斯对称稳定过程。具体而言，在基本假设 $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 1$ 下，我们研究 ˜of $\mathbb{P}(L(T) \le \varepsilon)$ 的渐近行为，其中 $\varepsilon \downarrow 0$，该假设确保 $L(T)$ 在 L^2 中定义良好（见备注 1.1 ）。

本工作的核心贡献之一，是基于复围道积分构建了一种新颖的解析框架。在非高斯情形下，由于缺乏显式的转移密度和路径连续性，依赖热核估计或鞅方法的传统方法面临重大障碍。为克服这一困难，我们在复平面中引入一条精心设计的围道 $\gamma(R, 3\pi/4)$, 并利用倒数伽马函数的积分表示（引理 2.1），将矩˜生成函数 $\mathbb{E}[e^{-\lambda L(T)}]$ 转化为单变量复积分。这一变换不仅简化了 $\lambda \to \infty$ 时的渐近分析，还使得能够显式计算控制小球概率的极限常数。

这里的方法创新有两方面：首先，它展示了如何将有关稳定过程奇异泛函的概率问题重新表述为复分析问题；其次，它为更广泛的应用开辟了道路。同样的围道积分技术有望用于研究多个稳定粒子的多点交叉局部时、分数布朗运动的碰撞泛函，甚至由 L´ évy 噪声驱动的随机偏微分方程解的支撑测度的小球估计。因此，我们的方法不仅解决了一个具体的开放问题，也为非高斯情形下的精细尺度概率分析提供了新的解析工具。

为了将拉普拉斯变换的渐近性与小球概率联系起来，我们采用如下陶伯型结果：

命题1.1. 设 Z 为非负随机变量。若$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mathbb{E}[e^{-\lambda Z}] = C \in(0,\infty)$，则

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}\mathbb{P}(Z \le \varepsilon) = C.$$

为使论证清晰、逻辑连贯，我们将主定理的证明分为三个˜不同阶段。在步骤 I 中，我们通过傅里叶分析和坐标变换，推导矩 $\mathbb{E}[L(T)^m]$ 的显式表达式。接着，步骤 II 将该矩序列提升至拉普拉斯域，并且关键的是，运用引理 2.3 将所得幂级数转化为包含辅助函数 $\Phi(z)$的围道积分。最后，步骤三提取

$\tilde{}\lambda$ 的大-λ 渐近行为：通过分析 $\Phi(z)$沿围道的解析性质，从而借助以下命题 1.2 衔接至小球估计。该命题是卡拉马塔陶伯定理（[9]的定理 1.7.1）的一个特例，而命题（1.2）的证明将在本文最后一节给出。

命题 1.2. 假设 X 是一个非负随机变量。如果存在常数$\alpha > 0$ 和 $A \geq 0$，使得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{\alpha} E e^{-\lambda X} = A, \tag{1.6}$$

then

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} P(X \leq \varepsilon) = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

每个技术性引理（例如，引理 4.1–4.3）都是为满足这一流程中的特定分析要求而精心设计的，例如为积分路径变形提供依据，或控制被积函数衰减。

我们的主要结果如下。

定理 1.1. 假设 $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 2]$ 满足 $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 1$。那么

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} P(\widetilde{L}(T) \leq \varepsilon) \\
&= \begin{cases}
\dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}\left\{ e^{\iota \frac{r}{\sqrt{2}}} \Phi(r e^{-\iota \frac{3\pi}{4}}) \right\}}{|\Phi(r e^{\iota \frac{3\pi}{4}})|^2} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} r}}{r} \mathrm{d}r + \frac{3\pi}{2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|v|^{\alpha_1} + |v|^{\alpha_2}} \mathrm{d}v}, & \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < 1, \\
\dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}\left\{ e^{\iota \frac{r}{\sqrt{2}}} \Phi(r e^{-\iota \frac{3\pi}{4}}) \right\}}{|\Phi(r e^{\iota \frac{3\pi}{4}})|^2} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} r}}{r} \mathrm{d}r, & \min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq 1,
\end{cases}
\end{aligned}$$

其中 $\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z + T|v|^{\alpha_1} + T|v|^{\alpha_2}} \mathrm{d}v$，对于 $z \in \mathbb{C} \backslash \{z \leq 0\}$。

注 1.2. 设 $X^{\alpha} = \{X_t^{\alpha}, t \geq 0\}$ 是一个对称 α–稳定过程，且 $\alpha \in (1, 2]$。采用相同的方法，局部时 $l(T) = \int_0^T \delta(X_t^{\alpha}) dt$ 的小球概率为

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} P(l(T) \leq \varepsilon) &= \frac{2}{T} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}\left\{ e^{\iota \frac{r}{\sqrt{2}}} \phi(r e^{-\iota \frac{3\pi}{4}}) \right\}}{|\phi(r e^{\iota \frac{3\pi}{4}})|^2} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} r}}{r} \mathrm{d}r \\
&= \frac{\alpha T^{\frac{1}{\alpha} - 1}}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{\alpha} \cdot \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha}),
\end{aligned}$$

其中 $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z + T|v|^{\alpha}} \mathrm{d}v$ 对于 $z \in \mathbb{C} \backslash \{z \leq 0\}$，且 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。

由此可直接得到以下可积性判据。这是小球概率的直接应用。类似于 [8], ，有以下推论：

推论 1.1. 负矩可积性

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{L}(T)\right]^{-p} < +\infty$$

当且仅当 $p < 1$ 时存在。

当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ 时，存在 $\widetilde{L}(T) = \int_0^T \delta(B_t - \widetilde{B}_t)\mathrm{d}t$，并且可积性

$$E\Big(\int_0^T \delta(B_t - \widetilde{B}_t)\mathrm{d}t\Big)^{-p} < +\infty$$

在研究一维抛物Anderson方程解的概率分布正则性时发挥着重要作用

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + u(t,x)\cdot \dot{W}(t,x), \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R},$$

其中，$\dot{W}$ 是协方差为.....的时空高斯白噪声

$$\mathbb{E}\left(\dot{W}(t,x)\dot{W}(s,y)\right) = \delta(t-s)\delta(x-y).$$

关于这一主题的更多内容，建议读者参阅 [11] 及其中的参考文献。

本文其余部分安排如下。第2节汇总与围道积分和矩表示有关的预备引理。第3节分三个逻辑相连的步骤证明定理 1.1。第4节建立围道分析所需的技术性估计，并特别关注关键辅助函数 $\Phi(z)$的性质。最后，第5节给出命题1.1的证明，其中我们利用多项式逼近来论证拉普拉斯渐近与小球概率之间的Tauberian联系。

2 预备知识

本节首先介绍一个围道，它将在主定理的证明中发挥关键作用。

定义 2.1。对于任意 $R > 0$, $\gamma(R, \frac{3\pi}{4})$ 表示一条按辐角 $\arg\zeta$ 非递减方向定向的围道，由以下三部分组成：射线 $\arg\zeta = -\frac{3\pi}{4}, |\zeta| \geq R$、弧 $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg\zeta \leq \frac{3\pi}{4}, |\zeta| = R$以及射线 $\arg\zeta \equiv \frac{3\pi}{4}, |\zeta| \geq R$。

下面给出一个利用上述围道表示倒数伽马函数积分的引理。

引理 2.1。对于定义 *2.1* 中定义的任意 $R > 0$, $\gamma(R, \frac{3\pi}{4})$ 以及 $s \in \mathbb{C}$，有等式

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} e^z z^{-s}\mathrm{d}z, \tag{2.1}$$

其中 $z^{-s} = e^{-s(\ln|z| + \iota\arg z)}$ 是当 $z \neq 0$ 的辐角为 $\arg z \in (-\pi, \pi]$时复幂函数的主分支。

引理 *2.1* 的证明。对于 $0 \leq a, b, c \leq +\infty$ 和 $\phi, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，记路径

$$\gamma(a,b,\phi) : \gamma(r) = re^{\iota\phi}, r \text{ moves from } a \text{ to } b;$$

$$\eta(c,\alpha,\beta) : \eta(t) = ce^{\iota t}, t \text{ moves from } \alpha \text{ to } \beta.$$

对于任意给定的 $R>0$，路径 $\gamma(R,\frac{3\pi}{4})$ 可分解为

$$\gamma(R,\frac{3\pi}{4})=\gamma(+\infty,R,-\frac{3\pi}{4})+\eta(R,-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4})+\gamma(R,+\infty,\frac{3\pi}{4})$$

记 $J(R)=\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z$。利用路径 $\gamma(R,\frac{3\pi}{4})$ 的划分，

$$\begin{aligned}J(R)=\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z&=\int_{\gamma(+\infty,R,-\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z+\int_{\eta(R,-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z+\int_{\gamma(R,+\infty,\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z\\&:=J_1(R)+J_3(R)+J_2(R).\end{aligned}$$

由于 $e^z z^{-s}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{z\le 0\}$ 上是解析函数，利用柯西定理，存在

$$\int_{\gamma(R_1,\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z=\int_{\gamma(R_2,\frac{3\pi}{4})}e^z z^{-s}\mathrm{d}z$$

对于任意 $R_1>R_2>0$，因为

$$\gamma(R_1,\frac{3\pi}{4})-\gamma(R_2,\frac{3\pi}{4}):=\eta(R_1,-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4})+\gamma(R_1,R_2,\frac{3\pi}{4})+\eta(R_1,\frac{3\pi}{4},-\frac{3\pi}{4})+\gamma(R_2,R_1,-\frac{3\pi}{4})$$

是 $\mathbb{C}\backslash\{z\le 0\}$ 中的一条闭合路径。因此，对于 $R>0$，$J(R)$ 是一个常值函数，只需考虑当 $R\downarrow 0$ 时 $J(R)$ 的极限。

对于 $J_1(R)$，考虑 $z_1^{-s}=e^{-s(\ln|z|+\iota\,\text{辐角}_1\,z)}$，其中 $z\neq 0$ 的辐角为 $\arg_1 z\in(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。由于 $e^z z_1^{-s}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{\iota t$ 上是解析函数：$t\ge 0\}$，且在 $\gamma(+\infty,R,-\frac{3\pi}{4})$ 中与 $e^z z^{-s}$ 重合，根据柯西定理，对于实部为 $\mathrm{Re}\,s<1$ 的 $s\in\mathbb{C}$，

$$\begin{aligned}&\lim_{R\downarrow 0}J_1(R)\\&=\lim_{R\downarrow 0}\lim_{R^*\to+\infty}\int_{\gamma(R^*,R,-\frac{3\pi}{4})}e^z z_1^{-s}\mathrm{d}z\\&=\lim_{R\downarrow 0}\lim_{R^*\to+\infty}\Big(\int_{\gamma(R^*,R,-\pi)}e^z z_1^{-s}\mathrm{d}z+\int_{\eta(R^*,-\frac{3\pi}{4},-\pi)}e^z z_1^{-s}\mathrm{d}z+\int_{\eta(R,-\pi,-\frac{3\pi}{4})}e^z z_1^{-s}\mathrm{d}z\Big)\\&=\int_{\gamma(+\infty,0,-\pi)}e^z z_1^{-s}\mathrm{d}z-\iota\lim_{R^*\to+\infty}\int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}}e^{R^*e^{\iota t}}R^{1-s}e^{\iota(1-s)t}\mathrm{d}t+\iota\lim_{R\downarrow 0}\int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}}e^{Re^{\iota t}}R^{1-s}e^{\iota(1-s)t}\mathrm{d}t\\&=e^{\iota s\pi}\int_0^{+\infty}e^{-r}r^{-s}\mathrm{d}r=e^{\iota s\pi}\Gamma(1-s)\end{aligned}$$

其中，第四个等号是由以下事实得到的：

$$\left|e^{re^{\iota t}}r^{1-s}e^{\iota(1-s)r}\right|\le r^{1-\mathrm{Re}\,s}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}r}$$

对于所有 $t\in[-\pi,-\frac{3\pi}{4}]$ 和 $r\in(0,+\infty)$。类似地，考虑 $z_2^{-s}=e^{-s(\ln|z|+\iota\,\text{辐角}_2\,z)}$ 对于 $z\neq 0$

其辐角为 $\arg_2 z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$，那么对于 $s \in \mathbb{C}$ 其实部为 $\mathrm{Re}\ s < 1$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\downarrow 0} J_2(R)\\
&= \lim_{R\downarrow 0} \lim_{R^*\to+\infty} \int_{\gamma(R,R^*,\frac{3\pi}{4})} e^z z_2^{-s} \mathrm{d}z\\
&= \lim_{R\downarrow 0} \lim_{R^*\to+\infty} \Big(\int_{\gamma(R,R^*,\pi)} e^z z_2^{-s} \mathrm{d}z + \int_{\eta(R^*,\frac{3\pi}{4},\pi)} e^z z_2^{-s} \mathrm{d}z + \int_{\eta(R,\pi,\frac{3\pi}{4})} e^z z_2^{-s} \mathrm{d}z \Big)\\
&= \int_{\gamma(0,+\infty,\pi)} e^z z_2^{-s} \mathrm{d}z + \iota \lim_{R^*\to+\infty} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{R^* e^{\iota t}} (R^*)^{1-s} e^{\iota(1-s)t} \mathrm{d}t - \iota \lim_{R\downarrow 0} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{Re^{\iota t}} R^{1-s} e^{\iota(1-s)t} \mathrm{d}t\\
&= -e^{-\iota s\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{-s} \mathrm{d}r = -e^{-\iota s\pi} \Gamma(1-s).
\end{aligned}$$

此外，$\lim_{R\downarrow 0} J_3(R) = 0$，因为

$$|J_3(R)| = \Big| \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{Re^{\iota t}} R^{1-s} e^{\iota(1-s)t} \mathrm{d}t \Big| \le \frac{3\pi}{2} R^{1-\mathrm{Re}\, s} e^R.$$

接下来，利用欧拉反射公式 $\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\text{正弦}\,\pi s}$ 以及这一事实

$$\lim_{R\downarrow 0} J(R) = \lim_{R\downarrow 0} J_1(R) + \lim_{R\downarrow 0} J_2(R) + \lim_{R\downarrow 0} J_3(R) = e^{\iota s\pi}\Gamma(1-s) - e^{-\iota s\pi}\Gamma(1-s),$$

对所有实部为 $\mathrm{Re}\, s < 1$ 的 $s \in \mathbb{C}$，

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} e^z z^{-s} \mathrm{d}z.$$

由于上述等式两边都是整函数，且在 $\mathrm{Re}\, s < 1$ 上相等，根据解析函数唯一性定理，它们在复平面上处处相等，证明至此完成。

□

接下来将证明一个引理，该引理保证围道积分变换和取极限过程成立。

引理 2.2。设 $R > 0$ 和 $F_k(z)$：$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \cdots$ 为复函数，且存在常数 $C > 0$ 和 $\beta > 0$ 使得

$$|F_k(z)| \le C \max\{|z|^\beta, 1\}$$

对任意 $k \ge 0$ 和 $z \in \gamma(R, \frac{3\pi}{4})$ 均成立。若 $F_k(z) \to F_0(z)$ 当 $k \to +\infty$ 时，则

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} F_k(z) e^z \mathrm{d}z = \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} F_0(z) e^z \mathrm{d}z.$$

证明。在引理 2.1 中，用 $\gamma(a, b, \phi)$ 和 $\eta(c, \alpha, \beta)$ 分别表示 $0 \le a, b, c \le +\infty$ 和 $\phi, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，对于任意 $k \ge 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} F_k(z) e^z \mathrm{d}z\\
&= \int_{\gamma(+\infty,R,-\frac{3\pi}{4})} F_k(z)\cdot e^z \mathrm{d}z + \int_{\eta(R,-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4})} F_k(z)\cdot e^z \mathrm{d}z + \int_{\gamma(R,+\infty,\frac{3\pi}{4})} F_k(z)\cdot e^z \mathrm{d}z\\
&= \int_{+\infty}^{R} \frac{F_k(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})}{r} \cdot e^{re^{-\iota\frac{3\pi}{4}}} \mathrm{d}r + \iota \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} F_k(Re^{\iota t}) \cdot e^{Re^{\iota t}} \mathrm{d}t + \int_R^{+\infty} \frac{F_k(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})}{r} \cdot e^{re^{\iota\frac{3\pi}{4}}} \mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

因为

$$\Big|\frac{F_k(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})}{r}\cdot e^{re^{-\iota\frac{3\pi}{4}}}\Big|\leq\frac{C\max\{r^\beta,1\}}{R}e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}},\Big|\frac{F_k(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})}{r}\cdot e^{re^{\iota\frac{3\pi}{4}}}\Big|\leq\frac{C\max\{r^\beta,1\}}{R}e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}$$

对任意 $r\geq R$ 与 $\Big|F_k(Re^{\iota t})\cdot e^{Re^{\iota t}}\Big|\leq C\max\{R^\beta,1\}\cdot e^R$，对任意 $t\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，所需结果由控制收敛定理得出。 □

最后将给出关于 $\gamma(R,\frac{3\pi}{4})$ 的一条引理。

引理 2.3. 假设 $n\geq1$、$R>0$、$T>0$ 以及

$$D_T^n=\{(u_1,u_2,\cdots,u_n):u_1+u_2+\cdots+u_n<1,u_j>0,j=1,2,\cdots,n\}.$$

Then

$$\int_{D_T^n}\exp\Big(-\sum_{j=1}^n a_ju_j\Big)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n=\frac{T^n}{2\pi\iota}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\prod_{j=1}^n\frac{1}{z+Ta_j}\cdot e^zz^{-1}\mathrm{d}z$$

对任意 $a_j\geq0$、$j=1$、2、$\cdots$、n。

引理 *2.3* 的证明。回顾级数展开 $e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$。存在

$$\begin{aligned}&\int_{D_T^n}\exp\Big(-\sum_{j=1}^n a_ju_j\Big)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\&=\sum_{m_1=0}^\infty\cdots\sum_{m_n=0}^\infty\prod_{j=1}^n\frac{(-a_j)^{m_j}}{m_j!}\int_{D_T^n}\prod_{j=1}^n u_j^{m_j}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\&=T^n\sum_{m_1=0}^\infty\cdots\sum_{m_n=0}^\infty\frac{\prod_{j=1}^n(-Ta_j)^{m_j}}{\Gamma(n+\sum_{j=1}^n m_j+1)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中富比尼定理以及如下事实

$$\int_{D_T^n}\sum_{m_1=0}^\infty\cdots\sum_{m_n=0}^\infty\prod_{j=1}^n\frac{(a_ju_j)^{m_j}}{m_j!}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n=\int_{D_T^n}\exp\Big(\sum_{j=1}^n a_ju_j\Big)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n<+\infty$$

用于得到第一个等式，第二个等式则来自引理 4.4。为计算式 (2.2) 中伽马函数的倒数之和，记为 $R^*=1+T\sum_{j=1}^n|a_j|$。

于是，由引理 2.1，

$$
\begin{aligned}
&T^n \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}(-Ta_j)^{m_j}}{\Gamma(n+\sum_{j=1}^{n} m_j+1)} \\
&= T^n \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{-Ta_j}{z}\Big)^{m_j} e^z z^{-n-1} \mathrm{d}z \\
&= T^n \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R^*,\frac{3\pi}{4})} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{-Ta_j}{z}\Big)^{m_j} e^z z^{-n-1} \mathrm{d}z \\
&= \frac{T^n}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R^*,\frac{3\pi}{4})} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{z+Ta_j} \cdot e^z z^{-1} \mathrm{d}z \\
&= \frac{T^n}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{z+Ta_j} \cdot e^z z^{-1} \mathrm{d}z, \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

其中，第二个和最后一个等式由柯西定理得出，因为函数$\prod_{j=1}^{n} \big(\frac{-Ta_j}{z}\big)^{m_j} e^z z^{-n-1}$和 $\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{z+Ta_j} \cdot e^z z^{-1}$在 $\gamma(R, \frac{3\pi}{4})$与$\gamma(R^*, \frac{3\pi}{4})$之间的区域内是解析函数；第三个等式则由引理 2.2 以及以下事实得出：

$$
\sum_{m_1=0}^{k} \cdots \sum_{m_n=0}^{k} \prod_{j=1}^{n} \Big|\frac{-Ta_j}{z}\Big|^{m_j} \le \frac{\sum_{j=1}^{n} T|a_j|}{R^*} \le (R^*)^n < +\infty
$$

对任意 $k \ge 0$，在 $\gamma(R^*, \frac{3\pi}{4})$上成立。 □

3 主定理的证明

该定理的证明将分为三个步骤。

步骤 I：矩计算 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}\,[L_\varepsilon(T)]^m$。

我们的首要目标是得到正则化碰撞局部时 $L_\varepsilon(T)$的 m阶矩的显式公式。这一步依赖于傅里叶反演以及一个变量替换，该替换将两个稳定过程解耦。

$\mathbb{E}\,[$的极限　　首先计算当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时的$L_\varepsilon(T)]^m$。记

$$
[0,T]^m_< = \{(t_1, t_2, \cdots, t_m) : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < T\}
$$

并且 D_T^m与引理 2.3 中的情况相同。由 (1.1) 和 (1.3)，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,[\widetilde{L}_\varepsilon(T)]^m\\
&=\frac{1}{(2\pi)^m}\mathbb{E}\,\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|u|^2}e^{\iota u\cdot(X_t^{\alpha_1}-\widetilde{X}_t^{\alpha_2})}\mathrm{d}u\mathrm{d}t\Big)^m\\
&=\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{[0,T]^m_<}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^m|u_j|^2}\mathbb{E}\,e^{\iota\sum_{j=1}^m u_j\cdot X_{t_j}^{\alpha_1}}\,\mathbb{E}\,e^{-\iota\sum_{j=1}^m u_j\cdot\widetilde{X}_{t_j}^{\alpha_2}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t\\
&=\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{[0,T]^m_<}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^m|u_j|^2}e^{-\sum_{j=1}^m(|\sum_{i=j}^m u_j|^{\alpha_1}+|\sum_{i=j}^m u_j|^{\alpha_2})(t_j-t_{j-1})}\mathrm{d}u\mathrm{d}t\\
&=\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{D_T^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^m|v_j-v_{j+1}|^2}e^{-\sum_{j=1}^m(|v_j|^{\alpha_1}+|v_j|^{\alpha_2})s_j}\mathrm{d}v\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{3.1}
$$

其中，最后一个等式中使用了坐标变换 $s_j=t_j-t_{j-1}$、$v_j=\sum_{i=j}^m u_i$、$j=1,2,\cdots,m$ 和 $v_{m+1}=0$。利用 (4.10),

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_T^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\sum_{j=1}^m(|v_j|^{\alpha_1}+|v_j|^{\alpha_2})s_j}\mathrm{d}v\mathrm{d}s\\
&=\int_{D_T^m}\prod_{j=1}^m s_j^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}s\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v\Big)^m\\
&=\frac{T^{m-\frac{m}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}}{\Gamma(m(1-\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}})+1)}\Big(\Gamma\Big(1-\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}\Big)\int_{\mathbb{R}} e^{-|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v\Big)^m<+\infty.
\end{aligned}\tag{3.2}
$$

因此，根据控制收敛定理以及

$$
\big|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^m|v_j-v_{j+1}|^2}\big|\le 1,
$$

存在

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\,[\widetilde{L}_\varepsilon(T)]^m&=\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{D_T^m}\int_{\mathbb{R}^m}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^m|v_j-v_{j+1}|^2}e^{-\sum_{j=1}^m(|v_j|^{\alpha_1}+|v_j|^{\alpha_2})s_j}\mathrm{d}v\mathrm{d}s\\
&=\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{D_T^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\sum_{j=1}^m(|v_j|^{\alpha_1}+|v_j|^{\alpha_2})s_j}\mathrm{d}v\mathrm{d}s\\
&=\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{D_T^m} e^{-\sum_{j=1}^m(|v_j|^{\alpha_1}+|v_j|^{\alpha_2})s_j}\mathrm{d}s\mathrm{d}v.
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

步骤 II：通过围道积分求拉普拉斯变换。

有了矩公式，我们来考虑拉普拉斯变换 $\mathbb{E}[e^{-\lambda L(T)}]=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-\lambda)^m}{m!}\mathbb{E}[\widetilde{L}(T)^m]$。关键思路是应用引理 2.3，将这个无穷级数转化为一个涉及辅助函数 $\Phi(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v$ 的围道积分。

由以下事实可知，对所有 $x,y\ge 0$,

$$
|\mathbb{E}\,e^{-\lambda\widetilde{L}(T)}-\mathbb{E}\,e^{-\lambda\widetilde{L}_\varepsilon(T)}|\le|\lambda|\mathbb{E}\,|\widetilde{L}_\varepsilon(T)-\widetilde{L}(T)|\le|\lambda|\Big(\mathbb{E}\,|\widetilde{L}_\varepsilon(T)-\widetilde{L}(T)|^2\Big)^{\frac{1}{2}},
$$

这意味着

$$
\mathbb{E}\,e^{-\lambda\widetilde{L}(T)}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\,e^{-\lambda\widetilde{L}_\varepsilon(T)}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\mathbb{E}\,[\widetilde{L}_\varepsilon(T)]^m.
$$

由（3.2）可得，

$$\Big|\frac{(-\lambda)^m}{m!}\mathbb{E}\,[\widetilde{L}_\varepsilon(T)]^m\Big| \le \frac{c^m}{\Gamma(m(1-\frac{1}{\alpha_1})+1)},$$

其中 $c = \frac{T^{1-\frac{1}{\alpha_1}}|\lambda|\Gamma(1-\frac{1}{\alpha_1})}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-|v|^{\alpha_1}}\mathrm{d}v$。利用斯特林公式 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}(\frac{x}{e})^x}=1$，容易得到 $\lim_{m\to+\infty}\sqrt[m]{\frac{c^m}{\Gamma(m((1-\frac{1}{\alpha_1})+1)}}=0$，进而 $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{c^m}{\Gamma(m((1-\frac{1}{\alpha_1})+1)}<+\infty$。因此，利用控制收敛定理、(3.3) 和 (4.10)，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,e^{-\lambda\widetilde{L}(T)} &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}\,[\widetilde{L}_\varepsilon(T)]^m \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\cdot\frac{m!}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{D_T^m} e^{-\sum_{j=1}^m(|v_j|^{\alpha_1}+|v_j|^{\alpha_2})s_j}\mathrm{d}s\mathrm{d}v \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\iota)(-\lambda T)^m}{(2\pi)^{m+1}}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\prod_{j=1}^m\frac{1}{z+T|v_j|^{\alpha_1}+T|v_j|^{\alpha_2}}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z\mathrm{d}v \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\iota)(-\lambda T)^m}{(2\pi)^{m+1}}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\int_{\mathbb{R}^m}\prod_{j=1}^m\frac{1}{z+T|v_j|^{\alpha_1}+T|v_j|^{\alpha_2}}dv\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\iota)(-\lambda T)^m}{(2\pi)^{m+1}}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\big(\Phi(z)\big)^m\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

其中 $R>0$ 是任意正数，$\Phi(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v$ 在引理 4.2 中定义，第四个等式由引理 4.1 和富比尼定理得到。

注意，根据引理 4.2，存在

$$|\Phi(z)|\le 4\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+T|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v\cdot|z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1}$$

在 $\gamma(R,\frac{3\pi}{4})$ 上。记

$$R^{**}=\Big(\frac{4\lambda T}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+T|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v\Big)^{\frac{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}-1}},$$

其中 $\Big|\frac{-\lambda T\Phi(z)}{2\pi}\Big|\le\frac{1}{2}<1$）当 $|z|\ge R^{**}$ 且 $\arg z\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ 时。于是存在

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-\iota)(-\lambda T)^m}{(2\pi)^{m+1}}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\big(\Phi(z)\big)^m\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\iota}\int_{\gamma(R^{**},\frac{3\pi}{4})}\Big(\frac{-\lambda T\Phi(z)}{2\pi}\Big)^m\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\gamma(R^{**},\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{1+\lambda T(2\pi)^{-1}\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{1+\lambda T(2\pi)^{-1}\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

其中，第一个等式来自 $\big(\Phi_0(z)\big)^m$ 在 $\gamma(R^{**}, \frac{3\pi}{4})$ 之间是解析函数这一事实，第二个等式来自引理 2.2 和 $\gamma(R, \frac{3\pi}{4})$，最后一个等式则来自 $\frac{1}{1+\lambda T\, 2\pi^{-1}\Phi_0(z)}$ 在此区域内也是解析函数这一事实，而这可由引理 4.2 中的 (4.4) 和 (4.5) 得出。结合 (3.4) 和 (3.5)，于是存在

$$\mathbb{E}\, e^{-\lambda \widetilde{L}(T)} = \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R, \frac{3\pi}{4})} \frac{1}{1+\lambda T(2\pi)^{-1}\Phi(z)} \cdot e^z z^{-1} \mathrm{d}z.$$

步骤三：P的渐近提取与小球极限性质$(L(T) \le \varepsilon)$。

最后，我们分析围道积分在 $\lambda \to \infty$ 时的行为。通过变形围道并应用控制收敛定理（由引理 4.1–4.3 保证），我们计算得到 $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mathbb{E}[e^{-\lambda L(T)}]$。由命题 1.2 可立即得到所需的小球概率。

由引理 4.2 的式 (4.5)，当 $\arg z \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 时，$\arg \Phi(z) \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$；利用引理 4.1 的式 (4.1) 和引理 4.2 的式 (4.4)，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\lambda}{1+\lambda T(2\pi)^{-1}\Phi(z)}\right| &\le \frac{4\lambda}{1+|\lambda T(2\pi)^{-1}\Phi(z)|} \\
&\le \frac{4}{|T(2\pi)^{-1}\Phi(z)|} \\
&\le \frac{32\pi}{T} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}} \mathrm{d}v\Big)^{-1} \cdot \big(\max\{|z|,1\}\big)^{1-\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}
\end{aligned}$$

当 $z \in \gamma(R, \frac{3\pi}{4})$ 时。因此，利用引理 2.2，

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\mathbb{E}\, e^{-\lambda\widetilde{L}(T)} &= \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda}{1+\lambda T(2\pi)^{-1}\Phi(z)} \cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} \frac{1}{T(2\pi)^{-1}\Phi(z)} \cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\iota T} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} \frac{1}{\Phi(z)} \cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

由于 $L(T)$ 是一个非负随机变量，利用命题 1.2，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1} P(\widetilde{L}(T) \le \varepsilon) = \frac{1}{\iota T} \int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})} \frac{1}{\Phi(z)} \cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z.$$

最后，由引理 4.3 可得所需结果。

4 技术引理

本节将证明一些技术引理。

引理 4.1. 给定 $z \in \mathbb{C}$，其辐角 辐角 $z \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 和 $A \ge 0$，存在

$$\frac{1}{|z+A|} \le \frac{4}{|z|+A}. \tag{4.1}$$

此外，若 A 是满足 $A(v) \ge 0$、$v \in \mathbb{R}$ 的函数，

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z+A(v)} \mathrm{d}v\Big| \ge \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|z|+A(v)} \mathrm{d}v. \tag{4.2}$$

证明。由于 $z=|z|e^{\iota\arg z}$，存在 $z+A=|z|\cos\arg\ z+A+\iota|z|\sin\arg\ z$，使得

$$|z+A|=\sqrt{|z|^2+A^2+2|z|A\cos\arg z}\geq\sqrt{|z|^2+A^2-\sqrt{2}|z|A}$$

由 $z\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ 的余弦辐角 $z\geq-\frac{1}{\sqrt{2}}$。利用事实 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}\geq\frac{1}{4}$，

$$\begin{aligned}|z|^2+A^2-\sqrt{2}|z|A&=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(|z|^2+A^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(|z|-A)^2\\&\geq\frac{1}{4}(|z|^2+A^2)\geq\frac{1}{8}(|z|^2+A^2+2|z|A)\geq\frac{1}{16}(|z|+A)^2,\end{aligned}$$

这意味着 $|z+A|\geq\frac{1}{4}(|z|+A)$，从而得到（4.1）。为证明（4.2），再次利用 $z=|z|e^{\iota\text{辐角 }z}$，

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z+A(v)}\mathrm{d}v\Big|^2\\=&\Big|\int_{\mathbb{R}}\frac{|z|\cos\arg z+A(v)}{|z|^2+A^2(v)+2|z|A(v)\cos\arg z}\mathrm{d}v-\iota\int_{\mathbb{R}}\frac{|z|\sin\arg z}{|z|^2+A^2(v)+2|z|A(v)\cos\arg z}\mathrm{d}v\Big|^2\\=&\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|z|^2+A(v_1)A(v_2)+|z|\cos\arg z(A(v_1)+A(v_2))}{(|z|^2+A^2(v_1)+2|z|A(v_1)\cos\arg z)(|z|^2+A^2(v_2)+2|z|A(v_2)\cos\arg z)}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2.\end{aligned}$$

由于 $z\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},1]$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{7}{8}$ 的余弦辐角，

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z+A(v)}\mathrm{d}v\Big|^2\\\geq&\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|z|^2+A(v_1)A(v_2)-\frac{7}{8}|z|(A(v_1)+A(v_2))}{(|z|^2+A^2(v_1)+2|z|A(v_1)\cos\arg z)(|z|^2+A^2(v_2)+2|z|A(v_2)\cos\arg z)}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\\=&\frac{1}{16}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{|z|+A(v)}{|z|^2+A^2(v)+2|z|A(v)\cos\arg z}\mathrm{d}v\Big)^2+\frac{15}{16}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{|z|-A(v)}{|z|^2+A^2(v)+2|z|A(v)\cos\arg z}\mathrm{d}v\Big)^2\\\geq&\frac{1}{16}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{|z|+A(v)}{|z|^2+A^2(v)+2|z|A(v)}\mathrm{d}v\Big)^2=\frac{1}{16}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|z|+A(v)}\mathrm{d}v\Big)^2,\end{aligned}$$

这就完成了（4.2）的证明。 □

引理 4.2。给定 $z\in\mathbb{C}$，记作 $\Phi(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v$。若 z 的辐角满足辐角 $z\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，则有以下结论：

$$|\Phi(z)|\leq\int_{\mathbb{R}}\frac{4}{1+T|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v\cdot|z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1},\tag{4.3}$$

$$|\Phi(z)|\geq\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v\cdot\max\{|z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1},1\}\tag{4.4}$$

and

$$\cos\arg\Phi(z)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}.\tag{4.5}$$

证明。 首先，由 (4.1) 得，

$$\begin{aligned}|\Phi(z)| &\le \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{|z|+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{|z|+T|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1+T|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v \cdot |z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1}.\end{aligned}$$

其次，由 (4.2) 可得，$|\Phi(z)| \ge \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v$ 当 $|z| \le 1$ 且

$$\begin{aligned}|\Phi(z)| &\ge \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|z|+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v \\ &\ge \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|z|+T|z|^{\frac{|\alpha_1-\alpha_2|}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}|v|^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}}+T|v|^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}}\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v \cdot |z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1}\end{aligned}$$

当 $|z| \ge 1$ 时。因此

$$\begin{aligned}|\Phi(z)| &\ge \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v \cdot \min\{|z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1}, 1\} \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v \cdot \max\{|z|^{\frac{1}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}-1}, 1\}.\end{aligned}$$

最后，记

$$R(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|z|\cos\arg z + T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}{|z|^2+(T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2})^2+2|z|(T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2})\cos\arg z}\mathrm{d}v$$

and

$$I(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|z|\sin\arg z}{|z|^2+(T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2})^2+2|z|(T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2})\cos\arg z}\mathrm{d}v$$

因此

$$\cos\arg\Phi(z) = \frac{R(z)}{\sqrt{R^2(z)+I^2(z)}}.$$

当 $R(z) \ge 0$ 时，容易得到 $\cos\arg\Phi(z) \ge 0 > -\frac{\sqrt{2}}{2}$。当 $R(z) < 0$ 时，若 $\cos\arg z \ge 0$，则存在 $|z|\cos\arg z + A(v) \ge 0$，且此时 $R(z) \ge 0$，这与假设 $R(z) < 0$ 矛盾。于是必有 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \cos\arg z < 0$，且 $\left|\frac{\cos\arg z}{\sin\arg z}\right| \le 1$，因为 $\arg z \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$，这意味着

$$-|I(z)| \le -\int_{\mathbb{R}} \frac{|z||\cos\arg z|}{|z|^2+(T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2})^2+2|z|(T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2})\cos\arg z}\mathrm{d}v \le R(z) < 0.$$

So

$$\cos\arg\Phi(z) = -\frac{1}{\sqrt{1+I^2(z)/R^2(z)}} \ge -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

由此完成证明。 □

引理 4.3. 假设 $\alpha_1,\alpha_2>0$ 满足 最大值$\{\alpha_1,\alpha_2\}>1$。对于 $\Phi(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v$ 和 $R>0$，存在

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\iota T}\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z\\
&=\begin{cases}
\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}\left\{e^{\iota\frac{r}{\sqrt{2}}}\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})\right\}}{|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|^2}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}}{r}\mathrm{d}r+\frac{3\pi}{2\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v}, & \min\{\alpha_1,\alpha_2\}<1,\\
\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}\left\{e^{\iota\frac{r}{\sqrt{2}}}\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})\right\}}{|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|^2}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}}{r}\mathrm{d}r, & \min\{\alpha_1,\alpha_2\}\geq 1,
\end{cases}
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Im}\,z$ 是复数 $z\in\mathbb{C}$ 的虚部。

证明。首先，根据引理 4.2，$R_2>R_1>0$，$\frac{1}{\Phi(z)}$ 在 $\gamma(R_1,\frac{3\pi}{4})$ 与 $\gamma(R_2,\frac{3\pi}{4})$ 之间是解析函数。然后根据柯西定理，当 $R>0$ 时，$\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z$ 是常数。用 $\gamma(a,b,\phi)$ 和 $\eta(c,\alpha,\beta)$ 分别表示引理 2.1 中的 $0\leq a,b,c\leq+\infty$ 和 $\phi,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则存在

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(R,\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z\\
&=\int_{\gamma(+\infty,R,-\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z+\int_{\eta(R,-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z+\int_{\gamma(R,+\infty,\frac{3\pi}{4})}\frac{1}{\Phi(z)}\cdot e^z z^{-1}\mathrm{d}z\\
&=\int_{+\infty}^{R}\frac{1}{\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})}\cdot e^{re^{-\iota\frac{3\pi}{4}}}\frac{1}{r}\mathrm{d}r+\iota\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\Phi(Re^{\iota t})}\cdot e^{Re^{\iota t}}\mathrm{d}t+\int_{R}^{+\infty}\frac{1}{\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})}\cdot e^{re^{\iota\frac{3\pi}{4}}}\frac{1}{r}\mathrm{d}r\\
&=\int_{R}^{+\infty}\frac{e^{\iota\frac{r}{\sqrt{2}}}\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})-e^{-\iota\frac{r}{\sqrt{2}}}\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})}{|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|^2}\cdot e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\frac{1}{r}\mathrm{d}r+\iota\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\Phi(Re^{\iota t})}\cdot e^{R\cos t+\iota R\sin t}\mathrm{d}t\\
&=2\iota\int_{R}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}\left\{e^{\iota\frac{r}{\sqrt{2}}}\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})\right\}}{|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|^2}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}}{r}\mathrm{d}r+\iota\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\Phi(Re^{\iota t})}\cdot e^{R\cos t+\iota R\sin t}\mathrm{d}t\\
&=:2\iota\int_{R}^{+\infty}\bar{J}_1(r)\mathrm{d}r+\iota\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\bar{J}_2(R,t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

根据引理 4.1 的 (4.2)，存在

$$|\bar{J}_2(R,t)|\leq 4\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{R+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v\Big)^{-1}e^R\leq\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v\Big)^{-1}e$$

当 $R\leq 1$和 $t\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$时。因此，利用控制收敛定理以及对任意 $t\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$都有这一事实，

$$\lim_{R\downarrow 0}\Phi(Re^{\iota t})=\begin{cases}
+\infty, & \min\{\alpha_1,\alpha_2\}\geq 1,\max\{\alpha_1,\alpha_2\}>1,\\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}dv, & \min\{\alpha_1,\alpha_2\}<1,\max\{\alpha_1,\alpha_2\}>1,
\end{cases}\tag{4.6}$$

存在

$$\lim_{R\downarrow 0}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\Phi(Re^{\iota t})}\cdot e^{R\cos t+\iota R\sin t}\mathrm{d}t$$
$$=\begin{cases}0, & \min\{\alpha_1,\alpha_2\}\geq 1,\max\{\alpha_1,\alpha_2\}>1,\\ \dfrac{3\pi}{2\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v}, & \min\{\alpha_1,\alpha_2\}<1,\max\{\alpha_1,\alpha_2\}>1.\end{cases}$$

此外，由于

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Im}\left\{e^{\iota\frac{r}{\sqrt{2}}}\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})\right\}\right| &= \left|\iota\sin\frac{r}{\sqrt{2}}\Big(\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})+\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})\Big)+\cos\frac{r}{\sqrt{2}}\Big(\Phi(re^{-\iota\frac{3\pi}{4}})-\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})\Big)\right|\\ &\leq \sqrt{2}r|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|+\int_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt{2}r}{r^2-\sqrt{2}rT(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})+T^2(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})^2}\mathrm{d}v\\ &\leq \sqrt{2}r|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|+\int_{\mathbb{R}}\frac{2(\sqrt{2}+1)r}{r^2+T^2(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})^2}\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

存在

$$\left|\bar{J}_1(r)\right|\leq\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}}{|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|}+\frac{2(\sqrt{2}+1)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}}{|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})|^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{r^2+T^2(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})^2}\mathrm{d}v. \tag{4.7}$$

由（4.2），令 $\alpha^*=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$，存在

$$\begin{aligned}|\Phi(re^{\iota\frac{3\pi}{4}})| &\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{r+T|v|^{\alpha_1}+T|v|^{\alpha_2}}\mathrm{d}v\\ &\geq \frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{r+2Tv^{\alpha^*}}\mathrm{d}v\\ &\geq \frac{1}{8}\int_0^1\frac{1}{(r^{\frac{1}{\alpha^*}}+(2T)^{\frac{1}{\alpha^*}}v)^{\alpha^*}}\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{8(2T)^{\frac{1}{\alpha^*}}}\times\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha^*}(r^{\frac{1}{\alpha^*}}+(2T)^{\frac{1}{\alpha^*}})^{1-\alpha^*}+\frac{1}{\alpha^*-1}(\frac{1}{r})^{1-\frac{1}{\alpha^*}}, & \alpha^*\neq 1,\\ \ln(r+2T)+\ln\frac{1}{r}, & \alpha^*=1.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.8}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{r^2+T^2(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})^2}\mathrm{d}v &\leq \begin{cases}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{T^2(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})^2}\mathrm{d}v, & \alpha^*<\frac{1}{2},\\ 2\int_0^1\frac{1}{r^2+T^2v}\mathrm{d}v+\int_{|v|\geq 1}\frac{1}{T^2|v|^2}\mathrm{d}v & \alpha^*=\frac{1}{2},\\ \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{r^2+T^2|v|^{2\alpha^*}}\mathrm{d}v & \alpha^*>\frac{1}{2}.\end{cases}\\ &\leq \begin{cases}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{T^2(|v|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_2})^2}\mathrm{d}v, & \alpha^*<\frac{1}{2},\\ \frac{2}{T^2}\ln(r^2+T^2)+\frac{4}{T^2}\ln(\frac{1}{r})+\int_{|v|\geq 1}\frac{1}{T^2|v|^2}\mathrm{d}v & \alpha^*=\frac{1}{2},\\ \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+T^2|v|^{2\alpha^*}}\mathrm{d}v\cdot(\frac{1}{r})^{2-\frac{1}{\alpha^*}} & \alpha^*>\frac{1}{2}.\end{cases}\end{aligned} \tag{4.9}$$

因此，由（4.7）、（4.8）和（4.9）可知，存在

$$\int_0^{+\infty}|\bar{J}_1(r)|\mathrm{d}r<+\infty$$

进而

$$\lim_{R\downarrow 0}\int_R^{+\infty}\bar{J}_1(r)\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}\bar{J}_1(r)\mathrm{d}r,$$

这就完成了该引理的证明。 □

引理 4.4。 假设 $n\geq 1$ 且 $p_1,p_2,\cdots,p_n>0$。那么对于引理 *2.3* 中定义的 $n-$维单纯形D_T^n，存在

$$\int_{D_T^n}\prod_{j=1}^n u_j^{p_j-1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n=T^{\sum_{j=1}^n p_j}\frac{\prod_{j=1}^n\Gamma(p_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^n p_j+1)}. \tag{4.10}$$

证明。 首先对于 $n=1$,

$$\int_0^T u_1^{p_1-1}\mathrm{d}u_1=\frac{1}{p_1}=T^{p_1}\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$$

若对于 $n=k(k\geq 1)$，存在

$$\int_{D_T^k}\prod_{j=1}^k u_j^{p_j-1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_k=T^{\sum_{j=1}^k p_j}\frac{\prod_{j=1}^k\Gamma(p_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^k p_j+1)},$$

那么对于 $n=k+1$,

$$\begin{aligned}\int_{D_T^{k+1}}\prod_{j=1}^{k+1}u_j^{p_j-1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_{k+1}=&\int_0^T u_{k+1}^{p_{k+1}-1}\Big(\int_{D_{1-u_{k+1}}^k}\prod_{j=1}^k u_j^{p_j-1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_k\Big)\mathrm{d}u_{k+1}\\=&\int_0^T u_{k+1}^{p_{k+1}-1}(T-u_{k+1})^{\sum_{j=1}^k p_j}\frac{\prod_{j=1}^k\Gamma(p_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^k p_j+1)}\mathrm{d}u_{k+1}\\=&T^{\sum_{j=1}^{k+1}p_j}\frac{\prod_{j=1}^k\Gamma(p_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^k p_j+1)}B(p_{k+1},\sum_{j=1}^k p_j+1)\\=&T^{\sum_{j=1}^{k+1}p_j}\frac{\prod_{j=1}^{k+1}\Gamma(p_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^{k+1}p_j+1)},\end{aligned}$$

这意味着对于任意 $n\geq 1$，**(4.10)** 都成立。 □

5 命题 1.2 的证明

为了建立拉普拉斯变换与小球概率之间的 Tauberian联系，我们利用魏尔斯特拉斯逼近定理，通过多项式逼近示性函数。详细证明如下。

命题 *1.2* 的证明。考虑一个函数 $g:\ [0,1]\to\mathbb{R}$，其定义为

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,e^{-1})\\ 1, & x\in[e^{-1},1]\end{cases}.$$

因为 $\mathbb{P}(X \le \frac{1}{\lambda}) = \mathbb{E}\, g(e^{-\lambda X})$，所以只需证明

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, g(e^{-\lambda X}) = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

由 (1.6),

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} E e^{-\lambda k X} = Ak^{-\alpha} = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} v^{\alpha-1}e^{-kv}\mathrm{d}v = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-kv^{1/\alpha}}\mathrm{d}v$$

对任意整数 $k \ge 1$，从而给定整数 $m \ge 1$ 和一个多项式

$$H(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k,$$

存在

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, H(e^{-\lambda X}) = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\infty} H\big(e^{-v^{1/\alpha}}\big)\mathrm{d}v. \tag{5.1}$$

对任意 $\varepsilon \in (0, e^{-1})$，令

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, e^{-1}-\varepsilon] \\ \varepsilon^{-1}(x-e^{-1})+1, & x \in (e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}) \\ 1, & x \in [e^{-1}, 1] \end{cases}. \tag{5.2}$$

因为 $\frac{h_1(x)}{x} + \varepsilon$ 在 $[0,1]$ 上连续，利用魏尔斯特拉斯逼近定理，存在多项式 $p_1(x)$，使得

$$\Big| p_1(x) - \varepsilon - \frac{h_1(x)}{x} \Big| < \varepsilon$$

然后

$$\frac{h_1(x)}{x} < p_1(x) < 2\varepsilon + \frac{h_1(x)}{x}$$

对于任意 $x \in [0,1]$。因此

$$\lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, g(e^{-\lambda X}) \le \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, h_1(e^{-\lambda X}) \le \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X} p_1(e^{-\lambda X})\right)$$

然后

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, g(e^{-\lambda X}) &\le \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-v^{1/\alpha}} p_1\big(e^{-v^{1/\alpha}}\big)\mathrm{d}v \\
&\le \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}\Big(\int_0^{\infty} h_1\big(e^{-v^{1/\alpha}}\big)\mathrm{d}v + 2\varepsilon\int_0^{\infty} e^{-v^{1/\alpha}}\mathrm{d}v\Big) \\
&= \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}\Big(1 + \int_1^{\left(\ln(e^{-1}-\varepsilon)^{-1}\right)^{\alpha}} h_1\big(e^{-v^{1/\alpha}}\big)\mathrm{d}v + 2\varepsilon\Gamma(1+\alpha)\Big) \\
&\le \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}\Big(\big(\ln(e^{-1}-\varepsilon)^{-1}\big)^{\alpha} + 2\varepsilon\Gamma(1+\alpha)\Big),
\end{aligned}$$

其中，等式成立是因为

$$\int_0^{\infty} g\big(e^{-v^{1/\alpha}}\big)\mathrm{d}v = \int_0^{1} 1\mathrm{d}v = 1.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，不等式变为

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, g(e^{-\lambda X}) \le \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

对于任意 $\varepsilon \in (0, 1-e^{-1})$，令

$$h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, e^{-1}] \\ \varepsilon^{-1}(x-e^{-1}), & x \in (e^{-1}, e^{-1}+\varepsilon) \\ 1, & x \in [e^{-1}+\varepsilon, 1] \end{cases} \tag{5.3}$$

并且存在一个多项式 $p_2(x)$ 满足

$$\frac{h_2(x)}{x} - 2\varepsilon < p_2(x) < \frac{h_2(x)}{x}$$

利用魏尔斯特拉斯逼近定理。于是，不等式

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha}\mathbb{E}\, g(e^{-\lambda X}) \ge \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}$$

可用类似的方法得到，从而完成证明。 □

致谢

作者谨向徐方军教授致谢，感谢他对本稿早期版本提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议显著提升了本研究的质量。

资金支持

Qian Yu 获得国家自然科学基金（12201294）资助。Minhao Hong 获得国家社会科学基金（25BTJ047）资助。

数据可用性声明

由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

利益声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

参考文献

[1] Zhou, H., Shen, G., Yu, Q.: 两个独立对称 α–稳定过程的交叉局部时导数。《数学学报（英文版）》**40**(5), 1273– 1292, 2024。[2] Barnes, C., Mytnik, L., Sun, Z.: 合并布朗运动从无穷远处到来的问题。《概率年刊》**52**(1), 67–92, 2024。[3] Evans, S., Perkins, E.: 碰撞局部时、历史随机微积分与竞争超过程。《电子概率期刊》**3**(5), 1-120, 1998。[4] Jiang, Y., Wang, Y.: 分数布朗运动的碰撞局部时。《中国数学年刊（*B* 辑）》**28**(3), 311–320, 2007。[5] Guo, J.: 两个独立分数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的碰撞局部时。《数学物理学报》**37**(2), 316–328, 2017。[6] Shen, G., Yan, L., Chen, C.: 两个多维双分数布朗运动的碰撞局部时的光滑性。《捷克斯洛伐克数学杂志》**62**(4), 969–989, 2012。[7] Li, W., Shao, Q.: 高斯过程：不等式、小球概率及其应用。《统计学手册》**19**, 533–597, 2001。[8] Chen, X., Song, J.: 布朗运动相互交叉局部时的小偏差。《理论概率杂志》**38**(1), 5, 2025。[9] K¨onig, W., den Hollander, F., van der Hofstad, R.: Edwards 模型的中心极限定理。《概率年刊》25(2), 573–597, 1997。[10] Bingham, N., Goldie, C., Teugels: 正则变差。剑桥大学出版社，1989。[11] Hu, Y., Nualart, D., Song, J.: 分数白噪声驱动热方程的 Feynman-Kac 公式。《概率年刊》**39**(1), 291–326, 2011。