arXiv:2603.03721v1 [math.NT] 4 Mar 2026

通过厄米格得到的 $\mathbb{F}_p$上的极化超特殊阿贝尔簇

YUCUI LIN ，JIANGWEI XUE ，与 CHIA-FU YU

摘要。我们研究 $\mathbb{F}_p$ 上固定维数、弗罗贝尼乌斯自同态为 $\pi_A = \sqrt{-p}$ 且$\ker \lambda = \ker \pi_A$的极化超特殊阿贝尔簇（$A, \lambda$）的同构类集合。该集合在超奇异轨迹的几何以及Ibukiyama与Katsura对Deuring的$2T - H$ 定理所作推广中起着重要作用。我们确定该集合何时非空，并对其属进行分类。我们的方法借助Jordan等人以及Ibukiyama–Karemaker–Yu所建立的格描述，将超特殊阿贝尔簇的问题归结为某些厄米格的问题，并用算术方法处理所涉格上的这些问题。

1. 引言

本文始终固定一个素数 p。令 $n \geq 1$为正整数， Λ_n 为 n维主极化超特殊阿贝尔簇（A， λ）在$\mathbb{F}_p$上的同构类集合，称为n维极化超特殊阿贝尔簇的主亏格。回顾一下，若$\mathbb{F}_p$ 上的阿贝尔簇同构于超奇异椭圆曲线的乘积，则称其为超特殊的。伽罗瓦群$\Gamma:=\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p/\mathbb{F}_p)$在有限集 Λ_n上稳定作用，我们将其记为

$$\Lambda_n(\mathbb{F}_p) := \Lambda_n^{\Gamma}$$

不动元素的子集。于是， $\Lambda_n(\mathbb{F}_p) \subseteq \Lambda_n$ 是由所有满足以下条件的成员（A， λ） $\in \Lambda_n$ 构成的子集：它们存在一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的模型（[20], 参见引理 5.4]）。

在 [20] 中，Ibukiyama 和 Katsura 引入了 Λ_n的型数，记作 $T(\Lambda_n)$，并证明了如下关系

$$2T(\Lambda_n) - |\Lambda_n| = |\Lambda_n(\mathbb{F}_p)|. \tag{1.1}$$

他们进一步给出了 $|\Lambda_2(\mathbb{F}_p)|$ 的显式公式。当 $n = 1$, Λ_1 时，它化为超奇异椭圆曲线的同构类集合；而 $T(\Lambda_1)$ 则给出了定定四元数 $\mathbb{Q}$-代数$B_{p,\infty}$ 恰好在 p和 ∞处分歧时的型数。在这种情况下，等式 (1.1) 是 Deuring 的经典结果 [13]。

假设 n 为偶数，并令 Σ_n 表示满足 $\ker \lambda = A[F]$ 的 n 维极化超特殊阿贝尔簇 (A, λ) 在 $\mathbb{F}_p$ 上的同构类集合。集合 Σ_n 称为 n 维极化超特殊阿贝尔簇的非主亏格。这里 $F\colon A \to A^{(p)} := X \otimes_{\mathbb{F}_p, \mathrm{Frob}} \mathbb{F}_p$ 是相对 Frobenius 态射，而 $A[F]$ 表示 F 的核。注意，假设

日期：2026年3月5日。2020 数学主题分类。11G10,11E39。关键词和短语。超特殊阿贝尔簇，厄米型，Bass序上的格。

n 为偶数是 Σ_n 非空的必要条件，因为条件 $\ker\ \lambda = A[F]$根据黎曼-罗赫定理 [31, §16]蕴含 $n = \dim A$ 为偶数。正如 Li 和 Oort [30], 所证明的，集合 Σ_n 参数化了 $\mathbb{F}_p$ 上维数为 n 的主极化超奇异阿贝尔簇模空间 $\mathcal{S}_n$ 的不可约分支。由 Γ 固定的元素集合 $\Sigma_n(\mathbb{F}_p)$ 则参数化了那些定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的不可约分支。

Ibukiyama [17] 证明了非主亏格集合 Σ_n也满足相同的关系：

$$2T(\Sigma_n) - |\Sigma_n| = |\Sigma_n(\mathbb{F}_p)|. \tag{1.2}$$

在 [18] 中，他还利用 Asai 的 SO_5 [1], 类数公式，给出了 $T(\Sigma_2)$ 的显式公式，并由此根据关系式 (1.2) 得到了 $|\Sigma_2(\mathbb{F}_p)|$ 的显式公式。

在 [49] 中，最后一位作者通过描述集合 Λ_n 和 Σ_n 上的伽罗瓦作用，提出了一种几何与阿德尔方法来证明结果 (1.1) 和 (1.2)，这可视为一条显式互反律。这种方法要求存在一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的基点 (A_0, λ_0)；主亏格的情形显而易见，但非主亏格的情形则不那么明确。因此，他无条件地建立了关系式 (1.1)，并在假设存在一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的非主超特殊点 (A_0, λ_0)，且其弗罗贝尼乌斯自同态 π_{A_0} 满足 $\pi_{A_0}^2 = -p$ 的条件下，建立了关系式 (1.2)。后来，他 [48] 证明存在一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的非主超特殊点 (A_0', λ_0')，其弗罗贝尼乌斯自同态 $\pi_{A_0'}$ 满足 $(\pi_{A_0'})^2 = p$，从而也无条件地建立了关系式 (1.2)。然而，迄今为止，关于是否存在定义在 $\mathbb{F}_p$ 上且满足 $\pi_{A_0}^2 = -p$ 的此类非主超特殊阿贝尔簇 (A_0, λ_0)，仍是一个悬而未决的问题。

本文的第一个主要结果旨在确定何时存在一个对象（A, λ）属于 $\Sigma_n(\mathbb{F}_p)$，且它存在一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上、弗罗贝尼乌斯自同态为 $\sqrt{-p}$ 的模型。我们将这类成员（A, λ）组成的集合 $\in \Sigma_n(\mathbb{F}_p)$ 记作 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$。为了研究上述问题，我们考虑集合 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$，它由满足 $\pi_A^2 = -p$ 且 $\ker \lambda = A[\pi_A]$ 的、定义在 $\mathbb{F}_p$ 上维数为 n 的极化超特殊阿贝尔簇 (A, λ) 的 $\mathbb{F}_p$-同构类构成。注意到，当且仅当 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 非空时，$\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 非空，因为自然映射 $\Sigma_n(\sqrt{-p}) \to \Sigma_n(\sqrt{-p})$ 是满射；参见引理 2.1]. 因此，问题归结为对 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中的成员进行分类。

若域 k 上的两个极化阿贝尔簇 (A_1, λ_1) 和 (A_2, λ_2) 存在拟同源 $\alpha\colon A_1 \to A_2$，定义在 k 上且满足 $\alpha^*\lambda_2 = \lambda_1$，则称它们同源，记作 $(A_1, \lambda_1) \sim (A_2, \lambda_2)$。

定理 1.1. 对于任意正偶整数 n，有 $\Sigma_n(\sqrt{-p}) = \emptyset$ 当且仅当 $\overline{p} \equiv 7$ (模 8) 且 $n \equiv 2$ (模 4)。换言之，集合 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 非空，当且仅当以下互斥条件之一成立：

(a) $p \neq 3$ (模 4)；(b) $p \equiv 3$ (模 4) 且 $4|n$；(c) $p \equiv 3$ (模 8) 且 $n \equiv 2$ (模 4)。

此外，在每种情况下，$\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中的任意两个成员 (A_1, λ_1) 和 (A_2, λ_2) 都是同源的。

证明的一个基本步骤是注意到，$\Sigma_n(\sqrt{-p})$中的每个元素都是一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的极化阿贝尔簇，与 E 上的某条椭圆曲线$\mathbb{F}_p$ 的幂同源，且满足 $\pi_E^2 = -p$。因此，我们可以利用 Ibukiyama-Karemaker-Yu 最近关于这类几何对象的

格描述结果 [19, 推论 4。6], 而这一结果建立在 Jordan 等人 [23]的工作之上。这将关于$\sim\Sigma_n(\sqrt{-p})$的问题化归为一类正定埃尔米特 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格的问题，我们采用算术方法来处理这类问题。我们将在第 2 节回顾这一格描述。关于有限域上（极化或非极化）阿贝尔簇的更多研究，请参阅 [6, 10, 11, 24]。

设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 和 O_K 为 K 的整数环。令 $\Sigma_{n,\,1}(\sqrt{-p}) \subseteq \sim\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 为由 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中所有满足 $O_K \subseteq \mathrm{End}(A)$ 的元素 $(A,\ \lambda)$ 构成的子集。若 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] \subsetneq O_K$，即 $p \equiv 3$ (模 4)，令 $\Sigma_{n,\,2}(\sqrt{-p})$ 为 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中 $\Sigma_{n,\,1}(\sqrt{-p})$ 的补集。也就是说，我们有

$$\widetilde{\Sigma}_n(\sqrt{-p}) = \widetilde{\Sigma}_{n,1}(\sqrt{-p}) \bigsqcup \widetilde{\Sigma}_{n,2}(\sqrt{-p}).$$

定理 1.1 由以下加强结果立即得出。

定理 1.2. 记号同上。

(1) 集合 $\Sigma_{n,\,1}(\sqrt{-p})$ 非空，当且仅当定理 *1.1* 中的条件(a) 和(b) 之一成立。(2) 当 $p \equiv 3$ (模 4)时，集合 $\Sigma_{n,\,2}(\sqrt{-p})$非空，当且仅当定理 *1.1* 中的条件(b) 和 (c) 之一成立。

本文第二部分聚焦于 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中极化阿贝尔簇的分类。这可以归结为对称为属的较小子集进行分类。若有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的两个极化阿贝尔簇 (A_1, λ_1) 和 (A_2, λ_2) 同源，且对每个素数 ℓ（包括 p），其对应的极化 ℓ- 可除群 $(A_1, \lambda_1)[\ell^\infty]$ 和 $(A_2, \lambda_2)[\ell^\infty]$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上同构，则称它们属于同一个属。我们的第二个主要结果对 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中的属进行了分类，这为更精确地估计 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 的大小铺平了道路。利用结果[46, 定理 2.2]（参见 [45, 定理 5.10]），我们可以将每个属 $\mathcal{G}$ 表示为附属于基点 $x = (A, \lambda) \in \mathcal{G}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的自同构群概形 G_x 的一个双陪集空间。随后，我们可以计算每个属 $\mathcal{G}$ 对应的质量，并估计 $\mathcal{G}$ 的大小。关于这一方向的一些相关工作，见 [15, 16, 25, 39, 40, 44]。

定理1.3. (1) 若 $p \not\equiv 3 \pmod 4$，则 $\Sigma_{n,1}(\sqrt{-p})$ 由两个属或一个属构成，具体取决于 $4 \mid n$ 是否成立。

(2) 假设 $p \equiv 3$ *(mod 4)* 且 $4 \mid n$. *(a)* $\Sigma_{n,1}(\sqrt{-p})$ 由一个属构成。 *(b)* $\Sigma_{n,2}(\sqrt{-p})$ 在 $p \equiv 3$ *(mod 8)* 时由 n 个属构成，在$p \equiv 7$ *(mod 8)* 时由 $3n/2$ 个属构成。 *(3)* 若 $p \equiv 3$ *(mod 8)* 且 $n \equiv 2$ *(mod 4)*，则 $\Sigma_{n,1}(\sqrt{-p}) = \emptyset$，而 $\Sigma_{n,2}(\sqrt{-p})$ 由 $n/2$ 个属构成。

定理 1.2 和 1.3 直接由命题 2.4 中关于 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 的格描述，以及将在定理 1.4中陈述的关于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-埃尔米特格的纯算术结果推出。若非退化埃尔米特 K-空间 (V, φ) 中的一个 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格 L 满足 $\sqrt{-p}\,L^\vee = L$，其中 $L^\vee$ 是取值于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 的对偶格，则称其为 $\sqrt{-p}$-模 的：

$$L^\vee := \{\, x \in V \mid \varphi(x, L) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-p}] \,\}. \tag{1.3}$$

对每个素数 ℓ，令 $L_\ell := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$ 为 L 的 ℓ-进完备化。若对于每个素数 ℓ，(V, φ) 中的两个 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格 L, L' 满足 L_ℓ 与 L'_ℓ 等距同构，则称它们属于同一个属 。

定理1.4 （定理3.5和4.11）。 设 (V, φ) 是偶数维 n 的正定埃尔米特K空间，行列式为 $d\varphi \in \mathbb{Q}^\times_+/\mathrm{N}(K^\times)$，其中N: $K^\times \to \mathbb{Q}^\times$ 是范数映射。

(1) 若存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格 L 属于 (V, φ)，则 $d\varphi = [1]$。*(2)* 假设 $d\varphi = [1]$。则存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格 L 属于 (V, φ)，当且仅当 *(a)* $p \not\equiv 3$ *(*模 *4)*，或 *(b)* $p \equiv 3$ *(*模 *4)* 且 $4 \mid n$。*(3)* 假设 *(2)* 中的某个条件成立，因而存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格，属于 (V, φ)。*(a)* 若 $p \not\equiv 3$ *(*模 *4)* 且 $4 \mid n$，则 (V, φ) 中有两个由 $\sqrt{-p}$-模O_K-格构成的属。*(b)* 对于其余情形（即 $p \not\equiv 3$ *(*模 *4)* 且 $4 \nmid n$ ，或条件 *(b)* 在 *(2)* 中成立），(V, φ) 中由 $\sqrt{-p}$-模O_K-格构成的属唯一。*(4)* 假设 $p \equiv 3$ *(*模 *4)*。存在一个 $\sqrt{-p}$-模 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格L 属于 (V, φ)，当且仅当 *(a)* $p \equiv 7$ *(* 模 *8)*， $4 \mid n$ 且 $d\varphi = [1]$；或 *(b)* $p \equiv 3$ *(* 模 *8)*， $4 \mid n$ 且 $d\varphi = [1]$；或 *(c)* $p \equiv 3$ *(*模 *8)*， $n \equiv 2$ *(*模 *4)*且 $d\varphi = [2]$。*(5)* 保持 *(4)* 中的假设，并假设 *(4)* 中的某个条件成立，因而存在一个 $\sqrt{-p}$-模 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格，属于 (V, φ)。则这类格的每个属都由素数 *2* 处 (V_2, φ_2) 中幺模$\mathbb{Z}_2[\sqrt{-p}]$-格的相应等距类唯一确定。此外，情形 *(a)* 有 $3n/2 + 1$ 个属，情形 *(b)* 有 $n + 1$ 个属，情形 *(c)* 有 $n/2$ 个属。

本文余下部分（第3–5节）讨论相关的埃尔米特 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格，其本身也颇具研究价值。尽管我们的研究动机源于几何，这些算术结果也可以独立阅读。本文用于检测这些格的全局约束的方法，也可应用于更一般的埃尔米特格。

关于$p \equiv 3 \pmod 4$时 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格的属的分类，请参见第4节；由于$\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] \subsetneq O_K$的非极大性，这一分类变得更加复杂。此情形下的证明需要对自对偶厄米格$\mathbb{Z}_2[\sqrt{-p}]$进行分类。该分类最初由 Yu [47, 定理 1.1 和 1.2], 给出，其中他分别处理了 $p \equiv 3 \pmod 8$和 $p \equiv 7 \pmod 8$的情形。我们给出了所需分类的统一证明，该证明源自第5节中的正交分解定理，该定理适用于任意交换局部 Bass 阶上的自对偶埃尔米特格。

设 Z 是一个完备离散赋值环，其分式域为 Q， E 是一个交换半单 Q-代数，而 R 是 E 的一个局部 Bass Z 阶。关于 Bass 序的定义以及 Bass 阶上的格的分类，参见第5节中的介绍。假设 E 具有一个（可能是平凡的）对合 σ，且该对合保持 R 稳定

并设 V 是一个自由 E-模，配有一个非退化半双线性配对

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to E.$$

如果 M 是一个 R-格，那么存在一个 Z-阶的升链

$$R \subseteq R_1 \subsetneq R_2 \subsetneq \cdots \subsetneq R_m$$

以及一个由正整数组成的 m-元组（r_1，$\cdots$，r_m），使得存在一个 R-格的同构

$$M \simeq R_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus R_m^{r_m};$$

此外，阶 R_i、$1 \le i \le m$ 和（r_1，$\cdots$，r_m）由 M 唯一确定；见 [12，第37节，第 789] 页。这些阶 R_i（$1 \le i \le m$），连同 m-元组（r_1，$\cdots$，r_m），称为 M 的结构不变量。对于每个 i，R_i-理想（$R:\ R_i$）$:= \{x \in E \,|\, aR_i \subseteq R\}$ 是主理想（引理 5.2），我们固定（$R : R_i$）的一个生成元 α_i。

定理 1.5（定理 5.11）。设 M 是（V、$\langle\ 、\ \rangle$）中具有结构不变量 $R_1 \subsetneq R_2 \subsetneq \cdots \subsetneq R_m$ 和（r_1、$\cdots$、r_m）的自对偶 R-格。那么存在一个将 M 正交分解为 R-子格的分解

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m, \qquad with \quad \langle M_i, M_j\rangle = 0, \quad \forall 1 \le i < j \le m, \tag{1.4}$$

其中每个 M_i 都是秩为 r_i的自由 R_i-格，而 $\langle\ ,\ \rangle$ 在 M_i 上的限制 $\langle\ ,\ \rangle_{M_i}:\ M_i \times M_i \to R$ 具有如下形式：$\alpha_i\langle\ ,\ \rangle_i$，其中$\langle\ ,\ \rangle_i:\ M_i \times M_i \to R_i$是完美半双线性配对。

若对于某个满足 $\varepsilon\varepsilon^\sigma = 1$的 $\varepsilon \in O_E^\times$，$\langle\ ,\ \rangle$ 是 ε-埃尔米特的，则定理 1.5 给出经典意义下的正交分解 $M = M_1 \perp \cdots \perp M_m$，也就是说，对所有 $i \ne j$，(1.4) 中的 $\langle M_i, M_j\rangle = 0$ 成立。该定理将自对偶埃尔米特、对称或辛 R-格的分类归约到适当超序 $R_i \supseteq R$上的自由格这一子类，前提是可以选取 $(R : R_i)$ 的生成元 α_i 使其在 σ下不变。因此，这一结果可用于将经典文献中的一些已有结果推广到上述局部 Bass 阶上的一般格；例如，Baeza [3]、Knebusch [26] 或 Knus [27] 所研究的格 M 是投射的。我们指出，正交分解 (1.4) 中的自对偶 R_i-格 M_i 不一定由 M唯一确定至同构；见例 5.12。

本文的组织如下。第 2 节基于 [23]和 [19]的工作，用埃尔米特格描述集合 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$。第3节对正定埃尔米特 O_K-格进行分类，其中其 O_K-值对偶格 $L^\star$ 等于 $\sqrt{-p}^{-1}L$。在第3节结果的基础上，我们在第4节对正定 $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格进行分类。第5节证明定理 1.5。

2. 极化阿贝尔簇与格描述

本节回顾极化阿贝尔簇在$\mathbb{F}_q$ 上的格描述，这些簇与椭圆曲线的幂同源，其中 $\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域，q 是 p的一个幂。这是将关于 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 的问题转化为虚二次序上适当的埃尔米特格问题的主要工具。此方法也适用于更一般的极化阿贝尔簇类；

参见定理 [19, 定理 C]。我们的论述基于 Ibukiyama-Karemaker- Yu [19,第 4] 节。

设 E 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的一条固定椭圆曲线，其弗罗贝尼乌斯自同态为 π，典范主极化为 λ_E。设 $R :=\mathrm{End}(E)$ 和 $B := \mathrm{End}^0(E)$ 分别表示 E 在 $\mathbb{F}_q$ 上的自同态环和自同态代数，它们配备由 λ_E 诱导的对合 $a \mapsto a^\sigma$。那么，B 要么是虚二次域，要么是定定的四元数 $\mathbb{Q}$-代数 $B_{p,\infty}$，而 $a \mapsto a^\sigma$ 是典范对合。设 ${}_R\mathrm{Lat}$（分别为 Lat_R）表示左（分别为右）R-格的范畴。对于每个右 R-格 M，可将其赋予一个左 R-格 ${}_RM := M$，其左作用定义为：对于 $m \in M$ 和 $a \in R$，有 $a \cdot m := ma^\sigma$；反之亦然。于是，函子 $M \mapsto {}_RM$ 诱导出从 Lat_R 到 ${}_R\mathrm{Lat}$ 的范畴等价。

称 [19], 为左（分别为右）埃尔米特 R-格 M，是指一个有限生成左（分别为右）埃尔米特 B-空间 (V, h) 中的一个 R-格。也就是说，$h : V \times V \to B$ 是一个 $\mathbb{Q}$-双线性配对，满足 $h(y, x) = h(x, y)^\sigma$ 并且

$$h(ax, by) = ah(x, y)b^\sigma \quad (\text{resp. } h(xa, yb) = a^\sigma h(x, y)b), \quad \forall a, b \in B,\ x, y \in V.$$

若 $h(M, M) \subseteq R$，则称 M 为整的或取值于 R，并称 h 在 M 上是整的。令 ${}_R\mathrm{Lat}^H$（分别为 Lat_R^H）表示正定左（分别为右）埃尔米特 R-格的范畴。与之前类似，我们有一个从 Lat_R^H 到 ${}_R\mathrm{Lat}^H$ 的范畴等价。

给定一个阿贝尔簇 A，若元素 $\lambda \in \mathrm{Hom}(A, A^t) \otimes \mathbb{Q}$ 是 A 上的一个 $\mathbb{Q}$-极化，且 $N\lambda$ 对于某个正整数 N 是一个极化，则称之为如此；若 N 可以取为 1，即 λ 是一个极化，则称 λ 为整的。一个 $\mathbb{Q}$-极化阿贝尔簇是一个连同 $\mathbb{Q}$-极化的阿贝尔簇 A。令 $\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$ 表示满足 A 与 E 的某个幂同源的、定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $\mathbb{Q}$-极化阿贝尔簇范畴。$\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$ 中的态射是保持 $\mathbb{Q}$-极化的阿贝尔簇态射（不允许将其乘以 $\mathbb{Q}$ 的正标量）。

对于 $\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$ 中的每个 $\mathbb{Q}$-极化阿贝尔簇 (A, λ)，我们关联一对 (M, h)，其中

$$M := \mathrm{Hom}(E, A) \tag{2.1}$$

是一个右 R-格，而

$$h = h_\lambda : M_{\mathbb{Q}} \otimes M_{\mathbb{Q}} \to B, \quad h_\lambda(m_1, m_2) := \lambda_E^{-1} m_1^t \lambda m_2 \tag{2.2}$$

是 $M_{\mathbb{Q}}$ 上的一个配对：$= M \otimes \mathbb{Q}$。于是 (M, h) 是一个正定埃尔米特 R-格。厄米形式 h 在 M 上是整的，当且仅当 λ 是极化；它是完美的，当且仅当 λ 是主极化；参见 [19, 引理 4.4]。

定理 2.1 ([19, 推论 4.6])。设 E 是 $\mathbb{F}_q$ 上一个带有 *Frobenius* 自同态 π 和自同态环 $R = \mathrm{End}(E)$ 的椭圆曲线。函子 $\mathrm{Hom}(E, -) : \mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}} \to \mathrm{Lat}_R^H$ 诱导范畴等价，当且仅当以下条件之一成立：

- E 是普通的，且 $\mathbb{Z}[\pi] = R$；
- E 是超奇异的，$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p$ 且 $\mathbb{Z}[\pi] = R$；或
- E 是超奇异的，$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^2}$ 且 R 在 $\mathbb{Z}$ 上的秩为 4。

回顾一下，若两个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $\mathbb{Q}$-极化阿贝尔簇 (A_1, λ_1) 和 (A_2, λ_2) 同源，并且对每个素数 ℓ（包括 p），它们相应的 $\mathbb{Q}_\ell$-极化 ℓ-可除群 $(A_1, \lambda_1)[\ell^\infty]$ 和 $(A_2, \lambda_2)[\ell^\infty]$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上同构，则称它们属于同一个属。

令 $\mathcal{H}om_R(-,E):{}_R\mathrm{Lat}^{\mathrm{opp}}\to\mathcal{A}_E$ 表示在 [23], 中构造的层 Hom 函子，其中 $\mathcal{A}_E$ 表示由定义在 $\mathbb{F}_q$ 上且与 E 的某个幂同源的阿贝尔簇组成的范畴。对于每个左 R- 格，函子 $\mathcal{H}om_R(M,E)$ 将阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M,E(S))$ 赋给每个 $\mathbb{F}_q$-概形 S，并且该函子可由一个与 E 的某个幂同源的阿贝尔簇 A_M 表示。函子 $\mathcal{H}om_R(-,E)$ 是全忠实的，其逆函子为 $\mathrm{Hom}(-,E)$。令 $\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$,ess 表示 $\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$ 的满子范畴，它由对象 (A,λ) 组成，且其底层阿贝尔簇 A 属于 $\mathcal{H}om_R(-,E)$ 的本质像。根据 [19, 命题 4.5], ，函子

$$\mathrm{Hom}(E,-):\mathcal{A}_{E,\mathrm{ess}}^{\mathrm{pol}}\to\mathrm{Lat}_R^H \tag{2.3}$$

给出一个范畴等价。

命题 2.2. 任意两个对象 (A_1,λ_1) 与 (A_2,λ_2) 在 $\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$,ess 中属于同一属，当且仅当它们所相伴的埃尔米特 R-格 (M_1,h_1) 与 (M_2,h_2)属于同一属。

证明. 范畴等价 (2.3) 诱导出一个自然同构

$$\mathrm{Hom}(A_1,A_2)\xrightarrow[\alpha\mapsto\alpha_*]{\sim}\mathrm{Hom}_R(M_1,M_2), \tag{2.4}$$

这进而诱导出一个自然同构 $\mathrm{Hom}(A_1,A_2)\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_B(M_{1,\mathbb{Q}},M_{2,\mathbb{Q}})$。设 $\alpha\in\mathrm{Hom}(A_1,A_2)\otimes\mathbb{Q}$ 为一个同构，并设 $\beta=\alpha_*$ 为对应于 α 的同构；对 $m_1\in M_{1,\mathbb{Q}}$ 有 $\beta(m_1)=\alpha m_1$。经计算可得,

$$h_2(\beta m_1,\beta m_1')=\lambda_E^{-1}m_1^t\alpha^t\lambda_2\alpha m_1',\quad h_1(m_1,m_1')=\lambda_E^{-1}m_1^t\lambda_1 m_1'$$

对 $m_1,m_1'\in M_{1,\mathbb{Q}}$ 成立。由此可得，$\alpha^t\lambda_2\alpha=\lambda_1$ 当且仅当对所有 $m_1,m_1'\in M_{1,\mathbb{Q}}$ 有 $h_2(\beta m_1,\beta m_1')=h_1(m_1,m_1')$，从而 (A_1,λ_1) 与 (A_2,λ_2) 同源当且仅当 $(M_{1,\mathbb{Q}},h_1)$ 与 $(M_{2,\mathbb{Q}},h_2)$ 是同构的。

我们将 $\lambda_{i,\ell}:A_i[\ell^\infty]\to A_i^t[\ell^\infty]$ 记为对每个素数ℓ由 λ_i 诱导的同源。我们有自然同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A_1[\ell^\infty],A_2[\ell^\infty])&\simeq\mathrm{Hom}(A_1,A_2)\otimes\mathbb{Z}_\ell\\&\simeq\mathrm{Hom}_R(M_1,M_2)\otimes\mathbb{Z}_\ell\\&=\mathrm{Hom}_{R_\ell}(M_{1,\ell},M_{2,\ell}),\quad M_{i,\ell}:=M_i\otimes\mathbb{Z}_\ell.\end{aligned}$$

第一个同构由有限域上的阿贝尔簇的同态的 Tate 定理推出（见 [38] 和 [42,定理, 第 525]页），第二个同构则由同构（2.4）给出。设 $\alpha\in\mathrm{Hom}(A_1[\ell^\infty],A_2[\ell^\infty])$ 是一个同构，并令 $\beta\in\mathrm{Hom}_{R_\ell}(M_{1,\ell},M_{2,\ell})$ 为与 α对应的同构。同样的计算表明，当且仅当对所有 m_1、$m_1'\in M_1$、ℓ均有 $\alpha^t\lambda_{2,\ell}\alpha=\lambda_{1,\ell}$，即 $h_2(\beta m_1,\beta m_1')=h_1(m_1,m_1')$。因此，$(A_1,\lambda_1)[\ell^\infty]\simeq(A_2,\lambda_2)[\ell^\infty]$ 当且仅当 $(M_{1,\ell},h_1)\simeq(M_{2,\ell},h_2)$。命题得证。□

现在取 $\pi=\sqrt{-p}$、$\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_p$、$R=\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$和 $B=\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$。Waterhouse 在他的论文中证明 [42, 定理4.2(3)], 存在一条定义在$\mathbb{F}_p$ 上的椭圆曲线 E，满足 $\mathrm{End}(E)=R$。按照惯例，我们将 E 的典范极化记为 λ_E。

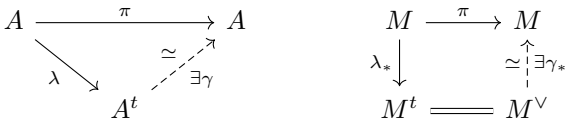
引理2.3. 设 (A,λ) 是 $\mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}$ 中的一个极化阿贝尔簇，而(M,h) 是与之关联的正定埃尔米特 R-格。当且仅当$\pi M^\vee=M$时，我们有核$\lambda=A[\pi]$，其中 $M^\vee:=\{x\in M\otimes\mathbb{Q}\mid h(x,M)\subseteq R\}$是相对于埃尔米特形式 h的 M的对偶格。

证明。 尽管 R 是交换的，为了追踪函子性，我们仍区分左、右 R-模。由于 M 是右 R-模，其对偶模 $M^t \coloneqq \mathrm{Hom}_R(M,R)$ 自然是左 R-模。正如前文所述，我们按如下方式赋予它右 R-模结构：

$$(f\cdot a)(m) \coloneqq a^\sigma f(m), \qquad \forall f\in M^t, a\in R, m\in M.$$

由定理 2.1 的原始无极化版本（即 [23, 定理 1.1]）可知，附着于对偶阿贝尔簇 A^t 的右 R-格 $\mathrm{Hom}(E,A^t)$ 典范同构于 M^t，其中每个 $\alpha\in\mathrm{Hom}(E,A^t)$ 对应于 $(\lambda_E^{-1}\alpha^t)_*\in M^t$。极化 $\lambda:\ A\to A^t$ 给出一个 R-线性包含 $\lambda_*:\ M\hookrightarrow M^t$，它与厄米形式 h 所诱导的映射一致，该映射将每个 $m_1\in M$ 映至$h(m_1,-)\in M^t$。注意到 $\ker\lambda = A[\pi]$ 当且仅当存在同构$\gamma:\ A^t\to A$使得 $\gamma\lambda=\pi$。我们进一步将 M^t与 $M^\vee$等同，并应用等价函子 $\mathrm{Hom}(E,-):\ \mathcal{A}_E\to \mathrm{Lat}_R$，将 (2.5) 左侧所需的交换图变换为右侧的 R-格交换图：

(2.5)



由于复合 $M\xrightarrow{\lambda_*}M^t=M^\vee$只是典范嵌入，存在同构 $\gamma_*:\ M^\vee\to M$，使得 (2.5) 右侧的图交换，当且仅当 $\pi M^\vee = M$。□

命题 2.4。 函子 $\mathrm{Hom}(E,-):\ \mathcal{A}_E^{\mathrm{pol}}\to \mathrm{Lat}_R^H$ 给出~集合 $\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 与秩为 n、满足 $\sqrt{-p}\,M^\vee = M$的正定埃尔米特 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格的同构类集合之间的一个双射。此外，$\Sigma_n(\sqrt{-p})$ 中的任意两个成员属于同一个属，当且仅当它们对应的正定埃尔米特 R-格属于同一个属。

3. $\sqrt{-p}$-MODULAR HERMITIAN O_K-LATTICES

本节中，我们固定一个素数 $p\in\mathbb{N}$，并用 K 表示虚二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$。设 σ 是 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 中唯一的非平凡元素，它将每个 $a\in K$ 映为其复共轭 a^σ。设 V 是一个有限维非零 K-向量空间，其维数为 $n\coloneqq\dim V$。假设 V配备了一个正定厄米形式 $\varphi:\ V\times V\to K$，该形式对第一个变量是线性的，对第二个变量是反线性的。

定义 3.1. 厄米空间 (V,φ) 的行列式 $d\varphi$ 定义为 $\mathbb{Q}^\times/\mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(K^\times)$ 中由格拉姆矩阵$[\varphi(e_i,e_j)]_{1\le i,j\le n}$ 的行列式表示的元素，其中 V 的一个 K-基 $\{e_i\}_{1\le i\le n}$；该元素与基的选择无关。这里，$\mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}:\ K\to\mathbb{Q}$ 表示范数映射，简写为 $\mathrm{N}:K\to\mathbb{Q}$。

由 φ 的正定性假设可知，$d\varphi\in\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$，其中 $\mathbb{Q}_+^\times$ 表示正有理数的乘法群。给定 $a\in\mathbb{Q}_+^\times$，我们将其在 $a\mathrm{N}(K^\times)\in\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 中的类记作 $[a]$。根据 [37, 定理 2.2] 或 [35, 例 10.1.6(iv)], ，正定埃尔米特空间 $(V,\ \varphi)$ 在同构意义下由其维数 n 和行列式 $d\varphi\in\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 唯一确定。

设 O_K 是 K 的整数环。我们所说的 V 中的 O_K-格，专指满秩的 O_K-格，即 V 中一个有限生成的 O_K-模，且包含 V 的一个 K-基。类似地，我们定义 V 中的 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格的概念。显然，每个 O_K-格自动也是一个 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格。根据命题 2.4，我们关注满足 $\sqrt{-p}L^\vee = L$ 的 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格 L，其中 $L^\vee := \{x \in V \mid \varphi(x, L) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-p}]\}$ 是式 (1.3) 中定义的 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-值对偶格。注意，当 $p \not\equiv 3$（模 4）时，$\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 与 O_K 重合；当 $p \equiv 3$（模 4）时，$\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 是 O_K 中指数为 2 的子序。在本节中，为简便起见，我们着重讨论 O_K-格，并将较难处理的满足 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] \subsetneq O_K$ 的 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-格留到第 4 节讨论。对于 (V, φ) 中的 O_K-格，考虑 O_K 值对偶格在概念上比考虑 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 值对偶格更简单。

定义 3.2. 给定 V 中的一个 O_K-格 L，我们定义其关于 φ 的 O_K取值对偶格$L^{\star,\varphi}$ 为

$$L^{\star,\varphi} := \{x \in V \mid \varphi(x, L) \subseteq O_K\}. \tag{3.1}$$

若 $L^{\star,\varphi} = \mathfrak{a}^{-1}L$ 对某个分式 O_K-理想成立，则称 L 是 $\mathfrak{a}$-模的。特别地，若 $L = \sqrt{-p}\,L^{\star,\varphi}$，则称 L 是 $\sqrt{-p}$-模的。

若 $p \not\equiv 3$（模 4），则 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] = O_K$，因而 $L^{\star,\varphi} = L^\vee$。在此情形下，$\sqrt{-p}$-模 O_K-格的定义与原定义相同，后者要求 $\sqrt{-p}\,L^\vee = L$。另一方面，当 $p \equiv 3$（模 4）时，这两种 $\sqrt{-p}$-模性的概念有所不同，因为

$$L^\vee = 2L^{\star,\varphi} = L^{\star,\frac{1}{2}\varphi} \qquad \text{if} \quad p \equiv 3 \pmod 4. \tag{3.2}$$

事实上，在此情形下，$2O_K$ 是包含于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 中的极大 O_K-理想。对每个 $x \in V$，集合 $\varphi(x, L)$ 构成一个 O_K-模，因为根据假设，L 是一个 O_K-格。因此 $L^\vee = \{x \in V \mid \varphi(x, L) \subseteq 2O_K\}$，由此可直接推出（3.2）。不过，这一差异不会造成额外的麻烦，因为有如下引理。

引理 3.3. 对于 $p \equiv 3 \pmod 4$，以下集合之间存在双射O_K-格：

$$\left\{\begin{matrix} O_K\text{-}lattices\ M\ in\ (V,\varphi) \\ with\ \sqrt{-p}\,M^\vee = M \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} O_K\text{-}lattices\ L\ in\ (V,\varphi) \\ with\ \sqrt{-p}\,L^{\star,\varphi} = L \end{matrix}\right\} \tag{3.3}$$

该双射保持等距类和属。

证明。对于每个素数 ℓ，令 $V_\ell := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ 为 V的 ℓ-进完备化，并令φ_ℓ：$V_\ell \times V_\ell \to K_\ell := K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ 为由 φ诱导的 V_ℓ 上的埃尔米特 K_ℓ-形式。由于阶 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 在奇素数 p处是极大的，对于 V中的每个 O_K-格 L，我们有

$$L^\vee \otimes \mathbb{Z}_p = \{x \in V_p \mid \varphi_p(x, L_p) \subseteq \mathbb{Z}_p[\sqrt{-p}] = O_{K_p}\} = L^{\star,\varphi} \otimes \mathbb{Z}_p.$$

根据 Jacobowitz 分类（将在引理 3.13 中回顾），若 n为奇数，则 (3.3) 两边均为空，其中 [21] $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 O_{K_p}-格，因此此时该引理是空泛的。现在假设 n 为偶数。由 (3.2) 可知，(V, φ) 中的一个 O_K-格 M满足 $\sqrt{-p}\,M^\vee = M$，当且仅当 $M^{\star,\frac{1}{2}\varphi} = M$。由于 n为偶数，我们有 $d(\frac{1}{2}\varphi) = d\varphi$属于 $\mathbb{Q}_+^\times / \mathrm{N}(K^\times)$，因此在此情形下存在一个等距 $\vartheta\colon (V, \frac{1}{2}\varphi) \to (V, \varphi)$。因此，一个 O_K-格 $M \subset V$属于 (3.3) 左侧，当且仅当其像 $L := \vartheta(M)$ 属于右侧。这就建立了所需的双射；由于 ϑ 是一个等距，该双射保持等距类和属。□

引理 3.3 使我们能够对所有素数p 统一处理 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格，而不必担心 $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$值对偶格与O_K值对偶格之间的区别。本节余下部分中，我们只在定义 3.2 的意义下讨论 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格。若从上下文可以清楚看出厄米形式 φ ，则我们将其从 $L^{\star,\varphi}$ 的上标中省略，直接写作 $L^{\star}$。

定义3.4. (V,φ) 中埃尔米特 O_K-格 L 的范数 $\mathfrak{n}(L)$ 定义为由集合 $\{\varphi(x,x) \mid x \in L\}$ 生成的分式 O_K-理想。在每个素数 ℓ 处，分式 O_{K_ℓ} 范数理想 $\mathfrak{n}(L_\ell)$ 的定义与之类似。

局部范数与整体范数按照如下法则相吻合

$$\mathfrak{n}(L) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \mathfrak{n}(L_\ell), \qquad \text{for every prime } \ell, \tag{3.4}$$

由此可知， $\mathfrak{n}(L)$ 下降为 L 的属的一个不变量。

本节的主要结果如下。

定理 3.5. (1) 若 (V,φ) 中存在 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格 L，则 n为偶数，且 $d\varphi = [1]$ 属于 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$。

(2) 反之，设(V,φ) 是一个偶数维埃尔米特 K-空间，且满足 $d\varphi = [1]$。当且仅当

(a) $p \not\equiv 3 \pmod 4$，或(b) $p \equiv 3 \pmod 4$ 且 $4 \mid n$时，(V,φ) 中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K 格 L。

(3) 假设(2) 中的某个条件成立，因此(V,φ)中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K 格。

(a) 若 $p \not\equiv 3 \pmod 4$ 且 $4 \mid n$，则(V,φ)中有两个属的 $\sqrt{-p}$-模O_K 格，其区别在于格的范数等于 pO_K 还是 $2pO_K$。(b) 对于其余情形，这类格只有一个属，其对应的范数为 pO_K。

由于正定埃尔米特空间 $(V,\ \varphi)$ 由其维数 n 和行列式 $d\varphi$唯一确定，定理 3.5 的第 (1) 部分表明，对于固定的偶数维数 n，在同构意义下，存在唯一一个允许存在 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的埃尔米特空间。为证明此定理，我们首先需要更深入地了解群 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$。

根据算术基本定理， $\mathbb{Q}_+^\times$ 是由所有有理素数构成的集合生成的自由阿贝尔群，这进一步意味着 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 是一个初等 2-群，由区别于 p的素数集合生成。照例，我们用 $\left(\frac{K}{\ell}\right)$ 表示有理素数 ℓ处 K 的阿廷符号 [41, p。 94] ，根据 K在 ℓ处是分裂、分歧还是惰性，其取值分别为 $\{1,0,-1\}$。当 ℓ 为奇数时， $\left(\frac{K}{\ell}\right)$ 与勒让德符号 $\left(\frac{-p}{\ell}\right)$一致。另一方面，若 p 是奇素数，则

$$\left(\frac{K}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p \equiv 7 \pmod 8; \\ 0 & \text{if} \quad p \equiv 1 \pmod 4; \\ -1 & \text{if} \quad p \equiv 3 \pmod 8. \end{cases} \tag{3.5}$$

对于每个素数 $\mathfrak{p}$ $\ell \in \mathbb{N}$，设 $(a,\ b)_\ell \in \{\pm 1\}$ 是一对非零元素 $a,\ b \in \mathbb{Q}_\ell$ 的希尔伯特符号，当且仅当 $a \in \mathrm{N}(\mathbb{Q}_\ell(\sqrt{b})^\times)$ 时，其值为 1。特别地，我们有一个阿贝尔群的嵌入

$$\iota_\ell : \mathbb{Q}_\ell^\times / \mathrm{N}(K_\ell^\times) \hookrightarrow \{\pm 1\}, \quad a\,\mathrm{N}(K_\ell^\times) \mapsto (a,-p)_\ell$$

为了描述 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 的结构，我们引入它的两个子群。

定义 3.6. 设 Γ_{in} 为 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 中由惰性素数集 $\mathscr{P}_{\mathrm{in}} := \left\{\text{素数 } \ell \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left(\frac{K}{\ell}\right) = -1\right\}$ 生成的子群，Γ_{rs} 为由其余分歧或分裂素数生成的子群。

由构造可知，我们有 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times) = \Gamma_{\mathrm{in}} \cdot \Gamma_{\mathrm{rs}}$。

命题 3.7. (1) 初等2-群 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 是Γ_{in} 与 Γ_{rs}的直积，且 $\mathscr{P}_{\mathrm{in}}$ 是 Γ_{in}的一个 $\mathbb{F}_2$-基。

(2) 若 $p = 2$ 或 $p \equiv 3 \pmod 4$，则 Γ_{rs} 是平凡的。(3) 若 $p \equiv 1 \pmod 4$，则 Γ_{rs} 是阶为2 的循环群，其生成元$g\mathrm{N}(K^\times)$ 由下列条件唯一确定

$$(g,-p)_2 = -1, \qquad (g,-p)_p = -1, \quad \textit{and} \quad (g,-p)_\ell = 1 \quad \forall \ell \notin \{2,p\}. \tag{3.6}$$

例 3.8. 在证明命题 3.7 之前，我们给出一些具体的正整数 g 的例子，它们在 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时表示 Γ_{rs} 的非平凡元素。令 $\ell_0 \in \mathbb{N}$ 为满足以下条件的素数

$$\ell_0 \equiv 3 \pmod 4 \qquad \text{and} \qquad \left(\frac{\ell_0}{p}\right) = -1. \tag{3.7}$$

利用 [36, 定理 III.1] 直接计算可知，$g = \ell_0$ 具有式 (3.6) 中所需的希尔伯特符号。根据定义，当 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时，$2\mathrm{N}(K^\times)$ 属于 Γ_{rs}；类似的计算表明，当且仅当 $p \equiv 5 \pmod 8$ 时，它生成 Γ_{rs}。

命题 *3.7* 的证明. (1) 根据哈塞范数原理和 [36, 定理 III.4]，存在短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Q}_+^\times/\,\mathrm{N}(K^\times) \longrightarrow \bigoplus_{\text{prime } \ell} \mathbb{Q}_\ell^\times/\,\mathrm{N}(K_\ell^\times) \xrightarrow{\prod \iota_\ell} \{\pm 1\} \longrightarrow 1. \tag{3.8}$$

这里我们省略无穷处，因为对于每个正有理数$a \in \mathbb{Q}_+^\times$，$(a,-p)_\infty = 1$。如果 ℓ 是一个在 K中分裂的素数，那么 $K_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell$，因而 $\mathrm{N}(K_\ell^\times) = \mathbb{Q}_\ell^\times$。于是 (3.8) 简化为

$$1 \longrightarrow \mathbb{Q}_+^\times/\,\mathrm{N}(K^\times) \longrightarrow \bigoplus_{\left(\frac{K}{\ell}\right) \in \{-1,0\}} \mathbb{Q}_\ell^\times/\,\mathrm{N}(K_\ell^\times) \xrightarrow{\prod \iota_\ell} \{\pm 1\} \longrightarrow 1. \tag{3.9}$$

此处，每个满足 $\left(\frac{K}{\ell}\right) \in \{-1,0\}$ 的 $\mathbb{Q}_\ell^\times/\mathrm{N}(K_\ell^\times)$ 都可以通过将每个陪集 $a\mathrm{N}(K_\ell^\times)$ 映射到相应的希尔伯特符号 $(a, -p)_\ell$，与群 $\{\pm 1\}$ 正则地等同。更明确地说，如果 ℓ 在 K 中是惰性的，那么 $\mathbb{Q}_\ell^\times/\,\mathrm{N}(K_\ell^\times) \simeq \ell^{\mathbb{Z}}/\ell^{2\mathbb{Z}}$，且 $(a, -p)_\ell = (-1)^{\nu_\ell(a)}$，其中 $\nu_\ell \colon \mathbb{Q}_\ell^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ 表示 $\mathbb{Q}_\ell$ 的标准化离散赋值。因此，如果 $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ 是一个被某个在K中惰性的 ℓ 整除的无平方因子正整数，那么 a 不是 ℓ 处的局部范数，故 $a \notin \mathrm{N}(K^\times)$。这证明了命题的第 (1) 部分。

（2）接下来，我们确定 Γ_{rs}的群结构。根据上述讨论，对于每个 $a \in \mathbb{Q}_+^\times$，我们有

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{N}(K^\times) \in \Gamma_{\mathrm{rs}} \quad &\Longleftrightarrow \quad a\,\mathrm{N}(K_\ell^\times) = \mathrm{N}(K_\ell^\times) \quad \text{for every } \ell \text{ inert in } K, \\ &\Longleftrightarrow \quad (a,-p)_\ell = 1 \quad \text{for every } \ell \text{ inert in } K. \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，我们可以将（3.9）限制到 Γ_{rs}，从而得到一个更简单的短正合列

$$1 \longrightarrow \Gamma_{\mathrm{rs}} \longrightarrow \bigoplus_{\left(\frac{K}{\ell}\right)=0} \mathbb{Q}_\ell^\times / \mathrm{N}(K_\ell^\times) \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow 1. \tag{3.11}$$

若 $p = 2$ 或 $p \equiv 3$（模 4），则在 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 中唯一分歧的素数就是 p 本身。因此，由（3.11）的正合性可知 Γ_{rs} 是平凡的，从而证明了命题的（2）部分。

（3）最后，假设 $p \equiv 1$（模 4）。那么在 K 中恰有 2 个分歧素数，即 2 和 p。再次由（3.11）可知，Γ_{rs} 是一个阶为 2 的循环群，其生成元 $g\mathrm{N}(K^\times)$ 由（3.6）中的条件唯一确定。□

我们回到对埃尔米特空间 $(\overline{V},\ \varphi)$ 中 $\sqrt{-p}$-模格的研究。根据定义，O_K-格的 $\sqrt{-p}$-模性可以在局部刻画。

引理 3.9。当且仅当以下两个条件都成立时，$(\overline{V},\varphi)$ 中的 O_K-格 L 是 $\sqrt{-p}$-模的

(1) 对于每个素数 $\ell \neq p$，L_ℓ 都是(V_ℓ,φ_ℓ) 中的自对偶 O_{K_ℓ}-格；
(2) L_p 是$(V_p,\overline{\varphi_p})$中的 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格。

对于每个素数 ℓ（包括 $\ell = p$），上述局部 O_{K_ℓ}-格的存在对局部行列式 $d\varphi_\ell$ 施加了某些约束，我们将在下文加以说明。回顾 [21, 定理 3.1]：二次半单 $\mathbb{Q}_\ell$-代数 K_ℓ 上的非退化厄米空间 $(W_\ell,\ \psi_\ell)$ 由其秩和行列式唯一确定，且在等距意义下唯一。

引理 3.10。设(W_ℓ,ψ_ℓ) 是 K_ℓ 上的非退化厄米空间。
(1) 若 $\left(\frac{K}{\ell}\right) \in \{0,1\}$，则在 (W_ℓ,ψ_ℓ) 中总存在一个自对偶 O_{K_ℓ}-格；(2) 若 $\left(\frac{K}{\ell}\right) = -1$，则在 (W_ℓ,ψ_ℓ) 中存在自对偶 O_{K_ℓ}-格，当且仅当 $d\psi_\ell = 1$ 属于 $\mathbb{Q}_\ell^\times / \mathrm{N}(K_\ell^\times)$。
此外，若 ℓ 在 K 中非分歧，则 (W_ℓ,ψ_ℓ) 中至多有一个自对偶 O_{K_ℓ}-格的等距类。

证明。首先，假设 $\left(\frac{K}{\ell}\right) \in \{0,1\}$ 或 $d\psi_\ell = 1$ 属于 $\mathbb{Q}_\ell^\times/\mathrm{N}(K_\ell^\times)$。我们断言，在上述每种情况下，$d\psi_\ell$ 都可由某个单位 $u \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ 表示。若 $\left(\frac{K}{\ell}\right) = 1$，则这直接源于 $\mathbb{Q}_\ell^\times/\mathrm{N}(K_\ell^\times)$ 的平凡性。若 $\left(\frac{K}{\ell}\right) = 0$，则典范包含映射 $\mathbb{Z}_\ell^\times/\mathrm{N}(O_{K_\ell}^\times) \to \mathbb{Q}_\ell^\times/\mathrm{N}(K_\ell^\times)$ 是一个同构，因此 $d\psi_\ell$ 确实可由一个单位表示。这就验证了该断言，并使我们能够将 (W_ℓ,ψ_ℓ) 与厄米空间 $(K^{\mathrm{rank}(W_\ell)}{}_{\ell}, \langle\ ,\ \rangle)$ 视为同一空间；相对于标准基，其格拉姆矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,u)$。显然，标准 O_{K_ℓ}-格 $O^{\mathrm{rank}(W_\ell)}{}_{K_\ell}$ 是自对偶的。根据 §7], , 若 ℓ 在 K 中是惰性的，则每个自对偶 O_{K_ℓ}-格都有一组标准正交基，因此 (W_ℓ,ψ_ℓ) 中的此类格构成单一等距类。我们将证明留作一个简单练习：在分裂情形下，(W_ℓ,ψ_ℓ) 中自对偶 O_{K_ℓ}-格也只有一个等距类。

反之，假设在(W_ℓ,ψ_ℓ)中存在一个自对偶 O_{K_ℓ}-格 L_ℓ。则对 L_ℓ的任意 O_{K_ℓ}-基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，格拉姆矩阵 $[\psi_\ell(e_i,e_j)]_{1\le i,j\le n}$ 属于$\mathrm{GL}_n(O_{K_\ell})$。特别地，行列式 $d\psi_\ell \in \mathbb{Q}_\ell^\times/\mathrm{N}(K_\ell^\times)$由单位$\det[\psi_\ell(e_i,e_j)] \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ 表示。若进一步假设 ℓ 在 K中是惰性的，则

$(d\psi_\ell, -p)_\ell = (-1)^{\nu_\ell(d\psi_\ell)} = 1$，或等价地，$d\psi_\ell = 1$ 属于 $\mathbb{Q}_\ell^\times / \mathrm{N}(K_\ell^\times)$。这证明了该引理第二个陈述的必要性部分。□

注意，扩张 $K/\mathbb{Q}$ 存在分歧素数 $\ell \neq p$ 当且仅当 $p \equiv 1$（模 4），此时 $\ell = 2$。二进分歧情形下自对偶格的分类较为复杂，将推迟到引理 3.16。结合引理 3.10 和 (3.10)，我们立即得到以下推论。

推论 3.11。若在 (V, φ) 中存在 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格，则 $d\varphi \in \Gamma_{\mathrm{rs}}$。

现在固定一个在 $K/\mathbb{Q}$ 中分歧的素数 ℓ（例如 $\ell = p$），并考虑素数 ℓ 处的 $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 O_{K_ℓ}-格。为简便起见，埃尔米特 O_{K_ℓ}-格 $(M_\ell, \langle\,,\,\rangle_\ell)$ 常简写为 M_ℓ，因为埃尔米特形式 $\langle\,,\,\rangle_\ell \colon M_\ell \times M_\ell \to O_{K_\ell}$ 将默认包含在内。

定义 3.12. dM_ℓ 的行列式定义为：对于任意 O_{K_ℓ}-基 $\{e_i\}_{1 \le i \le \operatorname{rank} M_\ell}$，由格拉姆矩阵 $[\langle e_i, e_j\rangle_\ell]_{i,j}$ 的行列式表示的元素 $\mathbb{Q}_\ell^\times / \mathrm{N}(O_{K_\ell}^\times)$。$M_\ell$ 的尺度 定义为分式 O_{K_ℓ}-理想 $\mathfrak{s}(M_\ell) := \{\langle x, y\rangle_\ell \mid x, y \in M_\ell\}$，而范数 $\mathfrak{n}(M_\ell)$ 定义为由集合 $\{\langle x, x\rangle_\ell \mid x \in M_\ell\}$ 生成的分式 O_{K_ℓ}-理想。显然，$\mathfrak{n}(M_\ell) \subseteq \mathfrak{s}(M_\ell)$，若等式 $\mathfrak{n}(M_\ell) = \mathfrak{s}(M_\ell)$ 成立，我们称 M_ℓ 为正规，否则称为次正规。

秩 1 和 2 的埃尔米特格分别称为直线和平面。它们在分类理论中发挥着关键作用，因为根据命题 4.3]，每个埃尔米特格都可以写成模直线和平面的正交和。按定义，直线是正规的。沿用 Jacobowitz [21,§4]，，若 M_ℓ 是一个埃尔米特 O_{K_ℓ}-格，具有正交基 $e_1, \cdots, e_n$，且满足 $\langle e_i, e_i\rangle_\ell = a_i \in \mathbb{Q}_\ell$，则记作

$$M_\ell \simeq (a_1) \perp \cdots \perp (a_n).$$

同样地，若 $M_\ell = O_{K_\ell} e_1 \oplus O_{K_\ell} e_2$ 是一个平面，满足 $\langle e_1,\ e_1\rangle_\ell = a$，$\langle e_1, e_2\rangle_\ell = \alpha$，且 $\langle e_2,\ e_2\rangle_\ell = b$，则记作 $M_\ell \simeq \begin{bmatrix} a & \alpha \\ \alpha^\sigma & b \end{bmatrix}$。例如，我们将 $\sqrt{-p}$-模双曲 $\overline{O_{K_p}}$-平面 $H_p(1)$ 定义为埃尔米特 O_{K_p}-平面

$$H_p(1) \simeq \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-p} \\ -\sqrt{-p} & 0 \end{bmatrix}.$$

顾名思义，很容易证明 $H_p(1)$ 是 $\sqrt{-p}$-模的。当 $p \equiv 1$（模 4）且 $\ell = 2$ 时，我们还将自对偶双曲 O_{K_2}-平面 $H_2(0)$ 定义为埃尔米特 O_{K_2}-平面 $H_2(0) \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。

引理 3.13。每个 $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 O_{K_p}-格都具有偶数秩。

证明。设 M_p 是一个 $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 O_{K_p}-格。由于 $M_p = \sqrt{-p}\, M_p^\star$，我们有 $\mathfrak{s}(M_p) = \sqrt{-p}\, O_{K_p}$，它与 O_{K_p} 的唯一素理想重合。另一方面，范数 $\mathfrak{n}(M_p)$ 是 $\sqrt{-p}\, O_{K_p}$ 的偶次幂，因为 $K_p/\mathbb{Q}_p$ 是分歧的。因此，每个 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格都是次正规的。若秩 M_p 为奇数，则根据 [21, 命题 4.4]，M_p 是若干 $\sqrt{-p}$-模直线的正交直和；这显然矛盾，因为每条直线都是正规的。□

此后我们将专门讨论偶数维非退化厄米空间。当 p 为奇数时， $K_p/\mathbb{Q}_p$ 是一个非二进分歧扩张。正如 Jacobowitz [21], 所示，在这种情形下， $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格的分类比二进情形简单得多。

引理 3.14. 设 p 为奇素数，且 (W_p, ψ_p) 为偶数维非退化埃尔米特 K_p-空间。当且仅当 $d\psi_p = (-1)^{(\dim W_p)/2}$ 属于 $\mathbb{Q}_p^\times / \mathrm{N}(K_p^\times)$时，其中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格；在这种情况下，(W_p, ψ_p)中的这类格有唯一的等距类。此外，每个 $\sqrt{-p}$-模O_{K_p}-格的范数为 pO_{K_p}。

证明. 由 [21, 命题 8.1], , 每个 $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 O_{K_p}-格都等距同构于某个 $m > 0$ 的 $H_p(1)^{\oplus m}$ 。因此，当且仅当 $(W_p, \psi_p) \simeq H_p(1)^{\oplus(\dim W_p)/2} \otimes \mathbb{Q}_p$时， (W_p, ψ_p) 中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格；等价地，

$$d\psi_p = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{-p} \\ -\sqrt{-p} & 0 \end{vmatrix}^{(\dim W_p)/2} = (-p)^{(\dim W_p)/2} = (-1)^{(\dim W_p)/2} \in \mathbb{Q}_p^\times / \mathrm{N}(K_p^\times).$$

显然，若存在，(W_p, ψ_p)中的所有这类格都构成一个等距类。直接计算可得 $\mathfrak{n}(H_p(1)^m) = \mathfrak{n}(H_p(1)) = pO_{K_p}$。 □

接下来讨论二进分歧情形，它进一步分为两个子情形。若 $p = 2$, 二次扩张 $K_2/\mathbb{Q}_2$ 属于 Jacobowitz [21], 所称的分歧素数 （“R-P”）型，因为 $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})/\mathbb{Q}_2$ 由 $\mathbb{Q}_2$的一个素元的平方根生成。若 $p \equiv 1$ （模 4）， $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-p})/\mathbb{Q}_2$ 属于分歧单位（ “R-U” ）型，因为 $-p$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 中的一个单位。在这两种情形下，我们都有 $(-1, -p)_2 = -1$，因此包含关系 $\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{Z}_2^\times$ 诱导出以下典范同构

$$\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2^\times / \mathrm{N}(O_{K_2}^\times) \simeq \mathbb{Q}_2^\times / \mathrm{N}(K_2^\times), \quad \text{and} \quad \mathbb{Q}_2^\times / \mathrm{N}(O_{K_2}^\times) \simeq \{\pm 2^{\mathbb{Z}}\}. \tag{3.12}$$

引理 3.15. 设 $p = 2$, 且 (W_2, ψ_2) 是偶数维非退化厄米 K_2-空间。则其中总是存在一个 $\sqrt{-2}$-模 O_{K_2}-格，且每个这样的格都与 $M_2 \perp H_2(1)^{(\dim W_2)/2-1}$ 等距同构，其中 $\sqrt{-2}$ 为模平面。更明确地说，我们有

- $M_2 \simeq \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{-2} \\ -\sqrt{-2} & 4 \end{bmatrix}$ *if* $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2-1} \in \mathbb{Q}_2^\times / \mathrm{N}(K_2^\times)$*; and*
- *either* $M_2 = H_2(1)$ *or* $M_2 \simeq \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{-2} \\ -\sqrt{-2} & 0 \end{bmatrix}$ *if* $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2} \in \mathbb{Q}_2^\times / \mathrm{N}(K_2^\times)$.

特别地，若 $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2-1}$，则 (W_2, ψ_2)中有唯一一个 $\sqrt{-2}$-模 O_{K_2}-格等距类。若 $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2}$，则这样的格有两个等距类，二者根据范数等于 $4O_{K_2}$ 还是 $2O_{K_2}$ 来区分。

证明。 由 [21, 命题 10.3], 每个 $\sqrt{-2}$-模 O_{K_2}-格 L_2 都等距同构于 $M_2 \perp H_2(1)^m$，其中 $m \geq 0$为某个元素，且 M_2 是一个 $\sqrt{-2}$-模平面，其范数为 $\mathfrak{n}(M_2) = \mathfrak{n}(L_2)$。因此，在$(W_2, \psi_2)$中存在一个$\sqrt{-2}$-模格，当且仅当$(W_2, \psi_2)$与$(M_2 \perp H_2(1)^{(\dim W_2)/2-1})$等距同构，其中 $\otimes \mathbb{Q}_2$ 对于某个$\sqrt{-2}$-模平面M_2成立，或等价地

$$d\psi_2 = dM_2 \cdot (-1)^{\frac{\dim W_2}{2}-1} \in \mathbb{Q}_2^\times / \mathrm{N}(K_2^\times) \qquad \text{for some } M_2. \tag{3.13}$$

接下来需要对所有 $\sqrt{-2}$-模 O_{K_2}-平面进行分类，并证明总存在满足(3.13)的 M_2。由 [21, 命题 10.4], 一个$\sqrt{-2}$-模平面 M_2 在同构意义下由其范数 $\mathfrak{n}(M_2)$和行列式 $dM_2 \in \mathbb{Q}_2^\times/\mathrm{N}(O_{K_2}^\times)$唯一确定。结合 [21, 命题 9.1.a)和(9.1)], , 可得

$$\sqrt{-2}\,O_{K_2} = \mathfrak{s}(M_2) \supsetneqq \mathfrak{n}(M_2) \supseteq \mathfrak{n}(H_2(1)) = 4O_{K_2}, \tag{3.14}$$

等式 $\mathfrak{n}(M_2) = \mathfrak{n}(H_2(1))$成立，当且仅当根据 [21,命题 9.2]有 $M_2 \simeq H_2(1)$。若 $\mathfrak{n}(M_2) \supsetneqq \mathfrak{n}(H_2(1))$，则由 (3.14) 得 $\mathfrak{n}(M_2) = 2O_{K_2}$ 。另一方面，由于 M_2 是一个 $\sqrt{-2}$-模平面，其行列式 dM_2 必然生成理想 $2O_{K_2}$，因此 $dM_2 \in \{\pm 2\} \subseteq \mathbb{Q}_2^\times/\mathrm{N}(O_{K_2}^\times)$。直接应用[21, 命题 10.2.b)] 可知，当 $\mathfrak{n}(M_2) = 2O_{K_2}$时，我们有

$$M_2 \simeq \begin{cases} \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{-2} \\ -\sqrt{-2} & 4 \end{bmatrix} & \text{if } dM_2 = 2; \\ \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{-2} \\ -\sqrt{-2} & 0 \end{bmatrix} & \text{if } dM_2 = -2. \end{cases} \tag{3.15}$$

由上述对 M_2的分类，立即可得该引理。 □

假设 $p \equiv 1 \pmod 4$，因此 $\ell = 2$ 是 $K/\mathbb{Q}$ 中一个不同于 p的分歧素数。我们在引理 3.10 中已看到，每个非退化埃尔米特 K_2-空间中都存在自对偶 O_{K_2}-格。剩下的工作是将它们分类为等距类。

引理 3.16. 设 $p \equiv 1 \pmod 4$。令 (W_2, ψ_2) 为偶数维非退化埃尔米特 K_2-空间，且 L_2 为 (W_2, ψ_2) 中的自对偶 O_{K_2}-格。

(1) 若 $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2-1} \in \mathbb{Q}_2^\times/\,\mathrm{N}(K_2^\times)$，则 L_2 是与

$$(1) \perp (1) \perp H_2(0)^{(\dim W_2)/2-1},$$

等距同构的正规格，从而 $\mathfrak{n}(L_2) = O_{K_2}$。特别地，在此情形下存在唯一的自对偶 O_{K_2}-格的等距类。

(2) 若 $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2} \in \mathbb{Q}_2^\times/\,\mathrm{N}(K_2^\times)$，则

$$L_2 \simeq \begin{cases} (1) \perp (-1) \perp H_2(0)^{(\dim W_2)/2-1} & \textit{if } L_2 \textit{ is normal}; \\ H_2(0)^{(\dim W_2)/2} & \textit{if } L_2 \textit{ is subnormal}. \end{cases}$$

特别地，存在两个自对偶 O_{K_2}-格的等距类，由该格是正规还是次正规来区分（或等价地，由该格的范数来区分）。若 L_2 是正规的，则 $\mathfrak{n}(L_2) = O_{K_2}$；若 L_2 是次正规的，则 $\mathfrak{n}(L_2) = 2O_{K_2}$。

证明。再次由 [21, 命题 10.3] 可知，在 (W_2, ψ_2) 中的每个自对偶 O_{K_2}-格 L_2 都等距同构于 $M_2 \perp H_2(0)^{(\dim W_2)/2-1}$，其中某个自对偶 O_{K_2}-平面 M_2 满足

$$\mathfrak{n}(M_2) = \mathfrak{n}(L_2) \qquad \text{and} \qquad dM_2 \cdot (-1)^{\frac{\dim W_2}{2}-1} = d\psi_2 \in \mathbb{Q}_2^\times/\,\mathrm{N}(K_2^\times). \tag{3.16}$$

由于 M_2 是自对偶的，其行列式 dM_2 属于群 $\mathbb{Z}_2^\times/\mathrm{N}(O_{K_2}^\times)$，该群已在 (3.12) 中被典范地识别为 $\{\pm 1\}$ 。与引理 3.15 中讨论的 R-P 情形类似，由 [21, 命题 10.4]可知，自对偶平面 M_2 在同构意义下由其范数 $\mathfrak{n}(M_2)$ 和行列式 $dM_2 \in \{\pm 1\}$唯一确定。结合 [21, 命题 9.1.a) 和 (9.1)], , 可得

$$O_{K_2} = \mathfrak{s}(M_2) \supseteq \mathfrak{n}(M_2) \supseteq \mathfrak{n}(H_2(0)) = 2O_{K_2}. \tag{3.17}$$

现在，由 [21, 命题 9.2 和 9.3]以及 (3.17) 可知，以下各项等价：

- $\mathfrak{n}(M_2) = \mathfrak{n}(H_2(0))$;
- M_2 （因此 L_2）是次正规；
- $M_2 \simeq H_2(0)$，或等价地， $L_2 \simeq H_2(0)$ (维数 W_2) /2。

比较行列式可知，存在一个自对偶 O_{K_2}-格 L_2，属于 (W_2, ψ_2)，且满足 $L_2 \simeq H_2(0)^{(\dim W_2)/2}$，当且仅当 $d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2} \in \mathbb{Q}_2^\times/\mathrm{N}(K_2^\times)$；此时，$(W_2, \psi_2)$ 中所有次正规自对偶 O_{K_2}-格构成单个等距类，其代表元为这样的一个 L_2。

若 $\mathfrak{n}(M_2) \supsetneq \mathfrak{n}(H_2(0))$，则必有 M_2 是正规的，且 $\mathfrak{n}(M_2) = O_{K_2}$。结合 (3.16) 与 [21, 命题 10.2.a)], , 我们得到

$$M_2 \simeq \begin{cases} (1) \perp (1) & \text{if } d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2-1}; \\ (1) \perp (-1) & \text{if } d\psi_2 = (-1)^{(\dim W_2)/2}. \end{cases} \tag{3.18}$$

因此，在引理陈述所述的 (W_2, ψ_2) 中， O_{K_2}-格的正规自对偶等距类总是唯一的。□

定理 *3.5* 的证明。首先，假设在 n 维正定埃尔米特 K-空间 (V, φ) 中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格。我们分别在引理 3.13 和推论 3.11 中证明了 $2 \mid n$ 和 $d\varphi \in \Gamma_{\mathrm{rs}}$。对于 $p \not\equiv 1 \pmod 4$ 的情形，后者已蕴含 $d\varphi = [1]$ 属于 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$，因为由命题 3.7(2) 可知此时 Γ_{rs} 是平凡的。若 $p \equiv 1 \pmod 4$，则 Γ_{rs} 是一个阶为 2 的循环群，其生成元 $g\mathrm{N}(K^\times)$ 由 (3.6) 刻画。另一方面，在 p 处的局部情形下，(V_p, φ_p) 中存在 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格，这由引理 3.14 蕴含 $d\varphi_p = (-1)^{n/2} \in \mathbb{Q}_p^\times/\mathrm{N}(K_p^\times)$。局部行列式与整体行列式之间的相容性迫使

$$(d\varphi, -p)_p = (d\varphi_p, -p)_p = ((-1)^{n/2}, -p)_p = \left(\frac{-1}{p}\right)^{n/2} = 1 \neq (g, -p)_p, \tag{3.19}$$

因此，对于 $p \equiv 1 \pmod 4$ 的情形同样有 $d\varphi = [1] \in \mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$。这证明了定理 3.5 的第 (1) 部分。

保持 (V, φ) 中 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的存在性假设。若 $p \equiv 3 \pmod 4$，类似的局部-整体相容性考虑如下给出关于 V 的维数的所需条件 $4 \mid n$ 。事实上，对于这一情形，我们已经知道 $d\varphi = [1]$ 以及 $d\varphi_p = (-1)^{n/2}$。将它们合在一起，我们得到

$$1 = (d\varphi, -p)_p = (d\varphi_p, -p)_p = ((-1)^{n/2}, -p)_p = \left(\frac{-1}{p}\right)^{n/2} = (-1)^{n/2},$$

由此推出 $4 \mid n$。这证明了定理 3.5 中陈述 (2) 的必要性部分。

反之，假设 $d\varphi = [1]$ ，且下列条件之一成立：

(a) $p \equiv 3 \pmod 4$，且 $4 \mid n$,

(b) $p \not\equiv 3 \pmod 4$，且 $2 \mid n$。

我们证明存在一个 ($\sqrt{-p}$-模 O_K)-格 L，它位于 (V, φ) 中。由于 (V, φ) 是正定的，且具有 $d\varphi = [1]$，我们不妨将 (V, φ) 视为标准埃尔米特空间 $(K^n, \langle , \rangle)$，其关于标准基的格拉姆矩阵为单位矩阵。令 $L_0 := O_K^n$ 为 $(K^n, \langle , \rangle)$ 中的标准格，它显然是自对偶的。由引理 3.14 和 3.15，存在一个 $\sqrt{-p}$-模 —

O_{K_p}-格 N_p，它位于 $(K_p^n, \langle , \rangle_p)$ 中。现在由格的局部-整体原理[12, 命题 4.21]，，存在一个 O_K-格 L，它位于 K^n 中，使得 $L_p = N_p$，并且对每个素数 $\ell \neq p$ 都有 $L_\ell = L_0 \otimes \mathbb{Z}_\ell$。按照构造，这样的 O_K-格 L 是 $\sqrt{-p}$-模的。至此，定理 3.5 的陈述 (2) 得证。 □

接下来需要对 (V, φ) 中的 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的属进行分类。我们将上述偶数维厄米空间 $(V, \varphi) = (K^n, \langle , \rangle)$ 固定，并进一步假设 $4 \mid n$ if $p \equiv 3$（模 4）。设 L 是 (V, φ) 中的一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格。若 $\ell \in \mathbb{N}$ 是 K 中一个未分歧的素数，则由引理 3.10，(V_ℓ, ψ_ℓ) 中自对偶 O_{K_ℓ}-格的等距类唯一。特别地，$L_\ell \simeq L_0 \otimes Z_\ell$，其中 $L_0 = O_K^n$ 是如上所述的标准 O_K-格。因此，属的分类归结为在分歧素数处进行纯粹的局部分类。同样，范数 $\mathfrak{n}(L)$ 的计算也归结为在分歧素数处进行局部计算，因为

$$\mathfrak{n}(L) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \mathfrak{n}(L_0 \otimes Z_\ell) = O_{K_\ell} \qquad \text{for every unramified prime } \ell.$$

首先，设 p 为奇数。根据引理 3.14，在 (V_p, φ_p) 中存在唯一一个 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格的等距类，其中每一个格的范数均为 pO_{K_p}。若进一步假设 $p \equiv 3$（模 4），则 p 是 $K/\mathbb{Q}$ 中唯一的分歧素数。因此，在这种情况下，(V, φ) 中存在唯一的 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的属，其中所有格的范数均为 pO_K。

$p \equiv 1$（模 4）的情形更为复杂，因为 $\ell = 2$ 是 K 中额外的分歧素数。鉴于上述在 p 处的局部唯一性结果，(V, φ) 中 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的属数目，与 (V_2, φ_2) 中自对偶 O_{K_2}-格的等距类数目相同。引理 3.16 已表明，(V_2, φ_2) 中自对偶格的分类取决于行列式 $d\varphi_2$ 与 $n/2$ 的奇偶性之间的关系。由于根据假设，$d\varphi_2$ 已固定为 1，我们的讨论根据 $n/2$ 的奇偶性分为两个子情形。若 $n \equiv 2$（模 4），则根据引理 3.16，(V_2, φ_2) 中存在唯一一个自对偶 O_{K_2}-格的等距类，且所有这些格的范数均为 O_{K_2}。因此，在这种情况下，(V, φ) 中存在唯一一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的属，且所有这些格的范数均为 pO_K。若 $4 \mid n$，则 (V_2, φ_2) 中存在两个自对偶 O_{K_2}-格的等距类，其区别在于相应的范数是否等于 O_{K_2} 或 $2O_{K_2}$。因此，当 $p \equiv 1$（模 4）且 $4 \mid n$ 时，(V, φ) 中存在两个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格的属，其区别在于相应的范数是否等于 pO_K 或 $2pO_K$。

最后，假设 $p = 2$。在这种情况下，2 是 K 中唯一的分歧素数。根据引理 3.15，(V_2, φ_2) 中 $\sqrt{-2}$-模 O_{K_2}-格的等距类数同样取决于 $n/2$ 的奇偶性，因为 $d\varphi_2 = 1$。若 $n \equiv 2$（模 4），则 (V_2, φ_2) 中存在唯一的 $\sqrt{-2}$-模 O_{K_2}-格等距类，它们的范数均为 $2O_{K_2}$。若 $4 \mid n$，则 (V_2, φ_2) 中存在两个此类格的等距类，其区别在于相应的范数等于 $2O_{K_2}$ 还是 $4O_{K_2}$。由此可得 (V, φ) 中 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格各属的整体分类。□

4. $\sqrt{-p}$-MODULAR HERMITIAN $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$-LATTICES WHEN $p \equiv 3 \pmod 4$

我们沿用上一节的记号，并进一步假设在本节中始终有 $p \equiv 3 \pmod 4$，特别是 $p \neq 2$。二次序 $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ 是 $O_K := \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{-p}}{2}]$ 中导子为 2 的子序。回顾一下，R-格

L 在正定埃尔米特 K-空间 $(V,\ \varphi)$ 中称为 $\sqrt{-p}$-模，如果 $\sqrt{-p}L^\vee = L$，其中 $L^\vee := \{x \in V \mid \varphi(x,\ L) \subseteq R\}$ 是 L 的 R-值对偶格。本节旨在给出 $(V,\ \varphi)$ 中存在 $\sqrt{-p}$-模 R-格 L 的充要条件，并对这类格的属进行分类。

首先，O_K-格自动也是一个 R-格。以下结果可直接由引理 3.3 和定理 3.5 联合推出。

引理 4.1。存在一个 O_K-格 L *in* (V,φ) 满足 $\sqrt{-p}\,L^\vee = L$，当且仅当 $4 \mid n$ 且 $d\varphi = [1]$；此时这样的 O_K-格有唯一的属。

现在我们转而研究一般的 $\sqrt{-p}$-模 R-格。由于对于每个奇素数 ℓ（包括 $\ell = p$），$R_\ell = O_{K_\ell}$，一个 R-格 L 满足 $L^\vee = \sqrt{-p}\,L$ 当且仅当以下条件全部成立：

(i) L_2 是 (V_2, φ_2) 中的自对偶 R_2-格；(ii) 对每个奇素数 $\ell \neq p$，L_ℓ 是 (V_ℓ, φ_ℓ) 中的自对偶 O_{K_ℓ}-格；(iii) L_p 是 (V_p, φ_p) 中的 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格。

结合引理 3.10 和引理 3.14 以及短正合列 (3.9)，我们得到以下引理。

引理 4.2. 若在 (V,φ) 中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 R-格，则必有以下情形之一成立：

(a) $p \equiv 7$ (模 8)，$4 \mid n$ 且 $d\varphi = [1]$。(b) $p \equiv 3$ (模 8)，$4 \mid n$ 且 $d\varphi = [1]$。(c) $p \equiv 3$ (模 8)，$n \equiv 2$ (模 4) 且 $d\varphi = [2]$。

证明。由假设，$p \equiv 3$ (模 4)，因此根据命题 3.7，初等 2-群 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 的一个 $\mathbb{F}_2$-基由惰性素数 $\mathscr{P}_{\mathrm{in}} := \left\{\text{素数 } \ell \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left(\tfrac{K}{\ell}\right) = -1\right\}$ 构成。假设存在一个 R-格 L，它在 $(V,\ \varphi)$ 中并满足 $L^\vee = \sqrt{-p}\,L$。那么对于每个奇素数 $\ell \neq p$，L_ℓ 都是 (V_ℓ, φ_ℓ) 中的自对偶 O_{K_ℓ}-格，而 L_p 是 $(V_p,\ \varphi_p)$ 中的 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格。分别由引理 3.10 和引理 3.14 可得

- $(d\varphi, -p)_\ell = 1$ for every odd prime $\ell \neq p$;
- $n = \dim V$ is even and $(d\varphi, -p)_p = (-1)^{n/2}$.

特别地，对于每个在 K 中惰性的奇素数 ℓ，ℓ-进赋值 $\nu_\ell(d\varphi)$ 都是偶数。因此，$d\varphi$ 属于由元素 $2\,\mathrm{N}(K^\times)$ 生成的 $\mathbb{Q}_+^\times/\mathrm{N}(K^\times)$ 的子群，因为 p 是在 K 和 $p \in \mathrm{N}(K^\times)$ 中唯一分歧的素数。

首先，假设 $p \equiv 7 \pmod 8$，那么 2 在 K 中分裂，并且 $(2,\ -p)_2 = (2,\ -p)_p = 1$。由短正合列 (3.9) 可得 $2 \in \mathrm{N}(K^\times)$，因此在这种情况下 $d\varphi = [1]$。将其与 p 处的局部条件 $(d\varphi,\ -p)_p = (-1)^{n/2}$ 比较，我们得出在这种情况下 n 可被 4 整除。

接下来，假设 $p \equiv 3$ (模 8)，那么 2 在 K 中是惰性的，并且 $(2,\ -p)_2 = (2,\ -p)_p = -1$。因此，$2\,\mathrm{N}(K^\times)$ 在 $\mathbb{Q}_+^\times/\,\mathrm{N}(K^\times)$ 中生成一个阶为 2 的循环群。根据 $d\varphi = [1]$ 或 $d\varphi = [2]$，此情形又分为两个子情形。在每个子情形中，局部等式 $(d\varphi,\ -p)_p = (-1)^{n/2}$ 分别转化为关于 n 的以下条件：

$$n \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4 & \text{if } d\varphi = [1]; \\ 2 \pmod 4 & \text{if } d\varphi = [2]. \end{cases}$$

□

自对偶埃尔米特 R_2-格的分类工作由第三位署名作者完成，他在 [47, 定理 1.1 和定理 1.2] 中得到了以下结果。

命题 4.3. 对于每个正整数 n，以下两个集合之间存在双射

(4.1)
$$\mathrm{Latt}_n \coloneqq \left\{ \begin{array}{l} \textit{isometric classes of self-} \\ \textit{dual hermitian } R_2\textit{-lattices} \\ \textit{of } \mathbb{Z}_2\textit{-rank } 2n \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{isometric classes of sym-} \\ \textit{metric } \mathbb{F}_2\textit{-bilinear forms} \\ \textit{on the space } (\mathbb{F}_2)^n \end{array} \right\} =: \mathrm{Bil}_n .$$

这里考虑 $\mathbb{F}_2^n$ 上所有对称 $\mathbb{F}_2$-双线性形式，包括退化形式。

尽管 [47, 定理 1.1 和 1.2] 的陈述看起来几乎相同，但其中埃尔米特 R_2-格的分类需要分成两种不同情形，并根据 2 在 K 中是分裂还是惰性，分别进行处理。本节提供一种替代方法，以统一的方式处理这两种情形。

我们方法的出发点是观察到，R_2 是 Bass 本人在其原始著作 [4] 中研究的 Bass 阶。下一节将回顾 Bass 阶的精确定义，以及 Borevich 和 Faddeev [8] 给出的交换 Bass 阶上格的结构定理（参见 Curtis-Reiner [12, 第 37 节，第 789] 页）。应用于当前情形时，该定理仅表明，自由 K_2-模中的每个 R_2-格 N 都允许直和分解

$$N = N_1 \oplus N_2, \tag{4.2}$$

其中，N_1 是自由的 R_2-格，而 N_2 是自由的 O_{K_2}-格。虽然分解式 (4.2) 一般不一定唯一，但非负整数有序对 $(r,s) \coloneqq (\text{秩}_{R_2}(N_1), \text{秩}_{O_{K_2}}(N_2))$ 由 N 本身唯一确定，称为 N的型 。

注 4.4. R_2-格 N 的型 (r,s) 可按如下方式计算。设 $\widetilde{N} \coloneqq N \otimes_{R_2} K_2$中生成的 O_{K_2}-模。那么 N 是一个自由的 O_{K_2}-格$\widetilde{N}$，且 $2\widetilde{N} \subseteq N \subseteq \widetilde{N}$。由于 $R_2/2O_{K_2} \simeq \mathbb{F}_2$，而 $\dim_{\mathbb{F}_2}(O_{K_2}/2O_{K_2}) = 2$，因此有序对 (r,s) 可由下式计算

$$\begin{cases} r+s = \mathrm{rank}_{O_{K_2}}(\widetilde{N}) = \mathrm{rank}_{K_2}(N \otimes \mathbb{Q}_2), \\ r+2s = \dim_{\mathbb{F}_2}(N/2\widetilde{N}). \end{cases} \tag{4.3}$$

定义 4.5。记 $\mathcal{L}_0$ 为带有埃尔米特配对 $\langle\ ,\ \rangle_0$ 的幺模 O_{K_2}-线 $O_{K_2}e$，使得 $\langle e, e\rangle_0 = 2$。

假设 N 带有一个完美 埃尔米特配对 $\langle\ ,\ \rangle\colon N \times N \to R_2$，因此 $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ 构成一个幺模埃尔米特 R_2-格。为简便起见，我们通常在记号中省略 $\langle\ ,\ \rangle$，并且只要上下文中的埃尔米特配对 $\langle\ ,\ \rangle$ 明确，就简称 N 为幺模埃尔米特 R_2-格。在下一节中，我们将为交换局部 Bass 序上的幺模埃尔米特格建立一个正交分解定理（即定理 5.11）。在本情形下，该定理结合第三位署名作者的 Witt 消去律 [47, 命题 4.4 和 5.7]，得到以下命题。

命题 4.6. 设 N 是一个型为(r,s)的幺模埃尔米特 R_2-格。那么存在一个正交分解 $N = N_1 \perp N_2$，使得

(1) N_1 是一个秩为 r 的幺模自由 R_2-格，其等距类型由 N唯一确定；(2) N_2 是一个与 $\mathcal{L}_0^s$等距同构的幺模自由 O_{K_2}-格。

特别地，若我们将 Latt_n^r 记为 Latt_n 中由所有型为 $(r, n-r)$ 的幺模埃尔米特 R_2-格的等距类所组成的子集，则将每个 $[N] \in \mathrm{Latt}_n^r$ 映到 $[N_1] \in \mathrm{Latt}_r^r$ 的映射 $\mathrm{Latt}_n^r \to \mathrm{Latt}_r^r$ 建立了一个良定义的双射。

证明。由定理 5.11，存在正交分解 $N = N_1 \perp N_2$，使得 N_1 是秩为 r的幺模自由 R_2- 格，且 N_2 是秩为 s 的幺模自由 O_{K_2}- 格。对每个 $i = 1$、 2，设 $\langle\,,\,\rangle_i$: $N_i \times N_i \to R_2$ 为厄米配对 $\langle\,,\,\rangle$: $N \times N \to R_2$ 到 N_i的限制。与 (3.2) 相同的论证表明，$\langle\,,\,\rangle_2$ 取值于 $2O_{K_2}$，且 $\frac{1}{2}\langle\,,\,\rangle_2$: $N_2 \times N_2 \to O_{K_2}$ 定义了 O_{K_2}-格的一个完美厄米配对。类似地，$\mathcal{L}_0$ 确实是一个幺模R_2-格，因为 $\frac{1}{2}\langle\,,\,\rangle_0$ 在 O_{K_2}-直线 $O_{K_2}e$上定义了一个完美厄米配对。由于 $K/\mathbb{Q}$ 在 2 处非分歧，由引理 3.10 可得 $N_2 \simeq \mathcal{L}_0^s$。现在我们应用 Witt 消去律 [47, 命题 4.4 与 5.7] ，可见 N_1 在等距意义下由 N唯一确定。□

我们应当注意，上文引用的 Witt 消去律在很大程度上依赖于 O_{K_2} 在 $\mathbb{Z}_2$上是不分歧的这一事实。正如例 5.12 所示，这样的结果一般并不成立。命题 4.6 将幺模埃尔米特 R_2-格的分类归结为所考虑的格在 R_2上自由的情形。

我们列出一些幺模埃尔米特自由 R_2-格的基本例子，它们将作为更一般格的构件。

定义 4.7。

(1) 记 $\mathcal{L}_1$ 为具有 $\langle e,\ e\rangle = 1$的 幺模 R_2-直线 $(R_2e,\ \langle\,,\,\rangle)$。 (2) 记 $\mathcal{H}$ 为相对于标准基 $\{e_1, e_2\}$ 的格拉姆矩阵由 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$给出的 幺模 R_2-平面 $(R_2e_1 \oplus R_2e_2,\ \langle\,,\,\rangle)$。

注 4.8。 (1) 每个秩一幺模自由 R_2-格都同构于$\mathcal{L}_1$。这由事实 $\mathsf{N}(R_2^\times) = \mathbb{Z}_2^\times$ 得出，可通过直接计算验证。或者，注意到 $[O_{K_2}^\times :\ R_2^\times] \in \{1, 3\}$ 总是奇数，而$\mathbb{Z}_2^\times$是阿贝尔前有限 2 群，这意味着 $\mathsf{N}(R_2^\times) = \mathsf{N}(O_{K_2}^\times) = \mathbb{Z}_2^\times$。

(2) 注意到 $\mathcal{H} \not\simeq \mathcal{L}_1^2$。事实上，由于 $\mathrm{Tr}^{K_2/\mathbb{Q}_2}(R_2) \subseteq 2\mathbb{Z}_2$，对于每个 $v \in \mathcal{H}$，都有 $\langle v,\ v\rangle \in 2\mathbb{Z}_2$。而对于 $\mathcal{L}_1^2$，显然不成立。

反过来，幺模双曲 R_2-平面可由条件$\langle v,\ v\rangle \in 2\mathbb{Z}_2$ 刻画，对所有 v 均成立，如下述引理所示。

引理 4.9. 设 H 是一个秩二幺模埃尔米特自由 R_2-格。若对所有 $v \in H$，都有 $\langle v, v\rangle \in 2\mathbb{Z}_2$ ，则 H 与幺模双曲 R_2-平面 $\mathcal{H}$ 等距同构。

证明。令 e_1, e_2 为 H 的一个 R_2-基。由于 $(H, \langle\,,\,\rangle)$ 是幺模的，格拉姆矩阵 $\begin{bmatrix} \langle e_1, & e_1\rangle & \langle e_1 & e_2\rangle \\ \langle e_2 & e_1\rangle & \langle e_2 & e_2\rangle \end{bmatrix}$ 属于 $\mathrm{GL}_2(R_2)$。根据我们的假设，$\langle e_1, e_1\rangle$ 和 $\langle e_2, e_2\rangle$ 均属于 $2\mathbb{Z}_2$，这迫使 $\langle e_1, e_2\rangle \in R_2^\times$ 成立。如有必要，将 e_2 替换为 $\langle e_1, e_2\rangle^{-1}e_2$ 后，我们可以并且将假设 $\langle e_1, e_2\rangle = 1$。

接下来，我们在 $H \smallsetminus \mathfrak{m}_2 H$ 中构造一个各向同性向量，其中 $\mathfrak{m}_2 = 2O_{K_2}$ 是 R_2 的唯一极大理想。设对某个 $a, b \in \mathbb{Z}_2$，有 $\langle e_1, e_1\rangle = 2a$ 且 $\langle e_2, e_2\rangle = 2b$。我们证明以下关于变量 x 的方程在 $\mathbb{Z}_2$ 中有解：

$$\langle (x + x\sqrt{-p}\,)e_1 + e_2, (x + x\sqrt{-p}\,)e_1 + e_2\rangle = 0. \tag{4.4}$$

方程左边可化简为 $f(x) := a(1+p)x^2 + x + b \in \mathbb{Z}_2[x]$，它模 2 化为一个首一一次多项式。由亨泽尔引理 [32, Chapter II, (4.6)] 可知，$f(x)$ 在 $\mathbb{Z}_2[x]$ 中有一个首一一次因子；等价地，方程 $f(x) = 0$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 中可解。解 $x_0 \in \mathbb{Z}_2$ 由此得到 $H \smallsetminus \mathfrak{m}_2 H$ 中的一个各向同性向量 $(x_0 + x_0\sqrt{-p})e_1 + e_2$。

最后，设 $u \in H \smallsetminus \mathfrak{m}_2 H$ 为一个各向同性向量。由于 $(H, \langle\,,\,\rangle)$ 是幺模的，存在 $v \in H \smallsetminus \mathfrak{m}_2 H$ 使得 $\langle u, v\rangle = 1$。由于 $\langle v, v\rangle \in 2\mathbb{Z}_2$，必要时我们可以将 v 替换为 $v - \frac{1}{2}\langle v, v\rangle u$，从而得到 $\langle v, v\rangle = 0$，且不影响等式 $\langle u, v\rangle = 1$。总之，我们找到了满足以下条件的一对向量 $u, v \in H \smallsetminus \mathfrak{m}_2 H$

$$\langle u, u\rangle = 0, \qquad \langle u, v\rangle = 1, \qquad \langle v, v\rangle = 0.$$

必然地，u，v 构成了 H 的一个 R_2-基，由此得到所需的同构 $(H, \langle\,,\,\rangle) \simeq \mathcal{H}$。□

命题 4.10。设 N 是秩为 r 的幺模埃尔米特自由 R_2-格。

(1) *If r is odd, then $N \simeq \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{H}^{(r-1)/2}$.*
(2) *If r is even, then N is isometric to either $\mathcal{H}^{r/2}$ or $\mathcal{L}_1^2 \perp \mathcal{H}^{(r-2)/2}$.*

证明。设 $\overline{N} := N/\mathfrak{m}_2 N$ 是 N 模 $\mathfrak{m}_2$ 约化后的结果。那么，N 是有限域 $\mathbb{F}_2 = R_2/2O_{K_2}$（含两个元素）上的维数为 r 的向量空间。完美厄米配对 $\langle\,,\,\rangle : N \times N \to R_2$ 在 N 上诱导出一个非退化对称 $\mathbb{F}_2$-双线性形式；为方便起见，仍记作 $\langle\,,\,\rangle$。例如，$\mathcal{L}_1$ 是一个 $\mathbb{F}_2$-直线 $\mathbb{F}_2\bar{e}$，满足 $\langle \bar{e}, \bar{e}\rangle = 1$；而 $\mathcal{H}$ 是一个双曲平面 $\mathbb{F}_2\bar{e}_1 \oplus \mathbb{F}_2\bar{e}_2$，其

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1\rangle = 0, \qquad \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle = 1, \qquad \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2\rangle = 0.$$

有限维非退化对称双线性 $\mathbb{F}_2$-空间已由第三位署名作者在 [47, 引理 4.7] 中完成分类，其中证明了每个这样的空间都可分解为直线与双曲平面的正交直和。更准确地说，我们有

(1) if r is odd, then $\overline{N} \simeq \overline{\mathcal{L}}_1 \perp \overline{\mathcal{H}}^{(r-1)/2}$;
(2) if r is even, then $\overline{N}$ is isometric to either $\overline{\mathcal{H}}^{r/2}$ or $\overline{\mathcal{L}}_1^2 \perp \overline{\mathcal{H}}^{(r-2)/2}$.

现在我们应用 [3, 推论 I.3.3]，将 N 的正交分解提升为 N 的正交分解。事实上，[3, 推论 I.3.3] 表明，对于每个正交分解 $N = P \perp Q$，都存在 $N = P \perp Q$ 的一个正交分解 N，由在 R_2 上自由的幺模 R_2-子格组成，并且满足 $P\ P/\mathfrak{m}_2 P$、$Q = Q/\mathfrak{m}_2 Q$。起初，[3, 推论 I.3.3] 只针对二次模或对称双线性模陈述，但同样的证明也适用于埃尔米特情形。由于 R_2 是局部的，每个有限生成的稳定自由 R_2-模都是自由的。特别地，R_2-格 Q 是自由的。这使我们能够归纳地应用 [3, 推论 I.3.3]，将 N 正交直和中的每条直线和平面提升为如上所述的 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{H}$ 的副本。由注 4.8 (1) 可知，每条 $\mathbb{F}_2$-直线的提升都同构于 $\mathcal{L}_1$。类似地，引理 4.9 表明，每个提升

双曲 $\mathbb{F}_2$-平面都同构于 $\mathcal{H}$。这就证明了所需的 N正交直和分解，其中各项是 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{H}$的副本。□

命题 *4.3* 的证明。回忆一下，Bil_n 表示标准的 n维 $\mathbb{F}_2$空间 $\mathbb{F}_2^n$上的对称 $\mathbb{F}_2$双线性形式（包括退化形式）的等距类集合。它自然分解为若干子集的不交并 $\mathrm{Bil}_n = \coprod_{r=0}^{n} \mathrm{Bil}_n^r$，其中每个 $\mathrm{Bil}_n^r \subset \mathrm{Bil}_n$ 表示秩为 r的类所成的子集。例如，Bil_n^n 恰好由 $\mathbb{F}_2^n$上的非退化类组成。给定 $\mathbb{F}_2^n$ 上的一个秩为 r 的对称双线性形式 b_r，我们用 $R(b_r)$表示 b_r的核。由 [28, §XV.1], 可知，存在一个典范双射 $\mathrm{Bil}_n^r \to \mathrm{Bil}_r^r$，它将每个 $[b_r] \in \mathrm{Bil}_n^r$ 映到诱导的非退化对称双线性形式 $\overline{\text{form}}\ b_r\colon \mathbb{F}_2^n/R(b_r) \times \mathbb{F}_2^n/R(b_r) \to \mathbb{F}_2$的等距类。

同样，n 阶为 $2n$ 的幺模埃尔米特R_2格的等距类集合 Latt_n 也有一个自然分解 $\mathrm{Latt}_n = \coprod_{r=0}^{n} \mathrm{Latt}_n^r$，分解为型 $(r, n-r)$ 的类的子集。我们在命题 4.6 中看到，存在一个典范双射 $\mathrm{Latt}_n^r \to \mathrm{Latt}_r^r$，它将每个类 $[N] \in \mathrm{Latt}_n^r$ 映到类 $[N_1] \in \mathrm{Latt}_r^r$，对应于 $N = N_1 \perp N_2$ 的一个正交分解，其中 N_1 是在 R_2 上秩为 r 的自由模。另一方面，命题 4.10 的证明表明，模 $\mathfrak{m}_2$ 约化诱导出一个双射 $\mathrm{Latt}_r^r \to \mathrm{Bil}_r^r$，将 $[N_1]$ 映到 $[N_1/\mathfrak{m}_2 N_1]$。

现在，将上述所有针对每个 $0 \le r \le n$ 的双射拼接起来，即可得到所需的双射 $\mathrm{Latt}_n \to \mathrm{Bil}_n$：

$$\mathrm{Latt}_n = \coprod_{r=0}^{n} \mathrm{Latt}_n^r \cong \coprod_{r=0}^{n} \mathrm{Latt}_r^r \cong \coprod_{r=0}^{n} \mathrm{Bil}_r^r \cong \coprod_{r=0}^{n} \mathrm{Bil}_n^r = \mathrm{Bil}_n\,. \qquad \square$$

最后，我们回到对 (V, φ) 中 $\sqrt{-p}$-模埃尔米特 R-格的分类，其中 (V, φ) 是一个维数为 n 的正定埃尔米特 K-空间。在引理 4.2 中，我们列出了此类格在 (V, φ) 中存在的一些必要条件。我们证明这些必要条件也是充分条件，并计算 (V, φ) 中 $\sqrt{-p}$-模 R-格的属数。

定理 4.11. 保持假设 $p \equiv 3$ (模 4)。

(1) 当且仅当满足以下条件之一时，$\sqrt{-p}$-模 R-格 L 存在于(V, φ)中：*(a)* $p \equiv 7$ (模 8)、$4 \mid n$ 和 $d\varphi = [1]$；或 *(b)* $p \equiv 3$ (模 8)、$4 \mid n$ 和 $d\varphi = [1]$；或 *(c)* $p \equiv 3$ (模 8)、$n \equiv 2$ (模 4) 和 $d\varphi = [2]$。

(2) 假设上述条件之一成立，因此在(V, φ)中存在一个 $\sqrt{-p}$-模 R-格。那么，此类格的每个属都由素数2处 (V_2, φ_2) 中相应的幺模 R_2-格等距类唯一确定。此外，情形 *(a)* 中有 $3n/2+1$ 个属，情形 *(b)* 中有 $n+1$ 个属，情形 *(c)* 中有 $n/2$ 个属。

证明。(1) 首先，假设条件 (a) 或 (b) 成立，从而有 $4 \mid n$ 和 $d\varphi = [1]$。由引理 4.1，存在 (V, φ) 中的一个 $\sqrt{-p}$-模 O_K-格，因此这两个条件也是充分的。接下来，假设条件 (c) 成立。在这种情况下，我们将 (V, φ) 与厄米空间 $(K^n, \langle , \rangle)$ 等同起来；相对于标准基，其格拉姆矩阵由对角矩阵 $\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, 2)$ 给出。$(K^n, \langle , \rangle)$ 中的标准 R-格 $L_0 := R^n$ 在每个奇素数 ℓ 处都是自对偶的。在素数 p 处，条件 (c) 意味着

$$(d\varphi, -p)_p = (2, -p)_p = -1 = (-1)^{(\dim V)/2},$$

因此由引理 3.14 可知，存在 $(K_p^n,\ \langle\ ,\ \rangle_p)$ 中的一个 $\sqrt{-p}$-模 O_{K_p}-格 N_p。在素数 2 处，若置 $M_2 \coloneqq \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_0^{n-1}$，则 $d(M_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Q}_2) = 2^{n-1}$，由此可知，由于 $n-1$ 为奇数，我们可以将 $M_2 \otimes \mathbb{Q}_2$ 与 $(V_2,\ \varphi_2)$ 等同起来，因为它们在 $\mathbb{Q}_2^\times / \mathrm{N}(K_2^\times)$ 中具有相同的行列式。现在我们应用格的局部-整体原理 [12, 命题 4.21]，得到 K^n 中的一个 R-格 L，使得

$$L_p = N_p, \quad L_2 = M_2, \quad \text{and} \quad L_\ell = L_0 \otimes \mathbb{Z}_\ell \quad \text{for every odd prime } \ell \neq p.$$

这样的 R-格 L 按构造是 $\sqrt{-p}$-模的。这证明了条件 (c) 的充分性。

(2) 假设定理第 (1) 部分的三个条件之一成立。为了分类 $(V,\ \varphi)$ 中 $\sqrt{-p}$-模 R-格的属，注意到 R_ℓ 在每个奇素数 ℓ 处都是极大的，而 p 是 $K/\mathbb{Q}$ 中唯一的分歧素数。给定 $(V,\ \varphi)$ 中两个这样的 R-格 $L,\ L'$，由引理 3.10 可知，对每个奇素数 $\ell \neq p$，都有 $L_\ell \simeq L'_\ell$；由引理 3.14 可知，$L_p \simeq L'_p$。因此，属的分类归结为素数 2 处纯粹的局部分类。$(V_2,\ \varphi_2)$ 中的幺模 R_2-格 L_2 必然具有型 $(n-s,\ s)$，其中 $0 \le s \le n$。我们将分别处理这三种不同的情形。

首先，假设条件 (a) 成立。在这种情况下，2 在 K 中分裂为 $p \equiv 7$（模 8），因此存在唯一的秩为 n 的非退化埃尔米特 K_2-空间等距类。结合命题 4.6 和 4.10，我们得到

$$L_2 \simeq \begin{cases} \mathcal{L}_0^n & \text{if } s = n, \\ \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{H}^{(n-s-1)/2} \perp \mathcal{L}_0^s & \text{if } s \text{ is odd}, \\ \mathcal{H}^{(n-s)/2} \perp \mathcal{L}_0^s \text{ or } \mathcal{L}_1^2 \perp \mathcal{H}^{(n-s-2)/2} \perp \mathcal{L}_0^s & \text{if } s \text{ is even and } s < n. \end{cases} \tag{4.5}$$

由此可知，在这种情况下，(V, φ) 中有 $3n/2 + 1$ 个 $\sqrt{-p}$-模 R-格的属。

接下来，假设条件 (b) 成立。在这种情况下，2 在 K 中是惰性的，并且 $\mathbb{Q}_2/\mathrm{N}(K_2^\times)$ 是一个由 2 $\mathrm{N}(K_2^\times)$ 生成的阶为 2 的循环群。假设 $d\varphi = [1]$ 因此迫使 (V_2, φ_2) 中的每个幺模 R_2-格 L_2 的 s 都是偶数。事实上，若 s 为奇数，则 $L_2 \simeq \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{H}^{(n-s-1)/2} \perp \mathcal{L}_0^s$，这会导致矛盾，因为 $(\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{H}^{(n-s-1)/2} \perp \mathcal{L}_0^s) \otimes \mathbb{Q}_2$ 的行列式与 (V_2, φ_2) 的行列式不相符：

$$d((\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{H}^{(n-s-1)/2} \perp \mathcal{L}_0^s) \otimes \mathbb{Q}_2) = (-1)^{(n-s-1)/2} 2^s = 2 \neq d\varphi \in \mathbb{Q}_2/\mathrm{N}(K_2^\times).$$

因此，在这种情况下，L_2 的等距类有以下几种可能：

$$L_2 \simeq \begin{cases} \mathcal{L}_0^n & \text{if } s = n, \\ \mathcal{H}^{(n-s)/2} \perp \mathcal{L}_0^s \text{ or } \mathcal{L}_1^2 \perp \mathcal{H}^{(n-s-2)/2} \perp \mathcal{L}_0^s & \text{if } s \text{ is even and } s < n. \end{cases} \tag{4.6}$$

由此可知，$(V,\ \varphi)$中有 $n+1$ 个 $\sqrt{-p}$-模 R-格的属。

最后，假设条件 (c) 成立。与上文相同的论证表明，在这种情况下，s 必须为奇数。因此，$(V_2,\ \varphi_2)$中的每个幺模 R_2-格 L_2 都与某个 $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{H}^{(n-s-1)/2} \perp \mathcal{L}_0^s$ 等距同构，其中 s 是介于 0 和 n 之间的奇数。由此可知，在这种情况下，$(V,\ \varphi)$中有 $n/2$ 个 $\sqrt{-p}$-模 R-格的属。□

5. 交换局部 Bass 序上的幺模格

在本节中，我们固定一个完备离散赋值环 Z，并将其分式域记为 Q。设 E 是一个交换半单 Q-代数，且 R

是 E 中的一个（满秩） Z-阶。所谓 R-格，是指某个自由 E-模 V 中的有限 R-模 M，满足 $M \otimes_Z Q = V$。假设 R 在 E/Q 的某个（可能平凡的）对合 $a \mapsto a^\sigma$ 下稳定。按照 [28, §XIII.7], , M 上的一个半双线性型 是一个双可加配对

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to R \tag{5.1}$$

即在第一个变量上是 R-线性的，在第二个变量上是 (R, σ)-线性的。设$\varepsilon \in O_E^\times$ 是一个满足 $\varepsilon\varepsilon^\sigma = 1$ 的单位。若半双线性型 $\langle\ ,\ \rangle$ 满足 ε-厄米条件，则称其为 $\langle y, x\rangle = \varepsilon\langle x, y\rangle^\sigma$ 对所有 $x, y \in M$均成立；此时，单位 ε 必然还满足 $\varepsilon^\sigma\langle x, y\rangle \in R$ 对所有 $x, y \in M$均成立。通常，1-厄米型简称为厄米型，而 (-1)-厄米型称为斜厄米型。若对合 σ 还是平凡的，则得到通常的对称双线性型和反对称双线性型。

回到更一般的情形，此时 $\langle,\ \rangle$是半双线性的。形式 $\langle\ ,\ \rangle$诱导出一个 (R, σ)-线性映射

$$\Phi : M \to \mathrm{Hom}_R(M, R), \qquad x \mapsto \langle \cdot, x\rangle. \tag{5.2}$$

如果上述映射 Φ 是双射，则称半双线性型 $\langle\ ,\ \rangle$ 是完美的，或者等价地，称半双线性 R-格（M，$\langle\ ,\ \rangle$）是幺模的；参见[28, 命题 XIII.7.2]。通常，型 $\langle\ ,\ \rangle$ 可由上下文明确，因此我们在记号中省略它，直接称 M 为半双线性 R-格。

本节旨在为幺模半双线性 R-格给出一个正交分解定理（即定理 5.11）。在 Baeza [3], 、Knebusch [26] 或 Knus [27], 等经典文献中，通常假设 M 是投射的（或者等价地，由于此处 R 是半局部的，假设其在 R 上自由）。然而，实际应用（例如本文所研究的情形）要求在不预先假设投射性的情况下，对这类格进行更一般的研究。本节将证明，每个局部$Bass$ 阶 R上的幺模格都存在正交分解，使得每个直和项本质上都是 R的某个超阶上的自由幺模格。这将此类格的研究归约到经典情形。另见 Riehm [33] ，其中对（不一定可交换的）局部遗传阶上的厄米格进行了分类。

回顾 [12, §37] ， E 中的 Z-阶 R 若 $\mathrm{Hom}_Z(R,\ Z)$ 是一个投射 R-模，则称其为 $Gorenstein$ 。Bass 在一篇有影响力的论文 [5], 中指出，Gorenstein 环无处不在；他还确定了 Gorenstein 环的一个子类，这类环具有许多良好的结构性质，如今以他的名字命名。设 O_E 为 E 的极大Z-阶；由于 Z 是一个完备离散赋值环，该极大阶确实存在。 E 中交换 Bass 阶的等价刻画如下

(i) R 是一个 *Bass* 阶，也就是说， E 中的每个超阶 $R' \supseteq R$ 都是 Gorenstein；(ii) R 的每个理想至多可由 2 个元素生成；(iii) 商 O_E/R 是一个循环 R-模。

上述刻画 (ii) 归功于 Bass [5, §7] 本人，而 (iii) 则归功于 Borevich 和 Faddeev [7], ；他们还对交换 Bass 阶上的格给出了分类定理 [8] （另见 Curtis-Reiner [12, 第 37 节，第 789][1] 页，关于一项

[1] [12, 第37节第 789] 页中对 E 的可分性假设，是为了确保极大阶 O_E 的存在；在我们的情形下该阶确实存在。因此，这一假设并非必要。另见 [29, 2中 (i) 与 (iii) 的等价性。1]

总结）。在当前情形下，他们的定理表明，每个 Bass 阶 R 上的格 M 都确定一个超阶的升链

$$R \subseteq R_1 \subsetneq R_2 \subsetneq \cdots \subsetneq R_m, \tag{5.3}$$

以及将 M 分解为 R-子模的直和

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \tag{5.4}$$

使得每个 M_i 都具有秩为 $r_i > 0$的自由 R_i-模结构。阶链 (5.3) 和 m 元组 $(r_1, \cdots, r_m) \in \mathbb{Z}_{>0}^m$由 M的 R-同构类唯一确定，因此下文将它们称为M的结构不变量。不过，需要注意的是，M_i 本身并非由 M唯一确定。尽管如此，每个 M_i都称为 M的等型分量；因此，作为 M 的等型分量，等价于作为 M 的直和项，且具有秩为 r_i 的自由 R_i-模结构，其中 $1 \leq i \leq m$为某个值。对于每个 $1 \leq i \leq m$，令 $e_1^{(i)}$，$\cdots$，$e_{r_i}^{(i)}$为 M_i的一个 R_i-基。我们将这些基收集起来，称这个有序集合为

$$\mathscr{B}_M \coloneqq \{e_1^{(1)}, \cdots, e_{r_1}^{(1)}, \cdots, e_1^{(m)}, \cdots, e_{r_m}^{(m)}\} \tag{5.5}$$

M的一个伪基。显然，$\mathscr{B}_M$ 构成自由 E-模 $M \otimes_Z Q$的一个 E-基。

由幂等元提升 [14, 推论7.6], 若 R 不是局部的，则它分解为 Z-阶的直积 $R_1 \times R_2$。Borevich与Faddeev的上述刻画(iii)进而表明，R 是Bass的当且仅当 R_1 与 R_2 均为Bass。因此，幺模半双线性 R-格的研究可归结为 R 为局部的情形。为简单起见，本节其余部分我们假设 R 是局部Bass阶。由 Drozd-Kirichenko-Roiter [34,§IX的分类、定理6.5与6.14以及引理6.6与6.16], 对 R 的局部性假设蕴含关于代数 E 以及(5.3)中阶链的如下性质：

- E 要么是一个域，要么是两个域的积 $E_1 \times E_2$；
- 每个 R_i 对 $1 \leq i \leq m-1$都是局部的，并且 R_m 不是局部的当且仅当 $E = E_1 \times E_2$ 且$R_m = O_{E_1} \times O_{E_2}$;
- 若 R 在 E/Q的一个非平凡对合 $a \mapsto a^\sigma$ 下稳定，则由最小超阶的唯一性，每个R_i 亦如此;
- 若 $E = E_1 \times E_2$，则每个 R_i 是 $O_{E_1} \times O_{E_2}$的一个次直和，这意味着典范投影映射 $\mathrm{pr}^j : R_i \to O_{E_j}$ 对每个$j \in \{1, 2\}$都是满射。

为了研究幺模半双线性 R-格，有必要理解 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ 的结构。我们将在推论 5.6 中证明 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ 总是同构于 M，并写出它的一个伪基。由分解 (5.4)，为了证明 $\mathrm{Hom}_R(M, R) \simeq M$，只需证明对 E中的每个超阶 $R' \supseteq R$，$\mathrm{Hom}_R(R', R)$ 都是秩一的自由 R'-模。为此，我们回顾分式 R-理想的经典冒号商运算。按定义，分式 R-理想 $\mathfrak{a}$ 是 E 的一个有限生成 R-子模，且满足 $\mathfrak{a} \otimes_Z Q = E$。给定 E 中的两个分式 R-理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$，我们令

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \coloneqq \{x \in E \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}, \tag{5.6}$$

它与 $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ 有典范同构。由定义可知，$((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc})$。

定义 5.1。超阶 $R' \supseteq R$ 的相对导子 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 定义为

$$\mathfrak{f}_{R'/R} \coloneqq \mathrm{Ann}_R(R'/R) = (R : R') \simeq \mathrm{Hom}_R(R', R).$$

显然， $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 是 R' 的包含于 R中的最大理想，同时也是 R 的作为 R'之理想的最大理想。

引理 5.2. 相对导子 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 是一个主 R'-理想，即存在一个 $\alpha' \in E^\times \cap R$ 使得 $\mathfrak{f}_{R'/R} = R'\alpha'$。特别地，$\mathrm{Hom}_R(R', R) \simeq R'$。

证明。 根据我们的假设， R 是 Bass，因此 R' 是 Gorenstein。由 [9, 推论 2.7], , 要证明 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 是一个主 R'-理想，只需证明$(\mathfrak{f}_{R'/R} : \mathfrak{f}_{R'/R}) = R'$，即 R'-理想 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 是 R'-真的。现在我们直接计算得到

$$\begin{aligned}(\mathfrak{f}_{R'/R} : \mathfrak{f}_{R'/R}) = ((R : R') : \mathfrak{f}_{R'/R}) = (R : R'\mathfrak{f}_{R'/R}) &\overset{(\dagger)}{=\!=} (R : \mathfrak{f}_{R'/R}) \\ = (R : (R : R')) &\overset{(\ddagger)}{=\!=} R'.\end{aligned}$$

这里 (†) 成立，因为 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 是一个 R'-理想；而 (‡) 成立，是因为 R 是 Krull 维数为 1 的 Gorenstein 阶，因此根据 Bass 的原始著作 [5, 定理 6.3] （另见 [22, 刻画 A 2.6]），每个分式 R-理想（尤其是 R'）都是自反的。□

根据假设， R 在对合 $\sigma \in$Aut(E/Q) 下稳定。我们已经看到， R' 也具有 σ-稳定性，这进而意味着 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 也具有 σ-稳定性。因此，对于 $\mathfrak{f}_{R'/R}$的任意 R'-生成元 α' ，有

$$(\alpha')^\sigma = u'\alpha' \qquad \text{for some} \quad u' \in R'^\times \quad \text{satisfying} \quad u'(u')^\sigma = 1. \tag{5.7}$$

引理 5.3。 若满足以下条件之一，则存在 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 的一个 σ-不变生成元：

(i) 伽罗瓦上同调群 $H^1(\langle\sigma\rangle, R'^\times)$ 是平凡的；(ii) $\sigma \neq \mathrm{id}$ 且 R 是一个 O_F-阶，其中 $F = E^\sigma$ 是 σ的不动子域。

证明。(i) 如上选取 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 的任意生成元 α' 。由(5.7)，单位$u' \in R'^\times$ 确定了 $\langle\sigma\rangle$ 到 $R'^\times$的唯一1-上循环，其上同调类仅依赖于 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ ，而不依赖于生成元 α'的选取。若 $H^1(\langle\sigma\rangle, R'^\times) = \{1\}$，则存在 $v' \in R'^\times$ 使得 $u' = v'^{-1}(v')^\sigma$。于是 $\beta' \coloneqq v'^{-1}\alpha'$ 是 $\mathfrak{f}_{R'/R}$的一个σ-不变生成元。

(ii) 在此情形下，每个 O_F-子阶 $R \subseteq O_E$ 都具有形式 $O_F + \mathfrak{f}O_E$ ，其中 $\mathfrak{f}$为某个O_F-理想。另一个 O_F-阶 $R' = O_F + \mathfrak{f}'O_E$ 包含 R 当且仅当 $\mathfrak{f}' \mid \mathfrak{f}$，此时相对导子 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 由 $(\mathfrak{f}'^{-1}\mathfrak{f})R'$给出。于是 $\mathfrak{f}'^{-1}\mathfrak{f}$ 的任一 O_F-生成元都是 $\mathfrak{f}_{R'/R}$的一个 σ-不变生成元。□

例5.4。 一般而言，可能不存在任何 σ-不变的 $\mathfrak{f}_{R'/R}$生成元，如下例所示。设 $E := \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1}, \sqrt{-3})$，且 $\sigma \in$ Gal$(E/\mathbb{Q}_2)$是 E 在子域 $F \coloneqq \mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$上的唯一非平凡自同构。阶 $R \coloneqq \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2\sqrt{-1} + \mathbb{Z}_2\sqrt{-3} + \mathbb{Z}_2(1+\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3})/2$是 O_E的一个 σ-稳定子阶，指数为 2。若令 $L \coloneqq \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$且 $\mathfrak{p} \coloneqq (1+\sqrt{-1})O_L$，则 $R = O_L + \mathfrak{p}O_E$。特别地，我们有$(R : O_E) = \mathfrak{p}O_E$，它不可能有$\sigma$-不变生成元，因为 E/F 是分歧的。

固定 $\mathfrak{f}_{R'/R}$ 的生成元 α' 。注意，每个 R'-格 M' 也可以视为一个 R-格，因此我们在 M' 上有两种不同的半双线性型，

即取值于 R' 的半双线性型和取值于 R 的半双线性型。若 $\langle\ ,\ \rangle'\colon M'\times M'\to R'$ 是一个取值于 R' 的型，那么显然 $\alpha'\langle\ ,\ \rangle$ 的取值属于 R。以下引理表明，M' 上所有取值于 R 的配对都可由此得到。

推论 5.5. 对于每个 R'-格 M'，乘以 α' 在以下两组半双线性型之间诱导一个双射：

$$\left\{\begin{matrix}R'\text{-}valued\ form\\ \langle\ ,\ \rangle' : M'\times M'\to R'\end{matrix}\right\}\quad\xleftrightarrow[\langle\ ,\ \rangle'\leftrightarrow\alpha'\langle\ ,\ \rangle']{1:1}\quad\left\{\begin{matrix}R\text{-}valued\ form\\ \langle\ ,\ \rangle : M'\times M'\to R\end{matrix}\right\}. \tag{5.8}$$

此外，这个双射具有以下两个性质：

(i) $\langle,\ \rangle'\colon M'\times M'\to R'$ 是 R'-格之间的完美配对，当且仅当相应的 $\alpha'\langle,\ \rangle'\colon M'\times M'\to R$ 是 R-格之间的完美配对；(ii) $\langle\ ,\ \rangle'$ 是 ε'-埃尔米特的（对于某个满足 $\varepsilon'(\varepsilon')^\sigma = 1$ 的 $\varepsilon'\in O_E^\times$），当且仅当相应的配对 $\alpha'\langle,\ \rangle'$ 是$(u'^{-1}\varepsilon')$-埃尔米特的，其中 $u' =(\alpha')^{-1}(\alpha')^\sigma\in R'^\times$ 如 (5.7) 所示。

特别地，若 $(\alpha')^\sigma=\alpha'$，则对应关系 $\langle\ ,\ \rangle'\leftrightarrow\alpha'\langle\ ,\ \rangle'$ 在厄米形式之间建立了双射。

证明。如上所述，乘以 α' 诱导出一个从左侧到右侧的单射。反过来，设 $\langle,\ \rangle\colon M'\times M'\to R$是定义在 M'上的一个取值于R的配对（将其视为一个 R-格）。对于每个元素 $x'\in M'$，集合 $\langle M',x'\rangle$ 构成一个包含于 R中的 R'-理想；但我们已经看到，$\mathfrak{f}_{R'/R}=R'\alpha'$是包含于 R中的最大 R'-理想，因此配对 $\langle,\ \rangle\colon M'\times M'\to R$实际上取值于 $R'\alpha'$。从 R 到 R'通过 $(\sigma$-)线性延拓，我们得到定义在 M'这个 R'-格上的一个取值于 R'的配对 $\alpha'^{-1}\langle,\ \rangle\colon M'\times M'\to R'$。这就建立了所需的双射 (5.8)。双射的性质 (ii) 可通过直接计算得出。

为证明该双射的性质 (i)，设 $\langle,\ \rangle'\colon M'\times M'\to R'$是 R'-格 M'上一个取值为 R'的配对。我们记 $\Phi'\colon M'\to\mathrm{Hom}_{R'}(M',R')$（相应地，$\Phi\colon M'\to\mathrm{Hom}_R(M',R)$）为由 $\langle,\ \rangle'$（相应地，由 $\langle,\ \rangle:=\alpha'\langle,\ \rangle'$）诱导的映射，其定义见 (5.2)。由构造，$\Phi=\alpha'\Phi'$。注意 Φ' 确定唯一的 (E,σ)-线性映射

$$M'\otimes_Z Q\to\mathrm{Hom}_E(M'\otimes_Z Q,E),$$

并且 $\mathrm{Hom}_{R'}(M',R')$ 与 $\mathrm{Hom}_R(M',R)$ 均可典范地视为 $\mathrm{Hom}_E(M'\otimes_Z Q,E)$ 的 R'-子模。我们断言

$$\mathrm{Hom}_R(M',R)=\alpha'\,\mathrm{Hom}_{R'}(M',R'),$$

由此可得，Φ' 是双射当且仅当 Φ 是双射。再次说明，该结论直接源于这样一个事实：$\mathfrak{f}_{R'/R}=R'\alpha'$ 是包含于 R中的最大 R'-理想，因为我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M',R)&=\{\lambda\in\mathrm{Hom}_E(M'\otimes_Z Q,E)\mid\lambda(M')\subseteq R\}\\&=\{\lambda\in\mathrm{Hom}_E(M'\otimes_Z Q,E)\mid\lambda(M')\subseteq\alpha'R'\}\\&=\alpha'\cdot\{\lambda\in\mathrm{Hom}_E(M'\otimes_Z Q,E)\mid\lambda(M')\subseteq R'\}\\&=\alpha'\,\mathrm{Hom}_{R'}(M',R').\end{aligned}$$

这验证了该结论，并完成了推论的证明。 □

推论 5.6. 设 M 是一个 R-格，其结构不变量由升链 (5.3) 和 m 元组 $(r_1,\cdots,r_m)\in\mathbb{Z}_{>0}^m$ 给出。对于每个 $1\le i\le m$,

固定一个生成元 α_i ，它属于 $(R:\ R_i)$。设 $\mathscr{B}_M = \{e_k^{(i)} \mid 1 \le i \le m, 1 \le k \le r_i\}$ 是 M 的一个伪基，如 (5.5) 所示；设 $\{f_k^{(i)}\}$ 是对应的对偶 E-基，属于$\mathrm{Hom}_E(M \otimes Q, E)$。换言之，我们有

$$f_k^{(i)}(e_l^{(j)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \text{ and } k = l; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么， R-格 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ 的伪基由下式给出

$$\mathscr{C}_M := \{\alpha_i f_k^{(i)} \mid 1 \le i \le m, 1 \le k \le r_i\}.$$

证明。 根据伪基的定义，我们有 $M = \oplus_{i=1}^m \oplus_{k=1}^{r_i} R_i e_k^{(i)}$ 。因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M, R) &= \oplus_{i=1}^m \oplus_{k=1}^{r_i} \mathrm{Hom}_R(R_i e_k^{(i)}, R) \\ &= \oplus_{i=1}^m \oplus_{k=1}^{r_i} (R : R_i) f_k^{(i)} = \oplus_{i=1}^m \oplus_{k=1}^{r_i} R_i \alpha_i f_k^{(i)}. \end{aligned}$$

这显然表明， $\mathscr{C}_M = \{\alpha_i f_k^{(i)}\}$ 构成 $\mathbf{Hom}_R(M, R)$ 的伪基。 □

沿用推论 5.6 中的记号和假设，并固定一个半双线性型$\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to R$ ，定义在 M 上，供本节余下部分使用。相对于伪基 $\mathscr{B}_M$ ，我们按如下方式构造其格拉姆矩阵A： $A = [A_{ij}]_{1 \le i,j \le m}$ 定义为一个分块矩阵，其中每个 $A_{ij} = [a_{kl}^{(ij)}]$ 都是一个 $(r_i \times r_j)$-矩阵，其 (k, l)-元素为$a_{kl}^{(ij)} := \langle e_k^{(i)}, e_l^{(j)} \rangle$。由于 $\langle R_i e_k^{(i)}, e_l^{(j)} \rangle$ 和 $\langle e_k^{(i)}, R_j e_l^{(j)} \rangle$ 都包含于 R，我们得到

$$a_{kl}^{(ij)} := \langle e_k^{(i)}, e_l^{(j)} \rangle \in R_i\alpha_i \cap R_j\alpha_j = R_t\alpha_t \qquad \text{with} \quad t := \max\{i, j\}. \tag{5.9}$$

事实上，若 $i \le j$，则 $R_i \subseteq R_j$，因此 $R_i\alpha_i = (R : R_i) \supseteq (R : R_j) = R_j\alpha_j$。直接计算可得以下引理。

引理 5.7. 令 $\Phi: \ M \to Hom_R(M, R)$ 为由 $\langle\ ,\ \rangle: \ M \times M \to R$诱导的映射，其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 如 (5.2) 中所定义。令 $\mathscr{B}_M = \{e_k^{(i)}\}$ 和 $\mathscr{C}_M = \{\alpha_i f_k^{(i)}\}$ 分别为 M 与 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ 的伪基，它们由推论 *5.6* 给出。那么， Φ关于这两个基的矩阵为 $B = [\alpha_i^{-1} A_{ij}]_{1 \le i,j \le m}$，其中 $A = [A_{ij}]_{1 \le i,j \le m}$ 是上文定义的半双线性型 $\langle\ ,\ \rangle$关于 $\mathscr{B}_M$ 的格拉姆矩阵。

为简单起见，令 $n := \sum_{i=1}^m r_i =$ 秩$_E(M \otimes_Z Q)$。令 $\Lambda_0 := \oplus_{i=1}^m R_i^{r_i}$ 为 E^n 中具有与 M 相同结构不变量的 R-格。我们将矩阵B 视为 $\mathbf{End}_R(\Lambda_0)$ 的一个元素，它是 $\mathbf{Mat}_n(O_E)$ 的一个 R-子阶。根据定义，半双线性型 $\langle\ ,\ \rangle: M \times M \to R$ 是完美的，当且仅当 $B \in \mathbf{Aut}(\Lambda_0)$。另一方面，由于 O_E 是一个有限 R-代数，类似于命题 2.6] 的证明表明:

$$\mathrm{Aut}(\Lambda_0) = \mathrm{End}_R(\Lambda_0) \cap \mathrm{GL}_n(O_E). \tag{5.10}$$

令 $\mathfrak{J}(O_E)$ 表示 O_E 的雅各布森根，令 $B \in \mathbf{Mat}_n(O_E/\mathfrak{J}(O_E))$ 表示 B 模 $\mathfrak{J}(O_E)$ 的像。关于 B 的可逆性，我们有以下等价刻画:

$$B \in \mathrm{Aut}(\Lambda_0) \iff B \in \mathrm{GL}_n(O_E) \iff \bar{B} \in \mathrm{GL}_n(O_E/\mathfrak{J}(O_E)). \tag{5.11}$$

注意，对于每一对 (i, j)（其中 $1 \le i < j \le m$）， B 的 (i, j) 块 B_{ij} 定义了 $\mathbf{Hom}_R(R_j^{r_j}, R_i^{r_i})$ 中的一个元素，因此 B_{ij} 的每个元素都属于 $(R_i:\ R_j)$。这与

我们先前在 (5.9) 中给出的 $B = [\alpha_i^{-1} A_{ij}]_{1\le i,j\le m}$ 的元素描述相符，因为

$$(R_i : R_j) = \alpha_i^{-1}((R : R_i) : R_j) = \alpha_i^{-1}(R : R_i R_j) \\ = \alpha_i^{-1}(R : R_j) = \alpha_i^{-1}\alpha_j R_j. \tag{5.12}$$

引理 5.8. 对每一对$(R_i : R_j) \subseteq \mathfrak{J}(O_E)$ 满足 $1 \le i < j \le m$ 的(i, j)，都有这一结论。特别地，对每一对这样的(i, j)，都有 $B_{ij} \subseteq \mathrm{Mat}^{r_i\times r_j}(\mathfrak{J}(O_E))$。

证明。首先注意到 $(R_i : R_j)$ 是 R_j 的真理想，因为 $R_i \subsetneq R_j$。根据[2, 练习 5.5.ii)], ，雅各布森根 $\mathfrak{J}(R_j)$ 与 $\mathfrak{J}(O_E) \cap R_j$ 相同。若 R_j 是局部的，则 $\mathfrak{J}(R_j)$ 就是 R_j 的唯一极大理想。特别地，若 R_j 是局部的，则 $(R_i : R_j) \subseteq \mathfrak{J}(R_j) \subseteq \mathfrak{J}(O_E)$。

在证明余下部分时，假设 R_j 不是局部的。只有在$j = m$、 $E = E_1 \times E_2$ 且 $R_m = O_E = O_{E_1} \times O_{E_2}$ 时才会出现这种情况。 O_E 中不包含于 $\mathfrak{J}(O_E)$ 的理想具有 $O_{E_1} \times \mathfrak{a}_2$ 或 $\mathfrak{a}_1 \times O_{E_2}$ 的形式，其中 $\mathfrak{a}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2$ 分别是O_{E_1} 和 O_{E_2} 的理想。另一方面，$(R_i : R_j)$ 也是 R_i 的理想，因此若 $(R_i : R_j) \not\subseteq \mathfrak{J}(O_E)$，则 R_i 必然含有非平凡幂等元，这与 R_i 总是局部的事实矛盾。总之，我们已证明，只要 $1 \le i < j \le m$，就有 $(R_i : R_j) \subseteq \mathfrak{J}(O_E)$。□

命题 5.9. 设 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ 是一个 R-格按 (5.4) 所示分解为等型分量，且 $\langle\,,\,\rangle_i : M_i \times M_i \to R$ 是给定配对 $\langle\,,\,\rangle$ 在 M_i 上的限制。以下条件等价:

(i) $\langle\,,\,\rangle : M \times M \to R$ 是 R-格之间的完美配对; (ii) $\langle\,,\,\rangle_i : M_i \times M_i \to R$ 对每个 $1 \le i \le m$ 都是 R-格之间的完美配对; (iii) $\alpha_i^{-1}\langle\,,\,\rangle_i : M_i \times M_i \to R_i$ 对每个$1 \le i \le m$ 都是 R_i-格之间的完美配对。

证明. (ii) 与 (iii) 等价，这是推论 5.5 的直接结论，因此我们着重证明 (i) 与 (iii) 等价。回顾一下，伪基 $\mathscr{B}_M = \{e_k^{(i)} \mid 1 \le i \le m, 1 \le k \le r_i\}$ 的构造方法是: 为每个 M_i 选取一个 R_i-基 $\{e_1^{(i)}, \cdots, e_{r_i}^{(i)}\}$，并将它们汇集在一起。设 $B = [B_{ij}]_{1\le i,j\le m}$ 是 $\Phi : M \to \mathrm{Hom}_R(M, R$ 关于上述伪基 $\mathscr{B}_M$ 和 $\mathscr{C}_M$ 的矩阵。于是每个 $B_{ij} = \alpha_i^{-1}[\langle e_k^{(i)}, e_l^{(j)}\rangle]_{1\le k\le r_i}$。特别地， B_{ii} 与 $^{1\le l\le r_j}$一致

关于 M_i 的R_i-基 $\{e_1^{(i)}, \cdots, e_{r_i}^{(i)}\}$，配对 $\alpha_i^{-1}\langle\ ,\ \rangle_i$ 的格拉姆矩阵为: $M_i \times M_i \to R_i$。我们在 (5.11) 中看到， $\langle\ ,\ \rangle : M \times M \to R$ 是完美配对，当且仅当 $B \in \mathrm{GL}_n(O_E)$; 而根据定义，对于每个 $1 \le i \le m$， $\alpha_i^{-1}\langle\ ,\ \rangle_i : M_i \times M_i \to R_i$ 是完美配对，当且仅当 $B_{ii} \in \mathrm{GL}_{r_i}(R_i)$。因此，命题的证明归结为证明: $B \in \mathrm{GL}_n(O_E)$ 当且仅当对每个 $1 \le i \le m$， $B_{ii} \in \mathrm{GL}_{r_i}(R_i)$。

另一方面，我们在引理 5.8 中看到，对于每一对 $(i,\ j)$ 且 $1 \le i < j \le m$，都有 $B_{ij} \subseteq \mathrm{Mat}^{r_i\times r_j}(\mathfrak{J}(O_E))$。将 B 模 $\mathfrak{J}(O_E)$ 化简后，我们得到一个分块下三角矩阵 $B \in \mathrm{Mat}_n(O_E/\mathfrak{J}(O_E))$，其对角块$B_{ii} \in \mathrm{Mat}_{r_i}(O_E/\mathfrak{J}(O_E))$ 正是 B_{ii} 对模 $\mathfrak{J}(O_E)$ 的像。因此

我们有以下等价关系

$$\begin{aligned} B \in \mathrm{Aut}(\Lambda_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad B \in \mathrm{GL}_n(O_E) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{B} \in \mathrm{GL}_n(O_E/\mathfrak{J}(O_E)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \bar{B}_{ii} \in \mathrm{GL}_{r_i}(O_E/\mathfrak{J}(O_E)), \quad \forall\, 1 \le i \le m; \\ &\Longleftrightarrow \quad B_{ii} \in \mathrm{GL}_{r_i}(O_E), \quad \forall\, 1 \le i \le m; \\ &\Longleftrightarrow \quad B_{ii} \in \mathrm{GL}_{r_i}(R_i), \quad \forall\, 1 \le i \le m. \end{aligned}$$

这就完成了 (i) 与 (iii) 等价性的证明。 □

引理 5.10. 设 $N \subseteq M$ 是一个 R 子格，且 $\langle\,,\,\rangle_N :\ N \times N \to R$ 是半双线性型 $\langle\,,\,\rangle : M \times M \to R$ 在 N 上的限制。假设 $\langle\,,\,\rangle_N$ 是 N 上的完美配对。那么存在一个正交分解

$$M = N \oplus N^{\perp}, \tag{5.13}$$

其中 $N^{\perp} := \{v \in M \mid \langle N, v\rangle = 0\}$ 是 N 的右正交补。此外，$(M, \langle\,,\,\rangle)$ 是幺模的，当且仅当 $(N^{\perp}, \langle\,,\,\rangle_{N^{\perp}})$ 是幺模的。

证明. 这是对 [3, 命题 I.3.2] 或 [26, 命题 I.2], 的略微推广，同样的证明在此也适用。□

现在我们可以陈述本节的主要定理了。为方便读者，我们也简要回顾本节的基本设定。

定理 5.11. 设 R 是一个局部 *Bass* 阶，M 是一个 R-格，其结构不变量由 R 的超阶升链 $R_1 \subsetneq R_2 \subsetneq \cdots \subsetneq R_m$ 和 m 元组 $(r_1, \cdots, r_m) \in \mathbb{Z}^m_{>0}$ 给出。对于每个 $1 \le i \le m$，固定 $(R :\ R_i)$ 的一个生成元 α_i。设 $\langle\,,\,\rangle :\ M \times M \to R$ 是 R-格 M 上的完美半双线性型。则存在 M 的一个正交分解，使其分解为等型分量

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \tag{5.14}$$

使得对于所有 $1 \le i < j \le m$，$\langle M_i, M_j\rangle = 0$。特别地，每个 M_i 都是秩为 r_i 的自由 R_i-格，而 $\langle\,,\,\rangle$ 在 M_i 上的限制 $\langle\,,\,\rangle_{M_i} :\ M_i \times M_i \to R$ 具有形式 $\alpha_i\langle\,,\,\rangle_i$，其中对于每个 $1 \le i \le m$，$\langle\,,\,\rangle_i :\ M_i \times M_i \to R_i$ 是 R_i-格之间的完美配对。

通过对 m作归纳证明。我们着重证明正交分解 (5.14) 的存在性，因为该定理的最后一则陈述可由推论 5.5 与命题 5.9 直接得出。若 $m = 1$，则无需进行分解。

现在假设，对于任意具有 $m-1$ 同型分量的幺模R-格，都存在这样的正交分解。设 $(M, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个具有 $m \ge 2$ 同型分量的幺模 R-格。如有必要，将配对替换为 $\alpha_1^{-1}\langle\,,\,\rangle$，我们假设 $R_1 = R$。令 $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$ 为将M 分解为同型分量的任意分解，并置 $M_1 := N_1$，这是一个秩为 r_1 的自由 R-格。由于 $\langle\,,\,\rangle :\ M \times M \to R$ 是一个完美配对，根据命题 5.9，限制 $\langle\,,\,\rangle_{M_1} :\ M_1 \times M_1 \to R$ 仍然是完美的。现在，引理 5.10 允许我们将 M分解为 M_1 与 $M_1^{\perp}$ 的直和，并且限制 $\langle\,,\,\rangle_{M_1^{\perp}} :\ M_1^{\perp} \times M_1^{\perp} \to R$ 仍然是完美的。由于 $M_1^{\perp}$ 是一个具有 $m-1$ 同型分量的 R-格，我们对 $(M_1^{\perp}, \langle\,,\,\rangle_{M_1^{\perp}})$ 应用归纳假设，从而得到将 $M_1^{\perp}$ 分解为同型分量 $M_1^{\perp} = M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$ 的正交分解，使得对于所有 $2 \le i < j \le m$，都有 $\langle M_i, M_j\rangle = 0$。将其与原分解$M = M_1 \oplus M_1^{\perp}$ 结合，我们便得到 M 的所需正交分解。□

进一步假设 $\langle\,,\,\rangle$ 对某个满足 $\varepsilon\varepsilon^{\sigma}=1$ 的 $\varepsilon\in O_E^{\times}$ 是 ε-埃尔米特的。于是，定理 5.11 产生了一个经典意义下的正交分解 $M=M_1\perp\cdots\perp M_m$，即 $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_m$，其中对于所有 $i\neq j$，都有 $\langle M_i,M_j\rangle=0$。从定理 5.11 的证明中可以清楚看出，这样的分解并不唯一。一个自然的问题是：给定两个正交分解

$$M=M_1\perp\cdots\perp M_m=N_1\perp\cdots\perp N_m,$$

对于所有 $1\le i\le m$，若 M_i 和 N_i 都是秩为 r_i 的自由 R_i-格，我们是否必然有 $(M_i,\ \langle\,,\,\rangle_{M_i})\simeq(N_i,\ \langle\,,\,\rangle_{N_i})$? 遗憾的是，一般而言答案是否定的，下面的例子说明了这一点。

例 5.12。 取 $E=\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$，以及 $R=\mathbb{Z}_2[2\sqrt{-2}]=\mathbb{Z}_2+2O_E$。设 $(M,\ \langle\,,\,\rangle)$ 为带有如下厄米配对的埃尔米特 R-格 $Re_1\oplus O_Ee_2\subseteq E^2$

$$\langle e_1,e_1\rangle=1,\qquad \langle e_1,e_2\rangle=0,\qquad \langle e_2,e_2\rangle=2.$$

由命题 5.9，配对 $\langle\,,\,\rangle\colon M\times M\to R$ 是完美的。以下是 M 的两个正交分解:

$$M=Re_1\perp O_Ee_2=R(e_1+e_2)\perp O_E(-2e_1+e_2).$$

由于 $\langle e_1+e_2,\ e_1+e_2\rangle=3\notin\mathrm{N}(R^{\times})$，我们得到

$$(Re_1,\langle\,,\,\rangle_{Re_1})\not\simeq(R(e_1+e_2),\langle\,,\,\rangle_{R(e_1+e_2)}).$$

致谢

本文是在最后一位作者访问武汉大学期间完成的。他感谢东道主 Xue 以及武汉大学提供的热情款待和优良的工作条件。Xue 获得了中国国家自然科学基金项目（编号 12271410 和 12331002）的部分资助。Yu 获得了项目 NSTC 114-2115-M-001-001 和 AS-IA-112-M01 的部分资助。

参考文献

[1] Teruaki Asai. 正定二次型的类数。《日本数学杂志》, 3(2):239–296, 1977年。 [2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. 交换代数导论。Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969年。[3] Ricardo Baeza. 半局部环上的二次型，第 655 卷，数学讲义。Springer-Verlag, 柏林-纽约, 1978。[4] Hyman Bass. 无挠投射模。美国数学会汇刊, 102 327, 1962 319: – .[5] Hyman Bass. 论 *Gorenstein* 环的普遍性。《数学杂志》, 82:8–28, 1963年。 [6] Jonas Bergström, Valentijn Karemaker, and Stefano Marseglia. 交换自同态代数的有限域上的阿贝尔簇：理论与算法，2025年，arXiv:2409.08865。[7] Z. I. Borevič and D. K. Faddeev. 关于循环指标阶的一条注记。《苏联科学院院报》, 164:727–728, 1965年。 [8] Z. I. Borevič and D. K. Faddeev. 循环指标阶的表示。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》, 80:51–65, 1965年。[9] Juliusz Brzezinski. 局部主阶的黎曼-罗赫定理。《数学年刊》, 276(4):529–536, 1987。 [10] Tommaso Giorgio Centeleghe and Jakob Stix. 有限域上的阿贝尔簇范畴 I： $\mathbb{F}_p$上的阿贝尔簇。《代数与数论》, 9(1):225–265, 2015。 [11] Tommaso Giorgio Centeleghe and Jakob Stix. 有限域上的阿贝尔簇范畴 II： $\mathbb{F}_q$ 上的阿贝尔簇与 Morita 等价。《以色列数学杂志》, 257(1):103–170, 2023。

[12] Charles W. Curtis and Irving Reiner. 表示论方法。第 I 卷。Wiley Classics Library。John Wiley & Sons, Inc., 纽约, 1990。论有限群与阶的应用；1981 年原版重印，A Wiley-Interscience Publication。[13] Max Deuring. 关于素数底数的定定四元数代数中极大阶的类型数。《德国数学协会年报》, 54:24–41, 1950。[14] David Eisenbud. 面向代数几何的交换代数，第 150 卷，数学研究生教材。Springer-Verlag, 纽约, 1995。 [15] Ki-ichiro Hashimoto and Tomoyoshi Ibukiyama. 正定二元四元数厄米形式的类数。东京大学理学部数学科 IA 部门期刊, 27(3):549–601, 1980年。[16] Ki-ichiro Hashimoto and Harutaka Koseki. 虚二次域环上定定幺模厄米形式的类数。东北数学杂志 (2), 41(1):1–30, 1989。[17] Tomoyoshi Ibukiyama. 四元数厄米形式与超奇异阿贝尔簇的型数。大阪数学杂志, 55(2):369–384, 2018年。[18] Tomoyoshi Ibukiyama. 五元格与二元四元数厄米格。东北数学杂志 (2), 71(2):207–220, 2019年。[19] Tomoyoshi Ibukiyama, Valentijn Karemaker, and Chia-Fu Yu. 极化阿贝尔簇何时由其 p-可除群确定？美国数学会汇刊 B 辑, 12:65–111, 2025年。[20] Tomoyoshi Ibukiyama and Toshiyuki Katsura. 超特殊极化阿贝尔簇的定义域与型数。Compositio Mathematica, 91(1):37–46, 1994。[21] Ronald Jacobowitz. 局部域上的厄米形式。美国数学杂志, 84:441–465, 1962。[22] Christian U. Jensen and Anders Thorup. 戈伦斯坦阶。纯粹与应用代数杂志, 219(3):551–562, 2015。[23] Bruce W. Jordan, Allan G. Keeton, Bjorn Poonen, Eric M. Rains, Nicholas Shepherd-Barron, and John T. Tate. 与椭圆曲线幂同源的阿贝尔簇。Compositio Mathematica, 154(5):934–959, 2018年。[24] Valentijn Karemaker and Rachel Pries. 全极大与全极小阿贝尔簇。纯粹与应用代数杂志, 223(7):3031–3056, 2019年。[25] Valentijn Karemaker, Fuetaro Yobuko, and Chia-Fu Yu. 超奇异阿贝尔三维簇的质量公式与奥尔特猜想。数学进展, 386:论文编号 107812, 52, 2021年。[26] Manfred Knebusch. 代数簇上的对称双线性型。载于《二次型会议——1976》（金斯顿女王大学会议论文集，安大略省金斯顿，1976），第 46 卷，Queen’s Papers in Pure and Appl. Math.，第 103–283 页。Queen’s Univ., Kingston, ON, 1977。[27] Max-Albert Knus. 环上的二次型与厄米形式，第 294 卷，数学科学基础丛书 /数学科学基本原理/。Springer-Verlag, 柏林, 1991。附有 I. Bertuccioni 的前言。[28] Serge Lang. 代数，第 211 卷，数学研究生教材。Springer-Verlag, 纽约，第三版，2002。[29] Lawrence S. Levy and Roger Wiegand. 具有二生成理想的环的戴德金类行为。纯粹与应用代数杂志, 37(1):41–58, 1985。[30] Ke-Zheng Li and Frans Oort. 超奇异阿贝尔簇模空间，第 1680 卷，数学讲义。Springer-Verlag, 柏林, 1998。[31] David Mumford. 阿贝尔簇，第 5 卷，塔塔基础研究所数学研究。由塔塔基础研究所出版，孟买，2008年。附录由 C. P. Ramanujam 和 Yuri Manin 撰写，为第二版（1974）的修订重印本。[32] Jürgen Neukirch. 代数数论，第 322 卷，数学科学基础丛书 /数学科学基本原理/。Springer-Verlag, 柏林, 1999。译自 1992 年德文原版，并附 Norbert Schappacher 的注记及 G. Harder 的前言。[33] C. Riehm. 局部遗传阶上的厄米形式。美国数学杂志, 106 800, 1984 4 781( ): – . [34] Klaus W. Roggenkamp. 阶上的格。II。数学讲义，第 142 卷。Springer-Verlag, 柏林-纽约, 1970。[35] Winfried Scharlau. 二次型与厄米形式，第 270 卷，数学科学基础丛书 /数学科学基本原理/。Springer-Verlag, 柏林, 1985。

[36] J.-P. Serre。《算术教程》。数学研究生教材，第7卷。Springer-Verlag，纽约-海德堡，1973年。译自法文。[37] Goro Shimura。厄米形式的算术。《数学文献》，13:739–774，2008年。[38] John Tate。有限域上阿贝尔簇的自同态。《数学创刊》，2 144，1966年 134: – 。[39] Yasuhiro Terakado、Jiangwei Xue 和 Chia-Fu Yu。关于四元数酉群的志村簇的超奇异轨迹。《arXiv 预印本》，2023年11月，arXiv:2311.18354。[40] Yasuhiro Terakado 和 Chia-Fu Yu。酉志村簇的质量公式与基本轨迹。《arXiv 预印本》，2022年10月，arXiv:2210.04054。[41] Marie-France Vignéras。《四元数代数的算术》，数学讲义第800卷。Springer，柏林，1980年。[42] William C. Waterhouse。有限域上的阿贝尔簇。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），2:521–560，1969年。[43] Jiangwei Xue、Tse-Chung Yang 和 Chia-Fu Yu。超奇异阿贝尔曲面与 Eichler 类数公式。《亚洲数学杂志》，23(4):651–680，2019年。[44] Jiangwei Xue 和 Chia-Fu Yu。具有实韦伊数的极化超特殊简单阿贝尔曲面。《伦敦数学学会杂志》（第2辑），112:论文编号 e70364，56页，2025年。[45] Jiangwei Xue 和 Chiafu Yu。关于有限域上某些阿贝尔簇的计数。《数学学报（英文版）》，37(1):205–228，2021年。[46] Chia-Fu Yu。PEL 型志村簇上的简单质量公式。《数学论坛》，22(3):565–582，2010年。[47] Chia-Fu Yu。关于二进非极大局部序上的厄米形式。《纯粹与应用数学季刊》，8(4):1117–1146，2012年。[48] Chia-Fu Yu。关于西格尔超奇异轨迹的分支的定义域。《美国数学会会刊》，145(12):5053–5058，2017年。[49] Chia-Fu Yu。关于超特殊轨迹的算术。《印第安纳大学数学杂志》，67(4):1341– 1382，2018年。(Lin) 武汉大学数学与统计学院，珞珈山，430072，武汉，湖北，中华人民共和国电子邮件地址：yucui.lin@whu.edu.cn (Xue) 武汉大学数学与统计学院，珞珈山，430072，武汉，湖北，中华人民共和国电子邮件地址：xue_j@whu.edu.cn (Yu) 中央研究院数学研究所和国家理论科学研究中心，台湾台北市罗斯福路四段1号，邮编10617，台湾。电子邮件地址：chiafu@math.sinica.edu.tw