arXiv:2603.03747v1 [math.FA] 4 Mar 2026

多项式矩阵微分算子的比较

EDUARD CURCĂ 和 BOGDAN RAIȚĂ

摘要。我们刻画了满足以下不等式的矩阵多项式 P, Q

$$\|Q(D)u\|_{L^2} \leqslant C\,\|P(D)u\|_{L^2}, \quad \text{for all } u \in C_c^\infty(\Omega),$$

该不等式在有界开集 Ω 上成立。我们还刻画了使上述连续线性嵌入为紧的算子 P, Q；也就是说，若 $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足 $(P(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中有界，则 $(Q(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中强紧。

1. 引言

设 $p : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是一个非零多项式，且 B 是 $\mathbf{R}^d$ 中的开单位球。Hörmander 的一个重要结果（见 [4]）指出

$$\|u\|_{L^2} \leqslant C\,\|p(D)u\|_{L^2}, \quad \text{for all } u \in C_c^\infty(B), \tag{1}$$

其中 $D = -i\nabla$。我们强调，这对任意非零多项式 p 都成立，无论其零集的大小如何。

本文的主要目标有两个：首先，将 Hörmander 不等式推广到系统的情形（允许使用多项式矩阵 p）；其次，刻画使 (1) 中的连续线性嵌入为紧的矩阵多项式 p（这意味着，如果 $u_n \in C_c^\infty(B)$ 满足 $\sup_n \|p(D)u_n\|_{L^2} < \infty$，那么 $u_n \to u$ 会沿某个子序列在 L^2 中收敛）。

接下来，我们说明为什么这两项任务都很有挑战性，而且与 (1) 显著不同。

1.1. L^2微分算子估计。正如接下来将会清楚看到的，(1) 中的 u 和 p 都是标量，这一点至关重要。如果允许 u 是向量场，那么该不等式显然不成立；例如，若将 p 取为散度算子（令 u 为某个紧支撑势函数的 $curl$），就会如此。作为主要结果的推论，我们还将构造一个算子 $p\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$，使得 $\ker_{C_c^\infty} p(D) = \{0\}$，但不等式 (1) 仍然不成立。这些例子表明，系统情形要复杂得多。

我们的第一个主要结果依赖于 [4] 中（1）的以下推广：令 p, $q : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 为多项式。不等式

$$\|q(D)u\|_{L^2} \leqslant C\,\|p(D)u\|_{L^2}, \quad \text{for all } u \in C_c^\infty(B), \tag{2}$$

成立，当且仅当 p 支配 q，即存在常数 C 使得 $\tilde{q}(\xi)/\tilde{p}(\xi) \leqslant C$ 对所有 $\xi \in \mathbf{R}^d$ 均成立。这里 $\tilde{p}\colon \mathbf{R}^d \to [0,\infty)$ 定义为 $\tilde{p}(\xi)^2 = \sum_\alpha |\partial^\alpha p(\xi)|^2$。

我们将把这一概念推广到多项式矩阵。为此，我们将使用矩阵 $A \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$ 的 Moore–Penrose 广义逆 $A^+ \in \mathcal{M}_{N\times M}(\mathbf{C})$（例如参见 [9] 和 [13]），下文简称为伪逆；矩阵多项式的（逐点）伪逆是一个有理函数，这一事实可直接由 [1] 中定理 3 给出的公式得出。

2020 数学学科分类。主要分类：35G35；次要分类：35E20。关键词和短语。常系数线性偏微分方程组，L^2-估计，线性偏微分算子比较，线性嵌入的紧性，Rellich–Kondrachov 定理。

定义 1. 设 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$、 $Q\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 是矩阵多项式。记 $QP^+ = (q_{lj}/\Delta)_{l,j}$，其中 q_{lj}、 Δ 是多项式。若 P **支配** Q（记作 $Q \prec P$），则称

(i) Δ 支配 q_{lj} 对所有 l， j 且 (ii) $\ker P(\xi)$ $\subset \ker Q(\xi)$ 对几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$成立。

我们将在备注 5 中证明，我们的定义不依赖于多项式q_{lj} 和 Δ的选择。因此，我们对第一个问题有了答案：

定理 1。 设 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$， $Q\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 为矩阵多项式。以下条件等价：

(1) 存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\|Q(D)u\|_{L^2} \leqslant C\,\|P(D)u\|_{L^2}, \quad \textit{for all } u \in C_c^\infty(\Omega)^N.$$

(2) P 支配 Q。

我们的刻画清楚地表明，一般的向量情形下不等式 (1) 不成立，例如取 $Q = I_2$ 和

$$P(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们对定理 1 中估计的证明依赖于 Hörmander 的标量情形 [4]以及对偶论证，后者谨慎地运用了定义 1 中的代数关系。

1.2. 紧性。

考虑以下简单估计

$$\|u\|_{L^2} \leqslant C\,\|\Delta u\|_{L^2}, \quad \text{for all } u \in C_c^\infty(B). \tag{3}$$

根据 Rellich–Kondrachov 定理，(3) 得出一个紧嵌入。另一方面，简单例子（如 $p(D) = D_1$ ）表明，与嵌入 (1) 相应的紧性一般可能不成立。

我们的第二个主要目标是刻画定理 1 中的不等式何时会得出如上所述的紧嵌入。我们的刻画基于 Hörmander 的另一项结果（见下文定理 11），这促使我们引入另一个新概念：

定义 2。 (a) 设 $p, q : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 为多项式。若 p **紧控制** q （记作 $q \prec_c p$），则称 p 以紧性控制 q，如果 $\tilde{q}(\xi)/\tilde{p}(\xi) \to 0$ 当 $|\xi| \to \infty$时。

(b) 设 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$、 $Q\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 为矩阵多项式。记$QP^+ = (q_{lj}/\Delta)_{l,j}$，其中 q_{lj}、 Δ 为多项式。我们称 P **紧支配**Q （记作 $Q \prec_c P$），如果

(i') 对所有 l, j， Δ 紧支配 q_{lj}；且 (ii) 对几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$， $\ker P(\xi) \subset \ker Q(\xi)$。

我们将在注 8 中证明，紧支配确实蕴含支配，因此这一术语的使用是一致的。

现在可以陈述我们的主要紧性结果：

定理 2. 设 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$、 $Q\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 为矩阵多项式。以下条件等价：

(1) 对于任意序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$，其中元素属于 $C_c^\infty(\Omega)^N$，且满足 $\sup_{n\geqslant 1} \|P(D)u_n\|_L < \infty$，存在一个子序列 $(u_{n_k})_{k\geqslant 1}$，使得 $Q(D)u_{n_k}$ 在 L^2 中强收敛。*(2)* P 紧支配 Q。

1.3. **变分积分下半连续性的应用**。本工作的最初动机源于对积分泛函下半连续性性质的研究，这些积分泛函推广了 [10],

$$\int_\Omega F(P(D)u(x))dx,$$

这也与 [3, 14], 中讨论的一般 A-自由框架有关，并由此引出了被积函数 F 拟凸性概念的各种变体。除少数情况外，[12, 2], 这一方向的大多数结果都涉及所谓的 常秩算子 P（D），而建立一般理论的尝试似乎极具挑战性，参见第[8, 7]节中的评论。

在这里，我们将在一项严格的技术假设下推进这一问题： P 紧支配所有低阶算子 $P_{(\alpha)}$，其定义为 $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^\alpha P(\xi)$。采用这一记号，我们的结果如下：

定理 3。 设 $P : \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$ 是一个矩阵多项式，且对任意多重指标 $\alpha \neq 0$， P 紧支配 $P^{(\alpha)}$。设 $F: \mathbf{C}^M \to \mathbf{R}$，且 $|F(z)| \lesssim 1 + |z|^2$ 满足

$$\int_{(0,1)^d} (F(z + P(D)u(x)) - F(z))dx \geqslant 0, \quad \text{for all } z \in \mathbf{C}^N,\ u \in C_c^\infty((0,1)^d)^N. \tag{4}$$

假设$(u_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $C_c^\infty(B)^N$ 中的一个序列，且 $P(D)u_n \to P(D)u$ 在 $L^2(\Omega)^M$中弱收敛于某个 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)^N$。那么

$$\liminf_{n\to\infty} \int_B F(P(D)u_n(x))dx \geqslant \int_B F(P(D)u(x))dx.$$

下半连续性结论中施加的边界条件可以替换为通常较宽松的假设，前提是排除边界处的集中。例如，可以考虑分布 $u_n \in \mathscr{D}'(\Omega)^N$ ，使得 $P(D)u_n \to v$在 $L^2(B)^M$中弱收敛，前提是积分是在集合$\omega \Subset B$ 上取的，或者假设 F 有下界。

拟凸性 条件 (4) 是下半连续性结论成立的充要条件。然而，若缺少技术条件 P 对所有 α紧支配$P^{(\alpha)}$ ，则不清楚 (4) 是否足以保证 [6, 第 5] 节中的下半连续性。在缺少所谓的 P [11] 常秩条件时，这个问题尤其棘手；在这种情况下，(4) 是一个 A-拟凸性条件 [3]。简单例子表明，对于一般的线性微分算子 P，情况并非如此。

致谢

第一作者获得了波兰国家科学中心 CEUS 计划的资助，项目编号为 2020/02/YST1/00072。

2. 估计与紧性的证明

2.1. **定义与已有结果**。 首先引入一些记号。所有函数和分布均为复值。$\mathbf{R}^d$ 中的开单位球为 B。矩阵 $A \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$ 的 Moore–Penrose 广义逆记作 $A^+ \in \mathcal{M}_{N\times M}(\mathbf{C})$ ([9]), 并称为 A 的伪逆。这里用到的关键性质是， AA^+ 和A^+A 分别是到 $\operatorname{im}\ A$和 $\operatorname{im} A^*$ 上的正交投影，并且满足以下代数恒等式

$$AA^+A = A \quad \text{and} \quad A^+AA^+ = A^+.$$

这里， A^* 表示 A的共轭转置。

施瓦茨函数在$\mathbf{R}^d$ 上的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx \quad \text{for } f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)^N.$$

傅里叶变换的定义通过对偶性延拓到温和分布空间 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^d)^N$ 。该空间包含分布空间 $\mathcal{E}'(\Omega)^N$ ，其中的分布定义在$\mathbf{R}^d$ 上，且其紧支集包含于 $\bar{}\Omega$；其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 是一个开集。

给定矩阵多项式 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$，微分算子 $P(D)$ 的定义使用 $D = -i\nabla$（将实偏导数 $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_d$ 视为多项式变量，因为偏微分运算是可交换的）。特别地，若$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \xi^\alpha P_\alpha$，其中 $P_\alpha \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$，则

$$P(D)u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} P_\alpha D^\alpha u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-i)^\alpha P_\alpha \partial^\alpha u \quad \text{for } u \in C^\infty(\mathbf{R}^d)^N.$$

根据此定义，我们有 $\mathcal{F}(P(D)u)(\xi) = P(\xi)\mathcal{F}u(\xi)$，其中 $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)^N$。

继 [7, 第 X 章], 之后，我们引入类 $\mathcal{K}$，它由缓增权函数组成，即函数 $k\colon \mathbf{R}^d \to (0, \infty)$，满足存在常数 C， $a > 0$ 使得

$$k(\xi+\eta) \leqslant (1 + C|\xi|^a)k(\eta), \quad \text{for all } \xi, \eta \in \mathbf{R}^d.$$

此外，与 [7, 定义 10.1.6], 中一样，对任意 $p \in [1, \infty)$ 及任意 $k \in \mathcal{K}$ ，我们定义空间$B_{p,\,k}(\mathbf{R}^d)$，它由满足以下条件的所有温和分布 u （定义在$\mathbf{R}^d$ 上）组成

$$\|u\|_{B_{p,k}} := \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{u}(\xi)k(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty.$$

根据 [7] 中的定理 10.1.7，空间 $B_{p,\,k}(\mathbf{R}^d)$ 是一个巴拿赫空间，并且 $C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ 在 $B_{p,\,k}(\mathbf{R}^d)$ 中稠密。注意，由帕塞瓦尔定理可得 $B_{2,\,1}(\mathbf{R}^d) = L^2(\mathbf{R}^d)$（并且，若 $p \neq 2$，则 $B_{p,\,1}(\mathbf{R}^d)$ 与 $L^p(\mathbf{R}^d)$ 是不同的空间）。下文中，由于我们只关注 L^2-估计，主要使用空间 $B_{2,\,k}(\mathbf{R}^d)$。不过，在主要结果的证明中，使用一般的缓增权函数 k （而不只是常数权函数）会更方便。

我们还回顾一下 [4, 第二章]中的一些记号。设 $p\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是一个多项式函数（p 是一个复系数标量多项式）。我们将与 p 关联的函数定义为 $\widetilde{p}\colon \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$，其定义如下:

$$\widetilde{p}(\xi) := \left(\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^d} \left|p^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{for all } \xi \in \mathbf{R}^d,$$

其中，对于任意多重指标 $\alpha \in \mathbf{N}^d$，有 $p^{(\alpha)} := \partial^\alpha p$ 。

给定两个多项式函数 $p, q\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$，如果存在一个常数 $C > 0$ 使得下式成立，我们就称 p 支配 q （或者称 q 比 p更弱[1] ）:

$$\widetilde{q}(\xi) \leqslant C\widetilde{p}(\xi), \quad \text{for all } \xi \in \mathbf{R}^d.$$

在这种情况下，我们记作 $q \prec p$。

我们回顾 Hörmander 的以下结果（见 [4, 定理 2.2，第 179] 页）:

定理 4. 设 $p, q\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是两个多项式函数。存在一个常数$C > 0$ 使得

$$\|q(D)u\|_{L^2} \leqslant C\,\|p(D)u\|_{L^2}, \quad \textit{for all } u \in C_c^\infty(B), \tag{5}$$

当且仅当 p 支配 q。

[1]实际上，在 [4, 第二章第 2 节3]（或参见第 30] 页的 [7, 定义10.3.4）中，指出若满足（5），则 q 比 p 更弱。

为了表述一个适用于矩阵值多项式情形的定理 4 版本（定理 1），我们需要一个更一般的支配概念。取任意 $N \in \mathbf{N}^*$，并设 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$ 和 $Q\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 是两个满足 P 不恒等于 0 的多项式函数。注意，存在一个矩阵值有理函数，它在 $\mathbf{R}^d$上几乎处处等于 $P^+(\xi)$。矩阵多项式的（逐点）伪逆是有理函数，这一事实可由 [1] 中的定理 3 所给出的公式立即推出。我们可以写成

$$P^+(\xi) = \frac{1}{\Delta(\xi)} A(\xi), \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^d, \tag{6}$$

其中 $A : \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{N\times M}(\mathbf{C})$ 是一个矩阵值多项式，而 $\Delta : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是一个非零标量多项式。因此，我们可以写成

$$Q(\xi)P^+(\xi) = \frac{1}{\Delta(\xi)} Q(\xi)A(\xi) = \left(\frac{q_{lj}(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)_{l,j}, \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^d, \tag{7}$$

其中 $q_{lj}\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是关于 $l = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,M$ 的标量多项式。

现在我们回顾定义 1：$Q \prec P$ 当且仅当

(i) 对所有 l, j， Δ 支配 q_{lj}；且 (ii) 对几乎

所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$，$\ker P(\xi) \subset \ker Q(\xi)$。

在这种情况下，我们称 P 支配 Q。

注 5。请注意，条件 (i) 不取决于式 (7) 中有理矩阵各条目的表示方式。更一般地，若我们写成

$$\frac{1}{\Delta(\xi)} Q(\xi)A(\xi) = \left(\frac{q^1_{lj}(\xi)}{p^1_{lj}(\xi)}\right)_{l,j=1,\dots,N},$$

对于某些标量多项式 p_{lj}、q_{lj}：$\mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$，则（对于固定的 Δ、A）(i) 成立，当且仅当对于所有 $l = 1$、…、N、$j = 1$、…、M，有 $p_{lj} \prec q_{lj}$。这由 [7] 中的定理 10.4.1 以及 [7] 第 33 页的讨论可得。

注 6。根据伪逆的定义，我们有 $P(P^+P - I) = 0$。这与条件 (ii) 一起意味着 $QP^+P = Q$ 以及 $P^*(P^*)^+Q^* = Q^*$，几乎处处成立于 $\mathbf{R}^d$ 上。此外，条件 (ii) 等价于以下蕴含关系：若对于 $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)^N$，有 $P(D)u = 0$，则 $Q(D)u = 0$。

我们还引入紧支配的“代数”版本。给定两个多项式函数 $p, q : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$，如果存在常数$C > 0$ 使得 p 紧支配 q，我们就称 p 紧支配 q。

$$\widetilde{q}(\xi)/\widetilde{p}(\xi) \to 0,$$

当 $|\xi| \to \infty$ 时。在这种情况下，我们记作 $q \prec_c p$。

作为 Hörmander 所给出的 [7, 定理 10.1.10] 的推论（见下文的定理 11），对于标量情形，我们得到以下紧性结果：

定理 7. 设 $p, q : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是两个多项式函数。如果 $q \prec_c p$，那么对于 $C_c^\infty(B)^N$ 中满足 $\|p(D)u_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的任意序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$，序列 $(q(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中是相对紧的。反之，设对于 $C_c^\infty(B)^N$ 中满足 $\|p(D)u_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的任意序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$，序列 $(q(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中是相对紧的。那么，我们有 $q \prec_c p$。

针对矩阵值多项式的情形，我们的紧支配概念如下，参见定义 2(b)。若记 $QP^+ = (q_{lj}/\Delta)_{l,\,j}$ 为矩阵多项式P，Q，则称 P 紧支配 Q，如果

(i') 对所有 l, j, Δ 紧支配 q_{lj}；且 (ii) 对几乎
处处的 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\ker P(\xi) \subset \ker Q$({v11)。
在这种情况下，我们也写作 $Q \prec_c P$。采用这种扩展后的紧支配概念，定理 2 是对上文定理 7 的推广。

注记 8。紧支配蕴含支配，因为除非 $p = 0\tilde{}$，否则 $\tilde{p} > 0$ 处处成立；类似地，除非 $P = 0$，否则 $\Delta > 0$ 处处成立。当然，如果 p 或 P 为零，则支配只有在平凡情形 q 或 $Q = 0$下才可能成立。

2.2. L^2-**估计**。本节的主要目标是证明定理 1。我们将证明支配条件的充分性。

命题 9。设 $P\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$, $Q\colon \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 是矩阵多项式。若 P 支配 Q, 则

$$\|Q(D)u\|_{L^2} \leqslant C\,\|P(D)u\|_{L^2}\,, \tag{8}$$

对所有 $u \in C_c^\infty(B)^N$。

证明。固定某个 $k \in \mathcal{K}$。如果 p, $q\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是满足 $q \prec p$ 的标量多项式，那么根据 [7] 中的定理 10.3.6，我们有如下估计：

$$\|q(D)v\|_{B_{2,k}} \leqslant C\,\|p(D)v\|_{B_{2,k}}\,, \tag{9}$$

对任意 $v \in C_c^\infty(2B)$ 均成立。根据对偶性，对任意 $f \in (B_{2,\,k}(\mathbf{R}^d))^* = B_{2,\,1/k}(\mathbf{R}^d)$，若 $\operatorname{supp} f \subset B$，则可找到某个 $u_1 \in B_{2,\,1/k}(\mathbf{R}^d)$，使得

$$p^*(D)u_1 = q^*(D)f, \tag{10}$$

在 $2B$ 上的分布意义下成立。选取某个满足 $\varphi = 1$ 的函数 $\varphi \in C_c^\infty(2B)$，其在 B 上有定义，我们有

$$p^*(D)(u_1\varphi) = (p^*(D)u_1)\varphi + [p^*(D), \varphi]u_1,$$

此外，由于 $\operatorname{supp} f \subset B$，利用 (10) 可写为：

$$p^*(D)u = q^*(D)f + R, \tag{11}$$

其中 $u := u_1\varphi$ 且 $R := [p^*(D)\ \varphi]u_1$。根据 [7] 中的定理 10.1.4 和定理 10.1.15，我们有 $u \in B_{2,\,1/k}(\mathbf{R}^d)$。余项 R 是温和分布，并且（根据 R 的定义）我们有 $\operatorname{supp} R \subset 2B\backslash B$。

对 (11) 进行傅里叶变换，得到

$$\widehat{u} = \frac{q^*}{p^*}\widehat{f} + \frac{1}{p^*}\widehat{R} \in \widehat{B_{2,1/k}} = L^2_{1/k},$$

其中 $L^2_{1/k}$ 是由满足以下范数条件的可测函数 g 在 $\mathbf{R}^d$ 上构成的通常加权空间

$$\|g\|_{L^2_{1/k}} := \left(\int_{\mathbf{R}^d} |g(\xi)/k(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2},$$

有限。

因此，我们证明了以下结论：

断言。若 $p, q : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ 是满足 $q \prec p$ 的标量多项式，且 $f \in B_{2,1/k}(\mathbf{R}^d)$ 满足支集 $f \subset B$，则存在温和分布 R，其支集 $R \subset 2B\backslash B$，并且满足

$$\frac{q^*}{p^*}\widehat{f} + \frac{1}{p^*}\widehat{R} \in \widehat{B_{2,1/k}}.$$

现在考虑一个向量值函数 $f=(f_1,...,f_N)$，满足 $f_j\in B_{2,1/k}(\mathbf{R}^d)$ 且支集为 $f_j\subset B$，其中任意 $j=1,\dots,M$ 均成立。令 Δ 为式 (6) 中的定义。由于 $Q\prec P$，对于任意 $l=1,\dots,N$, $j=1,\dots,M$，我们有 $q_{lj}^*\prec\Delta^*$。利用该断言可得

$$\frac{q_{lj}^*}{\Delta^*}\widehat{f}_j+\frac{1}{\Delta^*}\widehat{R_{lj}}\in\widehat{B_{2,1/k}},$$

其中 R_{ij} 是支集为 $\operatorname{supp}R_{lj}\subset 2B\backslash B$ 的温和分布。

现在我们用以下公式定义函数 $u\in B_{2,1/k}(\mathbf{R}^d)$

$$\widehat{u}:=(P^*)^+Q^*\widehat{f}+\frac{1}{\Delta^*}\widehat{R},$$

其中

$$R:=\left(\sum_{j=1}^N R_{1j},....,\sum_{j=1}^N R_{Nj}\right)^t$$

是支集为 $\operatorname{supp}R\subset 2B\backslash B$ 的温和分布。由此可得

$$\Delta^*P^*\widehat{u}:=\Delta^*P^*(P^*)^+Q^*\widehat{f}+P^*\widehat{R}. \tag{12}$$

利用注 6，我们可以将 (12) 改写为

$$\Delta^*P^*\widehat{u}:=\Delta^*Q^*\widehat{f}+P^*\widehat{R}.$$

取傅里叶逆变换，我们得到

$$\Delta^*(D)P^*(D)u:=\Delta^*(D)Q^*(D)f+P^*(D)R, \tag{13}$$

在 $\mathbf{R}^d$ 上的分布意义下。

设 $v\in C_c^\infty(B)$ 为一个函数，并考虑某个 $f\in B_{2,\ 1/k}(\mathbf{R}^d)$ 且 $\operatorname{supp}f\subset B$ 使得 $\|f\|_{B_{2,\ 1/k}}=1$ 且

$$\|\Delta(D)Q(D)v\|_{B_{2,k}}\leqslant 2\left\langle\Delta(D)Q(D)v,f\right\rangle. \tag{14}$$

考虑 $u\in B_{2,\ 1/k}(\mathbf{R}^d)$ 且 $\|u\|_{B_{2,\ 1/k}}\lesssim 1$ 且 R 如 (13) 中所示。由于 $\operatorname{supp}v$ 与 $\operatorname{supp}\ R$ 不相交，可以写成:

$$\begin{aligned}\langle\Delta(D)Q(D)v,f\rangle &= \langle v,\Delta^*(D)Q^*(D)f\rangle=\langle v,\Delta^*(D)Q^*(D)f+P^*(D)R\rangle\\ &= \langle v,\Delta^*(D)P^*(D)u\rangle=\langle\Delta(D)P(D)v,u\rangle\\ &\lesssim \|\Delta(D)P(D)v\|_{B_{2,k}}.\end{aligned}$$

由此及 (14)，我们得到

$$\|\Delta(D)Q(D)v\|_{B_{2,k}}\lesssim_k\|\Delta(D)P(D)v\|_{B_{2,k}}, \tag{15}$$

~对任意 $v\in C_c^\infty(B)$ 以及对任意 $k\in\mathcal{K}$。现在对 $k:=1/\Delta$ 使用 [7] 中的定理 10.3.2，我们有估计

$$\|\Delta(D)Q(D)v\|_{B_{2,k}}\sim\|Q(D)v\|_{L^2}\quad\text{and}\quad\|\Delta(D)P(D)v\|_{B_{2,k}}\sim\|P(D)v\|_{L^2},$$

对于任意 $v\in C_c^\infty(B)$，结合 (15) 即可得到 (8)。 □

通过证明支配性的必要性，我们完成定理 1 的证明。

命题 10。设 $P\colon\ \mathbf{R}^d\to\mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$、$Q\colon\ \mathbf{R}^d\to\mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 是矩阵多项式。若

$$\|Q(D)u\|_{L^2}\leqslant C\|P(D)u\|_{L^2},\quad for\ all\ u\in C_c^\infty(B)^N, \tag{16}$$

那么 P 支配 Q。

证明。 我们首先证明，对于几乎所有的 $\xi \in \mathbf{R}^d$，$\ker\ P(\xi) \subseteq \ker\ Q(\xi)$。采用式 (6) 中的记号，考虑矩阵多项式

$$A^1 := AP - \Delta I.$$

By (6) 可知， $A^1 = \Delta(P^+P - I)$ 在 **实数空间**^{d} 上几乎处处成立，并且我们有（见注 6 ），

$$P(D)A^1(D)v = 0,$$

在 **实数空间**^{d} 上，对任意 $v \in C_c^\infty(B)^N$ 均成立。因此，对 $u = A^1(D)v \in C_c^\infty(B)^N$ 应用 (16)，可得$Q(D)A^1(D)v = 0$，并且

$$Q(\xi)A^1(\xi)\widehat{v}(\xi) = 0,$$

对任意 $\xi \in$ **实数空间**^{d} 以及任意 $v \in C_c^\infty(B)^N$ 均成立。这立即推出，对任意 $\xi \in$**实数空间**^{d}， $Q(\xi)$ $A^1(\xi) = 0$（我们可以选取形如 $v = w\varphi$ 的 v，其中 $\varphi \in C_c^\infty(B)$ 是标量，且$w \in \mathbf{C}^N$ 是任意向量）。现在， $\Delta Q(P^+P - I) = 0$ 在 **实数空间**^{d} 上几乎处处成立；由于Δ 非平凡， $QP^+P = Q$ 在 **实数空间**^{d} 上几乎处处成立。由此可得核的包含关系。

现在我们证明，对于所有 $l = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,M$， $q_{lj} \prec \Delta$。其论证与命题 9 的证明类似。利用对偶性，由（16）可得，对于任意 $f \in L_c^2(B)$，存在某个 $u_1 \in L_c^2(\mathbf{R}^d)$，使得

$$P^*(D)u_1 = Q^*(D)f,$$

在 B 上。现在假设 $\operatorname{supp} f \subset (1/2)B$，并选取某个函数 $\varphi \in C_c^\infty(B)$，满足$\varphi = 1$ 在 $(1/2)$ B 上，我们有（如同（11）中）

$$P^*(D)u = Q^*(D)f + R, \tag{17}$$

在 $\mathbf{R}^d$ 上，其中 $u := u_1\varphi \in L_c^2(B)$ 且 $R := [P^*(D)\ \varphi]u_1 \in W^{-n_0,2}(\mathbf{R}^d)$（对某个 $n_0 \in \mathbf{N}^*$），且 $\operatorname{supp} R \subset \overline{B\backslash(1/2)B}$。对（17）取傅里叶变换，得到

$$P^*\widehat{u} = Q^*\widehat{f} + \widehat{R},$$

因此

$$(P^*)^+P^*\widehat{u} = (P^*)^+Q^*\widehat{f} + (P^*)^+\widehat{R}, \tag{18}$$

几乎处处，在$\mathbf{R}^d$上。注意，$(P^*)^+P^*$是投影到 P像空间上的厄米投影。因此，$(P^*)^+P^*$ 可由一个酉矩阵对角化，且其对角形式仅包含 1 或 0。由此可知，$(P(\xi)^*)^+P(\xi)^*$的任意一项均由一个与 ξ无关的常数所界。现在我们得到$(P^*)^+P^*\widehat{u} \in L^2(\mathbf{R}^d)$，并由 (17) 得

$$(P^*)^+Q^*\widehat{f} + (P^*)^+\widehat{R} \in L^2(\mathbf{R}^d).$$

写作 $P^+ = \Delta^{-1}A$，如同 (6) 中那样，我们有$(P^*)^+ = (\Delta^*)^{-1}A^*$，并且可以写成

$$(\Delta^*)^{-1}(A^*Q^*)\widehat{f} + (\Delta^*)^{-1}\widehat{R'} \in L^2(\mathbf{R}^d), \tag{19}$$

其中 $R' := A^*(D)R$ 是支撑在 $\overline{B\backslash(1/2)B}$上的分布。

写作 $A^*Q^* = (q_{lj}^*)_{l,j}$，并固定某个 $j \in \{1,...,L\}$。选取形式为 $f = (0,...,0,f_j,0,...,0)^t \in L_c^2((1/2)B)$的 f，由 (19) 得到

$$(\Delta^*)^{-1}q_{lj}^*\widehat{f_j} + (\Delta^*)^{-1}\widehat{R'_{lj}} \in L^2(\mathbf{R}^d),$$

对任意 $l \in \{1,...,M\}$，其中 R'_{lj} 是支撑在 $\overline{B\backslash(1/2)B}$ 上的分布。现在，若我们定义 $u_{lj} \in L^2(\mathbf{R}^d)$ 为

$$\widehat{u_{lj}} = (\Delta^*)^{-1}q_{lj}^*\widehat{f_j} + (\Delta^*)^{-1}\widehat{R'_{lj}},$$

我们得到

$$\Delta^*(D)u_{lj} = q_{lj}^*(D)f_j + R'_{lj},$$

在 $\mathbf{R}^d$ 上的分布意义下。与命题 9 的证明（见（13）–（15））一样，我们得到

$$\|q_{lj}(D)v\|_{L^2} \lesssim \|\Delta(D)v\|_{L^2},$$

对任意 $v \in C_c^\infty(B)$。由于多项式 q_{lj} 和 Δ 都是标量，根据 [7],中的定理 10.3.6 可得 $q_{lj} \prec \Delta$。□

2.3. **紧性**。本节的主要目标是证明定理 2，为此我们采用 Hörmander 提出的紧性判据：

定理 11。（[7] 中的定理 *10.1.10* 仅针对空间 $B_{2,k}$表述）设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 是一个内部非空的紧集。若 $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ 满足

$$\frac{k_2(\xi)}{k_1(\xi)} \to 0, \quad when\ |\xi| \to \infty, \tag{20}$$

那么，$B_{2,k_1}(\mathbf{R}^d) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ 紧嵌入 $B_{2,k_2}(\mathbf{R}^d)$。反之，若 $B_{2,k_1}(\mathbf{R}^d) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$紧嵌入$B_{2,k_2}(\mathbf{R}^d)$，则 *(20)* 成立。

接下来，我们证明紧支配是 L^2-紧性的充分条件：

命题 12. 设 $P, Q : \mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ 为矩阵多项式。若 $Q \prec_c P$，则对于任意满足 $\|P(D)u_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的序列$(u_n)_{n\geqslant 1} \in C_c^\infty(B)^N$，序列$(Q(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2中相对紧。

证明。考虑某个非平凡的 q_{lj}（否则论证显然成立）。我们有 $\widetilde{q}_{lj}/\Delta \in \widetilde{\mathcal{K}}$，并且 $\widetilde{q}_{lj}/\Delta \to 0$在 ∞处成立。由定理 11 可知，对于任意满足 $\varphi_n \in \mathcal{E}'(B)$ 和 $\|\varphi_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的序列 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1} \in L^2(\mathbf{R}^d)^{\widetilde{}}$，序列 $((\widetilde{q}_{lj}/\Delta)(D)\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 中相对紧。因此，存在某个函数 $g \in L^2$，使得

$$(\widetilde{q}_{lj}/\widetilde{\Delta})(D)\varphi_n \to g, \tag{21}$$

在 L^2 范数下，取一个子序列。若引入 $\widetilde{g} := (\Delta/\widetilde{q}_{lj})(D)g \in B_{2,\ k}$（其中$k := \widetilde{q}_{lj}/\Delta$），则在温和分布的意义下，取一个子序列，有 $\varphi_n \to \widetilde{g}$。特别地，由于对所有 $n \geqslant 1$，$\varphi_n \in \mathcal{E}'(B)$，我们得到 $\widetilde{g} \in \mathcal{E}'(B)$。现在，由于 $\varphi_n - \widetilde{g} \in \mathcal{E}'(B)$，通过在 [7] 中应用定理 10.3.2 并利用 (21)，我们得到

$$\|q_{lj}(D)(\varphi_n - \widetilde{g})\|_{B_{2,1/\tilde{\Delta}}} \sim \|\widetilde{q}_{lj}(D)(\varphi_n - \widetilde{g})\|_{B_{2,1/\tilde{\Delta}}} = \left\|(\widetilde{q}_{lj}/\widetilde{\Delta})(D)(\varphi_n - \widetilde{g})\right\|_{L^2} \to 0,$$

取一个子序列。因此我们得到：对于任意满足 $\varphi_n \in \mathcal{E}'(B)$ 和 $\|\varphi_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的序列 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$，其中 $L^2(\mathbf{R}^d)^{\widetilde{}}$，序列 $((q_{lj}/\Delta)(D)\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ 在$L^2(\mathbf{R}^d)$中相对紧。综合考虑 i 和 j 中的这些事实可知，对于任意满足 $f_n \in \mathcal{E}'(B)^N$ 和 $\|f_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$，其中$\sim L^2(\mathbf{R}^d)^N$，序列 $((QA/\Delta)(D)f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 中相对紧。将这一事实应用于形如 $f_n := P(D)u_n$ 的 f_n，其中 $u_n \in \mathcal{E}'(B)^N$。因此，对于任意满足 $\|P(D)u_n\|_{L^2} \leqslant 1$ 的序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$，其中 $\mathcal{E}'(B)^N$，序列$((QA/\Delta)(D)P(D)u_n)_{n\geqslant 1}^{\widetilde{}}$ 在 $L^2(\mathbf{R}^d)^L$ 中相对紧。回顾 $\ker P \subset \ker Q$ 在 $\mathbf{R}^d$ 上几乎处处成立，由此可得 $QP^+P = Q$ 在 $\mathbf{R}^d$ 上几乎处处成立（见注 6）。因此（同时利用恒等式 $P^+ = A/\Delta$），

$$\frac{QA}{\widetilde{\Delta}}P = \frac{\Delta}{\widetilde{\Delta}}QP^+P = \frac{\Delta}{\widetilde{\Delta}}Q,$$

且 $(\Delta/\Delta)(D)Q(D)u_n)_{n\geqslant 1}^{\widetilde{}}$ 在 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 中相对紧。这意味着存在某个 $G \in L^2(\mathbf{R}^d)^N$ 使得

$$(\Delta/\widetilde{\Delta})(D)Q(D)u_n \to G, \tag{22}$$

在 L^2 范数下，至多取一个子序列。由于 $Q \prec P$（条件 $Q \prec_c P$ 更强），我们有

$$\|Q(D)u_n\|_{L^2} \lesssim \|P(D)u_n\|_{L^2} \leqslant 1,$$

并且序列Banach–Alaoglu定理表明，存在 $G \in L^2_c(B)^N$ 使得

$$Q(D)u_n \to \widetilde{G},$$

在 L^2 中弱收敛（取子序列）。由此及 (22)，我们有 $(\Delta/\widetilde{\Delta})(D)G = G$。因此，根据 [7] 中的定理 10.3.2（注意 $Q(D)u_n - G \in \mathcal{E}'(B)^N$）以及 (22)，可得

$$\begin{aligned}\left\|Q(D)u_n - \widetilde{G}\right\|_{L^2} &= \left\|\widetilde{\Delta}(D)(Q(D)u_n - \widetilde{G})\right\|_{B_{2,1/\widetilde{\Delta}}} \lesssim \left\|\widetilde{\Delta}(D)(Q(D)u_n - \widetilde{G})\right\|_{B_{2,1/\widetilde{\Delta}}} \\ &\lesssim \left\|(\Delta/\widetilde{\Delta})(D)Q(D)u_n - G\right\|_{L^2} \to 0,\end{aligned}$$

沿某个子序列收敛。这证明了命题 12。 □

在考虑命题 12 的逆命题之前，我们先给出一个直接推论，它将在定理 3 的证明中用到。

推论 13. 设 $P{:}\mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$，$Q{:}\mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 为满足 $Q \prec_c P$ 的矩阵多项式。考虑序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$，其中 $C^\infty_c(B)^N$，满足 $P(D)u_n \to 0$ 在 L^2 中弱收敛。那么，$Q(D)u_n \to 0$ 在 L^2 中强收敛（取子序列）。

证明。由于序列 $(P(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2中弱收敛，因此它在L^2中也有界。于是，根据命题 12，存在某个 $g \in L^2_c(B)^L$，使得在取一个子序列后，$Q(D)u_n \to g$在 L^2中强收敛。特别地，我们有

$$\Delta(D)Q(D)u_n \to \Delta(D)g, \tag{23}$$

在分布意义下。条件 $Q \prec_c P$ 意味着 $QP^+P = Q$ 几乎处处成立（见注 6），因此我们可以将 (23) 中的 $\Delta(D)Q(D)u_n$ 改写为

$$\Delta(D)Q(D)u_n = (\Delta(D)Q(D)P^+(D))P(D)u_n = (Q(D)A(D))P(D)u_n, \tag{24}$$

在 L^2中。由于 $P(D)u_n \to 0$ 在分布意义下成立，且 $Q(D)A(D)$ 是一个微分多项式，由 (24) 得

$$\Delta(D)Q(D)u_n \to 0,$$

在分布意义下。结合 (23)，可得。

$$\Delta(D)g = 0, \tag{25}$$

在分布意义下。对 (25) 作傅里叶变换，得到 $\Delta\widehat{g} = 0$ 在温和分布意义下成立。由于 $\widehat{g}$ 是一个 L^2 函数，且 Δ 非平凡（集合$\{\xi \in \mathbf{R}^d \mid \Delta(\xi) = 0\}$ 的勒贝格测度为 0），因此得到 $g \equiv 0$。□

命题 14. 设 $P{:}\mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbf{C})$，$Q{:}\mathbf{R}^d \to \mathcal{M}_{L\times N}(\mathbf{C})$ 是矩阵多项式。假设对于任意序列 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 属于 $C^\infty_c(B)^N$ 且满足 $\|P(D)u_n\|_{L^2} \leqslant 1$，序列 $(Q(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中相对紧。那么，$Q \prec_c P$。

证明. 由命题 10 可立即得到（更弱的）支配关系 $Q \prec P$。剩下需要证明，在 ∞ 处，对于任意 $l = 1, ..., L$, $j = 1, ..., M$，$\widetilde{q}_{lj}/\Delta \to 0$。

考虑函数序列 $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$，其中 $\mathcal{E}'(B)$ 满足 $\|\Delta(D)\psi_n\|_{L^2} \leqslant 1$，并定义 $f_n := (0, ..., 0, \psi_n, 0, ..., 0)$（位于第 j 个位置），以及 $u_n := A(D)f_n \in \mathcal{E}'(B)^N$，对任意 $n \geqslant 1$。我们有

$$\begin{aligned}\|P(D)u_n\|_{L^2} &= \|P(D)A(D)f_n\|_{L^2} = \left\|P(D)P^+(D)\Delta(D)f_n\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|PP^+\Delta\widehat{f_n}\right\|_{L^2} \lesssim \left\|\Delta\widehat{f_n}\right\|_{L^2} \sim \|\Delta(D)f_n\|_{L^2}\end{aligned}$$

$$= \|\Delta(D)\psi_n\|_{L^2} \leqslant 1,$$

这里我们用到了 PP^+ 的条目一致有界这一事实（例如，参见 (18) 后的论证）。

现在我们有 $(Q(D)u_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中是相对紧的，即 $(Q(D)A(D)f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中是相对紧的。根据 f_n 的定义（回顾记号 $QA=(q_{lj})_{l,\ j}$），这意味着对于任意 $l=1,\ .....,\ L$、$j=1,\ .....,\ M$，$(q_{lj}(D)\psi_n)_{n\geqslant 1}$ 在 L^2 中是相对紧的。

我们已经得到，对于 $\mathcal{E}'(B)$ 中满足 $\|\Delta(D)\psi_n\|_{L^2}\leqslant 1$ 的任意序列 $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$，序列 $(q_{lj}(D)\psi_n)_{n\geqslant 1}$ 对任意 $l,\ j\in\{1,...,N\}$ 在 L^2 中是相对紧的。根据 [7] 中的定理 10.3.2，容易观察到 $B_{2,\ \tilde{\Delta}}\cap\mathcal{E}'(B)$ 紧嵌入 $B_{2,\ \tilde{q}_{lj}}$。~现在利用定理 11，我们得到 $\tilde{q}_{lj}/\Delta\to 0$ 在 ∞，命题 14 得证。□

3. 下半连续性的应用

本节旨在证明定理 3。正如引言中所提到的，整洁的边界条件使我们能够证明一个关于带符号被积函数的命题，且该命题不允许边界处出现集中效应。

为证明定理 3，不失一般性，我们可以假设 Ω 是一个立方体。在主要证明中，我们将精心选择一个立方体，以便轻松处理集中效应。

给定一个立方体 $\Omega\subset\mathbf{R}^d$（其边与坐标轴平行）和一个二进整数 m，我们用 $\mathcal{F}_m(\Omega)$ 表示将 Ω 划分后得到的 m^d 个两两不相交且全等的小立方体的集合。我们用 $\mathbf{E}_m^\Omega$ 表示关于 $\mathcal{F}_m(\Omega)$ 中这些立方体的 σ-代数的条件期望算子。为简化记号，在上下文已明确 Ω 时，我们用 $\mathbf{E}_m$ 代替 $\mathbf{E}_m^\Omega$。此外，对于给定的 $\delta\in(0,1)$，我们考虑集合

$$\Omega_\delta^m := \bigcup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{F}_m(\Omega)}(1-\delta)\mathcal{Q}.$$

引理 15。固定某个 $\varepsilon>0$ 以及某个函数 $v\in L_c^2(B)^N$。设 $(v_j)_{j\geqslant 1}$ 是 $L_c^2(B)^N$ 中的有界序列。

那么，存在一个二进整数 m 和一个立方体 $\Omega\supset B$，使得

$$\|\mathbf{E}_m v - v\|_{L^2}<\varepsilon,$$

并且，对任意充分小的 $\delta>0$，都有

$$\liminf_{j\to\infty}\|v_j\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_\delta^m)}<\varepsilon,$$

证明。固定某个 $\varepsilon\in(0,1)$。设 Ω_0 是一个立方体，使得 $B\subset\Omega_\tau:=\Omega_0+\tau$，对任意 $\tau\in B$ 都成立（换言之，$B+B\subset\Omega_0$）。引入函数序列 $(g_m)_{m-dyadic}$，其定义在 B 上：

$$g_m(\tau):=\left\|\mathbf{E}_m^{\Omega_\tau}v-v\right\|_{L^2},$$

我们有一致有界性

$$g_m(\tau)\leqslant\left\|\mathbf{E}_m^{\Omega_\tau}v\right\|_{L^2}+\|v\|_{L^2}\leqslant 2\|v\|_{L^2},$$

对于任意 $\tau\in B$ 以及任意二进整数 m。还可以看出，每个 g_m 在 B 上都是连续的。事实上，对于任意函数 $f\in L^1(B)$ 和任意立方体 $\mathcal{Q}$，由控制收敛定理可得，

$$\int_{\mathcal{Q}+\tau_n} f\,dx\to\int_{\mathcal{Q}+\tau} f\,dx, \tag{26}$$

对于 B 中收敛到某个 $\tau \in B$的任意序列 $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ 。现在，通过写出

$$\begin{aligned} g_m^2(\tau) &= \left\|\mathbf{E}_m^{\Omega_\tau} v\right\|_{L^2}^2 - \left\langle \mathbf{E}_m^{\Omega_\tau} v, v\right\rangle - \left\langle \mathbf{E}_m^{\Omega_\tau} v, v\right\rangle + \|v\|_{L^2}^2 \\ &= -\sum_{\mathcal{Q}\in\mathcal{F}_m(\Omega_0)} \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\left|\int_{\mathcal{Q}+\tau} v(y)dy\right|^2 + \|v\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

并利用（26），我们得到 g_m 的连续性。

此外，当 $m\to\infty$ 以二进制尺度地变化时，我们有 $g_m(0)\to 0$。因此，对于固定的且充分大的 m，有 $g_m(0)<\varepsilon/2$。由 g_m 的连续性可得，对于任意 $\tau\in B(0,\ r)$，存在某个 $r\in(0,\ 1)$，使得 $g_m(\tau)<\varepsilon$。换言之，

$$\left\|\mathbf{E}_m^{\Omega_\tau} v - v\right\|_{L^2} < \varepsilon, \tag{27}$$

对于任意 $\tau\in B(0,\ r)$。

我们定义 $\delta_0 := r\varepsilon^2/(8C^2d)$，以及整数

$$M := \left\lceil \frac{2dC^2}{\varepsilon^2}\right\rceil,$$

其中

$$C := \sup_{j\geqslant 1}\|v_j\|_{L^2} < \infty. \tag{28}$$

考虑数值 $t_1,...,t_M\in[0,r/2]$，其中 $t_l := rl/(2M)$，对任意 $l\in\{1,...,M\}$ 均成立，并引入向量 $\tau_1,...,\tau_M\in B(0,r)$，其中 $\tau_l := t_l e$，对任意 $l\in\{1,...,M\}$ 均成立，这里 $e := (1,...,1)\in\mathbf{R}^d$。

对于数值 $\delta\in(0,\delta_0]$，我们考虑集合

$$G_\delta := \Omega_0\backslash(\Omega_0)_\delta^m,$$

并注意到，对任意 $\tau\in B$,

$$G_\delta+\tau := \Omega_0\backslash(\Omega_0)_\delta^m+\tau = \Omega_\tau\backslash(\Omega_\tau)_\delta^m. \tag{29}$$

由于 $\tau_l = l\tau_1$ 和

$$|\tau_1| > \sqrt{d}r/(2M) > \sqrt{d}\delta,$$

如果 $\tau_{l_1},...,\tau_{l_s}$ 两两不同，则交集

$$(G_\delta+\tau_{l_1})\cap...\cap(G_\delta+\tau_{l_s}),$$

嵌入于 $\delta-$ 个仿射空间的邻域中，这些仿射空间的维数为 $d-s$，且任意两者之间的距离至少为 $1-\delta$。（按照惯例，负维仿射空间为空集。）特别地，我们得到

$$\sum_{l=1}^M \mathbf{1}_{Sk_\delta+\tau_l}(x)\leqslant d,$$

对任意 $x\in\mathbf{R}^d$。利用这一点和式（28），我们可以写出

$$\begin{aligned} M\min_{l\in\{1,...,M\}}\|v_j\|_{L^2(G_\delta+\tau_l)}^2 &\leqslant \sum_{l=1}^M\|v_j\|_{L^2(G_\delta+\tau_l)}^2 = \int_{\mathbf{R}^d}|v_j(x)|^2\left(\sum_{l=1}^M \mathbf{1}_{G_\delta+\tau_l}(x)\right)dx \\ &\leqslant d\int_{\mathbf{R}^d}|v_j(x)|^2dx\leqslant dC^2, \end{aligned}$$

由此得到

$$\min_{l\in\{1,...,M\}}\|v_j\|_{L^2(G_\delta+\tau_l)}^2\leqslant\frac{dC^2}{M}<\varepsilon^2. \tag{30}$$

If

$$A_l := \{j \in \mathbf{N}^* \mid \|v_j\|_{L^2(G_\delta+\tau_l)} < \varepsilon\},$$

那么，由 (30) 得到 $\bigcup_{l=1}^M A_l = \mathbf{N}^*$。因此，存在一个无限集 A_{l_0}。由此可知

$$\liminf_{j\to\infty} \|v_j\|_{L^2(G_\delta+\tau_{l_0})} < \varepsilon.$$

由该不等式、(29) 和 (27)（回想一下 $\tau_{l_0} \in B(0,r)$），可以选取 $\Omega := \Omega_0 + \tau_{l_0}$。□

现在我们可以着手证明主要的下半连续性结果:

*定理 3 的证明。*我们首先将引理 15 应用于函数 $v := Su$ 和 $v_j := Sw_j$，其中 $w_j := u_j - u$（注意，由于 v_j 弱收敛，因此它在 L^2中也有界）。固定某个 $\varepsilon > 0$。存在一个二进整数 m 和一个立方体 $\Omega \supset B$，使得

$$\|\mathbf{E}_m Su - Su\|_{L^2} < \varepsilon, \tag{31}$$

并且，对于任意充分小的 $\delta > 0$，我们有

$$\liminf_{j\to\infty} \|Sw_j\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_\delta^m)} < \varepsilon. \tag{32}$$

我们可以假设 $(u_j)_{j\geqslant 1}$ 对应于实现 (32) 中下确界的子序列。

注意，由于 u 和 u_j 支撑在 B上，因此在B之外，$F(Su_j) - F(Su) = 0$。因此，我们可以在立方体 Ω 上积分，而不必在 B 上积分:

$$\int_B (F(Su_j) - F(Su))dx = \int_\Omega (F(Su_j) - F(Su))dx. \tag{33}$$

现在写作

$$\int_\Omega (F(Su_j) - F(Su))dx = T_1 + T_2^j + T_3^j, \tag{34}$$

其中

$$T_1 := \int_\Omega (F(\mathbf{E}_m Su) - F(Su))dx,$$

$$T_2^j := \int_\Omega (F(Su_j) - F(\mathbf{E}_m Su + Sw_j))dx,$$

and

$$T_3^j := \int_\Omega (F(\mathbf{E}_m Su + Sw_j) - F(\mathbf{E}_m Su))dx.$$

我们估计 T_1。利用 [5]中的引理 4.6 和 (31)（以及标准估计），我们可以写出

$$\begin{aligned}
|T_1| &\leqslant \int_\Omega |F(\mathbf{E}_m Su) - F(Su)|dx \lesssim \int_\Omega (1 + |\mathbf{E}_m Su| + |Su|)(|\mathbf{E}_m Su - Su|)dx \\
&\lesssim \left(\int_\Omega (1 + |\mathbf{E}_m Su|^2 + |Su|^2)dx\right)^{1/2} \|\mathbf{E}_m Su - Su\|_{L^2} \\
&\lesssim (|\Omega|^{1/2} + \|\mathbf{E}_m Su\|_{L^2} + \|Su\|_{L^2}) \|\mathbf{E}_m Su - Su\|_{L^2} \qquad (35) \\
&\lesssim (1 + \|Su\|_{L^2}) \|\mathbf{E}_m Su - Su\|_{L^2} \\
&\lesssim {}_u \|\mathbf{E}_m Su - Su\|_{L^2} < \varepsilon. \qquad (36)
\end{aligned}$$

我们估计 T_2^j。注意到 $Su_j - \mathbf{E}_m Su - Sw_j = -(\mathbf{E}_m Su - Su)$。与 (35) 中一样，我们写作

$$\begin{aligned}
|T_2^j| &\lesssim (|\Omega|^{1/2} + \|Su_j\|_{L^2} + \|\mathbf{E}_m Su + Sw_j\|_{L^2}) \|Su_j - \mathbf{E}_m Su - Sw_j\|_{L^2} \\
&= (|\Omega|^{1/2} + \|Su_j\|_{L^2} + \|\mathbf{E}_m Su + Sw_j\|_{L^2}) \|\mathbf{E}_m Su - Su\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim (1+\|Su_j\|_{L^2}+\|Su\|_{L^2}+\|Sw_j\|_{L^2})\,\|\mathbf{E}_m Su-Su\|_{L^2} \\ &\lesssim \varepsilon, \end{aligned} \tag{37}$$

这里我们用到了这样一个事实：由于 Su_j 弱收敛到 Su ，且 Sw_j 弱收敛到 0，因此 $\|Su_j\|_{L^2}$ 和 $\|Sw_j\|_{L^2}$ 一致有界。（(37) 中的隐含常数取决于 u以及序列 $(u_j)_{j\geqslant 1}$。）

我们估计 T_3^j。我们考虑函数 $\eta\in C_c^\infty(\Omega_{\delta/2}^m)$，使得 $\eta\equiv 1$ 在 Ω_δ^m 上成立，并用 $w_{j,\,\delta}$表示函数 $w_{j,\,\delta}:=\eta w_j$，对任意 $j\geqslant 1$。我们将 T_3 分解为 $T_3^j=T_{31}^j+T_{32}^j$，其中

$$T_{31}^j:=\int_\Omega (F(\mathbf{E}_m Su+Sw_{j,\delta})-F(\mathbf{E}_m Su))dx,$$

and

$$T_{32}^j:=\int_\Omega (F(\mathbf{E}_m Su+Sw_j)-F(\mathbf{E}_m Su+Sw_{j,\delta}))dx.$$

由 F 的 $S-$拟凸性（见 (4)），我们有

$$T_{31}^j\geqslant 0. \tag{38}$$

在 T_{32}^j 的情形下，我们看到 $F(\mathbf{E}_m Su+Sw_j)-F(\mathbf{E}_m Su+Sw_{j,\,\delta})=0$ 在 Ω_δ^m 中，于是我们写成

$$\begin{aligned} |T_{32}^j| &= |\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta^m}(F(\mathbf{E}_m Su+Sw_j)-F(\mathbf{E}_m Su+Sw_{j,\delta}))dx| \\ &\leqslant \int_{\Omega\backslash\Omega_\delta^m}|F(\mathbf{E}_m Su+Sw_j)|dx+\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta^m}|F(\mathbf{E}_m Su+Sw_{j,\delta})|dx \\ &=: a_1^j+a_2^j. \end{aligned} \tag{39}$$

由于在 $\mathbf{R}^d$ 上有 $|F(x)|\lesssim\langle x\rangle^2$，我们得到

$$a_1^j\lesssim\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta^m}(1+|\mathbf{E}_m Su|^2+|Sw_j|^2)dx\leqslant|\Omega\backslash\Omega_\delta^m|+\|\mathbf{E}_m Su\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2+\|Sw_j\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2.$$

由 (32)，我们有 $\|Sw_j\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2<\varepsilon^2<\varepsilon$。若 δ 充分小，则有 $|\Omega\backslash\Omega_\delta^m|<\varepsilon$，并且由控制收敛定理，$\|Sw_j\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2<\varepsilon$。因此，

$$|\Omega\backslash\Omega_\delta^m|+\|\mathbf{E}_m Su\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2+\|Sw_j\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2\lesssim\varepsilon, \tag{40}$$

and

$$a_1^j\lesssim\varepsilon. \tag{41}$$

我们再次使用实数空间 $\mathbf{R}^d$ 上的不等式 $|F(x)|\lesssim\langle x\rangle^2$，以估计 a_2^j：

$$\begin{aligned} a_2^j &\lesssim \int_{\Omega\backslash\Omega_\delta^m}(1+|\mathbf{E}_m Su|^2+|Sw_{j,\delta}|^2)dx \\ &\lesssim \int_{\Omega\backslash\Omega_\delta^m}(1+|\mathbf{E}_m Su|^2+|\eta Sw_j|^2+|[S,\eta]w_j|^2)dx \\ &\lesssim |\Omega\backslash\Omega_\delta^m|+\|\mathbf{E}_m Su\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2+\|Sw_j\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2+\|[S,\eta]w_j\|_{L^2(\Omega\backslash\Omega_\delta^m)}^2, \end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$[S,\eta]=\eta S-S\eta.$$

注意

$$[S,\eta]=[P(D),\eta]=\sum_{\alpha\neq 0}\frac{D^{\alpha}\eta}{\alpha!}P^{(\alpha)}(D).$$

由于 $Sw_j=P(D)w_j$ 在 L^2 中弱收敛于 0，根据算子 $S(P_{(\alpha)}\prec_c P$ 对任意 $\alpha\neq 0$ 的假设）以及推论 13，我们得到，对于任意 $\alpha\neq 0$，$P^{(\alpha)}(D)w_j\to 0$ 在子序列上于 L^2 中强收敛。据此，我们得到 $[S,\eta]w_j\to 0$ 在子序列上于 L^2 中强收敛。因此，

$$\|[S,\eta]w_j\|^2_{L^2(\Omega\setminus\Omega^m_\delta)}\lesssim\varepsilon,$$

对于子序列上的大 j，由此，(40) 和 (42) 得到

$$a_2^j\lesssim\varepsilon.$$

由此，根据 (40) 和 (39)，我们有

$$\liminf_{j\to\infty}|T_{32}^j|\lesssim\varepsilon,$$

结合 (36)、(37)、(38) 和 (34)（另见 (33)），得到

$$\liminf_{j\to\infty}\int_B(F(Su_j(x))-F(Su(x)))dx\gtrsim-\varepsilon.$$

由于 ε 任意小，我们得出结论。 □

参考文献

[1] Decell Jr., H.P.，《凯莱-哈密顿定理在广义矩阵求逆中的应用》。SIAM Rev. 7(4)，526–528，1965。[2] De Lellis, C. 和 Székelyhidi Jr, L.，2009。《欧拉方程作为微分包含》。Annals of Mathematics，第1417–1436页。[3] Fonseca, I. 和 Müller, S.，1999。A-拟凸性、下半连续性与杨测度。SIAM Journal on Mathematical Analysis，30(6)，第1355–1390页。[4] Hörmander, L.，《关于一般偏微分算子理论》，Acta Math. 94，161–248，1955。[5] Guerra, A.，Raită, B.《常秩约束下的拟凸性、零拉格朗日量与Hardy空间可积性》。Arch Rational Mech Anal 245，279–320，2022。[6] Härkönen, M.、Nicklasson, L. 和 Raită, B.，2024。协 syzygy关系、常秩及其他。Journal of Symbolic Computation，123，p.102274。[7] Hörmander, L.，《线性偏微分算子的分析。II. 常系数微分算子，第2版》，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften，第256卷，Springer-Verlag，柏林，1990。[8] Kristensen, J. 和 Raită, B.，2022。《偏微分方程约束测度序列中的振荡与集中》。Archive for Rational Mechanics and Analysis，246(2)，第823–875页。[9] Moore, E.H.，《一般代数矩阵的逆，摘要》。Bull. Am. Math. Soc. 26，394–395，1920。[10] Morrey, C.B.，1952。《拟凸性与多重积分的下半连续性》。Pacific J. Math.，2(4)，第25–53页。[11] Murat, F.，1981。《补偿紧性：常秩条件下弱连续性的充分必要条件》。Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze，8(1)，第69–102页。[12] Muller, S.，1999。《对角矩阵上的秩一凸性蕴含拟凸性》。IMRN: International Mathematics Research Notices，1999(20)。[13] Penrose, R.，《矩阵的广义逆》。Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 51(3)，406–413，1955。[14] Raită, B.，2019。《A-拟凸性的势》。Calculus of Variations and Partial Differential Equations，58(3)，p.105。[15] Raită, B.，2024。《补偿紧性的势算子的一种简单构造》。The Quarterly Journal of Mathematics，75(2)，第451–456页。