arXiv:2603.03757v1 [math.GT] 4 Mar 2026

¨电 Teichmüller 空间与 k-多曲线图

KENTO SAKAI

Abstract. Masur 和 Minsky 证明，曲线图与沿其薄部分进行电化的 Teichm¨üller 空间准等距，因此，Teichm¨üller 空间相对于薄部分是弱相对双曲的。本文通过沿着极值长度足够小的 k 曲线所在的薄部分对 Teichm¨üller 空间进行电化，将这一结果推广到 k-多曲线图。一个关键要素是根据交数对 k-多曲线图距离给出的界，该界是通过调整 Lackenby 和 Yazdi 针对裤子图所得的上界而得到的。

1. 引言

曲面的 $Teichm¨uller$ 空间 是曲面上按同痕等价的共形结构（等价地，双曲结构）所构成的空间。在低维拓扑中，映射类群是一个基本对象，且常与 Teichm¨üller 空间密切联系起来研究。为描述 Teichm¨üller 空间的大尺度渐近几何，人们提出了多种准等距组合模型。Harvey [Har81], 引入的曲线图一直是低维拓扑中的研究课题。曲线图的顶点是曲面上本质简单闭曲线的同痕类；如果对应的曲线可以彼此不相交地实现，则两个顶点之间以一条边相连。Masur 和 Minsky[MM99]证明，曲线图是一个双曲度量空间。

Masur 和 Minsky 还证明，曲线图准等距于沿 Teichm¨uller 空间的薄部分 [电化（或锥化）所得到的度量空间 2]MM99, Theorem 1.2]。这里，薄部分由那些至少有一条本质的简单闭曲线的极值长度不超过某个固定常数 $\epsilon_0 > 0$的黎曼曲面组成。薄部分的每个分支都准等距于度量空间的一个乘积 [Min96], ，因此构成了 Teichm¨uller 空间为双曲空间的障碍。具体而言，Teichm¨uller 空间相对于薄部分是弱相对双曲的。

在本文中，我们将 [MM99，定理 1.2] 推广到 k-多重曲线图，该图由 [EF17]引入。设 Σ为一个亏格为 g 、有 n 个穿孔的曲面。 k-多重曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$的顶点 k是 Σ 上的 k 多重曲线；也就是说，它们由恰好 k 条两两不相交的曲线组成，而两个不同的

Date：2026年3月5日。

顶点之间有一条边，当且仅当相应的多重曲线包含相同的$(k-1)$-多重曲线，且剩余的两条补曲线以最小交数相交（详见定理 2.1）。对于一个 k-多重曲线 α，令 Thin_α 为 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$的子集，其中包含的黎曼曲面上， α 的每个分支的极值长度至多为 ϵ_0。令 $\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$表示沿着集合 $\{\mathrm{Thin}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)}$对 $\mathcal{T}(\Sigma)$电化后得到的度量空间。本文的主要目的是证明以下结论。

定理 A. 电化 Teichm¨uller 空间 $\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$ 与 k-多重曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 准等距。

Vokes 引入了多曲线图的无扭转性 这一概念，并证明任意无扭转的多曲线图都是一个分层双曲空间 [Vok22]。因此，层次双曲空间的一般理论 [BHS17, BHS19] 为无扭转多曲线图带来了许多大尺度几何性质 [Vok22, RV22]。特别地，其双曲性和拟平坦秩由多曲线图的两两不交的见证子曲面的数量决定；见证子曲面是一个与多曲线图中每个顶点都本质相交的连通子曲面。在 [KKS26], 中，给出了 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,n})$ 的两两不交见证子曲面的最大数量 $m(g,n,k)$ 的显式公式：

$$m(g,n,k)=\begin{cases}\min\left\{\left\lfloor\frac{-\chi(\Sigma)}{a(\xi(\Sigma)+1-k)}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{\xi(\Sigma)+1}{\xi(\Sigma)+2-k}\right\rfloor\right\} & (n,k)\neq(0,1)\\ 1 & (n,k)=(0,1),\end{cases}$$

其中 $a(x)=\lceil(2x+1)/3\rceil$, $\chi(\Sigma)=2-2g-n$ 以及 $\xi(\Sigma)=3g-3+n$。由此立即得到以下结论。

推论 B. 若 $m(g,n,k)=1$，则 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 关于集合 $\{\text{薄部}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)}$弱相对双曲。

推论 C. 令 $\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma_{g,n})$ 表示沿集合 $\{\text{薄部}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)}$电化后的 Teichm¨uller 空间。

(1) **双曲情形**。若且唯若 $m(g,n,k)=1$，$\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma_{g,n})$ 才是双曲的。(2) **相对双曲情形**。$\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma_{g,n})$ 是相对双曲的，当且仅当

- g 为偶数，n 为不小于 2 的偶数，且 $k=(3g+n)/2$,
- g 为偶数，$n=0$，且 $k\in\{3g/2,(3g+2)/2\}$,
- g 为奇数，$n\in\{0,2\}$，且 $k=(3g+3)/2$，或
- g 为奇数，n 为不小于 3 的奇数，且 $k=(3g+n)/2$。

(3) **厚情形**。$\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma_{g,\ n})$ 为厚，当且仅当 (1) 和 (2) 均不成立。

推论 D. $\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma_{g,n})$ 的拟平坦秩等于 $m(g,n,k)$。

为了证明定理 A，我们根据相应多重曲线的交数，建立 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 中两个顶点之间距离的上界。

定理 E. 对于任意 k-多曲线 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们有

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha,\beta) \leq 6 \cdot 4^{6g-6+2n-2k} i(\alpha,\beta)^2 + f(k),$$

其中 $f(k) = \min\{k, \xi(\Sigma) - k\}$。

我们对定理 E 的证明采用了 Lackenby 和 Yazdi [LY26]给出的裤图距离关于交数的二次上界。在 [LY26], 的后半部分，他们还得到了一个更精细的上界，其增长仅与交数的对数成正比。利用这一结果，也可以推出 k-多曲线图距离关于交数对数函数的上界；不过，二次上界足以证明定理 A，因此为求简便，我们采用这一上界。

最后，我们简要讨论相关工作。Mahan Mj [Mj09] 构造了一个介于曲线图和裤子图之间的图。该图称为复杂度-ξ 图，我们将其记作 $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$。他证明，该图与映射类群 Mod(Σ) 的电化 Cayley 图 $\Gamma(\Sigma,\ \xi)$ 准等距，其中电化是针对与复杂度至多为 ξ 的子曲面相关联的映射类子群的左陪集进行的。这推广了 [MM99，定理 1.3]。Mahan Mj 还确定了复杂度-ξ 图及其对应的电化 Cayley 图的拟平坦秩。从这一视角看，我们的结果可视为 Teichmüller 空间版本的 Mahan Mj 关于映射类群的工作。

Masur 和 Minsky [MM00] 引入了标记图 $\mathcal{M}(\Sigma)$，它与映射类群 Mod(Σ) 的 Cayley 图准等距。Durham [Dur16] 定义了增广标记图 $\mathcal{AM}(\Sigma)$，它与配备 Teichm¨üller 度量的 Teichm¨üller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 准等距。Brock [Bro03] 证明，裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$ 与配备 Weil-Petersson度量的 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 准等距。我们在表 1 中总结了这些准等距关系。

取非负整数 g, n，满足 $2g - 2 + n > 0$，并令 k_0 为满足 $m(g, n, k) = 1$ 的最大整数 k。那么 k_0 约为 $3g - 3 + n$ 的一半。根据定理 C，表 1 中位于对应于 k_0-多曲线图的行上方的每个度量空间都不是双曲的。另一方面，配备 Weil-Petersson度量的 Teichm¨üller 空间的度量完备化是一个 CAT(0) 空间 [Yam04, Wol03]。相较之下，配备 Teichm¨üller 度量的 Teichm¨üller 空间不是 CAT(0) 空间 [Mas75] （另见 [LSZ20]）。

致谢。我要感谢 Mahan Mj。这项工作受到他对我所提问题的回答的启发。感谢 Nariya Kawazumi,

多曲线图	MCG	Teichm¨uller 空间
$\mathcal{AM}(\Sigma)$		$\mathcal{T}(\Sigma)$
$\mathcal{M}(\Sigma)$	$\mathrm{Mod}(\Sigma)$	
$\mathcal{C}^{[\xi_0]}(\Sigma) = \mathcal{P}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, -1), \Gamma(\Sigma, 0)$	$\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}(\Sigma), \hat{\mathcal{T}}^{\xi_0}(\Sigma)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma), \mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, \xi_0 - k)$	$\hat{\mathcal{T}}^{k}(\Sigma)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{C}(\Sigma), \mathcal{P}^{[\xi_0-1]}(\Sigma)$	$\Gamma(\Sigma, \xi_0 - 1)$	$\hat{\mathcal{T}}^{1}(\Sigma)$

TABLE 1. 这里我们令 $\xi_0 = 3g - 3 + n$。每一行中的度量空间彼此准等距。

Hidetoshi Masai、RyoMatsuda 和 Ken'ich Ohshika，感谢他们提出的宝贵意见和鼓励。本研究获 JSPS KAKENHI 资助，资助编号为 25KJ0069。

2. PRELIMINARIES

2.1. 度量几何。 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 为度量空间。映射 $f\colon X \to Y$ 称为**准等距**，如果满足以下条件。

(1) 存在常数 $K \geq 1, L > 0$，使得对任意 $x_1, x_2 \in X$，

$$\frac{1}{K} d_X(x_1, x_2) - L \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2) + L.$$

(2) 存在 $C > 0$，使得 Y 中的每个点到 $f(X)$ 的距离都不超过 C。

若映射 $f\colon X \to Y$ 满足条件 (1)，则称其为**拟等距嵌入**。度量空间 X 的**拟平坦秩** 是满足存在拟等距嵌入 $\mathbb{Z}^n \to X$ 的最大整数 n。

我们按照 [Far98]，回顾电化度量空间的定义。设 X 为测地度量空间，且 $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 X 的连通子集族。对每个 $\alpha \in A$，我们引入一个新点 v_α，并用长度为 $1/2$ 的线段将 H_α 中的每个点与 v_α 连接。我们将所得空间记为 X，并在 X 上赋予路径度量 d_e。我们称沿着 $\mathcal{H}$ 对度量空间 $(\hat{X}, d_e)$ 进行**电化**（或**锥化**）的构造。

2.2. 多曲线图。 设 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 是亏格为 g、带有 n 个穿孔的曲面。Σ 上的简单闭曲线称为**本质的**，如果它不同伦于一个点或一个穿孔。Σ 上的 k-**多曲线** 是 Σ 上一组两两不交的本质简单闭曲线的同伦类的集合，其基数为 k，其中 $1 \leq k \leq 3g - 3 + n$。特别地，Σ 上的 $(3g - 3 + n)$-多曲线称为 Σ 的**裤子分解**。

我们定义 k-多重曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，它在 [EF17] 中被引入。

定义 2.1. k-多重曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$是以 Σ上的 k-多重曲线为顶点的图。若存在一条公共的$(k-1)$-多曲线 $\nu \subset \alpha \cap \beta$，使得两个同伦类 $\alpha \setminus \nu$与 $\beta \setminus \nu$在 $\Sigma \setminus \nu$上极小相交，则两个 k-多重曲线 α 与 β 由一条边相连。更精确地说，

- 若 $k < 3g-3+n$，则 $i(\alpha \setminus \nu,\ \beta \setminus \nu) = 0$;
- 若 $k = 3g-3+n$，且 $\Sigma \setminus \nu$的一个连通分支是单孔环面，则 $i(\alpha \setminus \nu,\ \beta \setminus \nu) = 1$;
- 若 $k = 3g-3+n$，且 $\Sigma \setminus \nu$的一个连通分支是四孔球面，则 $i(\alpha \setminus \nu,\ \beta \setminus \nu) = 2$。

我们在 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 上赋予图度量，使每条边的长度为 1。我们用 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}$表示 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$的距离函数。由于 $(3g-3+n)$-多曲线图与裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$相同，$(3g-3+n)$-多曲线图的距离函数通常记作 $d_{\mathcal{P}}$。

2.3. 二次微分与测度叶状结构。 我们回顾与全纯二次微分相关联的测度叶状结构的构造（例如参见 [FM12]）。设 X 是一个与 Σ同胚的黎曼曲面，且 q 是 X上的一个具有有限 L^1-范数的全纯二次微分。在 q的零点之外，存在一个全纯坐标 $\zeta = \xi + i\eta$，使得 $q = d\zeta^2$。这样的坐标在 $\zeta \mapsto \pm\zeta + c$意义下唯一，因此水平线 $\{\eta = \text{常数}\}$ 在 X上定义了一个叶状结构。 q的一个 m 阶零点会产生该叶状结构的一个$(m+2)$棱角奇点。此外，密度 $|d\eta|$ 在 q 的奇异叶状结构上定义了一个横截测度，由此得到的测度叶状结构称为 q 的水平测度叶状结构，记作 $\mathcal{F}_h(q)$。已知映射 $q \mapsto \mathcal{F}_h(q)$是 [HM79]的一个同胚。因此，对于每个$k$-多曲线 α，我们都可以选取一个全纯二次微分 q_α，使其水平测度叶状结构对应于 α。

2.4. 极值长度与 Teichm¨uller 空间。 设 $\Sigma = \Sigma_{g,\ n}$ 是一个亏格为 g、有 n 个穿孔的曲面。假设 $2-2g-n<0$。设 X是与 Σ同胚的黎曼曲面。我们将多曲线 α 相对于 X 的极值长度$\mathrm{Ext}_X(\alpha)$定义为

$$\mathrm{Ext}_X(\alpha) = \sup_{\rho} \frac{\ell_\rho(\alpha)^2}{\mathrm{Area}(\rho)},$$

其中，上确界取遍 X上的所有共形度量 ρ。众所周知，极值长度可连续延拓为 Σ上测度叶状结构空间上的一个函数。

¨Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 是 Σ 上带标点的黎曼曲面结构的同痕类空间。令 $X, Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 为黎曼曲面。对于每个拟共形映射 $f\colon X \to Y$，其最大膨胀

$K(f)$ 定义为

$$K(f) = \frac{1 + \|\mu_f\|_\infty}{1 - \|\mu_f\|_\infty},$$

其中， $\|\mu_f\|_\infty$是 f的贝尔特拉米微分μ_f的 L^∞-范数。然后，我们在 $\mathcal{T}(\Sigma)$ 上定义距离函数 $d_\mathcal{T}$如下：

$$d_\mathcal{T}(X, Y) := \frac{1}{2} \inf_{f \sim \mathrm{id}} \log K(f).$$

距离 $d_\mathcal{T}$称为 $\mathcal{T}(\Sigma)$的$Teichm\ddot{u}ller$距离。对于任意 X， $Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$，在 Σ上恒等映射的同痕类中，存在一个最大膨胀唯一的极值映射，称为$Teichm\ddot{u}ller$映射。令 f： $X \to Y$ 为膨胀为 K的Teichm¨uller映射。于是，在 X 上存在唯一的全纯二次微分 q ，使得 f在与 q相关联的典范坐标 $\zeta = \xi + i\eta$中由映射 $\xi + i\eta \mapsto K\xi + i\eta$ 表示。于是，我们将 Y记为$X_{q,\ K}$。黎曼曲面的单参数族 $\{X_{q,e^{2t}}\}_{t \geq 0}$ 称为沿 q方向的$Teichm\ddot{u}ller$测地线，其关于Teichm¨uller距离按弧长参数化。

现在我们回顾一个关于 Teichm¨uller 距离的公式，称为 Kerck- hoff公式。

定理 2.2 （Kerckhoff公式 [Ker80]）。 对于任意 $X, Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$，有

$$e^{-2d_\mathcal{T}(X,Y)} = \min_{\gamma \in \mathcal{MF}(\Sigma)} \frac{\mathrm{Ext}_Y(\gamma)}{\mathrm{Ext}_X(\gamma)},$$

其中，最小值由连接 X 与 Y的 Teichm¨uller 映射所对应的全纯二次微分的垂直测度叶状结构达到。

2.5. **曲线长度**。 对于任意 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 和任意 $\gamma \in \mathcal{C}(\Sigma)$，令 $\ell_X(\gamma)$ 表示 γ 的测地代表元相对于由 X确定的共形类中的双曲度量的长度。Bers 证明了以下定理。

定理 2.3 （[Ber85]）。 对于每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，都存在一个裤子分解 $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$，其所有曲线在与 X相关联的双曲度量下的长度均不超过$B_{g,n}$ ，其中$B_{g,n}$ 仅取决于 g 和 n。

这个常数 $B_{g,\ n}$ 称为$Bers$常数。由定理 2.3，我们立即得到以下推论。

推论 2.4。 设 k 是一个满足 $1 \leq k \leq 3g - 3 + n$的整数。那么，对于每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，都存在一个 k-多曲线 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，使得对每个 $\alpha^i \in \alpha$， $\ell_X(\alpha^i) \leq B_{g,\ n}$。

关于极值长度与双曲长度之间的关系，Maskit不等式广为人知。

定理 2.5 ([Mas85])。对于任意 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 和任意 $\gamma \in \mathcal{C}(\Sigma)$，下列不等式成立：

$$\mathrm{Ext}_X(\gamma) \leq \ell_X(\gamma) e^{\ell_X(\gamma)/2}.$$

由定理 2.4 和 2.5，我们得到以下推论。

推论 2.6. 设 k 为一个满足 $1 \leq k \leq 3g-3+n$的整数。对于每个$X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，存在一个 k-多曲线 $\alpha \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，使得 $\mathrm{Ext}_X(\alpha) \leq \delta_0$，其中 δ_0 是一个仅依赖于 g 和 n的常数。

证明. 对于每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，利用定理 2.4，我们取一个 k-多曲线 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，满足 $\ell_X(\alpha^i) \leq B_{g,n}$，对每个 $\alpha^i \in \alpha$都成立。根据极值长度的定义，我们可以取一个共形度量 ρ，使得

$$\mathrm{Ext}_X(\alpha) \leq \frac{\ell_\rho(\alpha)^2}{\mathrm{Area}(\rho)} + 1.$$

对于这个 ρ，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\ell_\rho(\alpha)^2}{\mathrm{Area}(\rho)} &= \frac{\left(\sum_{i=1}^k \ell_\rho(\alpha^i)\right)^2}{\mathrm{Area}(\rho)} \\
&\leq k \sum_{i=1}^k \frac{\ell_\rho(\alpha^i)^2}{\mathrm{Area}(\rho)} && \text{(Cauchy-Schwartz)} \\
&\leq k \sum_{i=1}^k \mathrm{Ext}_X(\alpha^i) \\
&\leq k \sum_{i=1}^k \ell_X(\alpha^i) e^{\ell_X(\alpha^i)/2} && \text{(Theorem 2.5)} \\
&\leq (3g-3+n)^2 B_{g,n} e^{B_{g,n}/2}.
\end{aligned}$$

□

我们稍后将使用下面的不等式。

引理 2.7 （明斯基不等式 [Min93]）**.** 设 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{MF}(\Sigma)$ 为 Σ 上的测度叶状结构，且 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$。则，

$$i(\gamma_1, \gamma_2)^2 \leq \mathrm{Ext}_X(\gamma_1)\,\mathrm{Ext}_X(\gamma_2).$$

3. Inequality between intersection numbers and distance

3.1. 裤子图距离的不等式。 Hempel [Hem01] 证明，曲线图中任意两条曲线 γ_1, γ_2之间的距离 $d_{\mathcal{C}}(\gamma_1, \gamma_2)$，有一个由它们的几何交数 $i(\gamma_1, \gamma_2)$ 的对数函数给出的上界。这一结果通常称为 Hempel 引理。为证明 Hempel 引理，他对曲线使用了手术论证。然而，这种手术论证不适用于多重曲线图中的类似问题，尤其是裤子图中的问题。另一方面，Lackenby 和 Yazdi [LY26] 证明了一个不等式，表明

两种裤子分解 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\Sigma)$ 之间的距离 $d_{\mathcal{P}}(P_1, P_2)$，有一个由交数 $i(P_1, P_2)$ 的对数函数给出的上界。

定理 3.1 ([LY26，定理 1.1])**.** 设 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\Sigma)$ 是 Σ 上的裤子分解。那么存在一个常数 $C > 0$，使得

$$d_{\mathcal{P}}(P_1, P_2) \leq C(1 + \log i(P_1, P_2)),$$

其中 C 仅取决于 $\chi(\Sigma)$。此外，当 $|\chi(\Sigma)| \to \infty$ 时，$C = O(|\chi(\Sigma)|^2)$。

此外，作为证明定理 3.1 的一个中间步骤，Lackenby 和 Yazdi 推导出了以下估计，其上界是交数的二次函数，但比定理 3.1 中的界更明确、更简洁。

定理 3.2 ([LY26，推论 3.16])**.** 设 P_1, P_2 是 Σ 的裤子分解。那么

$$d_{\mathcal{P}}(P_1, P_2) \leq 6i(P_1, P_2)^2. \tag{3.1}$$

注 3.3. (3.1) 右侧的表达式隐含地出现在 [LY26] 第 3 节的论证中。在附录 A 中，我们讨论显式上界。

3.2. k-多重曲线图距离的不等式。

引理 3.4. 设 k 和 l 为整数，满足 $1 \leq k, l \leq 3g - 4 + n$。对于任意$k$-多重曲线 $\alpha \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 和任意 l- 多重曲线 $\beta \in \mathcal{C}^{[l]}(\Sigma)$，存在一个 $(k+1)$- 多重曲线 $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}^{[k+1]}(\Sigma)$，使得 $\alpha \subset \tilde{\alpha}$ 并且

$$i(\tilde{\alpha}, \beta) \leq 2\, i(\alpha, \beta).$$

证明。 选取多重曲线 α 和 β 的代表元 a 和 b，使它们在各自的同伦类中实现最小交数，并将其视为 Σ的子集。由于 $k \leq 3g-4+b$，存在$\Sigma \setminus a$的一个连通分支 X，它不是裤子曲面。因此，$X \cap b$ 的每个连通分支都是曲线 b 的一段子弧，或是作为 b的一个分支的闭曲线。令 $c_1, \ldots, c_m \subset b$为 $X \cap b$ 的所有连通分支。那么， $X \cap b$ 的连通分支数m 至多为几何交数 $i(\alpha, \beta)$。

我们如下定义一条新的简单闭曲线 $a' \subset X$ 。令 $X' = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} c_i$。

(i) 如果 $c_1, \ldots, c_m$中有一条简单闭曲线，我们就令 a'为该曲线。

(ii) 如果 $\{c_1, \ldots, c_m\}$ 中没有简单闭曲线，且子曲面 X' 包含一条在该子曲面中本质的简单闭曲线，我们就令 a' 为该曲线。

(iii) 最后，我们考虑以下情形： c_1、.....、 c_m 中没有简单闭曲线，且子曲面 X'不包含任何在该子曲面中本质的简单闭曲线,

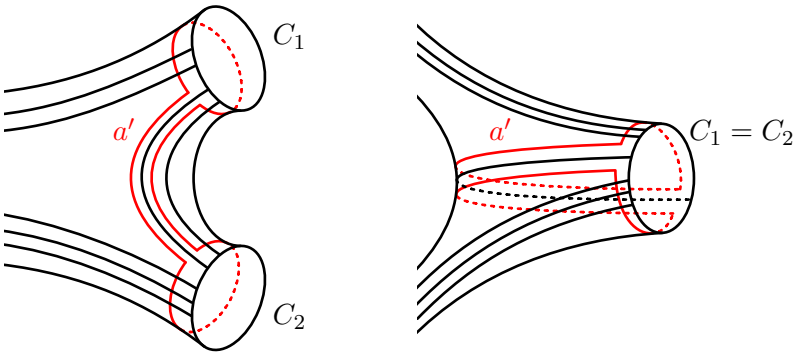

FIGURE 1.

也就是说， X' 的每个连通分支都是裤子曲面、环带或圆盘。设 C_1 和 C_2 是 X 上包含子弧 c_1 端点的边界分支（可能$C_1 = C_2$）。那么， C_1 和 C_2 的同伦类都是 α的分支。

首先，假设 $C_1 \neq C_2$。 X 中 $c_1 \cup C_1 \cup C_2$ 的正则邻域的边界只有一个分支。令 a' 表示这个边界分支（见图 1 左侧）。那么，简单闭曲线 a' 在 X 中是本质的。如果 a' 在 X中不是本质的，那么它与 X 的某个边界分支或一个点同伦。这意味着 X 要么是裤子曲面，要么是环带，这与 X的选取矛盾。

接下来，假设 $C_1 = C_2$，也就是说，弧 c_1 的端点位于C_1上。那么， X 中 $c_1 \cup C_1$ 的正则邻域的边界有两个分支，分别记为 ∂_1 和 ∂_2。 ∂_1 和 ∂_2 中至少有一个在 X中是本质的。如果 ∂_1 和 ∂_2 在 X中都不是本质的，那么每个 ∂_i （$i = 1$， 2）都与 X 的某个边界分支或一个点同伦。这意味着 X 要么是裤子曲面、环带，要么是圆盘，这与 X的选取矛盾。在这种情况下，我们令 a' 为 ∂_1 和 ∂_2 中一个本质的曲线（见图 1 右侧）。

在情形 (i)–(iii) 中，交数 $i(a'$， $b)$ 至多为 $i(\alpha$， $\beta)$。令 $\tilde{\alpha} = \alpha \cup \{[a']\}$，其中 $[a']$ 表示简单闭曲线 a' 的同痕类。由于 a' 与 α 的代表多曲线 a 不相交，因此集合 $\tilde{\alpha}$ 是一个 $(k+1)$-多曲线。因此，我们有

$$i(\tilde{\alpha}, \beta) = i(\alpha, \beta) + i([a'], \beta) \leq 2\, i(\alpha, \beta),$$

因为 $i([a']$， $\beta) \leq i(a'$， $b) \leq i(\alpha$， $\beta)$。 □

连续应用定理 3.4，可得如下结果。

命题 3.5。 设 k 为满足 $1 \leq k \leq 3g-4+n$ 的整数。对于任意两个 k-多曲线 α， $\beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，存在裤子分解 $\tilde{\alpha}$， $\tilde{\beta} \in \mathcal{P}(\Sigma)^{\sim}$，使得 $\alpha \subset \tilde{\alpha}$、 $\beta \subset \beta$，并且

$$i(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leq 4^{3g-3+n-k} i(\alpha, \beta).$$

根据以下引理，裤图距离为 k-多重曲线图距离提供了一个上界。

引理3.6。 设 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 是复杂度为 $\xi(\Sigma) = 3g-3+n$ 的曲面，并设 k 是满足 $1 \le k \le \xi(\Sigma) - 1$ 的整数。对于任意两个 k-多重曲线 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，以及任意两个裤分解 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{P}(\Sigma)$，若 $\alpha \subset \tilde{\alpha}$ 且 $\beta \subset \tilde{\beta}$，则有

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) \le d_{\mathcal{P}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + f(k),$$

其中 $f(k) = \min\{k, \xi(\Sigma) - k\}$。

证明。 设 $\tilde{\alpha} = P_0, P_1, \ldots, P_m = \tilde{\beta}$ 是裤子图中的一条测地线段 $\mathcal{P}(\Sigma)$，从 $\tilde{\alpha}$ 到 $\tilde{\beta}$，使得 $m = d_{\mathcal{P}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$。

我们归纳地构造一个 k-多重曲线序列 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$，使得对每个 i 都有 $\gamma_i \subset P_i$。首先，令 $\gamma_0 := \alpha \subset P_0$。接下来，若 $\gamma_{i-1} \subset P_i$，则定义 $\gamma_i := \gamma_{i-1}$。下面考虑 $\gamma_{i-1} \not\subset P_i$ 的情形。由于 P_{i-1} 和 P_i 在裤子图中相邻，存在曲线 $\delta_i \in P_{i-1}$ 和 $\delta_i' \in P_i$，使得 $P_{i-1} \setminus \{\delta_i\}$ 与 $P_i \setminus \{\delta_i'\}$ 重合。现在，γ_{i-1} 不包含于 P_i 中；因此，γ_{i-1} 必须将 δ_i 作为一个分支包含其中。任取曲线 $c_i' \in P_i \setminus (\gamma_{i-1} \setminus \{\delta_i\})$，定义 $\gamma_i := (\gamma_{i-1} \setminus \{\delta_i\}) \cup \{c_i'\}$。于是，$\gamma_i \subset P_i$ 与两个 k-多重曲线 γ_{i-1} 和 γ_i 的差别在于替换一条曲线，因此对每个 $i = 1, \ldots, m$，都有 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \le 1$。

现在，对于 P 上的固定裤子分解 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{P}(\Sigma)$，任意两个包含在 P 中的 k-多曲线，都可以在 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 中通过逐次替换一条曲线而相连，所需替换次数至多为 $\min\{k, \xi(\Sigma) - k\} = f(k)$。因此，我们有 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_m, \beta) \le f(k)$。结合这些估计并利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) &\le \sum_{i=1}^{m} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_{i-1}, \gamma_i) + d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_m, \beta) \\ &\le m + f(k) = d_{\mathcal{P}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + f(k), \end{aligned}$$

正如所需。 □

推论3.7。 设 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 是一个复杂度为 $\xi(\Sigma) = 3g-3+n$ 的曲面，且 k 是一个满足 $1 \le k \le \xi(\Sigma) - 1$ 的整数。对于任意 k-多曲线 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们有

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) \le 6 \cdot 4^{6g-6+2n-2k} i(\alpha, \beta)^2 + f(k),$$

其中 $f(k) = \min\{k, \xi(\Sigma) - k\}$。

证明。 对于任意 k-多重曲线 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，令 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{P}(\Sigma)$ 为定理 3.5 中的裤分解。于是我们有

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) &\le d_{\mathcal{P}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + f(k) && \text{by Theorem 3.6} \\ &\le 6i(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})^2 + f(k) && \text{by Theorem 3.2} \\ &\le 6 \cdot 4^{6g-6+2n-2k} i(\alpha, \beta)^2 + f(k) && \text{by Theorem 3.5.} \end{aligned}$$

□

注记 3.8。 在上述证明中，若用定理 3.1 代替定理 3.2，我们便得到 k-多重曲线图中距离的一个上界，该上界由交数的一个对数函数给出。

4. Quasi-isometry between $\hat{\mathcal{T}}^k$ and $\mathcal{C}^{[k]}$

固定一个足够小的常数 $\epsilon_0 > 0$ ，使得领圈引理成立，并令 k 为满足 $1 \leq k \leq 3g-3+n$的整数。对任意 k-多曲线$\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们如下定义子集薄部$_\alpha \subset \mathcal{T}(\Sigma)$

$$\mathrm{Thin}_\alpha = \big\{X \in \mathcal{T}(\Sigma) \mid \mathrm{Ext}_X(\alpha^i) \leq \epsilon_0 \text{ for each } \alpha^i \in \alpha\big\}.$$

令($\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$ d_e)表示将度量空间($\mathcal{T}(\Sigma)$ $d_{\mathcal{T}}$)沿族 $\{$薄部$_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)}$电化后得到的度量空间。对每个 $\alpha \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，令 $v_\alpha \in \hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$表示电化中添加的、对应于薄部$_\alpha$ 的顶点。我们定义一个映射

$$I \colon \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma) \longrightarrow \hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$$

由 $I(\alpha) = v_\alpha$。本节旨在证明以下定理。

定理 4.1。 映射 $I\colon \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma) \to \hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$ 是一个准等距。

利用交数给出的 k-多曲线图中的距离上界（定理 3.7），我们基本按照 [MM99] 中的方法证明定理 4.1。为完整起见，我们在下文给出证明。

引理 4.2。 映射 I 是 ($_{1\,2}\log \frac{\delta_0}{\epsilon_0} + \frac{1}{2}$)-准稠密的，其中常数$\delta_0$ 仅取决于 Σ，如定理 2.6 所述。

证明。 由定理 2.6 可知，对每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，都存在一个 k-多曲线 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\}$，使得 $\mathrm{Ext}_X(\alpha) \leq \delta_0$。令 q_α 为 X 上的全纯二次微分，其水平测度叶状结构为 α。令$\{X_t\}_{t\geq 0}$ 为从 X 沿 $-q_\alpha$ 方向出发的 Teichm¨uller 测地线，其中$X_t := X_{-q_\alpha,\ e^{2t}}$。这条 Teichm¨uller 测地线 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 收缩了 q_α 的水平方向。于是，由定理 2.2 可知，对每个 $t \geq 0$,

$$\frac{\mathrm{Ext}_{X_t}(\alpha)}{\mathrm{Ext}_X(\alpha)} = e^{-2t}.$$

如果 $t =_{-\frac{1}{2}} \log \frac{\delta_0}{\epsilon_0}$, 那么

$$\mathrm{Ext}_{X_t}(\alpha^i) \leq \mathrm{Ext}_{X_t}(\alpha) = \frac{\epsilon_0}{\delta_0}\,\mathrm{Ext}_X(\alpha) \leq \epsilon_0$$

对于每个 $\alpha^i \in \alpha$。因此，我们有 $X_t \in$ 薄部$_\alpha$，从而

$$d_e(X, v_\alpha) \leq \frac{1}{2}\log\frac{\delta_0}{\epsilon_0} + \frac{1}{2}.$$

□

引理 4.3. 假设 k 是一个满足 $1 \leq k \leq 3g-4+n$ 的整数。那么，对于任意 α, $\beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们有

$$d_e(v_\alpha, v_\beta) \leq d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta).$$

证明。假设 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) = 1$。在这种情况下，交集 $\mathrm{Thin}_\alpha \cap \mathrm{Thin}_\beta \subset \mathcal{T}(\Sigma)$ 非空。取 $X \in \mathrm{Thin}_\alpha \cap \mathrm{Thin}_\beta$。于是

$$d_e(v_\alpha, v_\beta) \leq d_e(v_\alpha, X) + d_e(X, v_\beta) = 1.$$

这就证明了所需的不等式。 □

引理 4.4。设 $k = 3g-3+n$。则存在一个常数 $K_0 > 0$，使得对于任意 α, $\beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，都有

$$d_e(v_\alpha, v_\beta) \leq K_0 d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta).$$

证明。设 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\}$ 和 $\beta = \{\beta^1, \ldots, \beta^k\}$ 是 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 中满足 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) = 1$ 的元素。那么，在必要时重新标记后，不妨设对于 $2 \leq i \leq k$，有 $\alpha^i = \beta^i$，并且

- $i(\alpha^1, \beta^1) = 1$，如果 $\Sigma \setminus \bigcup_{i=2}^k \alpha^i$ 的某个连通分支是单孔环面；
- $i(\alpha^1, \beta^1) = 2$ 若 $\Sigma \setminus \bigcup_{i=2}^k \alpha^i$ 的某个连通分支是四孔球面。

在这两种情形下，都存在 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，使得

$$\ell_X(\alpha^1) \leq D, \ell_X(\beta^1) \leq D, \text{ and } \ell_X(\alpha^i) = \ell_X(\beta^i) \leq D \ (2 \leq i \leq k),$$

其中 $D > 0$ 是一个普适常数。因此，存在一个普适常数 $D' > 0$，使得 $\mathrm{Ext}_X(\alpha) \leq D'$ 且 $\mathrm{Ext}_X(\beta) \leq D'$。设 q_α, q_β 是 X 上的全纯二次微分，其水平测度叶状结构分别等于 α, β。设 $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ 是从 X 出发的 Teichmüller 测地线，其中 $X_t = X_{-q_\alpha,\ e^{2t}}$ 且 $Y_t = X_{-q_\beta,\ e^{2t}}$。令 $t = \frac{1}{2} \log \frac{D'}{\epsilon_0}$，由定理 2.2 可得

$$\mathrm{Ext}_{X_t}(\alpha) \leq \epsilon_0 \text{ and } \mathrm{Ext}_{Y_t}(\beta) \leq \epsilon_0.$$

因此我们看到，$X_t \in$ 属于薄部，$Y_t \in$ 也属于薄部，故

$$\begin{aligned} d_e(v_\alpha, v_\beta) &\leq d_e(X_t, Y_t) + 1 \\ &\leq d_{\mathcal{T}}(X_t, Y_t) + 1 \\ &\leq d_{\mathcal{T}}(X_t, X) + d_{\mathcal{T}}(X, Y_t) + 1 \\ &\leq \log \frac{D'}{\epsilon_0} + 1. \end{aligned}$$

由此即得所需结论。 □

引理 4.5。对于每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，设 α_X 和 α'_X 是 k-多曲线，且 $\mathrm{Ext}_X(\alpha_X) \leq \delta_0$，$\mathrm{Ext}_X(\alpha'_X) \leq \delta_0$。那么，$\alpha_X$和$\alpha'_X$ 在 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 中的距离至多为 δ_1，其中 δ_1 仅取决于 δ_0、g 和 n。

证明。 根据定理 2.7，我们得到

$$i(\alpha_X, \alpha'_X)^2 \le \operatorname{Ext}_X(\alpha_X)\operatorname{Ext}_X(\alpha'_X) \le \delta_0^2.$$

由此以及定理 3.7，我们得到

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha_X, \alpha'_X) \le K_1 i(\alpha_X, \alpha'_X)^2 + K_2 \le K_1\delta_0^2 + K_2 =: \delta_1.$$

□

根据定理 2.6，对于每个 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，存在一个 k-多曲线 α_X，使得 $\operatorname{Ext}_X(\alpha_X) \le \delta_0$。我们定义映射

$$\Phi\colon \hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma) \to \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$$

令 $\Phi(X) = \alpha_X$ 对于 $X \in \mathcal{T}(\Sigma)$，并令 $\Phi(v_\alpha) = \alpha$ 对于与电化中添加的 $\operatorname{Thin}_\alpha$ 相对应的顶点 v_α。尽管 α_X 的选择并不唯一，但由定理 2.6 可知，任意两个这样的选择之间的距离均一致有界。

定理 *4.1* 的证明。 映射 I 的拟稠密性由定理 4.2 得出。我们验证存在常数 $A \ge 1$ 和 $B \ge 0$，使得对于每个 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$,

$$\frac{1}{A} d_e(I(\alpha), I(\beta)) - B \le d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) \le A d_e(I(\alpha), I(\beta)) + B. \tag{4.1}$$

不等式 (4.1) 的右侧由定理 4.3 和 4.4 得出。

下面验证不等式 (4.1) 的左侧。固定 $X, Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$，其中$d_{\mathcal{T}}(X, Y) \le 1$。由定理 2.2，得到

$$\frac{\operatorname{Ext}_X(\Phi(Y))}{\operatorname{Ext}_Y(\Phi(Y))} \le e^2.$$

因此我们看到 $\operatorname{Ext}_X(\Phi(Y)) \le e^2\delta_0$，从而由定理 2.7，

$$i(\Phi(X), \Phi(Y))^2 \le \operatorname{Ext}_X(\Phi(X))\operatorname{Ext}_X(\Phi(Y)) \le e^2\delta_0^2.$$

于是得到

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X), \Phi(Y)) \le K_1 i(\Phi(X), \Phi(Y))^2 + K_2 \le K_1 e^2\delta_0^2 + K_2 =: K_3.$$

对于任意 $X, Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$，令 $n = \lfloor d_{\mathcal{T}}(X, Y) \rfloor$。选取序列 $\{X_i\}_{i=0}^{n+1} \subset \mathcal{T}(\Sigma)$，使得 $X_0 = X, X_{n+1} = Y$，并且对于每个 $i = 0, \dots, n$，都有 $d_{\mathcal{T}}(X_i, X_{i+1}) \le 1$。于是

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X), \Phi(Y)) \le \sum_{i=0}^{n} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X_i), \Phi(X_{i+1})) \le K_3(n+1).$$

这表明

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X), \Phi(Y)) \le K_3(d_{\mathcal{T}}(X, Y) + 2). \tag{4.2}$$

对于任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们选取一条从 v_α 到 v_β 的路径 $c \subset \hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$，使得 $\ell_{\hat{\mathcal{T}}^k}(c) \le d_e(v_\alpha, v_\beta) + 1$。令

$$v_\alpha = v_{\alpha_0}, v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_m} = v_\beta \qquad (\alpha_i \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma),\ 0 \le i \le m)$$

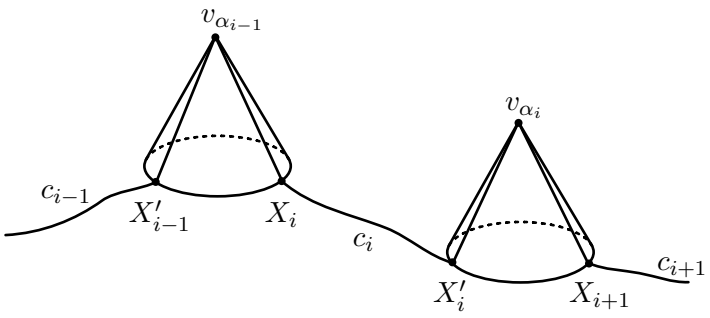

FIGURE 2.

表示路径 c 沿途经过的 $\hat{\mathcal{T}}^k(\Sigma)$ 中新增的顶点，按它们沿 c遇到的顺序排列。于是，顶点的数量 m至多为 $d_e(v_\alpha, v_\beta) + 1$。对于每个满足 $1 \le i \le m$ 的 i，令 c_i表示 c 中从 $v_{\alpha_{i-1}}$ 到 v_{α_i}的子路径。令 $X_i \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 为 c_i上距离 $v_{\alpha_{i-1}}$最近的点，并令 $X'_i \in \mathcal{T}(\Sigma)$ 为 c_i 上距离 v_{α_i}最近的点（见图 2）。于是， $X_i \in$薄部$_{\alpha_{i-1}}$ 和 $X'_i \in$ 薄部$_{\alpha_i}$。此外，我们有

$$\ell_{\hat{\mathcal{T}}^k}(c_i) \ge d_{\mathcal{T}}(X_i, X'_i) + 1. \tag{4.3}$$

因此，由定理 4.5 和不等式 (4.2)、(4.3)，我们有

$$\begin{aligned}
&d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \\
&\le d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha_{i-1}, \Phi(X_i)) + d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X_i), \Phi(X'_i)) + d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X'_i), \alpha_i) \\
&\le d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\Phi(X_i), \Phi(X'_i)) + 2\delta_1 \\
&\le K_3(d_{\mathcal{T}}(X_i, X'_i) + 2) + 2\delta_1 \\
&\le K_3(\ell_{\hat{\mathcal{T}}^k}(c_i) + 1) + 2\delta_1.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) &\le \sum_{i=1}^{m} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \\
&\le K_4 m + K_3 \sum_{i=1}^{m} \ell_{\hat{\mathcal{T}}^k}(c_i) \\
&\le (K_4 + K_3)(d_e(v_\alpha, v_\beta) + 1)
\end{aligned}$$

这证明映射 I 是一个拟等距映射。 □

APPENDIX A. QUADRATIC UPPER BOUND FOR PANTS GRAPH DISTANCE VIA INTERSECTION NUMBER

定理 A.1 ([LY26，推论 3.21])。设 P， P' 是 Σ 的裤子分解。那么， $\mathcal{P}(\Sigma)$ 中 P 与 P' 的距离为 $O(i(P, P')^2)$。

本节沿用 Lackenby 和 Yazdi 的证明，得到一个以交数表示的裤图距离的更明确上界，而不使用大 O 记号。

我们回顾论文 [LY26] 第 3 节中的内容。设 $\Sigma = \Sigma_{g,\ n}$是一个亏格为 g 、有 n 个穿孔的曲面。曲面 Σ 的预三角剖分 是嵌入 Σ 中的有限 1-复形，且其补集的每个连通分支在拓扑上都是圆盘、环带或裤子曲面。这里，我们将不含顶点的简单闭曲线视为一个 1-复形。设$\mathcal{T}$ 是 Σ 的预三角剖分。我们将 $\mathcal{T}$ 的边按顺序排列，记为 O $=(e_1,\ \ldots\ldots,\ e_i)$。我们构造两个与预三角剖分 $\mathcal{T}$ 及其边的顺序 O 相关联的 Σ 的子曲面序列$\{N_j\}_{j=1}^{i}$ 和 $\{F_j\}_{j=1}^{i}$。首先，我们将 $N_1 \subset \Sigma$ 定义为 e_1 的正则邻域。接下来，我们递归地将 $N_{j+1} \subset \Sigma$ 定义为 $N_j \cup e_{j+1}$ 的正则邻域。最后，将 $\Sigma \setminus N_j$ 的每个圆盘分支封帽后，我们得到一个子曲面 F_j。对每个 j，令 γ_j 表示由 F_j 中在 Σ内本质的所有边界分支组成的多曲线（即本质简单闭曲线的同伦类集合），其中平行的简单闭曲线视为相同 [LY26，构造 3.10]。于是，$\bigcup_{j=1}^{i}\gamma_j$ 的并构成 Σ [的一个裤子分解13]LY26，引理 3.13]。我们将该裤子分解记为 $\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O})$。

若 O′ 由对 $\mathcal{T}$ 的边进行排序所得，且该排序是通过交换两个连续指标得到的，则$\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O})$与$\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O}')$之间的距离有一个统一常数上界 C [LY26，引理 3.18]。现在，设 O 和 O′ 是对 $\mathcal{T}$的边进行排序所得的任意排序。由于任意一个由 i个元素组成的排列都能写成至多 $1+\cdots+(i-1) = i(i-1)/2$次相邻换位的乘积，因此，O 至多经过 $i(i-1)/2$次相邻换位即可变为 O′，其中 i 是边的数量。因此，$\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O})$与$\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O}')$之间的距离至多为 $Ci(i-1)/2$ [LY26，推论 3.19]。

设 P 和 P' 是 Σ的裤子分解，并假设它们处于最小位置。如果 P 和 P' 有一些公共分支，那么沿公共曲线切割 Σ ，并限制在所得子曲面上，我们可以不失一般性地假设 P 和 P' 没有公共分支。令 $\mathcal{T}_{P\cup P'}$为将 P和 P'叠加后得到的预三角剖分。那么， $\mathcal{T}_{P\cup P'}$的边数至多为 $2\,i(P,P')$。此外，存在 $\mathcal{T}_{P\cup P'}$的边的序列 O 和 O′，使得$\mathbf{P}(\mathcal{T}_{P\cup P'},\mathrm{O}) = P$且 $\mathbf{P}(\mathcal{T}_{P\cup P'},\ \mathrm{O}') = P'$。因此，

$$
\begin{aligned}
d_{\mathcal{P}}(P,P') &\le C\cdot\frac{2\,i(P,P')(2\,i(P,P')-1)}{2}\\
&= C\big(2\,i(P,P')^2 - i(P,P')\big).
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

因此，明确求出常数 C 后，我们得到裤子图距离与交数之间的不等式。由下面的命题可知，最优常数 C 为 3。

命题 A.2。 设 $\mathcal{T}$ 是 Σ的预三角剖分。设 O 和 O′ 是 $\mathcal{T}$ 的边的排列。假设 O′ 是通过交换 O 中两个

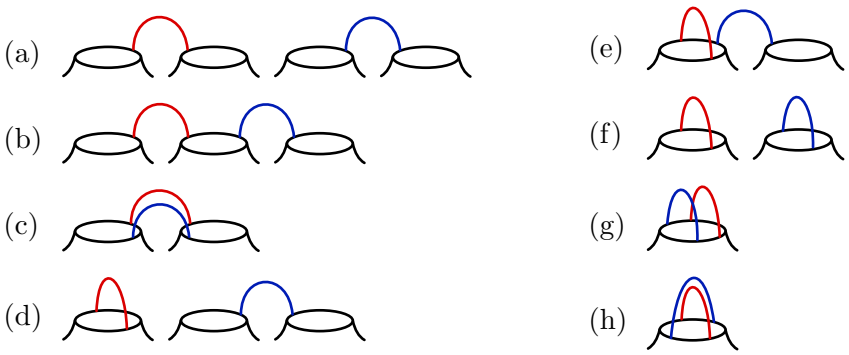

FIGURE 3. 红色和蓝色弧线分别表示连接 N的e_j 和e_{j+1} 边界分支。

连续指标得到的。那么，

$$d_{\mathcal{P}}(\mathbf{P}(\mathcal{T},\mathrm{O}),\mathbf{P}(\mathcal{T},\mathrm{O}'))\leq 3.$$

证明。 </style}按照 [LY26，引理 3.18], 证明中的论证，我们验证该命题。设 O 是 $\mathcal{T}$ 的边排序，令 O′ 表示交换第 j条边与第（$j+1$）条边后得到的边排序。记

$$\mathrm{O}=(e_1,\ldots,e_j,e_{j+1},\ldots,e_i)\text{ and }\mathrm{O}'=(e_1,\ldots,e_{j+1},e_j,\ldots,e_i).$$

设 $\{N_k\}_{k=1}^i$ 和 $\{F_k\}_{k=1}^i$ 是分别与$\mathcal{T}$和 O 相关联的子曲面序列，设 $\{N_k'\}_{k=1}^i$ 和 $\{F_k'\}_{k=1}^i$是分别与 $\mathcal{T}$和 O′相关联的子曲面序列。为简便起见，分别用 P 和 P'表示$\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O})$和$\mathbf{P}(\mathcal{T},\ \mathrm{O}')$。根据子曲面的构造，我们发现，当 $|k-j|\geq 1$时，$F_k=F_k'$。因此，对称差 $P\triangle P'$中的每条曲线都包含于子曲面

$$F_{j+1}\setminus F_{j-1}=F_{j+1}'\setminus F_{j-1}'.$$

由于 $\chi(F_{j+1}\setminus F_{j-1})\geq -2$ [LY26，引理 3.12], 中，$F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 中既不是圆盘、环带也不是裤子曲面的连通分支至多有一个。去掉 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 的连通分支中的圆盘和环带后，子曲面 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 要么是

（1）本质四孔球面、本质单孔环面、本质双孔环面，或（2）至多两个本质裤子曲面的不交并。

如果 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 属于类型 (2)，那么裤子分解 P和 P' 相同。因此，我们可以假设 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 属于类型 (1)。令 $N_{j-1}=N_{j-1}'$表示子曲面 N。如果e_j 和e_{j+1} 中至少有一个是简单闭曲线，那么子曲面 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 属于类型 (2)。如果e_j或e_{j+1}的至少一个端点与 N不相交，那么可以将 ∂N_j和 $\partial N_j'$同伦变形至彼此不相交。因此，我们可以假设e_j 和e_{j+1} 的每个端点都位于 N中。在这种情况下，e_j 和e_{j+1} 与 N 相接的方式如图3所示。

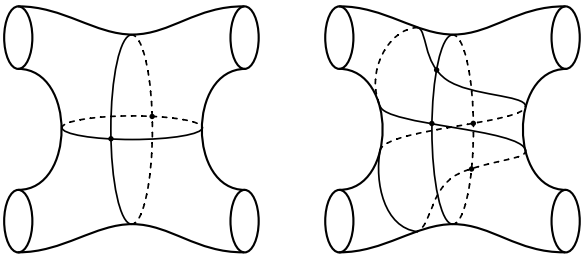

FIGURE 4.

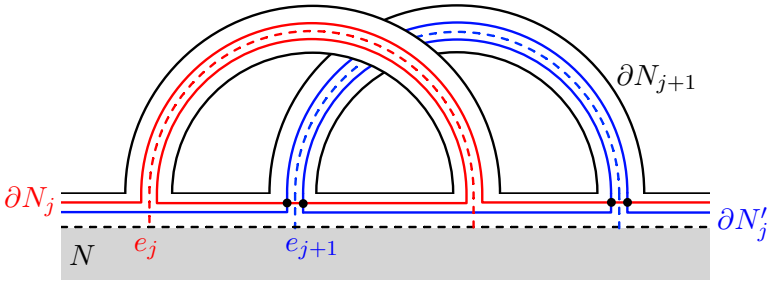

FIGURE 5. 白色区域（由 ∂N_{j+1} 和黑色虚线围成）是 S。

在图3中的 (a)、(d) 和 (f) 这几种情形下，舍去 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$的圆盘和环带分支后，子曲面 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 是至多两个本质裤子曲面的不交并。因此，P 和 P'之间没有区别。

在图3中的 (b)、(c)、(e) 和 (g) 这些情形下，子曲面 $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 的一个连通分支可以是一个四孔球面 S。此时，曲线 ∂N_j 和 $\partial N'_j$ 至多相交四次（见图5；注意，现在e_j 和e_{j+1} 的端点可能位于 ∂N的不同分支中，而且两条带没有相互链接）。在 S中， P 的唯一曲线与 P' 的唯一曲线至多相交四次。由于 P和 P'在四孔球面 S之外重合，距离 $d_{\mathcal{P}}(P,\ P')$至多为 $\mathcal{C}(\Sigma_{0,4})$中两条至多相交四次的曲线之间的最大距离 d_1 。如果四孔球面上的两条曲线至多相交四次，那么在同胚意义下，它们属于图4所示的两种类型之一。因此，最大距离 d_1 至多为 2，进而 $d_{\mathcal{P}}(P,\ P')$也至多为 2。

我们考虑情形 (h)。在这种情形下， $F_{j+1}\setminus F_{j-1}$ 的一个连通分支是单孔环面或双孔环面。我们将该连通分支记为 S。于是， P 和 P' 在 S之外重合，且它们的差异仅在于包含于 S中的曲线。 $\partial N_j\cap S$和 $\partial N'_j\cap S$各由两条曲线组成（见图5）。我们将 $\partial N_j\cap S$的分支记为 c_1、 c_2，将 $\partial N'_j\cap S$的分支记为 c'_1、 c'_2。从图5中可得如下结论。

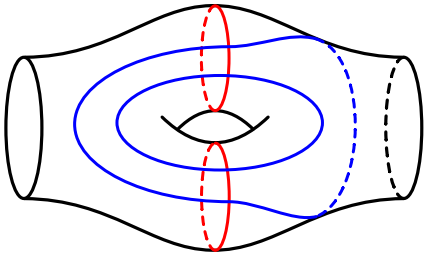

FIGURE 6. 红色多曲线是 γ，蓝色多曲线是 γ'。这两条多曲线之间的距离为 3。

断言 A.3。(1) $\partial N_j \cap S$ 的每个连通分支与 $\partial N'_j \cap S$ 的每个连通分支至多相交一次。(2) 曲线 c_1、c_2、c'_1 和 c'_2 在 S中均为非分离曲线。

首先，假设 S 是一个单孔环面。于是 c_1 和 c_2 同位，c'_1 和 c'_2也同位。由于 P 与 P' 之间的裤子图距离不超过 S 的曲线图中 $\gamma := [c_1] = [c_2]$ 与 $\gamma' = [c'_1] = [c'_2]$之间的距离 d_2。由定理 A.3 (1) 可知，几何交数 $i(\gamma, \gamma')$ 等于 1。因此，我们有 $d_2 = 1$。

接下来，假设 S 是一个双孔环面。于是，多曲线 $\gamma = \{[c_1], [c_2]\}$ 和 $\gamma' = \{[c'_1], [c'_2]\}$ 各自都是 S的裤子分解。由定理 A.3 可知，在映射类群的作用下，γ 和 γ' 可化为图 6 所示的形式。现在，裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$ 中 P与 P' 之间的距离不超过 S 的裤子图中γ 与 γ'之间的距离 d_3，由此可得 $d_3 = 3$。

因此，在所有情形下，$\mathcal{P}(\Sigma)$ 中 $P = \mathbf{P}(\mathcal{T}, O)$ 与 $P' = \mathbf{P}(\mathcal{T}, O')$ 之间的距离至多为 3。□

因此，利用 (A.1)，我们可以将定理 A.1 重述为如下显式形式。

定理 A.4. 对任意两个裤分解 $P, P' \in \mathcal{P}(\Sigma)$,

$$d_{\mathcal{P}}(P, P') \leq 6i(P, P')^2 - 3i(P, P').$$

REFERENCES

[Ber85] Lipman Bers. 关于黎曼曲面的一条不等式。载于 *Differential geometry and complex analysis*，第 87–93 页。Springer，柏林，1985 年。[BHS17] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。《层次双曲空间 I：立方群的曲线复形》。*Geom. Topol.*，21(3):1731–1804，2017 年。[BHS19] Jason Behrstock、Mark Hagen 和 Alessandro Sisto。《层次双曲空间 II：组合定理与距离公式》。*Pacific J. Math.*，299(2):257–338，2019 年。[Bro03] Jeffrey F. Brock。Weil-Petersson度量与三维双曲凸核的体积。*J. Amer. Math. Soc.*，16(3):495–535，2003 年。

[Dur16] Matthew Gentry Durham。曲面的增广标记复形。 *J.Lond. Math. Soc. (2)*, 94(3):933–969，2016 年。[EF17] Viveka Erlandsson 和 Federica Fanoni。多曲线图之间的单纯嵌入。 *Michigan Math. J.*，66(3):549–567，2017 年。[Far98] B. Farb。相对双曲群。 *Geom. Funct. Anal.*，8(5):810–840，1998 年。[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit。 *A primer on mapping class groups*， *Princeton Mathematical Series*第 49 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012 年。[Har81] W. J. Harvey。模群的边界结构。载于 *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York*， *Stony Brook*， *N.Y.*， *1978)*， *Ann. of Math. Stud.*第 97 卷，第 245–251 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1981 年。[Hem01]John Hempel。从曲线复形的视角看三维流形。 *Topology*，40(3):631–657，2001 年。[HM79] John Hubbard 和 Howard Masur。二次微分与叶状结构。 *ActaMath.*，142(3-4):221–274，1979 年。[Ker80] Steven P. Kerckhoff。Teichm¨uller 空间的渐近几何。 *Topology*，19(1):23–41，1980 年。[KKS26] Erika Kuno、Rin Kuramochi 和 Kento Sakai。曲线图与裤子图之间插值图的 大尺度几何。2026 年。[LSZ20] Lixin Liu、Weixu Su 和 Youliang Zhong。Te- ichm¨uller 测地线之间的距离与夹角。 *Adv. Math.*，360:106892，21，2020 年。[LY26] Marc Lackenby 和 Mehdi Yazdi。裤分解之间以及三角剖分之间变换步数的界。 *Journal of Topology and Analysis*，0(0):1–68，2026 年。[Mas75] Howard Masur。Teichm¨uller 空间中的一类测地线。 *Ann. of Math. (2)*，102(2):205–221，1975 年。[Mas85] Bernard Maskit。双曲长度与极值长度的比较。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*，10:381–386，1985 年。[Min93] Yair N. Minsky。Teichm¨uller 测地线与双曲三维流形的端部。 *Topol-ogy*，32(3):625–647，1993 年。[Min96] Yair N. Minsky。Teichm¨uller 空间中的极值长度估计与乘积区域。 *Duke Math. J.*，83(2):249–286，1996 年。[Mj09] Mahan Mj。映射类群与插值复形：秩。 *J. Ramanujan Math. Soc.*，24(4):341–357，2009 年。[MM99] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky。曲线复形的几何。I. 双曲性。 *Invent. Math.*，138(1):103–149，1999 年。[MM00] H. A. Masur 和 Y. N. Minsky。曲线复形的几何。II. 分层结构。 *Geom. Funct. Anal.*，10(4):902–974，2000 年。[RV22] Jacob Russell 和 Kate M. Vokes。多曲线图的厚度与相对双曲性。 *J. Topol.*，15(4):2317–2351，2022 年。[Vok 22] Kate M. Vokes。多曲线图的分层双曲性。 *Algebr.Geom. Topol.*，22(1):113–151，2022 年。[Wol03] Scott A. Wolpert。Teichm¨uller 空间的 Weil-Petersson完备化的几何。载于 *Surveys in differential geometry Vol. VIII (Boston, MA, 2002)*， *Surv. Differ. Geom.*第 8 卷，第 357–393 页。Int. Press，萨默维尔，马萨诸塞州，2003 年。[Yam04] Sumio Yamada。关于 Teichm¨uller 空间的 Weil-Petersson完备化的几何。 *Math. Res. Lett.*，11(2-3):327–344，2004 年。

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan*Email address*: kento@ms.u-tokyo.ac.jp