arXiv:2603.03766v1 [math.RT] 4 Mar 2026

模移位超杨扬子代数的表示 $Y_{1|1}(\sigma)$

HAO CHANG、RUIYING HOU 和 HUI WU

摘要。设 $Y_{1|1}$ 为与一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}_{1|1}$相关的杨扬子代数，其定义在特征为 $p>2$的代数闭域$\Bbbk$ 上。本文对受限超杨扬子代数 $Y_{1|1}^{[p]}$ 和受限截断移位超杨扬子代数 $Y_{1|1}^{[p]}{}_{\ell'}(\sigma)$ 的有限维不可约表示进行分类。

1. 引言

与复数域上的李超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 相关的杨扬子代数 $Y_{m|n}$ 是Hopf代数范畴中的万有包络代数 $U(\mathfrak{gl}_{m|n}[t])$ 的一种变形。Nazarov [Na1] 最初以 RTT 表示给出了其定义。Gow [Gow], 扩展 Drinfeld [D]以及 Brundan 和 Kleshchev [BK1] 关于杨扬子代数 Y_n的结果, 得到了与标准 Borel子代数对应的 Drinfeld型表示。Zhang [Z1, Z2]以类似于单李代数相关杨扬子代数表示的方式，对 $Y_{m|n}$ 的有限维不可约表示进行了分类；后者由 Tarasov [Ta] 和 Drinfeld [D] 给出（另见 [Mol1]）。近年来，一系列论文进一步研究了正交辛超杨扬子代数的有限维不可约表示 [Mol2, Mol3, Mol4, MR]。

在 [BBG], Brown、Brundan 和 Goodwin 引入了移位超杨扬子代数 $Y_{1|1}(\sigma)$，用于 $\mathfrak{gl}_{1|1}$。这与 [BK2] 中移位杨扬子代数的定义相对应。特别是，他们确立了主 W超代数 $W_{m|n}$ 与截断移位超杨扬子代数 $Y_{1|1,\ell}(\sigma)$ 之间的联系。这使他们得以深入研究 $W_{m|n}$ 的表示论；另见 [BK3 第 7] 章，其中对移位杨扬子代数的有限维不可约表示进行了分类。同时, Peng [Peng] 将 [BK2] 的主要结果推广到所有类型 A 李超代数的超类比情形。

设 $\Bbbk$ 是一个正特征 $p>0$的代数闭域。Brundan 和 Top- ley [BT18] 发展了移位杨扬子代数 $Y_n(\sigma)$在 $\Bbbk$上的理论。他们通过通常的 RTT 表示定义了 Y_n 上的 $\Bbbk$ 杨扬子代数，并将 *Drinfeld*型表- 示 ([D, BK1]) 从特征零推广到特征 p。在 [CH1], 中，我们采用 Nazarov 的方法定义模超杨扬子代数，并给出了超杨扬子代数 Drinfeld型表示的模特征类比 $Y_{m|n}$。

日期：2026年3月5日。2020 数学主题分类。主要分类号 17B37、17B50。1

本文开始研究 k 上移位超杨扬子代数$Y_{1|1}(\sigma)$的表示。作为发展超杨扬子代数模表示论的第一步，我们首先详细考察受限杨扬子代数 $Y_{1|1}^{[p]}$ 的有限维不可约表示。在复数域上，Zhang [Z1] 发展了超杨扬子代数 $Y_{1|1}$的表示论。然而，在 k 上研究时，他的方法在特征 p 下无法奏效。我们通过将 [CHT] 中的方法调整到超情形，对有限维不可约 $Y_{1|1}^{[p]}$ -模进行了分类。受 [BBG],的结果启发，我们进一步研究受限截断移位超杨扬子代数 $Y_{1|1\,\ell}^{[p]}$，(σ) 的表示（见第 4.1 节）。正如注 4.7 中所提到的，我们预计这一结果对某些模李超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$的不可约表示分类具有重要意义。

本文安排如下。在第 2 节中，我们回顾模超杨扬子代数 $Y_{1|1}$ 及其 p-中心的一些预备知识。特别地，定理 2.6 表明 Hopf 结构可以下降到 $Y_{1|1}^{[p]}$。论文末尾附有附录，对命题 2.4 给出了详细证明。在第 3 节中，我们定义了 $Y_{1|1}^{[p]}$ 的婴儿 Verma 模，并证明每个有限维不可约表示都同构于某个婴儿 Verma 模的简单头（定理 3.4）。我们还根据模 Drinfeld 多项式，给出了不可约表示为有限维的充要条件（定理3.8）。第4节致力于进一步研究 $Y_{1|1\,\ell}^{[p]}$的不可约表示，(σ) (定理 4.6)。

本文中，$\mathbb{k}$ 表示特征为$\mathrm{char}(\mathbb{k}) =: p > 2$的代数闭域。

2. 受限杨扬子代数

2.1. 模杨扬子代数 $Y_{1|1}$。 与复数域上的一般线性李超代数 $Y_{m|n}$ 相关联的超杨扬子代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 由 Nazarov 以 [Na1] 的*RTT* 表示定义。Gow 在 [Gow]中给出了*Drinfeld*型表示 。本文只需考虑 $m = n = 1$的特殊情形。为了定义它，我们固定一个标准奇偶性 $|1| = 0$和 $|2| = 1$。遵循 [Na1]（另见 [CH1]），与一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}_{1|1}$相关联的超杨扬子代数记作 Y $:= Y_{1|1}$，它是定义在$\mathbb{k}$上的相应超代数，其 RTT 生成元为$\{t_i^{(r)}{}_{,j}; 1 \le i, j \le 2, r > 0\}$，并满足以下关系：

$$[t_{i,j}^{(r)}, t_{k,l}^{(s)}] = (-1)^{|i||j|+|i||k|+|j||k|} \sum_{t=0}^{\min\{r,s\}-1} (t_{k,j}^{(t)} t_{i,l}^{(r+s-1-t)} - t_{k,j}^{(r+s-1-t)} t_{i,l}^{(t)}), \tag{2.1}$$

其中，奇偶性 $t_i^{(r)}{}_{,j}$ 由 $|i| + |j|$ (模 2) 定义，括号表示超交换子。按照惯例，我们令 $t_i^{(0)}{}_{,j} := \delta_{i,j}$。

如果元素 $t_i^{(r)}{}_{,j}$ 的奇偶性为 0（分别为 1），则称其为偶 （奇）元素。我们定义形式幂级数

$$t_{i,j}(u) := \sum_{r\geq 0} t_{i,j}^{(r)} u^{-r} \in \mathrm{Y}[[u^{-1}]].$$

于是，所有 $1 \leq i, j \leq 2$ 的这些幂级数可以合并为一个矩阵

$$T(u) := \begin{pmatrix} t_{1,1}(u) & t_{1,2}(u) \\ t_{2,1}(u) & t_{2,2}(u) \end{pmatrix}.$$

容易看出，就生成级数而言，初始定义关系(2.1) 可改写如下：

$$(u-v)[t_{i,j}(u), t_{k,l}(v)] = (-1)^{|i||j|+|i||k|+|j||k|}(t_{k,j}(u)t_{i,l}(v) - t_{k,j}(v)t_{i,l}(u)). \tag{2.2}$$

我们需要为 Y 引入另一组生成元，称为*Drinfeld*生成元。为定义它们，我们考虑高斯分解

$$T(u) = F(u)D(u)E(u).$$

这定义了幂级数 $d_i(u)$ $e(u)$ $f(u)$ $\in \mathrm{Y}[[u^{-1}]]$，使得

$$D(u) = \begin{pmatrix} d_1(u) & 0 \\ 0 & d_2(u) \end{pmatrix}, E(u) = \begin{pmatrix} 1 & e(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(u) & 1 \end{pmatrix}$$

于是我们有

$$t_{1,1}(u) = d_1(u), \quad t_{2,2}(u) = f(u)d_1(u)e(u) + d_2(u), \tag{2.3}$$

$$t_{1,2}(u) = d_1(u)e(u), \quad t_{2,1}(u) = f(u)d_1(u). \tag{2.4}$$

Drinfeld生成元是 Y 中由展开式 $d_i^{(r)}, e^{(r)}$ 和 $f^{(r)}$ 定义的元素$d_i(u) = \sum_{r\geq 0} d_i^{(r)} u^{-r}, e(u) = \sum_{r>0} e^{(r)} u^{-r}$和 $f(u) = \sum_{r>0} f^{(r)} u^{-r}$。此外，根据恒等式 $d_i'(u) = \sum_{r\geq 0} d_i'^{(r)} u^{-r} := d_i(u)^{-1}$定义 $d_i'^{(r)}$。

假设特征为 $p > 2$，则模 Yangian Y 的 Drinfeld表现与 Gow 在复数域上得到的结果完全相同（参见[CH1，定理 3。8] 以及 [Gow，定理 3]）。感兴趣的读者可参阅 [CH3] 以了解特征 2下超杨代数的定义。

定理 2.1。 超杨扬子Y 由元素$\{d_i^{(r)}, d_i'^{(r)}; 1 \leq i \leq 2, r > 0\}$ 和$\{e^{(r)}, f^{(r)}; r > 0\}$ 生成，且仅受以下关系约束：

$$d_i^{(0)} = 1, \quad \sum_{t=0}^{r} d_i^{(t)} d_i'^{(r-t)} = \delta_{r,0}; \tag{2.5}$$

$$[d_i^{(r)}, d_j^{(s)}] = 0; \tag{2.6}$$

$$[d_i^{(r)}, e^{(s)}] = \sum_{t=0}^{r-1} d_i^{(t)} e^{(r+s-1-t)}, \quad [d_i^{(r)}, f^{(s)}] = -\sum_{t=0}^{r-1} f^{(r+s-1-t)} d_i^{(t)}; \tag{2.7}$$

$$[e^{(r)}, f^{(s)}] = \sum_{t=0}^{r+s-1} d_1'^{(t)} d_2^{(r+s-1-t)}; \tag{2.8}$$

$$[e^{(r)}, e^{(s)}] = [f^{(r)}, f^{(s)}] = 0. \tag{2.9}$$

以下是 Y 的 *PBW* 定理，参见 [CH1，定理 3。11]。

定理 2.2。元素的有序超单项式

$$\{d_i^{(r)};\ 1 \le i \le 2, r > 0\} \cup \{e^{(r)}, f^{(r)};\ r > 0\} \tag{2.10}$$

按任意固定顺序排列，构成Y的一组基。

2.2. **受限超杨扬子代数** $Y_{1|1}^{[p]}$。我们接下来回顾 p-中心元的描述，该描述针对 Y，见 [CH1]。对于 $i = 1, 2$，我们定义

$$b_i(u) := \sum_{r\ge 0} b_i^{(r)} u^{-r} = \begin{cases} d_1(u)d_1(u-1)\cdots d_1(u-p+1) & \text{若 } i = 1, \\ d_2(u)^{-1}d_2(u-1)^{-1}\cdots d_2(u-p+1)^{-1} & \text{若 } i = 2. \end{cases} \tag{2.11}$$

根据 [CH1，定理 4。8]中的元素

$$\{b_i^{(rp)};\ 1 \le i \le 2, r > 0\} \tag{2.12}$$

代数独立，且属于 $Z(\mathrm{Y})$ 的Y的中心。它们生成的子代数称为 p-中心 ofY，记作 $Z_p(\mathrm{Y})$。根据 [CH1，推论 4。10],超杨扬子Y 作为 $Z_p(\mathrm{Y})$上的模是自由的，其基由 (2.10) 中生成元的有序超单项式构成，其中指数均小于 p；对于 $d_i^{(r)}$，我们将此类单项式称为 p-受限超单项式。

令 $Z_p(\mathrm{Y})_+$ 为由 ($Z_p(\mathrm{Y})$ 中 (2.12) 给出的元素生成的极大理想。受限超杨扬子定义为

$$\mathrm{Y}^{[p]} := \mathrm{Y} \,/\, \mathrm{Y}\, Z_p(\mathrm{Y})_+.$$

显然，Drinfeld生成元中的 p-受限超单项式在 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 中的像构成 $\mathrm{Y}^{[p]}$的一组基。在处理 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 时，我们常滥用记号，使用相同的符号 $d_i^{(r)}$，$e^{(r)}$，$f^{(r)}$，$t_i^{(r)}{}_{,j}$来指代 Y 的元素及其在 $\mathrm{Y}^{[p]}$中的像。

注2.3。事实上，元素 $\{b_i^{(r)}$；$i = 1, 2, r > 0\}$ 也属于 p-中心 $Z_p(\mathrm{Y})$ (见[CH1，引理 4.5，定理 4。6])。因此 $b_i(u)$在1中等于 $\mathrm{Y}^{[p]}[[u^{-1}]]$。

2.3. **Hopf代数结构**。众所周知 [Na1，第 125] 页指出，Y 是一个 Hopf超代数。其余乘法 Δ和反粒子 S 定义如下：

$$\Delta(t_{i,j}(u)) = \sum_{k=1}^{2} t_{i,k}(u) \otimes t_{k,j}(u), \quad S(t_{i,j}(u)) = t'_{i,j}(u), \tag{2.13}$$

其中 $t'_{i,j}(u)$ 是矩阵 $T(u)^{-1}$的 i, j)-项。余单位将 $t_{i,j}(u) \mapsto \delta_{ij}$映为 $I_p := \mathrm{Y}\, Z_p(\mathrm{Y})_+$ 表示第 2.2 小节中定义的理想。本节将证明

即 I_p 是 Y 的霍普夫理想。于是，受限超杨扬子代数 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 继承了 Y 的 Hopf代数结构。

下面的命题可视为 [CHT 的超版本，推论 2。6]。证明留待附录 A。

命题 2.4。对于 $i = 1, 2$，有

$$\Delta(b_i(u)) = b_i(u) \otimes b_i(u).$$

特别地，$\Delta(I_p) \subseteq I_p \otimes \mathrm{Y} + \mathrm{Y} \otimes I_p$。

现在我们需要确定 $S(b_i(u))$。为此，我们再引入一个元素族，令

$$b'_i(u) = \sum_{r\geq 0} b_i'^{(r)} u^{(-r)} := \begin{cases} t'_{1,1}(u)t'_{1,1}(u-1)\cdots t'_{1,1}(u-p+1) & \text{if } i = 1, \\ t_{2,2}(u)t_{2,2}(u-1)\cdots t_{2,2}(u-p+1) & \text{if } i = 2. \end{cases}$$

命题 2.5。我们有 $S(I_p) \subseteq I_p$。

证明。由于 S 是 Y [Na1，第 126], (2.3) 和 (2.6) 的反自同态，因此可得

$$S(b_1(u)) = S(t_{1,1}(u)t_{1,1}(u-1)\cdots t_{1,1}(u-p+1)) = b'_1(u).$$

此外，高斯分解给出 $d_2(u)^{-1} = t'_{2,\,2}(u)$。同理，我们有

$$S(b'_2(u)) = S(t_{2,2}(u)t_{2,2}(u-1)\cdots t_{2,2}(u-p+1)) = b_2(u).$$

沿用 [CH1、引理 5.6 和定理 5.7], 的证明方法，可以证明 p- 中心 $Z_p(\mathrm{Y})$ Y 可由以下元素生成：$\{b_1^{(r)}$，$b_2'^{(r)}$；$r > 0\}$ 或 $\{b_1'^{(r)}$，$b_2^{(r)}$；$r > 0\}$。断言得证。□

本小节的主要结果如下：

定理 2.6。理想 I_p 是Y的霍普夫理想。特别地，$\mathrm{Y}^{[p]}$ 继承Y 的*Hopf*代数结构。

证明。这直接由命题 2.4 和命题 2.5得出。□

2.4. **求值同态**。令 $U(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 为李超代数 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的万有包络代数。存在一个满同态

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Y} \to U(\mathfrak{gl}_{1|1})$$

称为求值同态（例如参见 [Gow，(7)]），定义如下：

$$\mathrm{ev}(t_{i,j}(u)) := \delta_{i,j} + (-1)^{|i|} e_{i,j} u^{-1}, \tag{2.14}$$

其中 $e_{i,j} \in \mathfrak{gl}_{1|1}$ 是初等矩阵。由于我们处于特征 p下，李超代数 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 具有自然的受限李超代数结构。也就是说，偶子代数 $(\mathfrak{gl}_{1|1})_{\bar{0}}$ 是一个受限李代数，其 p-映射 $(\mathfrak{gl}_{1|1})_{\bar{0}} \to (\mathfrak{gl}_{1|1})_{\bar{0}}$ 将 $x \mapsto x^{[p]}$映至.....；该映射在 $(\mathfrak{gl}_{1|1})_{\bar{0}}$ 的一组基上由规则 $e_i^{[p]},_i = e_{i,i}$定义。一般理论（参见 [WZ，第 2]节）表明，元素 $e_i^p,_i - e_{i,i} \in U(\mathfrak{gl}_{1|1})$是中心元。令 J_p为由偶中心元 $\{e_i^p,_i - e_{i,i};\ i = 1, 2\}$ 生成的 $U(\mathfrak{gl}_{1|1})$ 的理想。商代数 $U^{[p]}(\mathfrak{gl}_{1|1}) := U(\mathfrak{gl}_{1|1})/J_p$ 称为 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的受限包络代数。

引理 2.7。 求值同态 ev 可分解为一个满射代数同态 m

$$\mathrm{ev}^{[p]} : \mathrm{Y}^{[p]} \to U^{[p]}(\mathfrak{gl}_{1|1}).$$

证明。 只需证明，在 $b_1(u)$ 和 $b_2'(u)$ 的系数经 ev 映射后的像均包含于 J_p中。由于 $d_1(u) = t_{1,1}(u)$ (2.3)，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}(b_1(u)) &= \mathrm{ev}((t_{1,1}(u)t_{1,1}(u-1)\cdots t_{1,1}(u-p+1)) \\ &= (1+e_{1,1}u^{-1})(1+e_{1,1}(u-1)^{-1})\cdots(1+e_{1,1}(u-p+1)^{-1}) \\ &= \frac{u+e_{1,1}}{u}\frac{u-1+e_{1,1}}{u-1}\cdots\frac{u-p+1+e_{1,1}}{u-p+1}.\end{aligned}$$

写作

$$\mathrm{ev}(b_1(u)) = 1 + g^{(1)}u^{-1} + g^{(2)}u^{-2} + \cdots.$$

这里，系数 $g^{(r)}$ 是关于 $e_{1,1}$ 的多项式。对于每个 $r > 0$，上述表达式意味着，对于所有 $i \in \mathbb{F}_p$, $g^{(r)}(i) = 0$。由此得到 $(e_{1,1}^p - e_{1,1}) \mid g^{(r)}$。因此， $g^{(r)} \in J_p$。对于 $b_2'(u)$，论证类似。□

利用求值同态 ev，我们看到，任意 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的表示都可通过拉回视为 Y 的表示，而任意 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 的不可约表示在 Y上仍然不可约。同理，引理 2.7 使我们能够赋予任意 $U^{[p]}(\mathfrak{gl}_{1|1})$- 模以 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模结构。

3. $\mathrm{Y}^{[p]}$ 的表示

在本节中，我们研究受限超杨扬子代数 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 的表示。为了描述 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 的有限维不可约模，我们需要构造特征零下最高权表示的类似物（参见 [Z1，第 III 节]）。

3.1. 婴儿 Verma 模。我们定义

$$\mathbf{I}_{\mathbb{N}} := \{(i_1, i_2, \dots);\ i_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ and only finitely many are non-zero}\}.$$

给定 $I = (i_1, i_2, \cdots) \in \mathbf{I}_{\mathbb{N}}$，令

$$f^I := \prod_{r>0} (f^{(r)})^{i_r}$$

类似地，我们定义元素 d_1^I, d_2^I和 e^I。考虑 $\mathbf{I}$ 的两个子集 $\mathbb{N}$

$$\mathbf{I}_0 := \{(i_1, i_2, \dots) \in \mathbf{I}_{\mathbb{N}};\ 0 \leq i_k < p\} \quad \mathbf{I}_1 := \{(i_1, i_2, \dots) \in \mathbf{I}_{\mathbb{N}};\ 0 \leq i_k < 2\},$$

使得

$$\{f^{I_1} d_1^{I_2} d_2^{I_3} e^{I_4};\ I_2, I_3 \in \mathbf{I}_0, I_1, I_4 \in \mathbf{I}_1\} \tag{3.1}$$

是以下对象的 PBW 基$\mathrm{Y}^{[p]}$ （参见第2.2节）。

定义 *tion.* 形式幂级数 $f(u) \in \mathbb{k}[[u^{-1}]]$ 称为受限的，条件是

$$f(u)f(u-1)\cdots f(u-p+1) = 1,$$

这意味着 $f(u) \in 1 + u^{-1}\mathbb{k}[[u^{-1}]]$。给定两个形式级数

$$\lambda_i(u) = 1 + \lambda_i^{(1)}u^{-1} + \lambda_i^{(2)}u^{-1} + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

若元组 $\lambda(u) := (\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 中的 $\lambda_1(u)$ 和 $\lambda_2(u)$ 均受限，则称该元组受限。

设 $\lambda(u) = (\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 是一个受限元组。我们将对应于 $\lambda(u)$ 的婴儿 Verma 模 $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 定义为 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 对由满足 $r > 0$ 的元素 $e^{(r)}$、满足 $i = 1$ 的元素 $d_i^{(r)} - \lambda_i^{(r)}$、2 和 $r > 0$ 所生成的左理想取商。记元素$1 \in \mathrm{Y}^{[p]}$ 在该商中的像为 $1_{\lambda(u)}$。显然， $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 是一个循环模，且 $Z^{[p]}(\lambda(u)) = \mathrm{Y}^{[p]}.1_{\lambda(u)}$。令 $\mathrm{Y}^{[p],-} := \mathrm{Span}_{\mathbb{k}}\{f^I;\ I \in \mathrm{I}_1\}$，并令 $(\mathrm{Y}^{[p],-})_+ := \mathrm{Span}_{\mathbb{k}}\{f^I;\ I \in \mathrm{I}1, I \neq (0, 0, \ldots)\}$。由 (3.1)，存在一个同构

$$Z^{[p]}(\lambda(u)) \cong \mathrm{Y}^{[p],-} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}1_{\lambda(u)}$$

的向量空间。

或者，婴儿 Verma 模也可以用Y 的 RTT 表示来描述（参见 [Mol1，命题 3.2。2]）。

命题 3.1。 设 $\lambda(u) = (\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 是受限的。婴儿 *Verma* 模 $Z^{[p]}(\lambda(u))$等于$\mathrm{Y}^{[p]}$ 对左理想 J 的商，该左理想由元素 $t_{1\,2}^{(r)}$，（其中 $r > 0$）以及 $t_i^{(r)}{}_{,i} - \lambda_i^{(r)}$ （其中 $i = 1$，2 且 $r > 0$）生成。

证明。 证明使用了（2.3）和（2.4），与 [CHT，命题 3。3], 的证明类似，此处从略。 □

命题 3.2。 $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 有唯一的极大子模。

证明。我们将证明， $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 的任何真子模 M 都包含于向量空间 $(\mathrm{Y}^{[p]},-)_+.1_{\lambda(u)}$中。假设 $M \not\subseteq (\mathrm{Y}^{[p]},-)_+.1_{\lambda(u)}$，则存在非零元素$y = (1 - x).1_{\lambda(u)} \in M$，且 $x \in (\mathrm{Y}^{[p]},-)_+$。现在，(2.9) 意味着 x 是幂零的。设对于某个正整数 n，有$x^n = 0$。对于 $x' := 1 + x + \cdots + x^{n-1}$，$x'y = 1_{\lambda(u)} \in M$，我们有，因此$M = Z^{[p]}(\lambda(u))$，矛盾。另一方面，显然 $(\mathrm{Y}^{[p]},-)_+.1_{\lambda(u)}$ 是 $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 的真子空间。因此， $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 的所有真子模之和就是唯一的极大子模。□

设 L 是 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 的有限维表示。我们通过以下方式定义 L 的子空间 L^0：

$$L^0 := \{v \in L;\ e(u).v = 0\}.$$

引理 3.3。 若 L 是$\mathrm{Y}^{[p]}$ 的有限维表示，则空间 L^0 非零。

证明。 设 $L^0 = (0)$。由于$(e^{(1)})^2 = 0$(2.9)， 存在一个非零向量 $v_1 \in L$使得 $e^{(1)}.v_1 = 0$。根据假设，我们可以找到一个正整数 n_1 使得 $e^{(r)}.v_1 = 0$ 对所有

$1 \le r \le n_1$ 和 $e^{(n_1+1)}.v_1 \neq 0$。令 $v_2 := e^{(n_1+1)}.v_1$，我们有 $e^{(n_1+1)}.v_2 = (e^{(n_1+1)})^2.v_1 = 0$。对于$1 \le i \le n_1$，再次由关系式（2.9）得到

$$e^{(i)}.v_2 = e^{(i)}e^{(n_1+1)}.v_1 = -e^{(n_1+1)}e^{(i)}.v_1 = 0.$$

这表明，对于所有 $1 \le r \le n_1+1$，$e^{(r)}.v_2 = 0$，因此我们可以找到一个正整数 $n_2 > n_1$，使得对于所有 $1 \le r \le n_2$ 和 $e^{(n_2+1)}.v_2 \neq 0$，$e^{(r)}.v_2 = 0$。

重复上述论证，我们得到两个序列 $v_1, v_2, \ldots$ 和 $1 \neq n_1 < n_2 < \cdots$，它们满足：(i) $v_i \neq 0$；(ii) 对所有 $1 \le r \le n_i$，$e^{(r)}.v_i = 0$；(iii) 对每个正整数 i，$e^{(n_i+1)}v_i \neq 0$。令 m 为任意正整数。假设 $\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$。由 (ii) 可知 $c_1 e^{(n_1+1)}.v_1 = 0$，而性质 (iii) 给出 $c_1 = 0$。同理，我们得到所有 $c_i = 0$。因此，$v_1, v_2, \ldots, v_m$ 线性无关。由于 L 是有限维的，我们便得到矛盾。□

根据命题 3.2，我们知道 $Z^{[p]}(\lambda(u))$ 有唯一简单商，记为$L^{[p]}(\lambda(u))$。

现在我们陈述本节的主要定理，它是 [Z1、定理 2 和定理 3] 的模特征类比。

定理 3.4. 每个有限维简单 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模 L 都同构于某个 $L^{[p]}(\lambda(u))$。

证明。由引理 3.3，我们知道 $L^0 \neq (0)$。接下来我们证明子空间 L^0 关于所有元素 $d_i^{(r)}$ 的作用是不变的。若 $v \in L^0$，则 (2.7) 蕴含$[d^{(r)}, e^{(s)}].v = 0$对所有 r，$s > 0$。由此可得 $e^{(s)}d_i^{(r)}.v = 0$。因此，$d_i^{(r)}.v \in L^0$。

此外，(2.6) 蕴含，元素 $d_i^{(r)}$ 满足 $i = 1$、2 和 $r > 0$，在 L^0 上的作用是两两可交换算子。因此，存在非零向量 $\zeta \in L^0$ 使得$d_i^{(r)}.\zeta = \lambda_i^{(r)}\zeta$，其中 $\lambda_i^{(r)} \in \mathbf{k}$。令 $\lambda_i(u) := 1 + \sum_{r\ge1} \lambda_i^{(r)} u^{-r} \in \mathbf{k}[[u^{-1}]]$，置 $\lambda(u) :=(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$。于是 $d_i(u).\zeta = \lambda_i(u)\zeta$。由于在 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 中（注2.3），$1 = b_i(u) = d_i(u)d_i(u-1)\cdots d_i(u-p+1)$，可知 $\lambda(u)$ 是受限的。因为 L 不可约，故存在满同态 $Z^{[p]}(\lambda(u)) \twoheadrightarrow L$；$1_{\lambda(u)} \mapsto \zeta$。由命题 3.2 得到同构$L \cong L^{[p]}(\lambda(u))$。□

3.2. **有限维条件**。对于任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_p$，我们考虑受限不可约 $\mathfrak{gl}_{1|1}$-模 $L(\lambda_1, \lambda_2)$。模 $L(\lambda_1, \lambda_2)$ 由向量 ξ 生成，并且

$$e_{i,i}.\xi = \lambda_i\xi;\ i = 1, 2, \quad e_{1,2}.\xi = 0. \tag{3.2}$$

由于

$$e_{1,2}e_{2,1}.\xi = [e_{1,2}, e_{2,1}].\xi = (e_{1,1} + e_{2,2}).\xi = (\lambda_1 + \lambda_2)\xi, \tag{3.3}$$

当 $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ 时，模 $L(\lambda_1, \lambda_2)$ 是二维的；否则是一维的。引理 2.7 使我们可以将 $L(\lambda_1, \lambda_2)$ 视为 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模。我们将继续用相同的记号 $L(\lambda_1, \lambda_2)$ 表示这个 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模，并称其为求值模。根据命题 3.1，$L(\lambda_1, \lambda_2)$ 同构于模 $L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$，其中 $\lambda_1(u) = 1+\lambda_1 u^{-1}$，且 $\lambda_2(u) = 1-\lambda_2 u^{-1}$。

由于$\mathrm{Y}^{[p]}$ 是Y 的 Hopf 商（定理2.6），Y 的余乘法下降为$\mathrm{Y}^{[p]}$上的余乘法，我们将使用相同的符号 Δ 表示$\mathrm{Y}^{[p]}$的余乘法。如果 L 和 M 是

任意两个 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模，则张量积 $L\otimes M$ 可以利用 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 上的余乘法 Δ，按以下规则赋予一个 $\mathrm{Y}^{[p]}$-作用

$$x.(l\otimes m):=\Delta(x)(l\otimes m),\quad x\in \mathrm{Y}^{[p]}, l\in L, m\in M.$$

记 τ 为代数 Y 的反自同构，定义如下：

$$\tau:\mathrm{Y}\to\mathrm{Y};\ t_{i,j}(u)\to t_{3-i,3-j}(u). \tag{3.4}$$

这是反自同构（[Na2，(2.15)]）与自同构（[Gow，引理 1]）的复合。Y由第 2.3 节可知，τ 诱导出代数 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 的反自同构，我们仍记作 τ。给定任意有限维 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模 L，记 L^*为其对偶向量空间，其元素是线性映射 $\omega:L\to\Bbbk$。通过如下定义，在 L^* 上赋予 $\mathrm{Y}^{[p]}$-模结构：

$$(y.\omega)(\eta):=\omega(\tau(y).\eta)\quad \text{for}\quad y\in \mathrm{Y}^{[p]}\quad \text{and}\quad \omega\in L^*,\eta\in L.$$

采用与 [Mol1 第 110] 页相同的论证，可立即验证 $L(\lambda_1,\lambda_2)^*$ 也是不可约的。考虑一个二维不可约模 $L(\lambda_1,\lambda_2)$。模 $L(\lambda_1,\lambda_2)^*$ 可由向量 ξ^* 生成，该向量由 $\xi^*(\xi)=1$ 和 $\xi^*(e_{2,1}.\xi)=0$ 定义。直接计算可得

$$e_{1.2}.\xi^*=0, e_{1,1}.\xi^*=-\lambda_2\xi^*, e_{2,2}.\xi^*=-\lambda_1\xi^*.$$

观察3.2，由此可得 $L(\lambda_1,\ \lambda_2)^*\cong L(-\lambda_2,\ -\lambda_1)$。

现在设 $\lambda_1(u)$ 和 $\lambda_2(u)$ 是 u^{-1} 中次数不超过 k 的两个受限多项式。将其分解写为

$$\lambda_1(u):=(1+\lambda_1^{(1)}u^{-1})\cdots(1+\lambda_1^{(k)}u^{-1}),$$
$$\lambda_2(u):=(1-\lambda_2^{(1)}u^{-1})\cdots(1-\lambda_2^{(k)}u^{-1}).$$

由于 [CH T，引理 3.2], 可知，所有常数 $\lambda_i^{(r)}$ 均属于有限域 $\mathbb{F}_p$.

以下结果是 [Z1定理 5]的模特征类比。我们的证明改编自[CHT，命题 3.7]（另见 [Mol1，命题 3.3。2]）。由于我们的情形不同于 [Mol1第 112], 页所述的情形，因此我们在此给出详细证明。

命题 3.5。假设对于所有 $1\le i,\ j\le k,\ \lambda_1^{(i)}+\lambda_2^{(j)}\neq 0$ 均成立。那么，$(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 的表示 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 同构于张量积模

$$L(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)})\otimes L(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)})\otimes\cdots\otimes L(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)}). \tag{3.5}$$

证明。将模（3.5）记为 L。令 ξ_i 为 $L(\lambda_1^{(i)},\ \lambda_2^{(i)})$ 的生成向量，其中 i =1，.....，k。根据 Δ 的定义（2.13），我们得到 $t_{1,\ 2}(u).\xi=0$ 以及 $t_{i,\ i}(u).\xi=\lambda_i(u)\xi$，其中$\xi=\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_k$。只需证明模 L 不可约，命题便得证。

我们断言，满足 $\zeta\in L$ 的任意向量 $t_{1,\ 2}(u).\zeta=0$都与 ξ成比例。现在对 k进行归纳法。根据假设，$\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}\neq 0$。情形 $k=1$ 直接由（3.3）得到。设 $k\ge 2$。将任意这样的向量写成

$$\zeta=\xi_1\otimes\zeta_1+e_{2,1}.\xi_1\otimes\zeta_2,\quad \text{where } \zeta_r\in L(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)})\otimes\cdots\otimes L(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)}),\ r=1,2.$$

我们首先假设 $\zeta_2 \neq 0$。将 $t_{1,\ 2}(u)$ 应用于 ζ，得到

$$t_{1,2}(u)e_{2,1}.\xi_1 \otimes t_{2,2}(u).\zeta_2 + t_{1,1}(u).\xi_1 \otimes t_{1,2}(u).\zeta_1 + t_{1,1}(u)e_{2,1}.\xi_1 \otimes t_{1,2}(u).\zeta_2 = 0 \tag{3.6}$$

结合 $L(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)})$ 上杨代数作用的定义与 (3.3，我们得到

$$t_{1,2}(u)e_{2,1}.\xi_1 = u^{-1}e_{1,2}e_{2,1}.\xi_1 = u^{-1}(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)})\xi_1,$$

and

$$t_{1,1}(u)e_{2,1}.\xi_1 = (1 + e_{1,1}u^{-1})e_{2,1}.\xi_1 = (1 + (\lambda_1^{(1)} - 1)u^{-1})e_{2,1}.\xi_1.$$

因此，在 (3.6) 中取$e_{2,1}.\xi_1$ 的系数可得

$$(1 + (\lambda_1^{(1)} - 1)u^{-1})t_{1,2}(u).\zeta_2 = 0,$$

这意味着关系$t_{1,2}(u).\zeta_2 = 0$成立。归纳假设表明 ζ_2 必与 $\xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_k$成比例。因此，由 (2.13) 和 (2.14) 可得

$$t_{2,2}(u).\zeta_2 = (1 - \lambda_2^{(2)}u^{-1})\cdots((1 - \lambda_2^{(k)}u^{-1}))\zeta_2. \tag{3.7}$$

然后，在 (3.6) 中取 ξ_1 的系数，得到

$$(1 + \lambda_1^{(1)}u^{-1})t_{1,2}(u).\zeta_1 + u^{-1}(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)})t_{2,2}(u).\zeta_2 = 0.$$

因此，乘以 u^k 并结合 (3.7，我们得到

$$(u + \lambda_1^{(1)})u^{k-1}t_{1,2}(u).\zeta_1 + (\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)})(u - \lambda_2^{(2)})\cdots(u - \lambda_2^{(k)})\zeta_2 = 0.$$

取值 $u = -\lambda_1^{(1)}$，我们得到关系

$$(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)})(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(2)})\cdots(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(k)}) = 0.$$

但这与条件矛盾。因此，$\zeta_2 = 0$。也就是说，$\zeta = \xi_1 \otimes \zeta_1$。上述论证结合归纳假设证明了这一断言。

现在假设 M 是 L 的非零子模。根据引理 3.3 和 (2.4)，M 必须包含一个非零向量 ζ，使得 $t_{1,\ 2}(u).\zeta = 0$。前述观察表明，M 包含向量 ξ。接下来要证明循环张成 $K := \mathrm{Y}^{[p]}.\xi$ 与 L 相同。回顾一下，我们已经有 $L(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)})^* \cong L(-\lambda_2^{(i)}, -\lambda_1^{(i)})$。注意到$\Delta \bigcirc \tau = (\tau \otimes \tau) \bigcirc \Delta$，容易验证（参见 [Mol1，命题 3.2.12]），对偶模 L^* 同构于张量积

$$L(-\lambda_2^{(1)}, -\lambda_1^{(1)}) \otimes L(-\lambda_2^{(2)}, -\lambda_1^{(2)}) \otimes \cdots \otimes L(-\lambda_2^{(k)}, -\lambda_1^{(k)}).$$

与前面一样，$L(-\lambda_2^{(i)}, -\lambda_1^{(i)}) \cong L(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)})^*$ 的生成向量记为 ξ_i^*。记住，$\xi_i^*(\xi_i) = 1$ 且 $\xi_i^*(e_{2,1}.\xi_i) = 0$。现在假设 $K \subsetneq L$，并考虑它的湮灭子

$$\mathrm{Ann}K := \{\omega \in L^*;\ \omega(\eta) = 0 \text{ for all } \eta \in K\}.$$

那么$\mathrm{Ann}K$ 是 L^*的一个非零子模，它不包含向量 $\xi_1^* \otimes \cdots \otimes \xi_k^*$（另见 [Mol2，第 564]页）。然而，这与证明第一部分中验证的断言相矛盾，因为定理中关于参数 $\lambda_1^{(i)}$ 和 $\lambda_2^{(i)}$ 的条件，在将每个 $\lambda_1^{(i)}$ 替换为 $-\lambda_2^{(i)}$，并将每个 $\lambda_2^{(i)}$ 替换为 $-\lambda_1^{(i)}$ 之后仍然成立。□

对于任意幂级数 $f(u) \in 1+u^{-1}\Bbbk[[u^{-1}]]$，由定义关系（2.2）（另见 [CH1，第 3 节7]）可知，存在一个自同构，其定义如下：

$$\mu_f : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y};\ t_{i,j}(u) \mapsto f(u)t_{i,j}(u). \tag{3.8}$$

引理3.6. 若 $L^{[p]}(\lambda(u)) = L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 是有限维的，则存在形式级数 $f(u) \in 1+u^{-1}\Bbbk[[u^{-1}]]$，使得 $f(u)\lambda_1(u)$ 与 $f(u)\lambda_2(u)$ 均为 u^{-1} 中的多项式。

证明。 其证明与 [Mol1中命题 3.3 的证明相同。1], 此处从略。

□

注3.7. 设 $f(u) \in 1+u^{-1}\Bbbk[[u^{-1}]]$ 为形式幂级数。若自同构 μ_f可分解为$\mathrm{Y}^{[p]}$的自同构，(3.8) 则显然 f 必须是受限的。

定理 3.8. 不可约表示 $L^{[p]}(\lambda(u)) = L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 是有限维的，当且仅当存在 u 中的首一多项式 $P_1(u)$与 $P_2(u)$，使得

$$\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)} = \frac{P_1(u)}{P_2(u)}, \tag{3.9}$$

其中多 项式 $P_1(u)$ 和 $P_2(u)$ 次数相同，且没有公共根 .

证明。 假设表示 $L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 是有限维的。那么根据引理 3.6 我们可以找到一个形式级数 $f(u)$ 使得

$$f(u)\lambda_1(u) = (1+\lambda_1^{(1)}u^{-1})\cdots(1+\lambda_1^{(k)}u^{-1}),$$
$$f(u)\lambda_2(u) = (1+\lambda_2^{(1)}u^{-1})\cdots(1+\lambda_2^{(k)}u^{-1}),$$

对于某个 $k \geq 0$ 以及某些标量 $\lambda_i^{(r)}$。由此可得

$$\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)} = \frac{f(u)\lambda_1(u)}{f(u)\lambda_2(u)} = \frac{(1+\lambda_1^{(1)}u^{-1})\cdots(1+\lambda_1^{(k)}u^{-1})}{(1+\lambda_2^{(1)}u^{-1})\cdots(1+\lambda_2^{(k)}u^{-1})}.$$

不失一般性，我们还可以假设，对于任意 $1 \leq i,j \leq k$，都有 $\lambda_1^{(i)} \neq \lambda_2^{(j)}$。那么这些多项式

$$P_1(u) := (u+\lambda_1^{(1)})\cdots(u+\lambda_1^{(k)}) \quad \text{and} \quad P_2(u) := (u+\lambda_2^{(1)})\cdots(u+\lambda_2^{(k)})$$

满足（3.9）。

反过来，假设多项式满足（3.9）

$$P_1(u) = (u+\mu_1^{(1)})\cdots(u+\mu_1^{(s)}) \quad \text{and} \quad P_2(u) = (u-\mu_2^{(1)})\cdots(u-\mu_2^{(s)}).$$

Set

$$\mu_1(u) := (1+\mu_1^{(1)}u^{-1})\cdots(1+\mu_1^{(s)}u^{-1}),$$
$$\mu_2(u) := (1-\mu_2^{(1)}u^{-1})\cdots(1-\mu_2^{(s)}u^{-1}).$$

根据构造，我们有

$$\frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)} = \frac{P_1(u)}{P_2(u)}. \tag{3.10}$$

对于每个 $1 \le r \le s$，我们考虑由 ξ_r 生成的不可约 $\mathfrak{gl}_{1|1}$-模 $L(\mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)})$，其模结构由下式给出

$$e_{i,i}.\xi_r = \mu_i^{(r)}\xi_r, i = 1, 2, \quad e_{1,2}.\xi_r = 0. \tag{3.11}$$

由于 $\mu_1^{(r)} + \mu_2^{(r)} \neq 0$ 根据假设，模 $L(\mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)})$ 是二维的，其基为 $\{\xi_r, e_{2,1}.\xi_r\}$。我们可以通过（Y-模（2.14）将它们视为 Y-模。考虑张量积模

$$L := L(\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}) \otimes \cdots \otimes L(\mu_1^{(s)}, \mu_2^{(s)}).$$

显然，这个模是有限维的。记 $\xi := \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_s$。利用余乘法（2.13）结合（3.11），通过直接计算可以得到

$$t_{i,i}(u).\xi = \mu_i(u)\xi, i = 1, 2, \quad t_{1,2}(u).\xi = 0.$$

设 $M := \mathrm{Y}.\xi \subseteq L$ 为 L的循环张成。利用自同-$\widetilde{\ }$构（3.8） $f(u) = \mu_2(u)^{-1}$扭曲 Y 在 M 上的作用，我们得到一个记作 M 的 Y-模。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$显然， M 也由 ξ 生成。滥用记号，我们仍写作 $M = \mathrm{Y}.\xi$。由（3.9）和（3.10），有

$$t_{1,1}(u).\xi = \frac{\mu_1(u)}{\mu_2(u)}\xi = \frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)}\xi, \quad t_{2,2}(u).\xi = \xi, \quad t_{1,2}(u).\xi = 0.$$

注意到 $\lambda_1(u)/\lambda_2(u)$ 是受限的。这意味着 $\widetilde{M} = \mathrm{Y}.\xi = \mathrm{Y}^{[p]}.\xi$，从而得到一个满同态

$$Z^{[p]}(\frac{\lambda_1(u)}{\lambda_2(u)}, 1) \twoheadrightarrow \widetilde{M} = \mathrm{Y}^{[p]}.\xi.$$

因此， $L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u), 1)$ 是有限维的。由于 $\lambda_2(u)$ 是受限的，我们再次将 $\mathrm{Y}^{[p]}$ 对 $L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u), 1)$ 的扭曲作用与 $f(u) = \lambda_2(u)$ 结合起来（见注3.7），得到模 $L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$。我们得出结论，模 $L^{[p]}(\lambda_1(u)\ \lambda_2(u))$ 也是有限维的。□

注 k 3.9. 设 $Q_1(u)$ 和 $Q_2(u)$ 是另外两个互素多项式，且 d

$$\frac{P_1(u)}{P_2(u)} = \frac{Q_1(u)}{Q_2(u)}.$$

这意味着 $P_1(u)Q_2(u) = P_2(u)Q_1(u)$。由于 P_1 和 P_2 没有公共根，因此立即得到，对于 $i = 1,2$，有 $P_i(u) = Q_i(u)$，从而上述定理中出现的首一多项式是唯一的。我们将其称为这些表示的模 *Drinfeld* 多项式，参见 [D]。这与模 *Yangian* 的情形略有不同（[*Ka*，第 6985] 页的注释，以及[*CHT*，注释 3]）。

4. 限制移位超杨扬子代数

在复数域上，Brown、Brundan 和 Goodwin [BBG] 引入了（截断的）移位超杨扬子代数，其定义对象为 $\mathfrak{gl}_{1|1}$（$\mathbb{C}$），与 [BK2] 中移位杨扬子代数的定义相平行（实际上，这可以对所有 $\mathfrak{gl}_{m|n}$定义，参见 [Peng，例如第 4] 节）。本节将研究 $\mathfrak{gl}_{1|1}$的（受限的）截断移位杨扬子代数的模表示。

4.1. 移位超杨扬子代数。设 $\sigma = (s_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ 为一个由非负整数组成的 2×2 矩阵，且对 $i = 1$ 满足 $s_{i,i} = 0$，2。我们将这样的矩阵称为移位矩阵。遵循 [BBG]（另见 [BK2]），与矩阵 σ 相关联的移位超杨扬子代数记作 Y_σ，它是以偶生成元 $\{d_i^{(r)};\ i = 1,2, r > 0\}$ 和奇生成元 $\{e^{(r)}, f^{(s)};\ r > s_{1,2}, s > s_{2,1}\}$ 为生成元的超代数，并服从定理 2.1 中所有有意义的关系。显然，存在一个同态 $\mathrm{Y}_\sigma \to \mathrm{Y}$，它将 Y 的生成元映到 Y 中同名的生成元。利用 PBW 定理（定理 2.2），我们看到同态 $\mathrm{Y}_\sigma \to \mathrm{Y}$ 是单射（参见 [BBG，定理 2.8] 和 [Peng，推论 4.5]）。因此，Y_σ 可被等同为 Y 的一个子代数。

假设 $s_{1,2} > 0$。定义 σ_+ 为

$$\sigma_+ := \begin{pmatrix} 0 & s_{1,2}-1 \\ s_{2,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

类似地，若 $s_{2,1} > 0$，则将移位矩阵 σ_- 定义为

$$\sigma_- := \begin{pmatrix} 0 & s_{1,2} \\ s_{2,1}-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 [BBG、(2-14)、(2-15)] 可知，存在定义良好的代数同态

$$\Delta_+ : \mathrm{Y}_\sigma \to \mathrm{Y}_{\sigma_+} \otimes U(\mathfrak{gl}_1) \tag{4.1}$$
$$d_1^{(r)} \mapsto d_1^{(r)} \otimes 1, \quad d_2^{(r)} \mapsto d_2^{(r)} \otimes 1 - d_2^{(r-1)} \otimes e_{1,1},$$
$$e^{(r)} \mapsto e^{(r)} \otimes 1 - e^{(r-1)} \otimes e_{1,1}, \quad f^{(r)} \mapsto f^{(r)} \otimes 1,$$

and

$$\Delta_- : \mathrm{Y}_\sigma \to U(\mathfrak{gl}_1) \otimes \mathrm{Y}_{\sigma_-} \tag{4.2}$$
$$d_1^{(r)} \mapsto 1 \otimes d_1^{(r)}, \quad d_2^{(r)} \mapsto 1 \otimes d_2^{(r)} - e_{1,1} \otimes d_2^{(r-1)},$$
$$f^{(r)} \mapsto 1 \otimes f^{(r)} - e_{1,1} \otimes f^{(r-1)}, \quad e^{(r)} \mapsto 1 \otimes e^{(r)},$$

其中 $U(\mathfrak{gl}_1)$ 是一维李代数 $\mathfrak{gl}_1$ 的万有包络代数，该李代数以 $e_{1,1}$ 为基。

令 $\sigma = (s_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ 为移位矩阵。另设给定一个整数$\ell \ge s_{1,2}+s_{2,1}$，并令

$$k := \ell - s_{1,2} - s_{2,1} \ge 0. \tag{4.3}$$

根据 [BBG 引理 2.1], , 我们可以将 Δ_+ 迭代共 $s_{1,\ 2}$ 次，将 Δ_- 迭代共 $s_{2,\ 1}$ 次，并将余乘法 Δ 迭代共 $k-1$ 次。由此得到一个定义良好的态射

$$\Delta_{\sigma,\ell} : \mathrm{Y}_\sigma \to U(\mathfrak{gl}_1)^{\otimes s_{2,1}} \otimes \mathrm{Y}^{\otimes k} \otimes U(\mathfrak{gl}_1)^{\otimes s_{1,2}}.$$

Let

$$U_{\sigma,\ell} := U(\mathfrak{gl}_1)^{\otimes s_{2,1}} \otimes U(\mathfrak{gl}_{1|1})^{\otimes k} \otimes U(\mathfrak{gl}_1)^{\otimes s_{1,2}}.$$

回顾（2.14），我们得到一个同态

$$\mathrm{ev}_{\sigma,\ell} := (\mathrm{id}^{\otimes s_{2,1}} \otimes \mathrm{ev}^{\otimes k} \otimes \mathrm{id}^{\otimes s_{1,2}}) \circ \Delta_{\sigma,\ell} : \mathrm{Y}_\sigma \to U_{\sigma,\ell}.$$

我们定义水平为 ℓ 的移位超杨扬子代数

$$\mathrm{Y}_{\sigma,\ell} := \mathrm{ev}_{\sigma,\ell}(\mathrm{Y}_\sigma) \subseteq U_{\sigma,\ell}.$$

设 $I_{\sigma,\ell}$ 为 Y_σ 中由元素 $d_1^{(r)}$ （对 $r > k$）生成的双边理想。

定理 4.1. 同态$\mathrm{ev}_{\sigma,\ell}$ 诱导一个代数同构 $\mathrm{Y}_\sigma / I_{\sigma,\ell} \cong \mathrm{Y}_{\sigma,\ell}$。此外，元素中的有序超单项式

$$\begin{aligned}\Omega := \{d_1^{(r)};\ 0 < r \le k\} \cup \{d_2^{(r)}; 0 < r \le \ell\} \\ \cup \{e^{(r)};\ s_{1,2} < r \le s_{1,2} + k\} \cup \{f^{(r)};\ s_{2,1} < r \le s_{2,1} + k\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

按任意固定次序取时构成 $\mathrm{Y}_{\sigma,\ell}$ 的一个基。

证明。 在特征零情形下给出的证明，见 [BBG，定理 3.6 与推论 3。6], 并利用 [Gow，定理 1]（如 [CH1，定理 3。1]所述），在正特征下同样成立。 □

此后，我们将 $\mathrm{Y}_{\sigma,\ell}$ 与商 $\mathrm{Y}_\sigma/I_{\sigma,\ell}$ 等同，并滥用记号，把 Y_σ 的元素 $d_i^{(r)}, e^{(r)}, \ldots$ 在 $\mathrm{Y}_{\sigma,\ell}$ 中的典范像仍用相同符号表示。注意，元素 $\{b_i^{(rp)};\ i = 1, 2, r > 0\}$（2.12）包含在 Y_σ 中，它们在子代数 Y_σ 中显然是中心的。此外，将 Y_σ 的 p-中心 $Z_p(\mathrm{Y}_\sigma)$ 定义为由

$$\{b_i^{(rp)};\ i = 1, 2, r > 0\}.$$

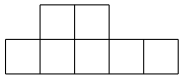
此外，我们将 $\mathrm{Y}_{\sigma,\ell}$ 的 p-中心定义为 Y_σ 的 p-中心在 $\mathrm{Y}_{\sigma,\ell}$ 中的像，并记为 $Z_p(\mathrm{Y}_{\sigma,\ell})$。令 $Z_p(\mathrm{Y}_{\sigma,\ell})_+$ 为 $Z_p(\mathrm{Y}_{\sigma,\ell})$ 中由元素 $\{b_i^{(r)};\ i = 1,2, r > 0\}$ 生成的理想（见注2.3），并定义受限截断移位超杨扬子代数

$$\mathrm{Y}_{\sigma,\ell}^{[p]} := \mathrm{Y}_{\sigma,\ell} / \mathrm{Y}_{\sigma,\ell} Z_p(\mathrm{Y}_{\sigma,\ell})_+.$$

4.2. Y的不可约表示, 。我们继续使用第4.1节中的记号。于是可以从元组（σ, ℓ）得到一个两行金字塔 π。π 的第一行由 k 个方格（4.3）组成，而截面行由 ℓ 个方格组成。如果 $k > 0$，那么 π 左侧有 $s_{2,\ 1}$ 列高为 1 的方格，右侧有 $s_{1,\ 2}$ 列高为 1 的方格。例如，令

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

并取 $\ell = 5$，所得金字塔 π 为



反过来，给定一个双行金字塔 π，我们可以还原移位矩阵 σ 和 ℓ（参见 [Peng，命题 2。8]）。

一个 π-杨表是通过用 $\Bbbk$ 中的元素填入 π 的方格所得到的图形。形状为 π 的所有杨表的集合记作 $\mathrm{Tab}_{\Bbbk}(\pi)$。我们将第一行依次填入$a_1$、……、$a_k$，第二行依次填入 b_1、……、b_ℓ的 π-杨表简记为数组 $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \cdots a_k \\ b_1 \cdots b_\ell \end{smallmatrix}\right)$。若 B 可由 A 通过置换各行中的元素得到，则称 A、$B \in \mathrm{Tab}_{\Bbbk}(\pi)$ 行等价，记作 $A \sim B$。

为简化记号，我们将用 Y_π（分别用 $\mathrm{Y}_\pi^{[p]}$）代替 $\mathrm{Y}_{\sigma,\,\ell}$（分别用 $\mathrm{Y}_{\sigma\,\ell\,,}^{[p]}$）。由这些关系，$\mathrm{Y}_\pi$ 具有一个 $\mathbb{Z}$-分次（参见 [BBG，第 6]节[1]）

$$\mathrm{Y}_\pi = \bigoplus_{g \in \mathbb{Z}} \mathrm{Y}_{\pi;g} \tag{4.5}$$

使生成元 $d_i^{(r)}$ 的次数为 0，生成元 $e^{(r)}$ 的次数为1，而生成元 $f^{(r)}$ 的次数为 -1。此外，代数 Y_π 具有三角分解。我们先引入 Ω (4.4) 的一些子集。令

$$\Omega_0 := \{d_1^{(r)}, d_2^{(s)};\ 0 < r \le k, 0 < s \le \ell\}$$

and

$$\Omega_+ := \{e^{(r)};\ s_{1,2} < r \le s_{1,2} + k\}, \quad \Omega_- := \{f^{(r)};\ s_{2,1} < r \le s_{2,1} + k\},$$

并令 Y_π^0、Y_π^- 和 $\mathrm{Y}_\pi^\natural$ 分别为由 Ω_0, Ω_- 和 $\Omega_0 \cup \Omega_+$ 生成的 Y_π 的子代数。

对于 $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \cdots a_k \\ b_1 \cdots b_\ell \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Tab}_{\Bbbk}(\pi)$，令 $\Bbbk_A$ 为以基 1_A 为基、满足条件的 Y_π^0 一维模 at

$$u^k d_1(u).1_A = (u + a_1)\cdots(u + a_k)1_A, \tag{4.6}$$

$$u^\ell d_2(u).1_A = (u + b_1)\cdots(u + b_\ell)1_A. \tag{4.7}$$

因此，$d_1^{(r)}.1_A = e_r(a_1, \ldots, a_k)1_A$ 和 $d_2^{(r)}.1_A = e_r(b_1, \ldots, b_l)1_A$，其中 e_r 表示第 r 个初等对称多项式。由于 Y_π^0 是以 Ω_0，为变量的多项式代数，每个不可约 Y_π^0 都同构于 $\Bbbk_A$，其中 $A \in \mathrm{Tab}_{\Bbbk}(\pi)$，且 $\Bbbk_A \cong \Bbbk_B$ 当且仅当 $A \sim B$。

得益于 [BBG，定理6.1], 存在唯一的满同态$\mathrm{Y}_\pi^\natural \twoheadrightarrow \mathrm{Y}_\pi^0$，将对所有$r > s_{1,\,2}$的 $e^{(r)} \mapsto 0$映出。我们可经由沿该满射的拉回，把$\Bbbk_A$ 视为一个$\mathrm{Y}_\pi^\natural$-模。我们定义*Verma*模

$$M(A) := \mathrm{Y}_\pi \otimes_{\mathrm{Y}_\pi^\natural} \Bbbk_A. \tag{4.8}$$

[1]作者主要研究了 W-代数 W_π 在 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 中同上文献他们通过$\mathrm{Y}_{\sigma,\,\ell}$ 与W_π 之间的同构，识别了 [BBG，定理 45]。

由PBW 定理，Y_π 是以Ω_-中的有序超单项式为基的自由右$\mathrm{Y}_\pi^\natural$-模。由此得到维数 $M(A) = 2^k$。

特征零下的以下引理见 [BBG，引理 7。1]在我们的情形中，我们将采用命题 3.2 的类似证明。

引理 4.2。 对于 $A = \begin{smallmatrix} a_1 \cdots a_k \\ b_1 \cdots b_\ell \end{smallmatrix} \in \mathrm{Tab}_{\Bbbk}(\pi)$，*Verma*模 $M(A)$ 有一个唯一的不可约商$L(A)$。v_+ 的像 $1\otimes 1_A$ 是 $L(A)$ 中唯一（相差一个标量）的非零向量，使得对所有 $r > s_{1,2}$， $e^{(r)}.v_+ = 0$。此外，对所有 $r \geq 0$，有 $d_1^{(r)}.v_+ = e_r(a_1, \ldots, a_k)v_+$ 和 $d_2^{(s)}.v_+ = e_r(b_1, \ldots, b_\ell)v_+$。

证明。 我们知道

$$X := \{(f^{(s_{2,1}+1)})^{i_1}(f^{(s_{2,1}+2)})^{i_2}\cdots(f^{(s_{2,1}+k)})^{i_k};\ i_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, k\}.$$

是 Y_π^- 和 $\mathrm{Y}_\pi^- \otimes 1_A \cong M(A)$ 的一组基。简记

$$f_{i_1,\ldots,i_k} := (f^{(s_{2,1}+1)})^{i_1}(f^{(s_{2,1}+2)})^{i_2}\cdots(f^{(s_{2,1}+k)})^{i_k}$$

并定义

$$(\mathrm{Y}_\pi^-)_+ := \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{f_{i_1,\ldots,i_k} \in X;\ (i_1, \ldots, i_k) \neq (0, \ldots, 0)\}.$$

只需证明任意真子模 M 都包含于 $M(A)$ 之中。对于任意 $x \in (\mathrm{Y}_\pi^-)_+$，我们注意到 x 是幂零的。因此，我们可以直接应用命题 3.2 中的相同论证，得出 $M(A)$ 有一个唯一简单商 $L(A)$。

结合上述观察以及（4.6）和（4.7），可知 v_+ 是一个满足要求的非零向量。接下来需要证明，任意一个被所有 $v \in L(A)$湮灭的向量 $e^{(r)}$ 都与 v_+成比例。利用 $\mathbb{Z}$对 Y_π (4.5) 的分次，我们知道

$$L(A) = \mathrm{Y}_\pi.v_+ = \sum_{g\in\mathbb{Z}} \mathrm{Y}_{\pi;g}.v_+.$$

我们固定 Y_π 的生成元次序，使得 $\Omega_- < \Omega_0 < \Omega_+$。由于 $e^{(r)}.v_+ = 0$，PBW 定理意味着 $\mathrm{Y}_{\pi;0}.v_+ = \Bbbk v_+$ 和 $\mathrm{Y}_{\pi;g}.v_+ = (0)$，其中 $g > 0$。由此可得

$$L(A) = \Bbbk v_+ + \sum_{g<0} \mathrm{Y}_{\pi;g}.v_+ = \Bbbk v_+ + (\mathrm{Y}_\pi^-)_+.v_+.$$

回忆一下，$(\mathrm{Y}_\pi^-)_+$ 由幂零元素组成，因此， $L(A) = \Bbbk v_+ \oplus (\mathrm{Y}_\pi^-)_+.v_+$。令 $v = a_0 v_+ + x.v_+$，其中 $a_0 \in \Bbbk$ 且 $x \in (\mathrm{Y}_\pi^-)_+$。我们需要证明 $x.v_+ = 0$。接下来，我们注意到

$$0 = e^{(r)}.v = e^{(r)}.(a_0 v_+ + x.v_+) = e^{(r)}x.v_+$$

并且 $x.v_+ \in \sum_{g<0}\mathrm{Y}_{\pi;g}.v_+$。这意味着子模 $\mathrm{Y}_\pi.(x.v_+) \subseteq \sum_{g<0}\mathrm{Y}_{\pi;g}.v_+ = (\mathrm{Y}_\pi^-)_+.v_+$，所以它必为 0。□

定理 4.3. 每个简单 Y_π-模都是有限维的，并且同构于引理 *4.2* 中的某个模 $L(A)$，其中 $A \in Tab_{\Bbbk}(\pi)$。此外， $L(A) \cong L(B)$ 当且仅当 $A \sim B$。因此，固定 $Tab_{\Bbbk}(\pi)/\sim$ 中 $\sim$-等价类的一组代表元，其中 $Tab_{\Bbbk}(\pi)$，这些模

$$\{L(A);\ A \in \mathrm{Tab}_{\Bbbk}(\pi)/\sim\}$$

给出一组完备的两两不等价的简单Y_π-模。

证明。给定 A, $B \in$ 表$_{\mathbb{k}}(\pi)$，应用引理4.2 可知 $L(A) \cong L(B)$ 当且仅当 $A \sim B$。证明的其余部分依赖于 $\mathbb{Z}$的Y$_\pi$ (4.5)-分次，这在我们的情形下同样适用。然后直接套用 [BBG定理 7.2]的证明即可得到结论。□

回想一下，金字塔 π 的第二行有 ℓ 个方格。对于每个 $c = 1, \dots, \ell$，令 q_c 为金字塔 π中第 c 列的高度。给定 $A \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{k}}(\pi)$，令 A_c 为其第 c列。若$q_c = 1$，则 A_c 只有一个元素 b。我们令 $L(A_c)$ 为一维 $U(\mathfrak{gl}_1)$-模，它有一个偶基向量 v_+，满足 $e_{1,1}.v_+ = -bv_+$。若 $q_c = 2$，则 A_c 有两个元素，a位于第一行，b 位于第二行。此时，令 $L(A_c)$ 为不可约 $U(\mathfrak{gl}_{1|1})$-模，它有一个偶基向量 v_+，满足 $e_{1,1}.v_+ = av_+, e_{2,2}.v_+ = -bv_+$ 以及 $e_{1,2}.v_+ = 0$。根据 $a = b$，$L(A_c)$ 是一维或二维的（另见 (3.3)）。

我们考虑张量积

$$L(A_1) \otimes \cdots \otimes L(A_\ell)$$

它可以自然地视为一个 $U_{\sigma,\ell}$-模。由于 $\mathrm{Y}_\sigma \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\sigma,\ell}} \mathrm{Y}_\pi \subseteq U_{\sigma,\ell}$，我们可以将其限制为一个 Y$_\pi$-模。于是我们得到一个定义良好的 Y$_\pi$-模

$$V(A) := L(A_1) \otimes \cdots \otimes L(A_\ell). \tag{4.9}$$

注意，$\dim V(A) = 2^{k-h}$，其中 h 是满足 A_c 有两个相同条目的 $c = 1, \dots, \ell$ 的个数。

记 $v := v_+ \otimes \cdots \otimes v_+ \in V(A)$。以下引理表明，$v$ 是 $V(A)$ 中的最高权向量，其权与 1_A 相同（见（4.6）和（4.7））。这是 [BBG，引理 8 的模版本。3]。由于我们不使用 W-代数，我们将通过直接归纳法证明。

引理 4.4。对于任意 $A \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{k}}(\pi)$，存在一个非零同态

$$M(A) \to V(A)$$

将循环向量 $1 \otimes 1_A \in M(A)$ 映到 $v \in V(A)$。特别地，$V(A)$ 包含一个同构于 $L(A)$ 的子商。

证明。假设 $A = \begin{smallmatrix} a_1 \cdots a_k \\ b_1 \cdots b_\ell \end{smallmatrix} \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{k}}(\pi)$。由 $M(A)$ 的泛性质，只需证明 v 被所有 $e^{(r)}$（对 $r > s_{1,2}$）零化，并且对所有 $r > 0$，有 $d_1^{(r)}.v = e_r(a_1, \dots, a_k)v$ 与$d_2^{(r)}.v = e_r(b_1, \dots, b_\ell)v$。

首先我们处理 $\sigma =$(0) 的情形。为简化记号，我们作如下设定

$$\bar{e}_{i,j}^{[c]} := (-1)^{|i|} 1^{\otimes(c-1)} \otimes e_{i,j} \otimes 1^{\otimes(\ell-c)}$$

对任意 $1 \le i, j \le 2$ 和 $1 \le c \le \ell$。根据（2.3）和（2.4），只需证明$t_1^{(r)}{}_{,2}.v = 0$ 和

$$t_{1,1}^{(r)}.v = e_r(a_1, \dots, a_k)v, \; t_{2,2}^{(r)}.v = e_r(b_1, \dots, b_\ell)v$$

对于所有 $1 \ r > 0$。根据 [BBG，(3-4)]（另见 [Gow，第 2]节），我们有 t

$$t_{i,j}^{(r)}.v = \sum_{1\le c_1<\cdots<c_r\le \ell} \sum_{1\le h_1,\ldots,h_{r-1}\le 2} \bar{e}_{i,h_1}^{[c_1]}\bar{e}_{h_1,h_2}^{[c_2]}\cdots\bar{e}_{h_{r-1},j}^{[c_r]}.v.$$

若 $(i,j) = (1,2)$，则上述和中的每一项都为零，因为它包含形如 $\bar{e}_1^{[c_m]}{}_{,2} \ .v_+$（其中 $1 \le m \le \ell$）的因子，而该因子为零。类似地，若 $i = j$，则唯一的非零项对应于每个指标 h_m 都等于 i 的情形。因此，求和简化为

$$t_{i,i}^{(r)}.v = \sum_{1\le c_1<\cdots<c_r\le \ell} \bar{e}_{i,i}^{[c_1]}\bar{e}_{i,i}^{[c_2]}\cdots\bar{e}_{i,i}^{[c_r]}.v,$$

s因此，我们的断言由一个简单直接的计算即可得出。

假设 $\sigma \neq (0)$。我们对 ℓ 进行归纳法。$\ell = 1$ 的情形显然。若 $s_{1,2} > 0$，则 $\Delta_+(4.1)$ 诱导出映射 $\mathrm{Y}_{\sigma,\ell} \to \mathrm{Y}_{\sigma_+,\ell-1} \otimes U(\mathfrak{gl}_1)$（参见 [BBG，注 8.2]）。我们将$v' := v_+ \otimes \cdots \otimes v_+$ 记为前 $\ell - 1$ 个极大向量的张量积。于是 $v = v' \otimes v_+$。由 (4.1) 和归纳假设可得

$$\begin{aligned} d_1^{(r)}.v =& d_1^{(r)}.v' \otimes v_+ = e_r(a_1,\ldots,a_k)v' \otimes v_+ = e_r(a_1,\ldots,a_k)v \\ d_2^{(r)}.v =& d_2^{(r)}.v' \otimes v_+ - d_2^{(r-1)}.v' \otimes e_{1,1}.v_+ \\ =& e_r(b_1,\ldots,b_{\ell-1})v - e_{r-1}(b_1,\ldots,b_{\ell-1})\cdot(-b_\ell)v \\ =& e_r(b_1\ldots,b_\ell)v \end{aligned}$$

and

$$e^{(r)}.v = e^{(r)}.v' \otimes v_+ - e^{(r-1)}.v' \otimes e_{1,1}.v_+ = 0.$$

对于$s_{2,\ 1} > 0$使用（4.2）代替（4.1）的情形，论证也类似。然后，利用映射 Δ_+ 和 Δ_-，□我们可以将证明归结为 $\sigma =$（0）的情形。

现在我们陈述 [BBG定理 8 的模版本4]。

定理 4.5。取任意 $A \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{k}}$（$\pi$），令 $h \ge 0$ 为满足条件的最大值，使得存在互不相同的 $1 \le i_1$，……，$i_h \le k$以及 $1 \le j_1$，……，$j_h \le \ell$，其中 $a_{i_1} = b_{j_1}$，……，$a_{i_h} = b_{j_h}$。选取 $B \sim A$，使得 B有 h 个高度为2且包含相同元素的列。那么

$$L(A) \cong V(B).$$

特别地，维数 L（A） $= 2^{k-h}$。

证明。该证明使用引理4.4 和 [BBG定理 7。3], 与[BBG定理 8 的证明类似。4]注意， [BBG定理 7 的证明3] 在正特征下同样成立。□

现在我们转而讨论不可约 $\mathrm{Y}_\pi^{[p]}$-模。回顾第4.1 节中的结论

$$\mathrm{Y}_\sigma \overset{\mathrm{ev}_{\sigma,\ell}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Y}_\pi \twoheadrightarrow \mathrm{Y}_\pi^{[p]} := \mathrm{Y}_{\sigma,\ell} \,/\, \mathrm{Y}_{\sigma,\ell} Z_p(\mathrm{Y}_{\sigma,\ell})_+.$$

根据定理 4.3，单 Y_π-模可分类为模 $L(A)$，其中 $A \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{k}}(\pi)$取遍 π-杨表的行等价类代表。我们将确定这些单模中哪些模上的 Y_π 作用可通过商 $\mathrm{Y}_\pi \twoheadrightarrow \mathrm{Y}_\pi^{[p]}$分解，从而得到不可约 $\mathrm{Y}_\pi^{[p]}$-模。

给定 $A = \begin{smallmatrix} a_1 \cdots a_k \\ b_1 \cdots b_\ell \end{smallmatrix} \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{k}}(\pi)$，令 $L(A)$ 为定理 4.3 中的一个不可约 Y_π-模。记 v_+ 为 $L(A)$ 的唯一极大向量（见引理 4.2）。注意到，模$L(A)$ 能分解为 $\mathrm{Y}_\pi^{[p]}$ 的模，当且仅当 $b_i^{(r)}.v_+ = 0$ 对 $i = 1,\ 2$。由 (2.11) 和 (4.6)，有

$$\begin{aligned} b_1(u).v_+ =& d_1(u)d_1(u-1)\cdots d_1(u-p+1).v_+ \\ =& \frac{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p-1}(u+a_i-j)}{(\prod_{j=0}^{p-1}(u-j))^k} v_+. \end{aligned}$$

因此，$b_1^{(r)}.v_+ = 0$ 当且仅当 $a_i \in \mathbb{F}_p$ 所有 $1 \le i \le k$。类似地，由（4.7）可得$b_2^{(r)}.v_+ = 0$ 当且仅当 $b_j \in \mathbb{F}_p$ 所有 $1 \le j \le \ell$。

我们将 杨表$_{\mathbb{F}_p}(\pi) \subseteq$ 杨表$_{\mathbb{k}}(\pi)$ 记作其条目属于 $\mathbb{F}_p$的那些杨表。考虑到定理 4.3，可立即得到:

定理 *4.6.* 每个单 $Y_\pi^{[p]}$-模都是有限维的，并且同构于引理 *4.2* 中对某个 $A \in Tab^{\mathbb{F}_p}(\pi)$ 的模 $L(A)$ 之一。此外，$L(A) \cong L(B)$ 当且仅当 $A \sim B$。因此，固定 $Tab^{\mathbb{F}_p}(\pi)$ 中 $\sim$-等价类的一组代表元 $Tab^{\mathbb{F}_p}(\pi)/\sim$，这些模

$$\{L(A);\ A \in \mathrm{Tab}_{\mathbb{F}_p}(\pi)/\sim\}$$

给出两两不等价的单 $\mathrm{Y}_\pi^{[p]}$-模的一个完全集。

注 *4.7.* 在 [*BBG*], 中，作者证明存在超代数同构 $\mu : W_\pi \cong Y_\pi$，其中 W_π 是与李超代数 $\mathfrak{gl}_{M|N}$ 相关联的主 W- 代数，详见所引文献的定理 *4.5*。在与 *Hu* 和 *Topley* 的合作工作 [*CHT*] 中，第一作者利用 *Brundan–Kleshchev* 同构的受限版本研究了一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_{2n}$ 的某些模表示（见 [*GT*，定理 *1.*1], [*BK2*，定理 *10.*1]）。我们预期同构 μ 经由受限商代数分解，即 $W_\pi^{[p]} \cong Y_\pi^{[p]}$。这里，$W_\pi^{[p]}$是受限主 W-超代数（参见 [*WZ*，定理 *4.*4], [*ZS*，定理 *2.*24]）。结合定理 *4.6*，这将给出与正则幂零 p-特征相关联的 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 的约化包络代数的不可约模的分类（参见 [*WZ*]）。

附录A. 命题2.4的证明

在附录中，我们给出命题2.4的详细证明。该结果与杨扬子代数 Y_2（参见 [CHT，第2.3]节）。

引理 A.1. 以下恒等式在 $\mathrm{Y}[[u^{-1}]]$ 中成立:

(1) $t_{1,1}(u-1)t_{1,2}(u) = t_{1,2}(u-1)t_{1,1}(u)$;
(2) $t_{1,1}(u)t_{2,1}(u-1) = t_{2,1}(u)t_{1,1}(u-1)$;
(3) $t_{1,2}(u-1)t_{1,2}(u) = 0$;
(4) $(k+1)t_{2,1}(u)t_{1,1}(u-k) = kt_{1,1}(u-k)t_{2,1}(u) + t_{2,1}(u-k)t_{1,1}(u)$ *for* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

证明。这些结论可由定义关系 (2.2) 得出。利用反自同构 τ (3.4)，可见前三个等式可由 [CH2, (4.4)-(4.6)] 立即推出。为得到 (4)，令 $(i,j,k,l) = (1,1,2,1)$，并将 $u := v-k$ 代入 (2.2)，化简后再将 v 替换为 u。□

引理 A.2。 对于任意正整数 n，有

$$\begin{aligned}\Delta(t_{1,1}(u-n+1)t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u))\\ = t_{1,1}(u-n+1)t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\otimes t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)t_{1,1}(u-n+1)\\ + nt_{1,2}(u-n+1)t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\otimes t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)t_{2,1}(u-n+1).\end{aligned}$$

证明。 我们对 n进行归纳法。对于 $n=1$，根据 Δ(2.13) 的定义可知结论成立。因此，假设 $n \geq 2$，且该命题对 $n-1$成立。由此可得

$$\begin{aligned}&\Delta\big(t_{1,1}(u-n+1)t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\big)\\ &= \Delta\big(t_{1,1}(u-n+1)\big)\Delta\big(t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\big)\\ &= \big(t_{1,1}(u-n+1)\otimes t_{1,1}(u-n+1) + t_{1,2}(u-n+1)\otimes t_{2,1}(u-n+1)\big)\\ &\quad\times\big(t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\otimes t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)\\ &\quad+(n-1)t_{1,2}(u-n+2)t_{1,1}(u-n+3)\cdots t_{1,1}(u)\\ &\quad\otimes t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+3)t_{2,1}(u-n+2)\big).\end{aligned}$$

Usi根据引理 A.1(3) 并化简上式，我们只需证明 t

$$\begin{aligned}&nt_{1,2}(u-n+1)t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\otimes t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)t_{2,1}(u-n+1)\\ &= t_{1,2}(u-n+1)t_{1,1}(u-n+2)\cdots t_{1,1}(u)\otimes t_{2,1}(u-n+1)t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)\\ &\quad+(n-1)t_{1,1}(u-n+1)t_{1,2}(u-n+2)t_{1,1}(u-n+3)\cdots t_{1,1}(u)\\ &\quad\otimes t_{1,1}(u-n+1)t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+3)t_{2,1}(u-n+2).\end{aligned}$$

此外，引理 A.1(1) 表明上述所有张量积的左侧都相等。还需证明

$$\begin{aligned}&nt_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)t_{2,1}(u-n+1)\\ &= t_{2,1}(u-n+1)t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+2)\\ &\quad+(n-1)t_{1,1}(u-n+1)t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-n+3)t_{2,1}(u-n+2).\end{aligned}$$

这由引理 A.1(1) 和 (4) 取 $k := n-1$即可得到。 □

命题 A.3. *(=命题2.4)* 我们有

$$\Delta(b_i(u)) = b_i(u)\otimes b_i(u).$$

特别地， $\Delta(I_p) \subseteq I_p\otimes \mathrm{Y} + \mathrm{Y}\otimes I_p$。

证明。 回顾（2.3）可知 $t_{1,1}(u) = d_1(u)$，因此 $b_1(u) = t_{1,1}(u)\cdots t_{1,1}(u-p+1)$。应用引理 A. 2 $n := p$ 可得

$$\Delta(b_1(u)) = b_1(u) \otimes b_1(u).$$

现在考虑 $i = 2$ 的情形。根据 [Gow，命题 1], 映射

$$\zeta : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y};\ t_{i,j}(u) \mapsto t'_{3-i,3-j}(u)$$

给出了一个代数同构。容易验证，$\zeta(t'_{i,j}(u)) = t_{3-i,3-j}(u)$。此外，令 $P : \mathrm{Y} \otimes \mathrm{Y} \to \mathrm{Y} \otimes \mathrm{Y}$ 为如下映射：

$$P(x \otimes y) = y \otimes x(-1)^{|x||y|}$$

对所有齐次元素 $x, y \in \mathrm{Y}$。于是我们有 $\Delta = (\zeta \otimes \zeta) \circ P \circ \Delta \circ \zeta$（参见 [Gow，命题 2]）。由于 $t'_{2,2}(u) = d_2(u)^{-1}$（参见 [Gow, (14)]），我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(b_2(u)) =& \Delta(t'_{2,2}(u)\cdots t'_{2,2}(u-p+1))\\ =& (\zeta \otimes \zeta) \circ P \circ \Delta \circ \zeta(t'_{2,2}(u)\cdots t'_{2,2}(u-p+1))\\ =& (\zeta \otimes \zeta) \circ P \circ \Delta(b_1(u)).\end{aligned}$$

记得我们已经证明了 $\Delta(b_1(u)) = b_1(u) \otimes b_1(u)$。注意到 $\zeta(b_1(u)) = b_2(u)$，因此我们得到 $\Delta(b_2(u)) = b_2(u) \otimes b_2(u)$，正如所需。

□

致谢。 本工作得到湖北省自然科学基金（编号：2025AFB716）的资助。

参考文献

[BBG] J. Brown, J. Brundan 和 S. M. Goodwin，GL($m|n$) 的主 W-代数。代数与数论 7(2013), 1849–1882。[BK1] J. Brundan 和 A. Kleshchev，杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 的抛物型表示。数学物理通讯 254 (2005), 191–220。[BK2] J. Brundan 和 A. Kleshchev，移位杨扬子代数与有限 W-代数。数学进展 200 (2006), no. 1, 136– 195。[BK3] J. Brundan 和 A. Kleshchev，移位杨扬子代数与有限 W-代数的表示。Mem. Amer. Math.Soc. 196(2008), no. 918。[BT18] J. Brundan 和 L. Topley，杨扬子代数与移位杨扬子代数的 p中心。莫斯科数学杂志 18 (2018), no. 4, 617–657。[CH1] H. Chang 和 H.-M. Hu，模超杨扬子代数 $Y_{m|n}$的中心。伦敦数学会杂志 (2) 107 (2023), 1074–1109。[CH2] H. Chang 和 H.-M. Hu，关于超杨扬子代数 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ 的中心的注记。代数杂志。633 (2023), 648–665。[CH3] H. Chang 和 H.-M. Hu，特征 2 下的超杨代数。arXiv: 2602.13603。[CHT] H. Chang, J.-X. Hu 和 L. Topley，杨扬子代数 Y_2的模表示。伦敦数学会杂志 111 (2025), PaperNo.e70056。[D] V. G. Drinfeld，杨扬子代数及量子仿射代数的新实现。苏联数学文献汇编 36 (1988), 212–216。[Gow] L. Gow，杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的高斯分解。数学物理通讯 276 (2007), 799–825。

[GT] S. M. Goodwin 和 L. Topley，受限移位杨扬子代数与受限有限 W-代数。Trans. Amer. Math. Soc., Ser. B 8 (2021), 190–228。[Ka] D. Kalinov，复秩杨扬子代数的有限维表示。Int. Math. Res. Not. IMRN (2020), no. 20, 6967–6998。[Mol1] A. Molev，杨扬子代数与经典李代数。Mathematical Surveys and Monographs, 143, AMS, Prov- idence, RI, 2007。[Mol2] A. Molev，与李超代数 $\mathfrak{osp}(1|2n)$ 相关的杨扬子表示。数学物理通讯 398 (2023), 541–571。[Mol3] A. Molev，类型为 A 和 C 的超杨扬子表示。Algebr. Represent. Theory 26 (2023), 1007–1027。[Mol4] A. Molev，类型为 $D(n,m)$ 的超杨扬子表示。Algebr. Represent. Theory 28 (2025), 25–45。[MR] A. Molev 和 E. Ragoucy，类型为 $B(n,m)$ 的超杨扬子表示。代数杂志 659 (2024), 1–22。[Na1] M. Nazarov，量子 Berezinian 与经典 Capelli 恒等式。Lett. Math. Phys. 21 (1991), 123–131。[Na2] M. Nazarov，一般线性李超代数的杨扬子代数。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 16 (2020), Paper No. 112。[Peng] Y. Peng，通过超杨扬子代数构造有限 W-超代数。数学进展 377 (2021), No. 107459。[Ta] V. O. Tarasov， R-矩阵的不可约单值矩阵、 XXZ-模型与格点局部量子哈密顿量。Theor. Math. Phys. 63 (1985) 440–454。[WZ] W. Wang 和 L. Zhao，素特征下李超代数的表示 I。Proc. London Math. Soc. 99 (2009), 145–167。[ZS] Y. Zeng 和 B. Shu，基本李超代数的有限 W-超代数。代数杂志 438 (2015), 188–234。[Z1] R. B. Zhang，超杨扬子代数的表示。J. Math. Phys 36 (1995), 3854–3865。[Z2] R. B. Zhang， $gl_{m|n}$ 超杨扬子代数及其有限维表示。Lett.Math. Phys. 37 (1996), 419–434。(H. Chang) 数学与统计学院、湖北省数学科学重点实验室，华中师范大学，武汉 430079，中国 Email address: chang@ccnu.edu.cn (R. Hou) 数学与统计学院，华中师范大学，武汉 430079，中国 Email address: houry1998@163.com (H. Wu) 数学与统计学院，华中师范大学，武汉 430079，中国 Email address: 1293108736@qq.com