arXiv:2603.03786v1 [math.DS] 4 Mar 2026

全纯对应的变分原理

Subith Gopinathan*和 Shrihari Sridharan†

2026年3月4日

摘要

本文研究黎曼球面上的一种动力系统，该系统通过集值映射，即全纯对应，演化。与研究定义在紧致度量空间上的连续映射所产生的动力学类似，映射的测度论熵及其在定义函数压强方面的用途已得到充分研究。我们定义全纯对应的测度论熵，并据此定义连续函数的压强。这些思想自然引出全纯对应动力学背景下变分原理的表述。

关键词： 全纯对应，测度论熵，变分原理，Ruelle 算子。

MSC 学科分类37D35,37A35, 37F05.

*蒂鲁瓦南塔普兰印度科学教育与研究所（IISER-TVM），Maruthamala 邮局，Vithura，喀拉拉邦，印度。邮政编码 695 551。电子邮件：subith21@iisertvm.ac.in

†蒂鲁瓦南塔普兰印度科学教育与研究所（IISER-TVM），Maruthamala 邮局，Vithura，喀拉拉邦，印度。邮政编码 695 551。电子邮件：shrihari@iisertvm.ac.in（通讯作者）。第二位署名作者感谢 NBHM 提供的研究资助，资助编号为 02011/35/2025/NBHM(R.P)/R&D II/9832

1 引言

映射的变分原理，见 [9], 表述如下：对于定义在紧致度量空间 T 上的连续映射 X，对于巴拿赫空间 f 中定义在 X上的连续实值函数 T，其压力泛函为

$$\mathrm{Pr}_T(f) = \sup_{m \in \mathscr{M}_T(X)} \left\{ h_T(m) + \int_X f \mathrm{d}m \right\}, \tag{1.1}$$

其中，$\mathscr{M}_T(X)$ 是支撑在 X 上的所有 T不变概率测度的空间，而 $h_T(m)$是与映射 T对应的测度 m 的测度论熵。

本文关注压力泛函的表达式，它类似于方程（1.1）中给出的表达式，适用于 f 黎曼球面上连续实值$\hat{}$函数所构成的巴拿赫空间（记作$\mathbb{C}$），不过这里考虑的是全纯对应，例如 Γ，现定义如下。

$\hat{}$ $\hat{}$**定义 1.1** *A holomorphic correspondence $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ is given by a formal linear combination of the form $\Gamma = \sum_{t=1} \Gamma_t$, where Γ_t's are irreducible complex-analytic subvarieties, repeated according to their multiplicities that satisfy the following conditions: Suppose π_i denotes the projection onto the i-th coordinate for $i = 1, 2,$ then*

1. *$\pi_i|_{\Gamma_t}$ is surjective for each $i = 1, 2$ and for every $1 \leqslant t \leqslant M$ and*
2. *the sets $\pi_1\left(\pi_2^{-1}(\{x_0\}) \cap \Gamma_t\right)$ and $\pi_2\left(\pi_1^{-1}(\{x_0\}) \cap \Gamma_t\right)$ are of finite cardinality for any $\sim$generic point $x_0 \in \mathsf{C}$ and for every $1 \leqslant t \leqslant M$.*

在本文中，我们使用“集合”一词——正如定义 $\hat{}$1.1 的第二个条件中所述——来表示 C 中按此定义得到的点的集合，并计入重数。假设对于某个 $x_0 \in \hat{}\mathsf{C}$，我们记 $d_{\mathrm{top}}(x_0) = \#\left(\pi_1\left(\pi_2^{-1}(\{x_0\}) \cap \Gamma_t\right)\right)$。我们知道，存在一个非空的扎里斯基开集，记作 $U \subseteq \mathsf{C}$，使得对于 $1 \leqslant t \leqslant M$，定义 $U^t := \pi_2^{-1}(U) \cap \Gamma_t$，映射 $\pi_2|_{U_t}$提供一个 δ_t 重的全纯覆盖，其中 $\delta_t = \#\left\{y \in \hat{}\mathsf{C} : \ (y, x_0) \in \Gamma_t\right\}$对于任意 $x_0 \in U$。因此，对于任意 $x_0 \in U$，有 $d_{\mathrm{top}} = \sum_{t=1}^{M} \delta_t$。类似地，对于全纯对应 Γ，通过考虑集合 $\pi_2\left(\pi_1^{-1}(\{x_0\}) \cap \Gamma_t\right)$的基数来定义 d_{fwd}，定义量 $\lambda_t = \#\left\{y \in \hat{}\mathsf{C} : \ (x_0, y) \in \Gamma_t\right\}$ 对于 $x_0 \in \hat{}\mathsf{C}_M$，并得到 $d_{\mathrm{fwd}} = \sum \lambda_t$。我们提醒读者注意，当对所有点 $x_0 \in \mathsf{C}$ 都有 $d_{\mathrm{top}} = d_{\mathrm{fwd}} = 1_{t=1}\hat{}$ 时，情形 Γ 化为某个 M¨obius 映射的图，而 $d_{\mathrm{top}} \geqslant 2$ 和 $d_{\mathrm{fwd}} = 1$ 则是对次数为 d_{top} 的有理映射的研究。

对于任意的 $f \in \mathcal{C}\left(\hat{}\mathsf{C}, \mathsf{R}\right)$，我们旨在定义 f关于全纯对应 Γ 的压力泛函为

$$\mathrm{Pr}_\Gamma(f) = \sup_{m \in S_\Gamma \subseteq \mathscr{M}(\hat{\mathbb{C}})} \left\{ \gamma(m) + \int_{\hat{\mathbb{C}}} f \mathrm{d}m \right\},$$

对于一个适当的测度集合 S_{Γ}，该集合取决于对应关系，且是黎曼球面上所有概率测度所构成空间的子集，记为 $\mathscr{M}\left(\hat{\mathrm{C}}\right)$。此外，还需要确定函数 $\gamma: \mathscr{M}\left(\hat{\mathrm{C}}\right) \longrightarrow \mathrm{R}$，使其在对应关系中发挥类似于映射情形下测度论熵的作用。

近年来，全纯对应的热力学性质研究受到了广泛关注。在 [7], 中，作者引入了与集值映射相关的不变测度的度量熵概念，记作 $F: \ X \longrightarrow 2^X$，其中$2^X$ 表示 X的所有子集构成的集合。此外，他们证明，这些度量熵的上确界不超过 F的拓扑熵，并由此证明了他们所称的半变分原理。在 [4], 中，作者通过考察定义在对应图像上的连续函数空间（这些函数满足一定的正则性条件），并采用他们所称的转移概率核，证明了一类特定对应的变分原理。在 [3], 中，作者借助分离集的思想引入了全纯对应的熵概念，并对全纯对应熵的上界给出了较为合理的估计。在 [2], 中，作者利用这一上界，找到了由有理半群生成且能够达到该上界的一类全纯对应。在 [6], 中，作者利用生成集定义了全纯对应的熵。此外，作者还引入了与经全纯对应演化的动力系统相关的连续函数压强。他们还利用支撑在轨道空间上的测度建立了一个变分原理，并阐释了适当定义的 Ruelle 算子的谱性质之间的一些收敛结果。在这些思想的基础上，我们旨在确定一类适当的、支撑在黎曼球面上的测度，以此帮助我们另辟蹊径来定义压强函数。

本文结构如下：第2节介绍本文的核心对象，即定义在黎曼球面上的全纯对应，并固定一些记号，说明我们所关注的动力学演化。第3节介绍测度的推前，并在第4节有效运用这一工具，定义全纯对应相对于一对经过仔细选取的有序测度对的中间熵，并得出一项结果，展示全纯对应相对于有序测度对的中间熵与某个适当定义的移位映射相对于某个不变测度的熵之间的关系。第5节定义全纯对应的测度论熵，并在当前背景下陈述和证明变分原理。最后，第6节将全纯对应的动力学限制在其 Dinh-Sibony测度（在该节中定义）的支集上，定义与此限制动力学相关的 Ruelle 算子，并证明存在一个满足某些收敛性质的唯一测度。

2 一些记号

我们首先定义全纯对应 Γ的任意长度的所有允许的迭代路径所构成的集合，如定义 1.1所述。给定 $n \in \mathbb{Z}_+$，我们

将长度为 n 的所有允许的迭代正向路径所构成的集合记为

$$\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) = \left\{ \left(x_0, x_{j_1}^{(1)}, \cdots, x_{j_n}^{(n)};\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n\right) : \left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)}, x_{j_r}^{(r)}\right) \in \Gamma_{\alpha_r} \text{ where } x_{j_0}^{(0)} = x_0 \in \widehat{\mathbb{C}}, \right.$$
$$\left. \alpha_r \in \{1, 2, \cdots, M\} \text{ and } 1 \leqslant j_r \leqslant \lambda_{\alpha_r}\left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)}\right) \text{ for } 1 \leqslant r \leqslant n \right\},$$

其中 $\lambda_{\alpha_r}\left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)}\right) = \#\left\{\left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)},\ x_{j_r}^{(r)}\right) \in \Gamma_{\alpha_r}\right\}$。我们用 $\mathfrak{X}_n^+(x_0$ 表示 $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ 中的任意一点；$\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}$ 其中 $x_0 \in \mathbb{C}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 以及 $\boldsymbol{j} = (j_1,\ \cdots,\ j_n)$。对于任意 $0 \leqslant r \leqslant n$，我们定义投影映射 $\Pi_{(r,\ n)}^+$：$\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right) \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$，以及 $\mathrm{Proj}_{(r,\ n)}^+$：$\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right) \longrightarrow \{1,\ 2,\ \cdots,\ M\}$，其中 $0 < r \leqslant n$ 由下式给出

$$\Pi_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) = x_{j_r}^{(r)} \text{ and } \mathrm{Proj}_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) = \alpha_r.$$

在乘积空间 $\hat{\mathbb{C}}^{n+1} \times \{1$上赋予乘积拓扑，$2,\ \cdots,\ M\}^n$，可以注意到子空间 $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ 是紧致的，因为 $\hat{\mathbb{C}}$ 是紧致的，并且与定义在 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ M\}^n$ 上的度量相容的拓扑，应当继承自定义在 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ M\}$上的离散克罗内克δ距离。我们现在定义 $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$中的分离子集与生成子集的概念，正如可以从 [3, 6]得到的那样。

定义2.1 *Let Γ be a holomorphic correspondence defined on $\mathbb{C}$ as written in Definition 1.1 and $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ be the collection of all permissible forward paths of iteration of length n of Γ.*

1. *Given $\epsilon > 0$, we say that any two points $\mathfrak{X}_n^+(x_0;\ \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}$ and $\mathfrak{X}_n^+(y_0;\ \boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}$ in $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ are $(n,\ \epsilon)$-separated if*

$$\text{either} \quad d_{\hat{\mathbb{C}}}\left(\Pi_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right),\ \Pi_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(y_0;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right)\right) > \epsilon \quad \text{for some } 0 \leqslant r \leqslant n$$
$$\text{or} \quad \mathrm{Proj}_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) \neq \mathrm{Proj}_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(y_0;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right) \quad \text{for some } 0 < r \leqslant n.$$

A subset $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ is said to be (n, ϵ)-separated if any pair of distinct points in $\mathcal{F}$ are (n, ϵ)-separated.

2. *Given $\epsilon > 0$, $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ is said to be a $(n,\ \epsilon)$-spanning set of $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ if for every $\mathfrak{X}_n^+(x_0;\ \boldsymbol{\alpha}) \in \mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ there exists a point $y_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ such that $\mathfrak{X}_n^+(y_0;\ \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G}$ satisfying*

$$d_{\hat{\mathbb{C}}}\left(\Pi_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})\right),\ \Pi_{(r,n)}^+\left(\mathfrak{X}_n^+(y_0;\boldsymbol{\alpha})\right)\right) < \epsilon \quad \text{for all } 0 \leqslant r \leqslant n.$$

利用 $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ 中分离集和生成集的概念，我们现在定义实值连续函数（记作 $f \in \mathcal{C}\left(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R}\right)$）的拓扑压，如[6]中所述。

定义 2。2 *[6] Let* Γ *be a holomorphic correspondence defined on* $\mathbb{C}$ *as written in Definition 1.1 and* $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ *be the collection of all permissible n-orbits of* Γ*. Suppose* $f \in \mathcal{C}\left(\hat{\mathbb{C}},\ \mathbb{R}\right)$*. Then, the topological pressure of the function* f *with respect to the holomorphiccorrespondence* Γ*, denoted by* $\Pr(\Gamma,\ f)$ *is given by*

$$\begin{aligned}
&\Pr(\Gamma, f)\\
&= \lim_{\epsilon \to 0}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sup_{\substack{\mathcal{F}\subseteq \mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\\ \text{is an } (n,\epsilon)\\ \text{separated family}}}\left\{\sum_{\mathfrak{x}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\in\mathcal{F}}\left(\prod_{p=0}^{n-1} e^{f\left(\Pi_{(p,\,n)}^+\left(\mathfrak{x}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right)\right)}\right)\right\}\right)\right)\\
&= \lim_{\epsilon \to 0}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\inf_{\substack{\mathcal{G}\subseteq \mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\\ \text{is an } (n,\epsilon)\\ \text{spanning set}}}\left\{\sum_{\mathfrak{x}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\in\mathcal{G}}\left(\prod_{p=0}^{n-1} e^{f\left(\Pi_{(p,\,n)}^+\left(\mathfrak{x}_n^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right)\right)}\right)\right\}\right)\right)
\end{aligned}$$

and the topological entropy of the holomorphic correspondence is defined as

$$h_{\text{top}}(\Gamma) \quad = \quad \Pr(\Gamma, 0).$$

正如从拓扑压的定义中可以看出，为了处理对应关系 Γ 的所有无限长度的允许迭代路径构成的集合，我们有兴趣令$n \to \infty$。我们将此集合记作下文所写的 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$。

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right) \quad = \quad \Bigg\{ &\left(x_0, x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \cdots;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots\right) \ :\ \left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)}, x_{j_r}^{(r)}\right) \in \Gamma_{\alpha_r} \text{ where } x_{j_0}^{(0)} = x_0 \in \hat{\mathbb{C}},\\
&\alpha_r \in \{1, 2, \cdots, M\} \text{ and } 1 \leqslant j_r \leqslant \lambda_{\alpha_r}\left(x_{j_{r-1}}^{(r-1)}\right) \text{ for } r \in \mathbb{Z}_+\Bigg\}.
\end{aligned}$$

我们将 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ 中的一个点记作 $\mathfrak{x}^+(x_0;\ \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}$其中 $x_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots)$ 以及 $\boldsymbol{j} = (j_1,\ j_2,\ \cdots)$。此外，我们定义 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ 上的度量 Δ 如下：

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\mathfrak{x}^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}, \mathfrak{x}^+(y_0;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right)\\
&= \max\left\{\sup_{r\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}}\left\{\frac{1}{2^r} d_{\hat{\mathbb{C}}}\left(x_{j_r}^{(r)}, y_{k_r}^{(r)}\right)\right\},\ \sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{1}{2^r}\left(1-\delta_{(\alpha_r,\beta_r)}\right)\right\}\right\}, \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

其中 $d_{\hat{\mathbb{C}}}$ 表示黎曼球面上的球面度量，$\delta_{(p,q)}$ 表示离散的克罗内克δ函数。于是可以观察到，$\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ 是一个紧致度量空间。与我们在 $\mathscr{P}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$上定义的投影映射$\Pi_{(r,\,n)}^+$ 和 $\text{Proj}_{(r,\,n)}^+$ 类似，我们定义

投影映射 $\Pi_r:\ \mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\longrightarrow\hat{\mathsf{C}}$，对任意 $r\in\mathsf{Z}_{+}\cup\{0\}$成立；以及 $\mathrm{Proj}_r:\ \mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\longrightarrow\{1,2,\cdots,M\}$，对任意 $r\in\mathsf{Z}_{+}$ 成立，定义如下

$$\Pi_r\left(\mathfrak{X}^{+}\left(x_0;\boldsymbol{\alpha}\right)_{\boldsymbol{j}}\right)\ =\ x_{j_r}^{(r)}\ \text{ and }\ \mathrm{Proj}_r\left(\mathfrak{X}^{+}\left(x_0;\boldsymbol{\alpha}\right)_{\boldsymbol{j}}\right)\ =\ \alpha_r.$$

现在，我们定义一个与全纯对应 Γ 相关的移位映射 σ^{Γ}，它作用于无限长度的允许迭代路径空间 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$，定义如下：

$$\sigma^{\Gamma}\left(\mathfrak{X}^{+}\left(x_0;\boldsymbol{\alpha}\right)_{\boldsymbol{j}}\right)\ =\ \left(x_{j_1}^{(1)},x_{j_2}^{(2)},\cdots;\ \alpha_2,\cdots\right)\ =\ \mathfrak{X}^{+}\left(x_{j_1}^{(1)};\sigma\boldsymbol{\alpha}\right)_{\sigma\boldsymbol{j}},\tag{2.2}$$

这里，将 σ 作为前缀添加到无限字母词 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{j}$，是指根据具体情况，删除 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{j}$的首字母后得到的无限字母词。在由度量 Δ 在空间 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$上生成的拓扑中，可以注意到映射 σ^{Γ} 是连续的。

类似于长度为 $n\in\mathsf{Z}_{+}$的正向迭代允许路径集合，我们也定义长度为 $n\in\mathsf{Z}_{+}$的反向迭代允许路径。为此，考虑

$$\mathscr{Q}_n^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)\ =\ \left\{\left(y_{k_n}^{(-n)},\cdots,y_{k_1}^{(-1)},y_0;\ \beta_{n-1},\cdots,\beta_0\right)\ :\ \left(y_{k_r}^{(-r)},y_{k_{r-1}}^{(-(r-1))}\right)\in\Gamma_{\beta_{r-1}}\ \text{where}\right.$$
$$y_{k_0}^{(0)}=y_0\in\widehat{\mathbb{C}},\ \beta_{r-1}\in\{1,2,\cdots,M\}\ \text{ and }\ 1\leqslant k_r\leqslant\delta_{\beta_{r-1}}\left(y_{k_{r-1}}^{(-(r-1))}\right)$$
$$\left.\text{for }0\leqslant r-1\leqslant n-1\right\},$$

其中 $\delta_{\beta_{r-1}}\left(y_{k_{r-1}}^{(-(r-1))}\right)=\#\left\{\left(y_{k_r}^{(-r)},\ y_{k_{r-1}}^{(-(r-1))}\right)\in\Gamma_{\beta_{r-1}}\right\}$。我们将 $\mathscr{Q}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 中的任意点记为$\mathfrak{X}_n^{-}\left(y_0;\ \boldsymbol{\beta}\right)_{\boldsymbol{k}}$其中 $y_0\in\mathsf{C}$ $\boldsymbol{\beta}=(\beta_{n-1},\ \cdots,\ \beta_0)$ 且 $\boldsymbol{k}=(k_n,\ \cdots,\ k_1)$。此外，对于任意 $0\leqslant r\leqslant n$，我们定义投影映射 $\Pi_{(r,\ n)}^{-}:\ \mathscr{Q}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\longrightarrow\hat{\mathsf{C}}$，以及 $\mathrm{Proj}_{(r,\ n)}^{-}:\ \mathscr{Q}_n^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\longrightarrow\{1,\ \ 2,\ \ \cdots,\ \ M\}$，其中 $0\leqslant r<n$ 由下式给出：

$$\Pi_{(r,n)}^{-}\left(\mathfrak{X}_n^{-}\left(y_0;\boldsymbol{\beta}\right)_{\boldsymbol{k}}\right)\ =\ y_{k_r}^{(-r)}\ \text{ and }\ \mathrm{Proj}_{(r,n)}^{-}\left(\mathfrak{X}_n^{-}\left(y_0;\boldsymbol{\beta}\right)_{\boldsymbol{k}}\right)\ =\ \beta_r.$$

关于本节定义的允许的迭代路径集合、其中定义的度量、移位映射和投影映射，更多详情请参阅[2, 6]。

3 测度的推前

设 $\mathscr{M}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$ 表示所有支撑在$\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$上的概率测度的集合。由于 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 是一个紧致度量空间，我们可以在 $\mathscr{M}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$上赋予一个与弱*拓扑相容的度量，其定义如下：

$$d\left(\mu_1,\mu_2\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}\left|\int f_n\mathrm{d}\mu_1-\int f_n\mathrm{d}\mu_2\right|,$$

其中 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是定义在 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 上的连续实值函数稠密序列。

设 $\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)\subseteq\mathscr{M}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)$ 表示所有 σ^{Γ}-不变概率测度的集合。由于 σ^{Γ} 是定义在紧致度量空间 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$上的连续映射， [8] 的一个初等结果表明 $\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)$ 非空、凸且紧致。

定义 3。1 *For any measure* $\mu\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$, *we define its* 推前测度*supported on* C *denoted by* $(\Pi_r)_*\,\mu$, *under the projection* Π_r *for any* $r\in\mathsf{Z}_+\cup\{0\}$ *as,*

$$\left((\Pi_r)_*\,\mu\right)(B) \;=\; \mu\left(\Pi_r^{-1}B\right), \quad \text{for any Borel set } B\subset\widehat{\mathbb{C}}.$$

注意，这个定义意味着，对于任意的 $r\in\mathsf{Z}_+\cup\{0\}$ 以及任意选取的$f\in\mathcal{C}\left(\hat{\mathsf{C}},\ \mathsf{R}\right)$,

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\mathbb{C}}} f\mathrm{d}\left(\Pi_r\right)_*\mu \;&=\; \int_{\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)}\left(f\circ\Pi_r\right)\mathrm{d}\mu \;=\; \int_{\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)}\left(f\circ\Pi_r\circ\sigma^{\Gamma}\right)\mathrm{d}\mu\\ &=\; \int_{\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)}\left(f\circ\Pi_{r+1}\right)\mathrm{d}\mu \;=\; \int_{\widehat{\mathbb{C}}} f\mathrm{d}\left(\Pi_{r+1}\right)_*\mu.\end{aligned}$$

因此，$(\Pi_r)_*\,\mu=(\Pi_{r+1})_*\,\mu$在 C 上几乎处处成立，所以只需考虑测度 $(\Pi_0)_*\,\mu$。然而请注意，即使 $\mu_1\neq\mu_2$ 在 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 上成立， $(\Pi_0)_*\,\mu_1\equiv(\Pi_0)_*\,\mu_2$ 在 C 上仍有可能不成立。令 $\mathscr{S}^{\Gamma}\subseteq\mathscr{M}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 为满足以下条件的所有测度的集合

$$\mathscr{S}^{\Gamma} \;=\; \left\{\nu\in\mathscr{M}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right):\nu=(\Pi_0)_*\,\mu \text{ for some } \mu\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)\right)\right\}.$$

引理 3.2 $\mathscr{S}^{\Gamma}$ *is a weak*-compact, convex subset of* $\mathscr{M}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$.

证明： 为了证明 $\mathscr{S}^{\Gamma}$ 是弱*紧致的，只需考虑一个测度序列，记为 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{Z}+}$，其中的测度属于 $\mathscr{S}^{\Gamma}$，且该序列收敛到 $\nu_0\in\mathscr{M}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$，并证明 $\nu_0\in\mathscr{S}^{\Gamma}$。对于每个元素 ν_n，我们都可以选取某个测度 $\mu_n\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$，使得 $\nu_n=(\Pi_0)_*\,\mu_n$。由于 $\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$ 是一个紧空间，我们知道测度序列 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}+}$ 有一个子列，记为 $\{\mu_{n_l}\}_{l\in\mathbb{Z}+}$，它收敛到某个测度，记为 $\mu_0\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$。因此，测度 $(\Pi_0)_*\,\mu_0\in\mathscr{S}^{\Gamma}$是测度 $\nu_0\in\mathscr{M}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 的理想候选。现在我们证明 $\nu_0\equiv(\Pi_0)_*\,\mu_0$。

设 $f\in\mathcal{C}\left(\hat{\mathsf{C}},\ \mathsf{R}\right)$ 是某个任意函数。由于

$$\begin{aligned}\left|\int_{\widehat{\mathbb{C}}} f\mathrm{d}\left(\Pi_0\right)_*\mu_0-\int_{\widehat{\mathbb{C}}} f\mathrm{d}\nu_0\right| \;\leqslant\; &\left|\int_{\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)}\left(f\circ\Pi_0\right)\mathrm{d}\mu_0-\int_{\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)}\left(f\circ\Pi_0\right)\mathrm{d}\mu_{n_l}\right|\\ &+\left|\int_{\widehat{\mathbb{C}}} f\mathrm{d}\left(\Pi_0\right)_*\mu_{n_l}-\int_{\widehat{\mathbb{C}}} f\mathrm{d}\nu_0\right|,\end{aligned}$$

可以看出，上述不等式右边的每一项都可以任意小，从而推出 $(\Pi_0)_* \mu_0 = \nu_0$。此外，空间 $\mathscr{M}_{\sigma^\Gamma}\left(\mathscr{P}^\Gamma\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$ 的凸性保证 $\mathscr{S}^\Gamma$ 是 $\mathscr{M}\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 的一个凸子集。•

4 一个中间熵

设 $\nu \in \mathscr{S}^\Gamma$。假设 $\mathcal{Q}$ 是 $\hat{\mathsf{C}}$ 上一个有限的 ν-可测分割，记为 $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_s\}$。那么，与该分割 $\mathcal{Q}$ 对应的、记作 $\mathcal{Q}^\Gamma$ 且定义如下的集合族

$$\mathcal{Q}^\Gamma = \left\{\Pi_0^{-1}(Q_i) \cap \mathrm{Proj}_1^{-1}(\{t\}) : 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant t \leqslant M\right\}$$

对于所有满足 $\nu = (\Pi_0)_* \mu_i$ 的测度 $\mu_i \in \mathscr{M}_{\sigma^\Gamma}\left(\mathscr{P}^\Gamma\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$，构成 $\mathscr{P}^\Gamma\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 的一个 μ_i-可测分割。现在，我们定义分割 $\mathcal{Q}$ 关于有序测度对 (ν, μ) 的信息函数，其中 $\nu \in \mathscr{S}^\Gamma$ 和 $\mu \in \mathscr{M}_{\sigma^\Gamma}\left(\mathscr{P}^\Gamma\left(\hat{\mathsf{C}}\right)\right)$ 满足 $\nu = (\Pi_0)_* \mu$，定义为 $H_{(\nu,\ \mu)}(\mathcal{Q}) = H_\mu\left(\mathcal{Q}^\Gamma\right)$ 其中，对于 $\mathscr{P}^\Gamma\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 的任意可测子集族，例如 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$，我们定义

$$H_\mu(\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}) = -\sum_{i=1}^{s} \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

此外，若 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_{s'}\}$ 是 $\mathscr{P}^\Gamma\left(\hat{\mathsf{C}}\right)$ 的另一组子集，我们定义

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_{i'} : A_i \in \mathcal{A} \text{ and } B_{i'} \in \mathcal{B} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant i' \leqslant s'\}.$$

那么，关于有序测度对 (ν, μ)，对应 Γ 的划分 $\mathcal{Q}$ 的信息函数现在定义为

$$H_{(\nu,\mu)}(\mathcal{Q}; \Gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{p=0}^{n-1} \left\{\Pi_p^{-1}(Q_i) \cap \mathrm{Proj}_{p+1}^{-1}(\{t\}) : 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant t \leqslant M\right\}\right).$$

最后，我们对 $\hat{\mathsf{C}}$ 的所有可能的 ν-可测划分 $\mathcal{Q}$ 取上确界，并定义对应 Γ 关于有序测度对 (ν, μ) 的中间熵，其定义为

$$h_{(\nu,\mu)}(\Gamma) = \sup_{\mathcal{Q}} H_{(\nu,\mu)}(\mathcal{Q}; \Gamma).$$

根据这些定义，我们现在陈述并证明一个定理，该定理将对应 Γ 关于有序测度对 (ν, μ) 的中间熵与移位映射 σ^Γ 关于测度 μ 的测度论熵联系起来。

定理 4。1 *Let Γ be a holomorphic correspondence defined on $\mathbb{C}$ as written in Definition1.1, whose permissible paths of iteration is given by $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$. Let σ^{Γ} be the left shiftmap defined on $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$. Consider the ordered pair of measures (ν,μ) for $\nu\in\mathscr{S}^{\Gamma}$ and$\mu\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)$ satisfying $\nu=(\Pi_0)_*\,\mu$. Then,*

$$h_{(\nu,\mu)}(\Gamma) \;=\; h_{\mu}\left(\sigma^{\Gamma}\right).$$

证明： 由于 σ^{Γ} 是定义在紧致度量空间 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$上的连续映射， σ^{Γ} 关于 μ 的测度论熵为

$$\sup_{\mathcal{P}}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}(\mathcal{P})\right\}\right)\right\},$$

其中，上确界取遍所有有限的 μ-可测分割 $\mathcal{P}$，其中 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$。进一步地，对于任意分割 $\mathcal{P}=\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_s\}$，有

$$\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}(\mathcal{P}) \;=\; \left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}(P_1),\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}(P_2),\cdots,\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}(P_s)\right\}.$$

如前所述，我们知道，如果 $\mathcal{Q}=\{Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_s\}$ 是$\hat{\mathbb{C}}$上的有限 ν-可测分割，那么存在 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$上的有限 μ-可测分割，与 $\mathcal{Q}$相对应，记为 $\mathcal{Q}^{\Gamma}$。于是容易验证

$$\begin{aligned} & H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\Pi_p^{-1}(Q_i)\cap\mathrm{Proj}_{p+1}^{-1}(\{t\})\ :\ 1\leqslant i\leqslant s,\ 1\leqslant t\leqslant M\right\}\right) \\ = \;& H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}\left(\mathcal{Q}^{\Gamma}\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

现在我们在 [8], 中陈述一个引理，但不加证明，不过使用的是我们迄今为止在本文中建立的语言。

引理 4。2 *Let $\sigma^{\Gamma}:\ \mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\longrightarrow\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ be the continuous left shift map as defined inEquation (2.2). Let $\mu\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)$.*

(a) Suppose $\mathcal{P}$ is a μ-measurable partition of $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$. Then,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}(\mathcal{P})\right\}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}\left(\bigvee_{i=0}^{p'-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-i}(\mathcal{P})\right\}\right)\right\}\right).$$

*(b) Suppose $\{\mathcal{P}_{s'}\}_{s'\in\mathbb{Z}_+}$ is a sequence of μ-measurable partitions of $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$ satisfying*直径 $(\mathcal{P}_{s'})=$最大值 $\{$直径$(P):\ P\in\mathcal{P}_{s'}\}\to 0$, *as $s'\to\infty$. Then, the measure-theoretic*

entropy of the shift map σ^{Γ} pertaining to the holomorphic correspondence Γ with respect to the measure μ is given by

$$h_{\mu}\left(\sigma^{\Gamma}\right) = \lim_{s'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}\left(\mathcal{P}_{s'}\right)\right\}\right).$$

现在我们继续证明定理 4.1。令 $\{\mathcal{P}_{s'}\}_{s'\in\mathbb{Z}_+}$ 表示 ν有限可测分割的一个集合，这些分割作用于 $\hat{\mathbb{C}}$，其中 $\mathcal{P}_{s'}=\left\{P_{(s',\ 1)},\ P_{(s',\ 2)},\ \cdots,\ P_{(s',\ s(s'))}\right\}$ 直径为 $\left(\mathcal{P}_{s'}\right)\leqslant p_{s'}$且 $p_{s'}\to 0$ 为 $s'\to\infty$。于是，对于 $\mathcal{P}_{s'}$，存在一个正整数 $q_{s'}$，使得

$$\mathcal{P}^{\Gamma}_{(s',q_{s'})} = \bigvee_{r=0}^{q_{s'}}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-r}\left(\Pi_0^{-1}\left(P_{(s',i)}\right)\cap\mathrm{Proj}_1^{-1}\left(\{t\}\right)\right)\ :\ 1\leqslant i\leqslant s(s'),1\leqslant t\leqslant M\right\}$$

是 μ的可测分割，作用于 $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$，对应于 $\mathcal{P}_{s'}$，且满足条件：直径 $\left(\mathcal{P}^{\Gamma}_{(s',\ q_{s'})}\right)\leqslant p_{s'}$。由于 $s'\to\infty$，由引理（4.2）可得

$$\begin{aligned}
h_{\mu}\left(\sigma^{\Gamma}\right) &= \lim_{s'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}\left(\mathcal{P}^{\Gamma}_{s'}\right)\right\}\right)\\
&= \lim_{s'\to\infty}\lim_{q_{s'}\to\infty}\frac{1}{q_{s'}}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{q_{s'}-1}\left\{\left(\sigma^{\Gamma}\right)^{-p}\left(\mathcal{P}^{\Gamma}_{(s',q_{s'})}\right)\right\}\right)\\
&= \lim_{s'\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu}\left(\bigvee_{p=0}^{n-1}\left\{\Pi_p^{-1}\left(P_{(s',i)}\right)\cap\mathrm{Proj}_{p+1}^{-1}\left(\{t\}\right):1\leqslant i\leqslant s(s'),\ 1\leqslant t\leqslant M\right\}\right)\\
&= \lim_{s'\to\infty}H_{(\nu,\mu)}\left(\mathcal{P}_{s'}\right)\\
&\leqslant h_{(\nu,\mu)}\left(\Gamma\right).
\end{aligned}$$

另一侧的不等式相当简单，因此证明完毕。 •

5 测度论熵

我们首先给出在 $\hat{\mathbb{C}}$上定义的全纯 Γ 对应$\mathbb{C}$的测度论熵的定义，该定义如定义1.1所述，并且是相对于测度$\nu\in\mathscr{S}^{\Gamma}$而言的。

定义 5。1 *Let Γ be a holomorphic correspondence defined on $\hat{\mathbb{C}}$ as written in Defini-tion 1.1, whose permissible paths of iteration is given by $\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)$. Let $\nu\in\mathscr{S}^{\Gamma}$. Then, the*测度论熵 *of the holomorphic correspondence Γ is defined as*

$$h_{\nu}\left(\Gamma\right) = \sup\left\{h_{(\nu,\mu_n)}\left(\Gamma\right)\ :\ \mu_n\in\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)\ \textit{satisfying}\ \nu=\left(\Pi_0\right)_*\mu_n\right\}.$$

在定义了全纯对应 Γ的测度论熵之后，我们现在将变分原理写如下。

定理 5.2（全纯对应的变分原理） *Let Γ bea holomorphic correspondence defined on $\hat{\mathbb{C}}$ as written in Definition 1.1 and $f \in \mathcal{C}\left(\hat{\mathbb{C}},\mathbb{R}\right)$.Then, the pressure of the function f can alternatively be characterized as*

$$\Pr(\Gamma, f) \quad = \quad \sup_{\nu \in \mathscr{S}^{\Gamma}} \left\{ h_{\nu}\left(\Gamma\right) + \int f \mathrm{d}\nu \right\}.$$

证明： 由 [6] 中的定理 5.3，我们知道

$$\Pr(\Gamma, f) \quad = \quad \Pr\left(\sigma^{\Gamma}, f \circ \Pi_0\right) \quad = \quad \sup_{\mu \in \mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)} \left\{ h_{\mu}\left(\sigma^{\Gamma}\right) + \int f \circ \Pi_0 \mathrm{d}\mu \right\}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \Pr(\Gamma, f) \quad &= \quad \sup_{\mu \in \mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}^{\Gamma}\left(\hat{\mathbb{C}}\right)\right)} \left\{ h_{\left(\left(\Pi_0\right)_{*}\mu,\, \mu\right)}(\Gamma) + \int f \mathrm{d}\left(\Pi_0\right)_{*}\mu \right\} \\ &= \quad \sup_{\nu \in \mathscr{S}^{\Gamma}} \quad \sup_{\mu\,:\,\left(\Pi_0\right)_{*}\mu = \nu} \left\{ h_{(\nu,\,\mu)}(\Gamma) + \int f \mathrm{d}\nu \right\} \\ &= \quad \sup_{\nu \in \mathscr{S}^{\Gamma}} \left\{ h_{\nu}(\Gamma) + \int f \mathrm{d}\nu \right\}. \end{aligned}$$

•

推论 5.3 *The topological entropy of a holomorphic correspondence Γ, as written in Definition 1.1, can be alternatively characterised as the supremum of all the measure-theoretic entropies of Γ, where the supremum is taken over the set $\mathscr{S}^{\Gamma}$,* 即，

$$h_{\mathrm{top}}\left(\Gamma\right) \quad = \quad \sup\left\{ h_{\nu}\left(\Gamma\right) \;:\; \nu \in \mathscr{S}^{\Gamma} \right\}.$$

定理 5.4 *Let Γ be the holomorphic correspondence on $\hat{\mathbb{C}}$ as written in Definition 1.1 with $h_{\mathrm{top}}(\Gamma) < \infty$. Suppose $\nu \in \mathscr{S}^{\Gamma}$. Then,* $h_{\nu}(\Gamma) = \text{下确界}_{f \in \mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}},\ \mathbb{R})} \left\{ \Pr(\Gamma,\ f) - \int f \mathrm{d}\nu \right\}$ 当且仅当 *the map $\nu \longmapsto h_{\nu}(\Gamma)$ is upper semicontinuous at ν.*

可以注意到，上文给出的定理 5.4 的陈述及下文给出的证明，与由定义在某个紧空间上的连续映射所确定的经典动力系统情形完全遵循相同的思路。

证明： 假设 $h_{\nu}(\Gamma) = \inf_{f \in \mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}},\ \mathbb{R})} \left\{ \Pr(\Gamma,\ f) - \int f \mathrm{d}\nu \right\}$。给定 $\epsilon > 0$，取 $g \in \mathcal{C}\left(\hat{\mathbb{C}},\ \mathbb{R}\right)$，使得 $\Pr(\Gamma,\ g) - \int g \mathrm{d}\nu < h_{\nu}(\Gamma) + \frac{\epsilon}{2}$。考虑 ν 在 $\mathscr{S}^{\Gamma}$ 中、与函数 g 相对应的邻域，该函数由

$$V_g\left(\nu,\ \frac{\epsilon}{2}\right) \quad = \quad \left\{ \nu' \in \mathscr{S}^{\Gamma} \;:\; \left| \int g \mathrm{d}\nu - \int g \mathrm{d}\nu' \right| \;<\; \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

那么，根据定理5.2中所述的全纯对应的变分原理，我们有

$$h_{\nu'}(\Gamma) \leqslant \Pr(\Gamma, g) - \int g \, \mathrm{d}\nu' < \Pr(\Gamma, g) - \int g \, \mathrm{d}\nu + \frac{\epsilon}{2} < h_{\nu}(\Gamma) + \epsilon, \quad \forall \nu' \in V_g\left(\nu, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

因此，熵映射在 ν 处上半连续。

另一方面，现在假设熵映射在某个$\nu \in \mathscr{S}^{\Gamma}$处上半连续。于是，根据变分原理，我们有 $h_{\nu}(\Gamma) \leqslant \inf_{f \in \mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})} \left\{ \Pr(\Gamma, f) - \int f \mathrm{d}\nu \right\}$。若 $h_{\nu}(\Gamma) \geqslant \inf_{f \in \mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})} \left\{ \Pr(\Gamma, f) - \int f \mathrm{d}\nu \right\}$，则证明完成。为此，考虑一个凸集 $\mathcal{K} = \left\{ (\nu', u) \in \mathscr{S}^{\Gamma} \times \mathbf{R} : 0 \leqslant u \leqslant h_{\nu'}(\Gamma) \right\}$。于是，当 $u' > h_{\nu}(\Gamma)$ 时，$(\nu, u') \notin \mathcal{K}$。熵映射的上半连续性以及我们对 $\mathcal{K}$ 的定义确保 $\mathcal{K}$ 是闭集。因此，应用哈恩-巴拿赫分离定理，我们得到一个连续线性泛函的存在，记作 $F \colon \mathcal{C}\left(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{R}\right)^{*} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得对于每个 $(\nu', u) \in \mathcal{K}$，都有 $F(\nu', u) < F(\nu, u')$。由于 $\mathcal{C}\left(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{R}\right)^{*}$ 配备了弱*-拓扑，F可写为 $F(\nu', u) = \int f \mathrm{d}\nu' + cu$，其中 $f \in \mathcal{C}\left(\hat{\mathbf{C}}, \mathbf{R}\right)$ 且 $c \in \mathbf{R}$。

因此，对所有 $(\nu', u) \in \mathcal{K}$，我们有 $\int f \, \mathrm{d}\nu' + cu < \int f \, \mathrm{d}\nu + cu'$，特别是，

$$\int f \, \mathrm{d}\nu' + c h_{\nu'}(\Gamma) < \int f \, \mathrm{d}\nu + cu', \quad \text{whenever } \nu' \in \mathscr{S}^{\Gamma},$$

由此得到 $c h_{\nu}(\Gamma) < cu'$，因为 $\nu \in \mathscr{S}^{\Gamma}$，所以 $c > 0$。于是，

$$h_{\nu'}(\Gamma) < u' + \frac{1}{c} \int f \, \mathrm{d}\nu - \frac{1}{c} \int f \, \mathrm{d}\nu'.$$

此外，根据变分原理，我们有 $\Pr\left(\Gamma, \frac{f}{c}\right) \leqslant u' + \frac{1}{c} \int f \mathrm{d}\nu$。由于该不等式对所有 $u' > h_{\nu}(\Gamma)$ 都成立，因此我们有

$$h_{\nu}(\Gamma) \geqslant \inf_{g \in \mathcal{C}\left(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R}\right)} \left\{ \Pr(\Gamma, g) - \int g \, \mathrm{d}\nu \right\},$$

从而完成证明。 •

6 Ruelle 算子

本节首先回顾一个关于 [1] 全纯对应 Γ的结果，如定义 1.1 中所述，该结果满足 $d_{\mathrm{fwd}} < d_{\mathrm{top}}$。

定理6.1 *[1] Let Γ be a holomorphic correspondence on $\mathbb{C}$ as written in Definition 1.1 satisfying the condition $d_{\text{top}} > d_{\text{fwd}}$. Suppose $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$, where $\mathcal{E}$ is some polar set. Then, the sequence of measures $\left\{ \frac{1}{(d_{\text{top}})^n} \sum_{x \in \Pi^-_{(n,n)}\left(\mathfrak{X}^-_n(x_0;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right) = x} \delta_x \right\}_{n \geqslant 1}$ converges (in the weak* topology) to some measure, independent of x_0.*

这个极限测度称为*Dinh-Sibony*测度，本文中记作ω_{DS}。测度 ω_{DS} 的支集记为 Ω_{DS}，它与 Γ 的正规性集保持距离，这已在 [1]中得到证明。此外，Ω_{DS} 是 C 的一个紧致子集，在 Γ 的作用下后向不变，即，对于任意 $x_0 \in \Omega_{\text{DS}}$,

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{DS}} &\supseteq \bigcup_{n \geqslant 1} \left\{ x \in \widehat{\mathbb{C}} : \Pi^-_{(n,n)}\left(\mathfrak{X}^-_n(x_0;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right) = x \right\} \\ &= \bigcup_{n \geqslant 1} \left\{ x \in \widehat{\mathbb{C}} : \Pi^+_{(n,n)}\left(\mathfrak{X}^+_n(x;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) = x_0 \right\}.\end{aligned}$$

我们打算研究限制在 Ω_{DS} 上的 Γ 动力学；然而，为了确保前向迭代具有“良好行为”，我们借助 Londhe 的一个结果，现将其陈述如下。

定理 6.2 *[5] Let Γ be a holomorphic correspondence on $\mathbb{C}$ with $d_{\text{top}} > d_{\text{fwd}}$ and ω_{DS} be its Dinh-Sibony measure, whose support is denoted by Ω_{DS}. If $x_0 \in \Omega_{\text{DS}}$, then there exists at least one $\boldsymbol{\alpha} \in \{1, 2, \cdots, M\}^n$ with corresponding value(s) of $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}_+^n$ such that $\Pi^+_{(n,\ n)}\left(\mathfrak{X}^+_n(x_0;\ \boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) \in \Omega_{\text{DS}}$, for all $n \in \mathbb{Z}_+$.*

现在利用定理 6.2，我们定义 $\mathscr{P}^\Gamma(\Omega_{\text{DS}})$ 的一个子集，其中收集点 $x_0 \in \Omega_{\text{DS}}$ 的前向像，并且这些像仍然保留在 Ω_{DS} 中，即，定义为

$$\mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}}) = \left\{ \left(x_0, x^{(1)}_{j_1}, x^{(2)}_{j_2}, \cdots;\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots\right) \in \mathscr{P}^\Gamma(\Omega_{\text{DS}}) : x^{(r)}_{j_r} \in \Omega_{\text{DS}}\ \forall r \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

注意，根据定义，对任意 $\left(x^{(r-1)}_{j_{r-1}},\ x^{(r)}_{j_r}\right) \in \Gamma|_{\Omega_{\text{DS}} \times \Omega_{\text{DS}}}$ 对所有 $r \in \mathbb{Z}_+$ 均成立。此外，$\mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}})$ 关于度量 Δ 的适当限制是一个自动度量空间，该度量定义于公式 (2.1) 中。而且，$\mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}})$ 是 $\mathscr{P}^\Gamma\left(\mathsf{C}\right)$ 的闭子集，因此是紧致的。还要注意，移位映射 σ^Γ 在 $\mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}})$ 上的限制（如公式 (2.2) 所定义）给出了一个前向不变的映射。由于我们知道 Ω_{DS} 在对应 Γ 的作用下是后向不变的，因此实质上，我们有 σ^Γ 在 $\mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}})$ 上完全不变，即 $\sigma^\Gamma\left(\mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}})\right) = \mathscr{P}^\Gamma_{\text{inv.}}(\Omega_{\text{DS}})$。

定义 6.3 *A holomorphic correspondence Γ defined on C as written in Definition 1.1, is said to be an Ω_{DS} 上的扩张对应 if there exists a constant $\lambda > 1$ such that for any pair of points $x_0,\ y_0 \in \Omega_{\text{DS}}$ with $\mathfrak{X}^-_1(x_0;\ \beta)_j \in \mathscr{Q}^\Gamma_1\left(\mathsf{C}\right)$, there exists a point*

$\mathfrak{x}_1^- (y_0;\ \beta)_k \in \mathscr{Q}_1^\Gamma \left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ *such that*

$$\lambda\, d_{\widehat{\mathbb{C}}} \left(\Pi_{(1,1)}^- \left(\mathfrak{x}_1^- (x_0;\beta)_j\right),\ \Pi_{(1,1)}^- \left(\mathfrak{x}_1^- (y_0;\beta)_k\right)\right) \ < \ d_{\widehat{\mathbb{C}}} (x_0, y_0)\,.$$

在最后这一节中，我们将考察定义于 Γ 上的$\mathbb{C}$全纯对应，如定义1.1所述，其在其 Dinh-Sibony 测度$_{\mathrm{DS}}$ 的支撑集 Ω ω_{DS} 上的限制具有扩张性。

令 $\mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$ 表示定义在紧致度量空间 Ω_{DS}上的实值连续函数所构成的巴拿赫空间，并赋予上确界范数。对于任意固定的 $f \in \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$，考虑定义于 $\mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$上的有界线性 Ruelle 算子，其定义为 [6],，记作 $\mathcal{L}_f$，它在 Ω_{DS} 中各点上的作用如下所规定。

$$(\mathcal{L}_f(g))\,(x) \ = \sum_{1 \leqslant \beta \leqslant M} \ \sum_{\substack{1 \ \leqslant \ k \ \leqslant \ \delta_\beta(x) \\ \Pi_{(1,1)}^- \left(\mathfrak{x}_1^- (x;\beta)_k\right) \ = \ y}} e^{f(y)} g(y). \tag{6.1}$$

令 $\mathcal{L}_f^*$ 表示与 Ruelle 算子 $\mathcal{L}_f$相对应的伴随算子，它定义在 $\mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$的对偶空间上，即所有支撑于 Ω_{DS}的有符号测度所构成的空间，记作 $\mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})^*$。对于每个有符号测度 $\rho \in \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})^*$，测度 $\mathcal{L}_f^*(\rho)$在任意 $g \in \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$ 上的作用由下式给出

$$\left[\mathcal{L}_f^*(\rho)\right](g) \ = \ \rho\,(\mathcal{L}_f(g)) \ = \ \int_{\Omega_{\mathrm{DS}}} (\mathcal{L}_f g)\,\mathrm{d}\rho.$$

注意到，支撑在 Ω_{DS} 上的概率测度集合记为 $\mathscr{M}\,(\Omega_{\mathrm{DS}})$，它是 $\mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})^*$ 的子集。对于任意 $f \in \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$，令

$$\omega_k(f) \ = \ \sup\left\{|f(x) - f(y)| \ : \ d_{\widehat{\mathbb{C}}}(x,y) \leqslant \frac{1}{\lambda^{k-1}}\right\} \tag{6.2}$$

并考虑子集 $\mathcal{C}^\alpha\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$，其中 $\alpha = \lambda^{-1}$ 由下式给出

$$\mathcal{C}^\alpha\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R}) \ = \ \left\{f \in \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R}) : \sum_{k \geqslant 1} \omega_k(f) + \|f\|_\infty < \infty\right\}.$$

那么，众所周知，$\mathcal{C}^\alpha\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$ 关于范数是一个巴拿赫空间，

$$\|f\|_\alpha \ = \ \sum_{k \geqslant 1} \omega_k(f) + \|f\|_\infty.$$

注意，当 $f \in \mathcal{C}\,(\Omega_{\mathrm{DS}},\mathbb{R})$ 时，$F = f \circ \Pi_0 \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^\Gamma\,(\Omega_{\mathrm{DS}}),\mathbb{R}\right)$。设 $\mathcal{L}_F$ 表示作用在 $\mathcal{C}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^\Gamma\,(\Omega_{\mathrm{DS}}),\mathbb{R}\right)$ 上的经典 Ruelle 算子，其中底层空间中的动力学通过移位映射 σ^Γ 进行，那么对于任意 $G \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^\Gamma\,(\Omega_{\mathrm{DS}}),\mathbb{R}\right)$，经典 Ruelle 算子的作用为

$$\mathcal{L}_F(G)\left(\mathfrak{x}^+\,(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) \ = \sum_{\substack{\mathfrak{x}^+\,(x;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}} \ \in \ \mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^\Gamma\,(\Omega_{\mathrm{DS}}) : \\ \sigma^\Gamma\,(\mathfrak{x}^+\,(x;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}) \ = \ \mathfrak{x}^+\,(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}}} e^{F\left(\mathfrak{x}^+(x;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right)} G\left(\mathfrak{x}^+\,(x;\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{k}}\right). \tag{6.3}$$

那么，显然，$\boldsymbol{k} = (j_0, j_1, j_2, \cdots) = j_0\boldsymbol{j}$ 若 $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \cdots)$ 且 $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots) = \alpha_0\boldsymbol{\alpha}$ 若 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$。因此，

$$\mathcal{L}_F(G)\left(\mathfrak{x}^+(x_0;\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{j}}\right) = \sum_{\alpha_0=1}^{M} \sum_{\substack{1 \leqslant j_0 \leqslant \lambda_{\alpha_0}(x):\\ \Pi_1\left(\mathfrak{x}^+(x;\alpha_0\boldsymbol{\alpha})_{j_0\boldsymbol{j}}\right) = x_0}} e^{F\left(\mathfrak{x}^+(x;\alpha_0\boldsymbol{\alpha})_{j_0\boldsymbol{j}}\right)} G\left(\mathfrak{x}^+(x;\alpha_0\boldsymbol{\alpha})_{j_0\boldsymbol{j}}\right).$$

现在我们陈述并证明一个定理，关于在 $\mathscr{S}^\Gamma$中存在唯一测度，该测度对应于 Ruelle 算子的伴随 $\mathcal{L}_f$，对于某个 $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathbb{R})$，如方程（6.1）所示，该算子定义在 $\mathcal{C}(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathbb{R})$上。

^定理 6.4 *Let Γ be a holomorphic correspondence on C as written in Definition 1.1, for which $d_{\mathrm{top}} > d_{\mathrm{fwd}}$. Let ω_{DS} be its Dinh-Sibony measure, whose support is denotedby Ω_{DS}. Assume that Γ is expansive on Ω_{DS}. For the Ruelle operator $\mathcal{L}_f$ corresponding to a function $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$, as given in Equation (6.1) defined on $\mathcal{C}(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$, there exists a unique measure $\nu \in \mathscr{S}^\Gamma$ such that for any $g \in \mathcal{C}(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$, we have the sequence $\left\{\frac{1}{\Lambda^n}\mathcal{L}_f^n(g)\right\}_{n\geqslant 1} \to h\int g\,\mathrm{d}\nu$ where $h \in \mathcal{C}(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$ is the eigenfunction corresponding to the maximal simple positive eigenvalue Λ of $\mathcal{L}_f$.*

在开始证明此定理之前，我们先陈述作者提出的以下定理。该定理汇集了关于 Ruelle 算子的若干结果，参见 [6]。

^定理 6.5 *Let Γ be a holomorphic correspondence on C as written in Definition 1.1, for which $d_{\mathrm{top}} > d_{\mathrm{fwd}}$. Let ω_{DS} be its Dinh-Sibony measure, whose support is denoted by Ω_{DS}. Assume that Γ is expansive on Ω_{DS}. Consider the Ruelle operator $\mathcal{L}_f$ corresponding to a function $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$, as given in Equation (6.1) defined on $\mathcal{C}(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$. For $F = f \circ \Pi_0$, consider the counterpart of $\mathcal{L}_f$ given by $\mathcal{L}_F$, as given in Equation (6.3) defined on $\mathcal{C}\left(\mathscr{P}^\Gamma_{\mathrm{inv.}}(\Omega_{\mathrm{DS}}), \mathrm{R}\right)$. Then, the following statements hold.*

1. *There exists a simple, positive, maximal eigenvalue, say Λ of the Ruelle operators $\mathcal{L}_f$ and $\mathcal{L}_F$ with corresponding positive eigenfunctions, say $h \in \mathcal{C}(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R})$ and $H = h \circ \Pi_0 \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}^\Gamma_{\mathrm{inv.}}(\Omega_{\mathrm{DS}}), \mathrm{R}\right)$ respectively.2. Suppose we define $\widetilde{F} = F - \log\left(H \circ \sigma^\Gamma\right) + \log H - \log\Lambda$, then the Ruelle operatorpertaining to $\widetilde{F}$ is normalised, 即 it satisfies $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}\mathbb{1} = \mathbb{1}$, where $\mathbb{1} \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}^\Gamma_{\mathrm{inv.}}(\Omega_{\mathrm{DS}}), \mathrm{R}\right)$denotes the constant function evaluating to unity.*
3. *For any $n \in \mathbb{Z}_+$, let $\mathcal{L}_F^n$ and $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^n$ denote the n-th iterate of the Ruelle operator $\mathcal{L}_F$ and the normalised Ruelle operator $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}$ respectively. Then, the sequence $\left\{\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^n G\right\}_{n\geqslant 1}$ converges to a constant, say $c(G)$, for every continuous function $G \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}^\Gamma_{\mathrm{inv.}}(\Omega_{\mathrm{DS}}), \mathrm{R}\right)$. And thus, the sequence $\left\{\frac{1}{\Lambda^n}\mathcal{L}_F^n G\right\}_{n\geqslant 1}$ converges to the function $c\begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} H$.*

—— ——

4. For any $n \in \mathbb{Z}_+$, if $\mathcal{L}_f^n$ denotes the n-th iterate of the Ruelle operator $\mathcal{L}_f$, then the sequence $\left\{ \frac{1}{\Lambda^n} \mathcal{L}_f^n g \right\}_{n \geqslant 1}$ converges uniformly in Ω_{DS} to the function $c \left(\frac{g}{h} \circ \Pi_0 \right) h$, for every $g \in \mathcal{C}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathbb{R}\right)$.

我们现在利用定理 6.5 及其中引入的所有记号来证明定理6.4。

证明：[定理 6.4] 给定 $f \in \mathcal{C}^\alpha\left(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathrm{R}\right)$ 如定理 6.4 的陈述所述，令 $F = f \circ \Pi_0 \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right), \mathrm{R}\right)$ 以及 $\widetilde{F} = F - \log\left(H \circ \sigma^{\Gamma}\right) + \log H - \log \Lambda$，它们对应于适当的 Ruelle 算子的归一化，如定理 6.5 的陈述 (2) 中所述。现在，考虑规范化 Ruelle算子的伴随的作用，记为 $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^*$，定义在支撑于 $\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)$的概率测度空间上，记为 $\mathscr{M}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right)$，并由 $\int G \mathrm{d}\left(\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^* \mu\right) = \int \mathcal{L}_{\widetilde{F}} G \mathrm{d}\mu$ 给出，其中 $G \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right), \mathrm{R}\right)$任意。于是，对于常数函数 1，我们有 $\int \mathbb{1} \mathrm{d}\left(\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^* \mu\right) = \int \mathcal{L}_{\widetilde{F}} \mathbb{1} \mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1} \mathrm{d}\mu = 1$，从而 $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^* \mu \in \mathscr{M}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right)$。

因此，可以将 $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^*$: $\mathscr{M}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right) \longrightarrow \mathscr{M}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right)$ 视为一个映射 $\mu \longmapsto \mathcal{L}_{\widetilde{F}}^* \mu$的函数。应用 Schauder-Tynchnoff 定理（可参见[10], ），可知 $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^*$ 存在一个不动点，记为 $\mu_0 \in \mathscr{M}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right)$。于是，对于任意$G \in \mathcal{C}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right), \mathrm{R}\right)$，我们有

$$\int G \mathrm{d}\mu_0 = \int G \mathrm{d}\left(\lim_{n \to \infty} \left(\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^*\right)^n \mu_0\right) = \int \lim_{n \to \infty} \left(\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^n G\right) \mathrm{d}\mu_0 = \int c(G) \mathrm{d}\mu_0 = c(G), \quad (6.4)$$

利用定理 6.5的陈述（3），从而使不动点 μ_0 的 $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^*$ 唯一。此外，

$$\int \left(G \circ \sigma^{\Gamma}\right) \mathrm{d}\mu_0 = \int \left(G \circ \sigma^{\Gamma}\right) \mathrm{d}\left(\mathcal{L}_{\widetilde{F}}^* \mu_0\right) = \int \left(\mathcal{L}_{\widetilde{F}} G \circ \sigma^{\Gamma}\right) \mathrm{d}\mu_0 = \int G \mathrm{d}\mu_0,$$

从而保证 μ_0 属于 $\mathscr{M}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right)$中 σ^{Γ}-不变测度的空间，记作 $\mathscr{M}_{\sigma^{\Gamma}}\left(\mathscr{P}_{\mathrm{inv.}}^{\Gamma}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}\right)\right)$。

最后，结合定理 6.5 中的陈述 (3) 和 (4)，并利用方程 (6.4)，对于任意 $g \in \mathcal{C}\left(\Omega_{\mathrm{DS}}, \mathbb{R}\right)$,

$$\frac{1}{\Lambda^n} \mathcal{L}_f^n g \to c \left(\frac{g}{h} \circ \Pi_0\right) h = h \int \left(\frac{g}{h} \circ \Pi_0\right) \mathrm{d}\mu_0 = h \int \frac{g}{h} \mathrm{d}\left(\left(\Pi_0\right)_* \mu_0\right).$$

定义 $\nu = \left(\Pi_0\right)_* \mu_0 \in \mathscr{S}^{\Gamma}$ 即可完成证明。 •

参考文献

[1] Bharali, G. 和 Sridharan, S., 《$\mathbb{P}^1$上全纯对应的动力学：不变测度与正规集》，《复变函数与椭圆方程》，61，（2016），1587 - 1613。[2] Bharali, G.和 Sridharan, S., 《全纯对应的熵：精确计算与有理半群》，《芬兰数学年刊》，46，（2021），1135 - 1154。[3] Dinh, T.-C. 和 Sibony, N., 《亚纯对应的拓扑熵上界》，《以色列数学杂志》，163，（2008），29 - 44。[4] Li, X., Li, Z. 和 Zhang, Y., 《对应的热力学形式主义》，arXiv:2311.09397。[5] Londhe, M., 《亚纯对应与全纯半群动力学中的复现》，《印第安纳大学数学杂志》，71，（2022），1131 - 1154。[6] Sridharan, S. 和 Subith, G., 《全纯对应的 Ruelle 算子》，《共形几何与动力系统》，29，（2025），143 - 168。[7] Vivas, K. J.和 Sirvent, V. F., 《集值映射的度量熵》，《离散与连续动力系统B辑》，27，（2022），6589 - 6604。[8] Walters, P., 《遍历理论导论》，施普林格出版社，纽约，《数学研究生教材》，79，（1982）。[9] Walters, P., 《连续变换压强的变分原理》，《美国数学杂志》，97，（1975），937 - 971。[10] Zinsmeister, M., 《热力学形式主义与全纯动力系统》，美国数学会，法国数学会，（1996）。