arXiv:2603.03791v1 [physics.plasm-ph] 4 Mar 2026

重新探讨相对论麦克斯韦型分布的加载

Takayuki Umeda

北海道大学信息倡议中心，日本北海道札幌市 *060-0811*

摘要

本文基于逆变换抽样，提出了一种加载相对论麦克斯韦型分布的简单数值方法。本文介绍相对论麦克斯韦能量分布，作为麦克斯韦-尤特纳分布的一种替代。移位麦克斯韦能量分布的累积分布由一个可逆函数近似表示。能量随机变量由均匀分布的随机变量转换而来。随后，将能量变元转换为动量矢量随机变量。数值测试结果表明，该方法能够成功再现相对论麦克斯韦能量分布。

关键词：分布函数；相对论麦克斯韦分布 ；
随机数生成；逆变换抽样

1. 引言

从某种分布中抽取随机变元的数值技术，在为粒子

电子邮件地址：umeda@iic.hokudai.ac.jp (Takayuki Umeda)

动理学模拟（如蒙特卡罗和粒子网格（PIC）模拟）的粒子速度初始化中发挥着重要作用。利用来自提议（源）分布的随机变量，可以通过两种方法从目标分布中生成随机变元。一种是拒绝抽样：若提议分布中的某个变量满足由目标分布确定的条件，就接受它作为一个变元；否则就拒绝它。若提议分布选择不当，拒绝抽样的效率较低（即接受率低）。因此，拒绝抽样有时不适用于高性能计算。

或者，逆变换抽样利用目标分布的逆累积分布函数，将来自均匀分布的随机变量转换为来自目标分布的变元。然而，许多目标分布无法通过解析方法积分，也有许多累积分布无法通过解析方法求逆。

对于非相对论粒子，麦克斯韦-玻尔兹曼分布（或麦克斯韦速度分布）通常用作初始速度分布。针对二维麦克斯韦分布，有一种经典的逆变换方法，即著名的博克斯-穆勒变换 [1]。将适用于各向同性麦克斯韦速度分布的博克斯-穆勒变换扩展到各向异性和/或漂移（偏移）非相对论速度分布也很容易。

对于相对论粒子，麦克斯韦-尤特纳分布 [2]通常用作初始动量分布。由于从麦克斯韦-尤特纳分布生成随机变量的方法既困难又对数值模拟至关重要，因此半个世纪以来，这一直是一个重要问题

（参见文献 [3] 及其中的参考文献）。拒绝抽样被广泛用于麦克斯韦-尤特纳分布 [4, 5, 7, 6, 8, 3, 9]。若要使用逆变换抽样，就需要麦克斯韦-尤特纳分布的累积分布数值表 [10], ，因为累积分布难以获得解析表达式。然而，数值表的分辨率和数值插值方法会影响逆累积分布的精度。

在本研究中，基于逆变换抽样提出了一种加载相对论移位麦克斯韦型分布的简单数值方法。在第2节中，引入相对论麦克斯韦能量分布作为麦克斯韦-尤特纳分布的替代。随后给出了加载相对论移位麦克斯韦能量分布的数值方法。在第3节中，对相对论麦克斯韦能量分布与麦克斯韦-尤特纳分布进行了比较。还给出了这两种分布的性质（平均速度、平均动量、热能和动能）。最后在第4节给出了本研究的总结。

2. 麦克斯韦能量分布

2.1. 非相对论各向同性麦克斯韦分布

非相对论各向同性麦克斯韦速度分布由下式给出

$$f\left(\boldsymbol{v}\right)=\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}\right)^{3}\exp\left(-\frac{m\left|\boldsymbol{v}\right|^{2}}{2T}\right), \tag{1}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}^{3}\boldsymbol{v}=1.$$

对于各向同性速度分布，笛卡尔坐标中的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 转换为球坐标如下：

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{v} = v^2 \sin\theta \mathrm{d}v\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi v^2 \mathrm{d}v.$$

于是，方程 (1) 可用标量速度 $v \equiv |\boldsymbol{v}|$ 表示为

$$f_v(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{m}{T}}\right)^3 v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right), \tag{2}$$

其中

$$\int_0^\infty f_v(v)\,\mathrm{d}v = 1.$$

使用 Wolfram Mathematica [11] 确认该积分。

或者，方程 (2) 也可用动能$\mathcal{K} \equiv mv^2/2$ 改写为 [12]

$$f_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}T}\sqrt{\frac{\mathcal{K}}{T}} \exp\left(-\frac{\mathcal{K}}{T}\right), \tag{3}$$

其中

$$\int_0^\infty f_{\mathcal{K}}(\mathcal{K})\,\mathrm{d}\mathcal{K} = 1.$$

使用 Mathematica 验证了该积分。注意，这里用到了以下性质，

$$\mathrm{d}\mathcal{K} = mv\mathrm{d}v, \quad \sqrt{\frac{2\mathcal{K}}{m^3}}\mathrm{d}\mathcal{K} = v^2\mathrm{d}v.$$

方程 (3) 被称为麦克斯韦“能量”分布。

2.2. 相对论各向同性麦克斯韦分布

将式 (3) 中的 $\mathcal{K}$ 替换为 $mc^2(\gamma - 1)$，即可得到相对论各向同性麦克斯韦能量分布：

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{mc^2}{T}\sqrt{\frac{mc^2}{T}(\gamma-1)} \exp\left\{-\frac{mc^2}{T}(\gamma-1)\right\} \tag{4}$$

其中， γ 为相对论洛伦兹因子，

$$\int_1^\infty f_\gamma(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = 1.$$

热能通过执行以下积分得到，

$$\int_1^\infty mc^2(\gamma-1) f_\gamma(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \frac{3}{2}T. \tag{5}$$

这些积分已用 Mathematica 验证。

方程 (4) 可用标量动量 $u \equiv \gamma v$ 表示为

$$f_u(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{m}{T}}\right)^3 \frac{u^2}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}+1}} \exp\left\{-\frac{mc^2}{T}\left(\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}-1\right)\right\}, \tag{6}$$

其中

$$\int_0^\infty f_u(u)\,\mathrm{d}u = 1.$$

该积分已用 Mathematica 验证。注意，这里用到了以下性质，

$$\gamma = \sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}, \quad c^2\gamma\mathrm{d}\gamma = u\mathrm{d}u.$$

或者，方程 (4) 也可用动量矢量 $\boldsymbol{u}$ 表示为

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{\pi T}}\right)^3 \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{u})\sqrt{\gamma(\boldsymbol{u})+1}} \exp\left[-\frac{mc^2}{T}\left\{\gamma(\boldsymbol{u})-1\right\}\right], \tag{7}$$

其中

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = 1.$$

通过数值积分验证了该积分。请注意，这里用到了以下性质，

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = u^2\sin\theta\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = c^3\gamma\sqrt{\gamma^2-1}\sin\theta\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{8}$$

with

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2, \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi.$$

2.3. 相对论漂移麦克斯韦分布

关于动量矢量的相对论移位麦克斯韦能量分布，可通过将式（7）中的 γ 替换为推进洛伦兹因子 γ_B 并进行重整化，得到

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2\gamma_D}\left(\sqrt{\frac{m}{\pi\gamma_D T}}\right)^3 \frac{1}{\gamma_B(\boldsymbol{u})\sqrt{\gamma_B(\boldsymbol{u})+1}} \exp\left[-\frac{mc^2}{\gamma_D T}\left\{\gamma_B(\boldsymbol{u})-1\right\}\right], \tag{9}$$

其中

$$\gamma_B = \gamma_D\left(\gamma - \frac{\boldsymbol{v}_D\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\right) \tag{10}$$

漂移速度矢量 $\boldsymbol{v}_D$ 及其洛伦兹因子

$$\gamma_D = \frac{c^2}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}_D|^2}}. \tag{11}$$

通过数值积分验证了以下积分，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = 1.$$

从洛伦兹因子球坐标到动量矢量直角坐标的变换具有以下性质：

$$u_x = \gamma_D\left(c\sqrt{\gamma_B^2-1}\cos\theta + \gamma_B v_D\right), \tag{12a}$$

$$u_y = c\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta\cos\phi, \tag{12b}$$

$$u_z = c\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta\sin\phi. \tag{12c}$$

这里，动量矢量坐标的选取方式是使 u_x 轴平行于漂移速度矢量 $\boldsymbol{v}_{D\circ}$ 然后，利用雅可比行列式可得以下性质（详情见附录 A）：

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = c^2\gamma_D\left(c\gamma_B + v_D\sqrt{\gamma_B^2-1}\cos\theta\right)\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta\mathrm{d}\gamma_B\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \tag{13}$$

因此，以推进洛伦兹因子和极角表示的相对论性移位麦克斯韦能量分布如下，

$$f_{\gamma_B,\theta}\left(\gamma_B,\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)^3\left(1+\frac{v_D}{c\gamma_B}\sqrt{\gamma_B^2-1}\cos\theta\right)\sqrt{\gamma_B-1}\sin\theta\exp\left\{-\frac{mc^2}{\gamma_D T}\left(\gamma_B-1\right)\right\}, \tag{14}$$

其中

$$\int_1^\infty\int_0^\pi f_{\gamma_B,\theta}\left(\gamma_B,\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\gamma_B = 1.$$

该积分已通过 Mathematica 得到确认。对方程关于 θ 积分后，得到以下以推进洛伦兹因子表示的分布，它与方程 (4) 相同，

$$f_{\gamma_B}\left(\gamma_B\right) = \int_0^\pi f_{\gamma_B,\theta}\left(\gamma_B,\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)^3\sqrt{\gamma_B-1}\exp\left\{-\frac{mc^2}{\gamma_D T}\left(\gamma_B-1\right)\right\}. \tag{15}$$

2.4. 逆变换抽样

利用归一化（无量纲）能量 $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\gamma_D T}(\gamma_B - 1)$，方程 (15) 可改写为

$$f_{\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\mathcal{E}}\exp\left\{-\mathcal{E}\right\}, \tag{16}$$

其中

$$\int_0^\infty f_{\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\right)\mathrm{d}\mathcal{E} = 1.$$

利用 Mathematica 验证了该积分。公式（16）的累积分布为

$$F_{\mathcal{E}}(x)=\int_0^x f_{\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\right)\mathrm{d}\mathcal{E}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2},x\right)=\mathrm{erf}\left(\sqrt{x}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}e^{-x}. \quad (17)$$

此积分已通过 Mathematica 验证。这里，$\Gamma(n,\ x)$ 是上不完全伽马函数，

$$\Gamma\left(\frac{3}{2},x\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2},x\right)+\sqrt{x}e^{-x}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{x}\right)\right\}+\sqrt{x}e^{-x}.$$

由于式（17）中的累积分布不存在解析反函数，因此采用以下近似 [13, 14]，

$$F_{\mathcal{E}}(x)\approx\left\{1-\exp\left(-\frac{ax+bx^2}{1+cx+dx^2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}\equiv F_{\mathrm{app}}(x). \quad (18)$$

注意，系数 a、b、c 和 d 必须为常数，才能使式（18）可逆。使用 Mathematica 得到式（17）和式（18）在 $x=0$ 附近的泰勒级数展开如下，

$$F_{\mathcal{E}}(x)\approx\frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}+O\left(x^{\frac{5}{2}}\right),$$

$$F_{\mathrm{app}}(x)\approx(ax)^{\frac{3}{2}}+O\left(x^{\frac{5}{2}}\right).$$

因此，系数 a 可得

$$a=\left(\frac{16}{9\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

为了得到其余系数 b、c 和 d，对 $0<x\leq 8$ 进行暴力搜索，以最小化式 (17) 与式 (18) 之间数值误差的均方根，从而得到 $b=-3.12562\times10^{-2}$、$c=-5.15921\times10^{-2}$ 和 $d=8.84448\times10^{-4}$。

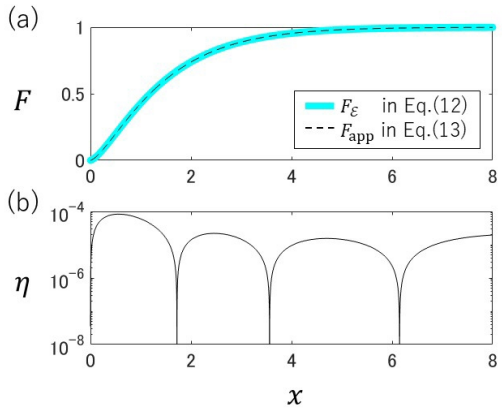


图 1：式 (17) 中的累积分布 $F_{\mathcal{E}}$ 与其近似式 F_{app} （式 (18)）的比较。(a) $0 < x \leq 8$时 $F_{\mathcal{E}}$ 和 F_{app} 的曲线。粗线表示 $F_{\mathcal{E}}$，虚线表示 F_{app}。(b) $F_{\mathcal{E}}$ 与 F_{app}之间的相对误差 η。

图 1 展示了式 (17) 中的累积分布与式 (18) 中采用上述系数的近似之间的比较。在图 (a) 中，给出了这些函数的空间剖面。在图 (b) 中，给出了式 (17) 与式 (18) 之间的相对误差，即 $\eta = |(F_{\mathcal{E}} - F_{\mathrm{app}})/F_{\mathcal{E}}|$。结果表明，近似累积分布的相对误差小于 10^{-4}。

式 (18) 的反函数为

$$\mathcal{Y} = \log\left(1 - y^{\frac{2}{3}} + \varepsilon\right),$$

$$F_{\mathrm{app}}^{-1}(y) = \frac{\sqrt{\{a + c\mathcal{Y}(y)\}^2 - 4\mathcal{Y}(y)\{b + d\mathcal{Y}(y)\}} - \{a + c\mathcal{Y}(y)\}}{2\{b + d\mathcal{Y}(y)\}}, \qquad (19)$$

$0 \leq x < 1$时。这里，ε 表示一个较小的变量（例如 2^{-126}），以避免将零作为对数函数的自变量。

麦克斯韦能量分布的随机变元由下式生成

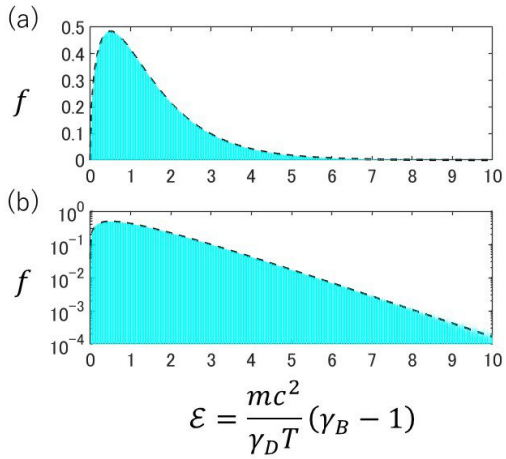


图 2：式 (16) 中的麦克斯韦能量分布与数值生成的随机变元直方图的比较。虚线表示式 (16) 的分布曲线，该曲线是归一化能量 $\mathcal{E} = mc^2(\gamma_B - 1)/(\gamma_D T)$ 的函数，其中 (a) 为线性尺度，(b) 为对数尺度。柱形表示使用式 (20) 生成的随机变元直方图，共有 $N_{\rm s} = 10^8$ 个样本和 $N_{\rm bin} = 10^4$ 个箱。

均匀分布的随机变量 $0 \le R_n^{(1)} < 1$，如下所示，

$$\mathcal{E}_n = F_{\rm app}^{-1}\left(R_n^{(1)} R_{\rm ul}\right). \tag{20}$$

其中，$R_{\rm ul}$ 表示公式 (19) 中反函数自变量的上限，设置该上限是为了避免在公式 (19) 中将负数作为平方根的运算数。根据上面列出的系数，上限为 $R_{\rm ul} \approx 0.999997546$。

图 2 展示了式 (16) 中的麦克斯韦能量分布与数值生成的随机变量直方图之间的比较。虚线表示式 (16) 关于归一化能量 $\mathcal{E} = mc^2(\gamma_B - 1)/(\gamma_D T)$ 的曲线，其中 (a) 使用线性尺度，(b) 使用对数尺度。柱条表示使用式

(20) 生成的随机变量直方图。该直方图由 $N_{\mathrm{s}} = 10^8$ 个样本和 $N_{\mathrm{bin}} = 10^4$ 个箱构成。结果表明，解析分布与直方图高度吻合。

一般而言，球坐标系中的能量（或标量动量）变元会与另外两组服从均匀分布的随机变量 $0 \leq R_n^{(2)} < 1$ 和 $0 \leq R_n^{(3)} < 1$ 一起，转换为动量矢量的变元，转换方式如下：

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(2R_n^{(2)} - 1\right), \tag{21a}$$

$$\phi_n = 2\pi R_n^{(3)}. \tag{21b}$$

式 (21a) 可改写为以下广为人知的恒等式：

$$\cos\theta_n = \cos\left[\cos^{-1}\left(2R_n^{(2)} - 1\right)\right] = 2R_n^{(2)} - 1,$$

$$\sin\theta_n = \sin\left[\cos^{-1}\left(2R_n^{(2)} - 1\right)\right] = \sqrt{1 - \left(2R_n^{(2)} - 1\right)^2} = 2\sqrt{R_n^{(2)}\left(1 - R_n^{(2)}\right)}.$$

然而，对于一般相对论性分布，无法利用式 (21) 将推进洛伦兹因子坐标（即 f_{γ_B}）变换到动量矢量坐标（即 f）。如下文所示，通过式 (21) 进行坐标变换得到的分布并非平衡分布（即 γ_B 的函数），这与式 (9) 不同（详情见附录 A）：

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{4\pi}{\gamma(\boldsymbol{u})\sqrt{\gamma_B^2(\boldsymbol{u}) - 1}} f_{\gamma_B}\left\{\gamma_B(\boldsymbol{u})\right\}.$$

以动量矢量（f）表示的一般相对论性分布，通过式（13）转换为同时以推进洛伦兹因子和极角（$f_{\gamma_B,\theta}$）表示的相对论分布，如下所示，

$$f_{\gamma_B,\theta}(\gamma_B,\theta) = \frac{c^2}{4\pi}\sqrt{\gamma_B^2 - 1}\sin\theta\left(c\gamma_B + v_D\sqrt{\gamma_B^2 - 1}\cos\theta\right) f(\boldsymbol{u}).$$

由于相对论分布表示为推进洛伦兹因子以及极角的函数，因此必须考虑 v_D $(\neq 0)$项，而该项在式（21a）中被排除。式（14）以极角表示的归一化累积分布给出为

$$F_{\gamma_B,\theta}(x) = \frac{1}{2}(1-\cos x) + \frac{v_D}{2c}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_B^2}}\left(1-\cos^2 x\right). \tag{22}$$

该累积分布的反函数为

$$F^{-1}_{\gamma_B,\theta}(y) = \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\frac{v_D^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_B^2}\right)+\frac{2v_D}{c}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_B^2}}(1-2y)}-1}{\frac{v_D}{c}\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_B^2}}}\right]. \tag{23}$$

综上，均匀分布中的三组随机变量，$R_n^{(1)}$、 $R_n^{(2)}$和 $R_n^{(3)}$，通过以下方式转换为推进洛伦兹因子、极角和方位角的变元，

$$\gamma_{B,n} = 1 + \frac{\gamma_D T}{mc^2} F^{-1}_{\rm app}\left(R_n^{(1)} R_{\rm ul}\right), \tag{24a}$$

$$\theta_n = \begin{cases} F^{-1}_{\gamma_B,\theta}\left(R_n^{(2)}\right) & (v_D \neq 0), \\ \cos^{-1}\left(2R_n^{(2)}-1\right) & (v_D = 0), \end{cases} \tag{24b}$$

$$\phi_n = 2\pi R_n^{(3)}, \tag{24c}$$

使用式（19）和式（23）中的反函数。然后，利用式（12）将这些变元转换为动量矢量的变元。通过这些步骤，即可得到式（9）中以动量矢量表示的相对论移位麦克斯韦能量分布。

利用以下性质 [16],

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = \gamma^5 \mathrm{d}^3\boldsymbol{v},$$

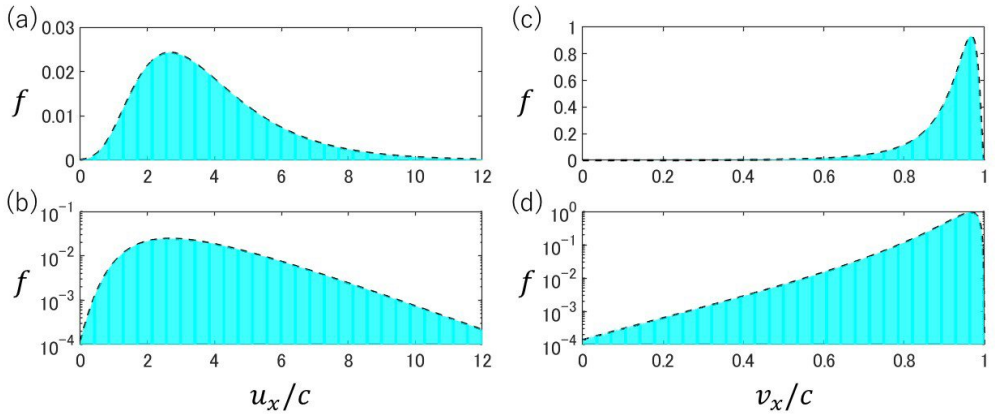


图 3：基于麦克斯韦能量分布的动量/速度分布与数值生成的随机变量直方图之间的比较。左侧面板中的虚线显示了u_x 方向上的约化动量分布，其中 $v_D/c = 0.9$ 和 $mc^2/T = 6.25$ 分别采用 (a) 线性尺度和 (b) 对数尺度。右侧面板中的虚线显示了 v_x 方向上相应的约化速度分布，其中 (c) 采用线性尺度，(d) 采用对数尺度。柱条显示了使用方程 (12) 和 (24) 生成的随机变量直方图，包含 $N_\mathrm{s} = 10^8$个样本和 $N_\mathrm{bin} = 10^4$ 个箱。

式 (9) 中的动量分布可改写为速度向量的形式，如下所示，

$$f_v(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2\gamma_D}\left(\sqrt{\frac{m}{\pi\gamma_D T}}\right)^3 \frac{\gamma^5(\boldsymbol{v})}{\gamma_B(\boldsymbol{v})\sqrt{\gamma_B(\boldsymbol{v})+1}} \exp\left[-\frac{mc^2}{\gamma_D T}\left\{\gamma_B(\boldsymbol{v})-1\right\}\right], \tag{25}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v} = 1.$$

通过数值积分验证了该积分。

图 3 展示了动量/速度分布与数值生成的随机变量直方图之间的比较。虚线

表示左侧面板中以u_x 为变量、在 $v_D/c = 0.9$ 和 $mc^2/T = 6.25$条件下的约化动量分布。右侧面板中的虚线表示相应的、以 v_x为变量的约化速度分布。由于难以对式 (9) 和式 (25) 中的分布分别在 $u_y - u_z$ 空间和 $v_y - v_z$ 空间（即垂直于漂移速度矢量的动量/速度空间）上进行解析积分，因此通过数值积分获得沿 u_x 和 v_x 方向的约化动量分布和约化速度分布。柱形表示使用式 (12) 和式 (24) 生成的随机变量直方图。该直方图由 $N_\mathrm{s} = 10^8$ 个样本和 $N_\mathrm{bin} = 10^4$ 个箱构成。结果显示，解析分布与直方图吻合极佳。

3. 与麦克斯韦-尤特纳分布的比较

以动量矢量 $\boldsymbol{u}$表示的麦克斯韦-尤特纳分布为

$$g\left(\boldsymbol{u}\right) = \frac{m}{4\pi cTK_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)} \exp\left(-\frac{mc^2}{T}\sqrt{1+\frac{\left|\boldsymbol{u}\right|^2}{c^2}}\right), \tag{26}$$

其中 K_n 表示n阶第二类修正贝塞尔函数。对于各向同性分布，利用式（8），该分布也可用标量动量 u 表示为

$$g_u\left(u\right) = \frac{mu^2}{cTK_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)} \exp\left(-\frac{mc^2}{T}\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}\right), \tag{27}$$

或者用洛伦兹因子 γ 表示为

$$g_\gamma\left(\gamma\right) = \frac{mc^2}{T}\frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{K_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)} \exp\left(-\frac{mc^2}{T}\gamma\right), \tag{28}$$

其中

$$\int_1^\infty g_\gamma(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = 1.$$

该积分已用 Mathematica 确认。

与式 (9) 类似，以动量矢量表示的平移麦克斯韦-尤特纳分布由推进洛伦兹因子 γ_B 给出为 [16]

$$g(\boldsymbol{u}) = \frac{m}{4\pi c\gamma_D T K_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)} \exp\left\{-\frac{mc^2}{T}\gamma_B(\boldsymbol{u})\right\}. \tag{29}$$

将其改写为以推进洛伦兹因子表示的形式如下,

$$g_{\gamma_B}(\gamma_B) = \frac{mc^2}{TK_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)}\gamma_B\sqrt{\gamma_B^2-1}\exp\left(-\frac{mc^2}{T}\gamma_B\right). \tag{30}$$

利用归一化能量 $\mathcal{E}' = mc^2(\gamma_B - 1)/T$，方程 (30) 可改写为

$$g_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}', T) = \frac{T^2}{m^2c^4K_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)}\sqrt{\mathcal{E}'\left(\mathcal{E}'+2\frac{mc^2}{T}\right)}\left(\mathcal{E}'+\frac{mc^2}{T}\right)\exp\left\{-\left(\mathcal{E}'+\frac{mc^2}{T}\right)\right\}, \tag{31}$$

其中

$$\int_0^\infty g_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')\,\mathrm{d}\mathcal{E}' = 1.$$

该积分已用 Mathematica 确认。式 (31) 的累积分布没有解析表达式。

图4展示了式（16）中的相对论性麦克斯韦能量分布与式（31）中的麦克斯韦-尤特纳分布随归一化能量 $\mathcal{E}'$ 变化的对比。实线表示 $\gamma_D = 1$ 时式（16）的曲线。圆圈表示 $mc^2/T = 100$ 时式（31）的曲线。方块表示 $mc^2/T = 1$ 时式（31）的曲线。三角形表示 $mc^2/T = 0.01$ 时式（31）的曲线。当.....较小时

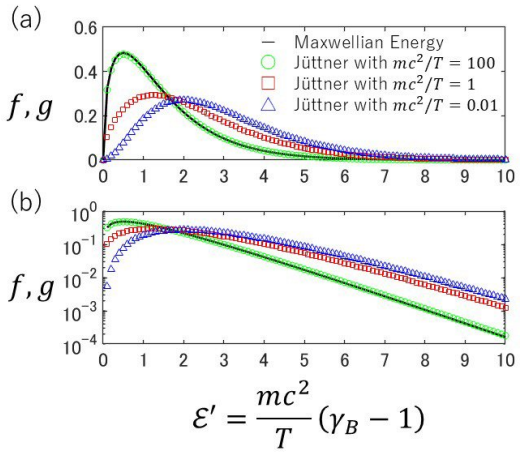


图4：比较式（16）中的麦克斯韦能量分布与式（31）中的麦克斯韦-尤特纳分布在不同 mc^2/T 下的情况：（a）线性尺度和（b）对数尺度。实线表示 $\gamma_D = 1$时式（16）的分布曲线。圆圈表示 $mc^2/T = 100$时式（31）的分布曲线。方块表示 $mc^2/T = 1$时式（31）的分布曲线。三角形表示 $mc^2/T = 0.01$时式（31）的分布曲线。

T，麦克斯韦-尤特纳分布趋近于麦克斯韦能量分布。然而， T 越大，麦克斯韦-尤特纳分布的高能尾部越显著。麦克斯韦-尤特纳分布表示为 $\mathcal{E}'$ 和 T 的函数。由于系数是 T 的函数，因此难以使用式（ 18 ）这类可逆函数来近似式（31）的累积分布。

或者，对化简后的麦克斯韦-尤特纳分布应用了拒绝抽样 [7, 9]，其中将式 (29) 中的麦克斯韦-尤特纳分布变换到柱坐标，并进行解析积分

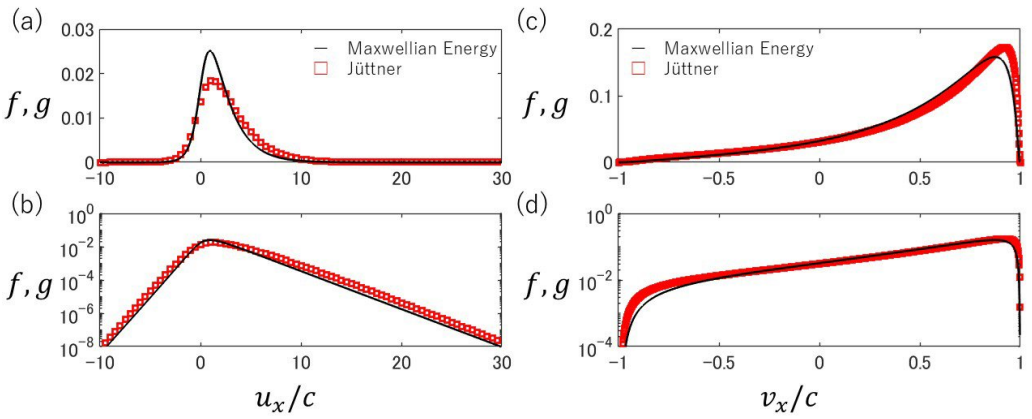


图 5：比较式 (9) 中的相对论麦克斯韦能量分布与式 (29) 中的麦克斯韦-尤特纳分布，其中 $v_D/c = 0.5$ 和 $mc^2/T = 1$。左侧各图显示 u_x 空间中的约化动量分布，分别采用 (a) 线性尺度和 (b) 对数尺度。右侧各图显示 v_x空间中的约化速度分布，分别采用 (c) 线性尺度和 (d) 对数尺度。实线表示约化麦克斯韦能量分布的轮廓，方块表示约化麦克斯韦-尤特纳分布的轮廓。

对垂直动量空间的积分如下 [7, 10],

$$g_{u_x}(u_x) = \frac{T}{2mc^3\gamma_D^3 K_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)}\left(1+\frac{mc^2\gamma_D}{T}\sqrt{1+\frac{u_x^2}{c^2}}\right)\exp\left\{-\frac{mc^2\gamma_D}{T}\left(\sqrt{1+\frac{u_x^2}{c^2}}-\frac{v_D u_x}{c^2}\right)\right\}. \tag{32}$$

使用 Mathematica 和数值积分也再次证实了这一点。

图 5 展示了方程（9）中的相对论麦克斯韦能量分布与方程（29）中的麦克斯韦-尤特纳分布在 $v_D/c = 0.5$ 和 $mc^2/T = 1$ 条件下的比较。左图展示了在 u_x 空间中的约化动量分布，其中（a）采用线性尺度，（b）采用对数尺度。右图展示了在 v_x 空间中的约化速度分布，其中（c）采用线性尺度，（d）采用对数尺度。实线表示约化

麦克斯韦能量分布分别作为动量 u_x 和速度 v_x 的函数，它们分别通过在 $u_y - u_z$ 空间和 $v_y - v_z$ 空间上进行数值积分得到。方块表示通过数值积分得到的方程（29）中的约化麦克斯韦-尤特纳分布。注意， u_x 空间中的约化麦克斯韦-尤特纳分布也在方程（32）中给出。

当 mc^2/T 较大（即 T 较小）时，麦克斯韦-尤特纳分布趋近于麦克斯韦能量分布。当 mc^2/T 较小（即 T 较大）时，麦克斯韦-尤特纳分布中的高能分量更加增强，且分布的峰值向高能侧移动。

两种速度分布的平均速度均如下所示,

$$\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\boldsymbol{v}\gamma^5(\boldsymbol{v})f\left(\frac{c\boldsymbol{v}}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\boldsymbol{v}\gamma^5(\boldsymbol{v})g\left(\frac{c\boldsymbol{v}}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_D, \tag{33}$$

数值积分验证了这一点。

麦克斯韦-尤特纳分布的平均动量如下所示 [16],

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}g\left(\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{u}=\frac{K_3\left(\frac{mc^2}{T}\right)}{K_2\left(\frac{mc^2}{T}\right)}\gamma_D\boldsymbol{v}_D, \tag{34}$$

数值积分再次证实了这一点。然而，麦克斯韦能量分布的平均动量如下所示（详情见附录 B），

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}f\left(\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{u}$$

$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{2\gamma_D T}{mc^2} - \frac{2mc^2}{3\gamma_D T} \left[1 - \sqrt{\frac{\pi mc^2}{\gamma_D T}} \exp\left(\frac{mc^2}{\gamma_D T} \right) \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}} \right) \right\} \right] \right) \gamma_D v_D, \tag{35}$$

它略小于式（34）中麦克斯韦-尤特纳分布的平均动量。

通过对麦克斯韦-尤特纳分布执行以下积分，可得到一个有用的性质，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} mc^2 \left\{ \gamma_B \left(\boldsymbol{u} \right) - 1 \right\} g\left(\boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{u} = T \left[3 - \frac{mc^2}{T} \left\{ 1 - \frac{K_1\left(\frac{mc^2}{T} \right)}{K_2\left(\frac{mc^2}{T} \right)} \right\} \right]. \tag{36}$$

该积分已通过 Mathematica 验证。该性质与热能有关，热能在 mc^2/T 较大时趋近于 $3T/2$ ，而在 mc^2/T 较小时则增强。麦克斯韦能量分布中与热能相关的性质如下所示，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} mc^2 \left\{ \gamma_B \left(\boldsymbol{u} \right) - 1 \right\} f\left(\boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{u} = \frac{3}{2} \gamma_D T. \tag{37}$$

麦克斯韦-尤特纳分布的动能可通过执行以下积分得到，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} mc^2 \left\{ \gamma \left(\boldsymbol{u} \right) - 1 \right\} g\left(\boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{u}$$

$$= \frac{T}{\gamma_D} \left[3 - \frac{mc^2}{T} \left\{ 1 - \frac{K_1\left(\frac{mc^2}{T} \right)}{K_2\left(\frac{mc^2}{T} \right)} \right\} \right] + \left\{ \frac{K_3\left(\frac{mc^2}{T} \right)}{K_2\left(\frac{mc^2}{T} \right)} - \frac{1}{\gamma_D + 1} \right\} m \gamma_D v_D^2. \tag{38}$$

通过数值积分验证了该积分。麦克斯韦能量分布的动能如下所示（详见附录 B,

具体内容），

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} mc^2\left\{\gamma_B\left(\boldsymbol{u}\right)-1\right\} f\left(\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = \frac{3}{2}T+$$

$$\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{\gamma_D+1}+\frac{2\gamma_D T}{mc^2}-\frac{2mc^2}{3\gamma_D T}\left\{1-\sqrt{\frac{\pi mc^2}{\gamma_D T}}\exp\left(\frac{mc^2}{\gamma_D T}\right)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)\right\}\right] m\gamma_D v_D^2. \tag{39}$$

通过数值积分验证了此积分。麦克斯韦能量分布的动能小于式（38）中的麦克斯韦-尤特纳分布的动能。

对于这两种分布，整体漂移动能如下所示，

$$\mathcal{D} = m\boldsymbol{v}_D\cdot\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle-\frac{\gamma_D\boldsymbol{v}_D}{\gamma_D+1}\right), \tag{40}$$

其中 $\langle\boldsymbol{u}\rangle$表示平均动量矢量。注意，如上所述，平均速度矢量为 $\langle\boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{v}_D$ 。如果 $\langle\boldsymbol{u}\rangle = \gamma_D\boldsymbol{v}_D$，整体漂移动能表示为 $\left|\gamma_D\boldsymbol{v}_D\right|^2/\left(\gamma_D+1\right)$ 。在非相对论极限（即$\gamma_D\to 1$）下，漂移动能趋近于 $m\left|\boldsymbol{v}_D\right|^2/2$。

可以将动能分解为整体漂移动能和热能。麦克斯韦能量分布的热能为 $\mathcal{T} = 3T/2$。然而，麦克斯韦-尤特纳分布的热能包含由 mc^2/T 带来的增强，以及由于分布定义而产生的因子 γ_D 所导致的降低。

4. 总结

在相对论粒子动理学模拟中，从相对论麦克斯韦型分布生成随机变元的数值方法十分重要。传统上，拒绝抽样被广泛用于生成

麦克斯韦-尤特纳分布中的动量矢量随机变元。逆变换抽样在目标分布的可积性及其累积分布的可逆性方面存在问题。

本研究提出一种相对论移位麦克斯韦能量分布，作为麦克斯韦-尤特纳分布的替代方案。为采用逆变换抽样，本文给出一个可逆函数，可准确近似麦克斯韦能量分布的累积分布。随后，利用三组均匀分布的随机变量，生成服从相对论漂移麦克斯韦分布的动量矢量随机变量。本方法的数值过程简单，易于实现为元素函数，即 $(u_x,\ u_y,\ u_z) = \mathrm{func}\left\{R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}\right\}$，更适合用于高性能计算。

附录 A. 雅可比行列式

由式（12）可得，雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \gamma_B} & \frac{\partial u_x}{\partial \theta} & \frac{\partial u_x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \gamma_B} & \frac{\partial u_y}{\partial \theta} & \frac{\partial u_y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \gamma_B} & \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_D \left(\frac{c\gamma_B}{\sqrt{\gamma_B^2-1}} \cos\theta + v_D \right) & -c\gamma_D \sqrt{\gamma_B^2-1} \sin\theta & 0 \\ \frac{c\gamma_B}{\sqrt{\gamma_B^2-1}} \sin\theta\cos\phi & c\sqrt{\gamma_B^2-1} \cos\theta\cos\phi & -c\sqrt{\gamma_B^2-1} \sin\theta\sin\phi \\ \frac{c\gamma_B}{\sqrt{\gamma_B^2-1}} \sin\theta\sin\phi & c\sqrt{\gamma_B^2-1} \cos\theta\sin\phi & c\sqrt{\gamma_B^2-1} \sin\theta\cos\phi \end{bmatrix}. \tag{A.1}$$

则雅可比行列式为

$$\det(\mathbf{J}) = c^3\gamma_D\gamma_B\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta + c^2 v_D\gamma_D(\gamma_B^2-1)\cos\theta\sin\theta. \tag{A.2}$$

由此得到式（13）。

由式（10）和（12a），方程（A.2）可改写如下,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{J}) &= c^3\gamma_D\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta\left(\gamma_B + \frac{v_D u_x}{c^2\gamma_D} - \frac{\gamma_B v_D^2}{c^2}\right) = c^3\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta\left(\frac{\gamma_B}{\gamma_D} + \frac{v_D u_x}{c^2}\right)\\ &= c^3\gamma\sqrt{\gamma_B^2-1}\sin\theta. \end{aligned}\tag{A.3}$$

附录 B. 麦克斯韦能量分布的性质

利用方程可得到平均动量的解析表达式
。（12a）和（14），

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_x f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} = \int_0^{\pi}\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)^3\gamma_D\left(c\sqrt{\gamma_B^2-1}\cos\theta + \gamma_B v_D\right)\\ &\left(1+\frac{v_D}{c\gamma_B}\sqrt{\gamma_B^2-1}\cos\theta\right)\sqrt{\gamma_B-1}\sin\theta\exp\left\{-\frac{mc^2}{\gamma_D T}(\gamma_B-1)\right\}\mathrm{d}\gamma_B\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2\gamma_D v_D}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)^3\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{\gamma_B^2-1}{\gamma_B}+\gamma_B\right)\sqrt{\gamma_B-1}\exp\left\{-\frac{mc^2}{\gamma_D T}(\gamma_B-1)\right\}\mathrm{d}\gamma_B\\ &= \left[\frac{4}{3}+\frac{2\gamma_D T}{mc^2}-\frac{2mc^2}{3\gamma_D T}\left\{1-\sqrt{\frac{\pi mc^2}{\gamma_D T}}\exp\left(\frac{mc^2}{\gamma_D T}\right)\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)\right\}\right]\gamma_D v_D,\end{aligned}$$

其中 erfc(x) $=1-$erf(x) 是互补误差函数。利用 Mathematica 对此进行了验证。

利用方程和式（37）可得到动能的解析表达式, (35)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} mc^2\left\{\gamma(\boldsymbol{u})-1\right\} f(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{u}$$

$$= \frac{1}{\gamma_D}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} mc^2\left\{\gamma_B\left(\boldsymbol{u}\right)-1\right\} f\left(\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{u} - mc^2$$

$$+\frac{1}{\gamma_D}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} mc^2\left(\frac{v_D u_x}{c^2}+1\right) f\left(\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{u}$$

$$= \frac{3T}{2}+\frac{mc^2}{\gamma_D}\left(1-\gamma_D\right)+\left[\frac{4}{3}+\frac{2\gamma_D T}{mc^2}-\frac{2mc^2}{3\gamma_D T}\left\{1-\sqrt{\frac{\pi mc^2}{\gamma_D T}}\exp\left(\frac{mc^2}{\gamma_D T}\right)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)\right\}\right] m\gamma_D v_D^2$$

$$= \frac{3T}{2}+\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{\gamma_D+1}+\frac{2\gamma_D T}{mc^2}-\frac{2mc^2}{3\gamma_D T}\left\{1-\sqrt{\frac{\pi mc^2}{\gamma_D T}}\exp\left(\frac{mc^2}{\gamma_D T}\right)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma_D T}}\right)\right\}\right] m\gamma_D v_D^2.$$

附录 C. 各向异性分布的加载

文献 [12, 15] 中给出了各向异性麦克斯韦-容克分布。作为对文献 [15], 的扩展，本文引入了一种平移且各向异性的麦克斯韦能量分布

$$\gamma_A = \gamma_D\left(\sqrt{1+\frac{T_\perp}{T_\parallel}\frac{u_x^2}{c^2}+\frac{u_y^2}{c^2}+\frac{u_z^2}{c^2}}-\frac{v_D u_x}{c^2}\right), \tag{C.1a}$$

$$f\left(\boldsymbol{u}\right) = \frac{1}{2\gamma_D}\left(\sqrt{\frac{m}{\pi\gamma_D T_\perp}}\right)^3 \frac{1}{\gamma_A\left(\boldsymbol{u}\right)\sqrt{\gamma_A\left(\boldsymbol{u}\right)+1}}\exp\left[-\frac{mc^2}{\gamma_D T_\perp}\left\{\gamma_A\left(\boldsymbol{u}\right)-1\right\}\right]. \tag{C.1b}$$

这里，动量向量坐标的选取使得 u_x 轴平行于漂移速度矢量 $\boldsymbol{v}_D$，而 $T_\parallel$ 和 $T_\perp$ 分别是平行于和垂直于漂移速度矢量的温度分量。

除 $\mathrm{d}\gamma_B/\mathrm{d}t = 0$、 $\boldsymbol{v}_D\cdot\boldsymbol{E} = 0$ 和 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 的以下两个条件外，还需要满足第三个条件 $\boldsymbol{E} = 0$，才能满足 $\mathrm{d}\gamma_A/\mathrm{d}t = 0$。也就是说，在相对论性移位各向异性分布中，漂移速度矢量必须平行于磁场，$\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B} = 0$ 。

使用式（20）生成麦克斯韦能量分布的能量变元随机值。然后将能量变元转换为洛伦兹因子变元，如下所示，

$$\gamma_{A,n} = 1 + \frac{\gamma_D T_\perp}{mc^2}\mathcal{E}_n. \tag{C.2}$$

然后，动量矢量的随机变量按如下方式获得，

$$u_{x,n} = \gamma_D\sqrt{\frac{T_\parallel}{T_\perp}}\left(c\sqrt{\gamma_{A,n}^2 - 1}\cos\theta_n + \gamma_A v_D\right), \tag{C.3a}$$

$$u_{y,n} = c\sqrt{\gamma_{A,n}^2 - 1}\sin\theta_n\cos\phi_n, \tag{C.3b}$$

$$u_{z,n} = c\sqrt{\gamma_{A,n}^2 - 1}\sin\theta_n\sin\phi_n, \tag{C.3c}$$

其中， θ_n 和 ϕ_n 通过在方程 (23) 中用 γ_A替换γ_B ，并使用方程 (24b,c) 得到。

附录 D. 非相对论麦克斯韦分布的加载

利用方程 (20) 生成麦克斯韦能量分布的随机能量变元。能量变元转换为标量速度变元，如下所示，

$$v_n = \sqrt{\frac{2T}{m}\mathcal{E}_n}. \tag{D.1}$$

然后，速度向量的随机变元按如下方式获得，

$$v_{x,n} = v_n\cos\theta_n + v_D, \tag{D.2a}$$

$$v_{y,n} = v_n\sin\theta_n\cos\phi_n, \tag{D.2b}$$

$$v_{z,n} = v_n\sin\theta_n\sin\phi_n, \tag{D.2c}$$

其中 θ_n 和 ϕ_n 由式(21)给出。

代码可用性

用于在MATLAB [17] 中生成相对论漂移麦克斯韦分布能量分布的示例代码可从https://github.com/taka-umeda/ rela.maxwellian获取。

写作过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备最终稿件期间，作者使用 Google Gemini 进行拼写和语法校正。使用该工具后，作者对内容进行了审阅和必要的编辑，并对出版内容承担全部责任。

致谢

本研究获得文部科学省/日本学术振兴会科学研究补助金（KAKENHI）基础研究（B）项目（编号：JP24K00603）的资助。部分数值计算在北海道大学信息倡议中心的跨学科大型计算系统上完成。本研究还在名古屋大学空间地球环境研究所的联合研究项目框架下开展。

参考文献

[1] G. E. P. Box 和 M. E. Muller, 《关于生成随机正态偏差的注记》, Ann.Math.Stat. 29 (1958)610–611；http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177706645。

[2] F. Jüttner, 《相对论中的麦克斯韦速度分布定律》, 《物理学年鉴》339(1911) 856–882；https://doi.org/ 10.1002/andp.19113390503。

[3] S. Zenitani 和 S. Nakano, 《粒子模拟中相对论 κ 分布的加载》, 《等离子体物理》29 (2022) 113904；https://doi.org/10.1063/5.0117628。

[4] L. A. Pozdnyakov、I. M. Sobol 和 R. A. Sunyaev, 《康普顿化与 X 射线源光谱的形成——蒙特卡洛计算》, Soviet Sci. Rev. Sec. E: Astrophys. Space Phys. Rev. 2 (1983) 189–331。

[5] E. Canfield、W. M. Howard 和 E. P. Liang, 《一维相对论电子的逆康普顿化》, 《天体物理学杂志》323 (1987) 565–574；https://doi.org/10.1086/165853。

[6] J. D. Schnittman 和 J. H. Krolik, 《克尔黑洞周围相对论辐射输运的蒙特卡罗代码》, 《天体物理学杂志》777 (2013) 11；https://doi.org/10.1088/0004-637X/777/1/11。

[7]M. Swisdak, 《从相对论麦克斯韦分布中生成随机变量》, 《等离子体物理》20 (2013) 062110；https:// doi.org/10.1063/1.4812459。

[8] S. Zenitani, 《粒子模拟中相对论麦克斯韦分布的加载》, 《等离子体物理》22 (2015) 042116；https://doi.org/10.1063/ 1.4919383。

[9] S. Zenitani, 《对 Swisdak（2013）用于粒子模拟中麦克斯韦-尤特纳分布的拒绝抽样算法的改进》, 《等离子体物理》31 (2024) 094501; https://doi.org/10.1063/5.0226859。

[10] M. Melzani、C. Winisdoerffer、R. Walder、D. Folini、J. M. Favre、S. Krastanov 和 P. Messmer，Apar-T：粒子网格结果的代码、验证与物理解释, 《天文学与天体物理学》558（2013）A133; http://doi.org/10.1051/0004-6361/201321557。

[11]Wolfram Research Inc.，Mathematica 14.2 版，伊利诺伊州尚佩恩（2024）；https://www.wolfram.com/mathematica/。

[12]G. Livadiotis，各向异性麦克斯韦-尤特纳分布的建模：推导与性质, 《地球物理年鉴》34（2016）1145–1158；http: // doi.org/10.5194/angeo-34-1145-2016。

[13]A. Soranzo 和 E. Epure，标准正态累积分布函数和标准正态分位数函数的非常简洁且可显式求逆的近似, 《应用数学科学》8（2014）4323–4341；https://doi.org/10. 12988/ams.2014.45338。

[14]T. Umeda, 《正态分布的生成再探》, Com- put. Stat. 39 (2024) 3907–3921；https://doi.org/10.1007/ s00180-024-01468-3。

[15] R. A. Treumann 和 W. Baumjohann, 《各向异性 Jüttner（相对论玻尔兹曼）分布》, 《地球物理年鉴》34（2016）737–738；https:// doi.org/10.5194/angeo-34-737-2016。

[16] G. Ueno 和 S. Zenitani，《相对论麦克斯韦分布混合模型》，《等离子体物理》28（2021）122106；https://doi.org/10.1063/5.0059126。

[17] The Mathworks Inc.，MATLAB 版本 R2023a，马萨诸塞州纳蒂克（2023）；https://www.mathworks.com/products/matlab.html。