由几何运算构造的线性码

AntonioJes´us Lorite L´opez DanielCamaz´on PortelaJuan Antonio L´opez Ramos数学系，阿尔梅里亚大学，西班牙阿尔梅里亚

arXiv:2603.03793v1 [cs.IT] 4 Mar 2026

摘要

我们基于任意单纯复形构造有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码，建立拓扑性质与基本编码参数之间的联系。首先，我们从几何视角研究码字重量的表现，并将其诠释为相关单纯复形的组合结构。该方法使我们能够根据复形的某些几何特征描述这些码的最小距离。

随后，我们分析单纯复形上的各种拓扑运算如何影响码的经典参数。这项研究进而提出了几何判据，使我们能够明确地控制和调整这些参数。

最后，作为所得结果的一项应用，我们利用这些几何方法构造了若干族 $\mathbb{F}_2$ 上的最优线性码。凭借此前确立的几何性质，我们可以精确确定这些码族的参数。

关键词：线性码、单纯复形、最小距离、几何方法。**数学主题分类：**94B05, 94B27

1 引言

近几十年来，编码理论与数学不同领域之间的相互作用催生了许多颇具意义的新构造和新方法。特别是，自从基于单纯复形构造线性码这一主题得到形式化以来 [4], ，它便成为众多研究的主题（例如参见 [4], [5], [7], [9], [10], [11], [12], [14]）。这些文章主要通过由 Adamaszek [1], 基于容斥原理提出的公式分析码字的重量；该公式可用于获得计数面的多变量表达式。这类方法与单纯复形的几何学在很大程度上是脱节的。本工作的动机是提出一种研究码字及其重量的替代方法，旨在为编码理论中的重量提供初步的几何解释。

在 [7], 中假定，单纯复形的每个极大面都必须包含一个孤立顶点；也就是说，

$$A_i \setminus \bigcup_{j\in[s]\setminus\{i\}} A_j \neq \emptyset.$$

另一方面，在 [6], 中，尽管理论构造已得到推广，但在具体案例的研究中，为了控制重量函数并分析其性质，研究范围仍限于只有一个极大面的复形。总的来说，先前研究所施加的假设妨碍了人们研究与几何或拓扑结构更丰富的单纯复形相关联的码，例如（伪）簇的三角剖分。本文的方法旨在将对码参数的认识拓展到任意单纯复形的情形。

为此，我们首先介绍一系列预备概念，以说明如何定义码，使其能够反映复形的拓扑结构。同时，我们也将介绍本文中通用的记号。随后，在第 3 节中，我们给出本文的一项关键结果：定理 3.1。该定理使我们能够通过复形各面的交来理解重量。基于这一结果以及对码字重量所采用的几何方法，我们进一步推导出其余结果。此方法的一大优点是，无需使用经典重量函数，因为对于任意单纯复形而言，该函数会变得过于复杂。依循这一思路，我们在第 4 节中研究复形上的一系列拓扑运算及其对码的影响。最后，为了进一步促进几何直观，我们在域 $\mathbb{F}_2$ 上基于先前获得的结果构造若干码族。

从更广阔的视角来看，这项工作可被视为迈向编码理论、代数几何与环论之间潜在交互的第一步，而这种交互由拓扑学和几何工具促成。所得结果表明，单纯复形的结构可作为探索这两个领域之间新联系的自然背景。从这个意义上说，本文旨在为构建一种共同语言作出贡献，使拓扑学、几何学与编码理论之间的直觉和技术得以相互传递。

2 预备知识

本节旨在介绍全文将要用到的主要概念和记号。

定义 2.1. 单纯复形 Δ 是 $[n]=\{1,\dots,n\}$的子集族，满足：若$\sigma\in\Delta$ 且 $\tau\subseteq\sigma$，则 $\tau\in\Delta$。

可以由单纯复形 Δ构造一个定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码。设 $\sigma\in\Delta$。我们可以将 σ 与其在 $\mathbb{F}_q$ 中的特征向量相对应，即 $\sigma\sim\chi_\sigma\in\{0,1\}^n$，其中

$$\chi_\sigma(i)=\begin{cases}1, \text{ if } i\in\sigma,\\ 0, \text{ if } i\notin\sigma,\end{cases}\quad \forall i\in[n]$$

接下来定义 $D:=\{\chi_\sigma\in\mathbb{F}_q^n\colon\ \sigma\in\Delta\}\subseteq\mathbb{F}_q^n$。与 Δ 相关联的线性码可定义如下

$$C_\Delta=\{c_\Delta(u)=(u\cdot x)_{x\in D}:u\in\mathbb{F}_q^n\},$$

其中 $u\cdot x$ 表示 u 和 x的逐坐标乘积，也称为 Hadamard 乘积。

等价地，我们可以将该码的定义矩阵 G 描述为行由 D的元素构成的矩阵；在这种情况下：

$$C_\Delta=\{uG^T:u\in\mathbb{F}_q^n\}$$

注意， G^T 是码 C_Δ的生成矩阵。

定义 2.2。 A 的极大单形 Δ是指未被该复形中的任何其他单形真包含的单形。

因此，若 A_1、.....、 A_s是 Δ的极大单形，我们可以写作

$$\Delta=\langle A_1,\dots,A_s\rangle=\{B\subseteq\{1,\dots,N\}\mid B\subseteq A_i \text{ for some } i\in\{1,\dots,s\}\}.$$

定义 2.3. 补单纯复形 Δ^c 定义为

$$\Delta^c=\{\sigma\in[n]:\sigma\notin\Delta\}.$$

线性码 C_{Δ^c} 称为 Δ的反码。

定义 2.4. 设 Δ 是一个单纯复形。顶点的链接 $lk_\Delta(e_i)$ 是满足 $lk_\Delta(e_i)=\{\tau\subset\Delta:\tau\cup\{e_i\}\in\Delta\}$ 的子集集合。

3 码参数的几何与拓扑意义 s

设 Δ 是一个单纯复形，且令 C_Δ 为其关联码，

$$C_\Delta = \{(u \cdot x)_{x \in D} : u \in \mathbb{F}_q^n\}.$$

从几何视角来看，乘积 $(u \cdot x)$ 可以理解为

$$(u \cdot x) = \sum_{v \in \sigma} u_v,$$

where x 是 σ的特征向量。沿着这一思路，可以定义 e

$$l_\sigma(u) = \sum_{v \in \sigma} u_v,$$

使得

$$c_\Delta(u) = (l_\sigma(u))_{\emptyset \neq \sigma \in \Delta}$$

and

$$w(c_\Delta(u)) = \#\{\sigma \in \Delta : l_\sigma(u)) \neq 0 \pmod q\}.$$

也就是说，码字的重量可以解释为复形中满足其顶点上的和在 u 上不为零的单形数量。基于这一视角，给出以下结果:

定理 3.1。 设 Δ 是顶点集为 $V = \{1, \ldots, k\}$ 的单纯复形， C_Δ 是其上定义的 $\mathbb{F}_q$ 上的关联线性码。对于任意满足 $|\mathrm{supp}(u)| \geq 2$ 的 $u \in \mathbb{F}_q^k$，存在 $u' \subset u$ 使得$|supp(u')| = 1$ 并且

$$w(c_\Delta(u')) \leq w(c_\Delta(u)).$$

证明。 固定 $u \in \mathbb{F}_q^k$： $u = \{u_1, ..., u_k\}$和 $u_i \in \mathbb{F}_q^*$。 对于 $\sigma \in \Delta$，我们可以扩展

$$\tilde{l}_\sigma(u) = \sum_{v \in \sigma} \tilde{u}_v \in \mathbb{Z},$$

其中 $\tilde{u_v}$ 是将 u_v 提升到 $\mathbb{Z}$ 中的结果。

回顾 $w(c_\Delta(u)) = \#\{\sigma \in \Delta : l_\sigma(u)) \neq 0$ （模 q）$\}$ 以及 $c_\Delta(u) = (l_\sigma(u))_{\emptyset \neq \sigma \in \Delta} \in \mathbb{F}_q^n$，其中 $n = |\Delta| - 1$。我们定义

$$\Delta^a = \{\tau \in \Delta : \sum_{v \in \tau} \tilde{u_v} = a\}.$$

and

$$\Delta_{v_i}^a = \{\tau \in \Delta : \sum_{v \in \tau} \tilde{u_v} = a \ \wedge \ v_i \in \tau\}.$$

因此， $w(c_\Delta(u)) = \sum_{a \neq \mathbb{Z}q} |\Delta^a|$。 令 $u' \subset u$ 使得 $supp(u') = v_i \in \mathbb{F}_q^*$。 由于 u' 支撑在单个顶点 v_i 上，对于任何包含 v_i 的面 τ，我们都有 $l_\tau(u') = \tilde{u}_i \notin \mathbb{Z}q$，因此所有这些面都会计入重量。

$$w(c_\Delta(u')) = \sum |\Delta_{v_i}^a|.$$

我们使用如下分解

$$|\Delta^a| = |\Delta_{v_i}^a| + |\Delta_{\neg v_i}^a| \qquad \text{for all } a \in \mathbb{Z}.$$

因此,

$$\sum_{a \notin q\mathbb{Z}} |\Delta^a| = \sum_{a \notin q\mathbb{Z}} |\Delta_{v_i}^a| + \sum_{a \notin q\mathbb{Z}} |\Delta_{\neg v_i}^a|.$$

由于

$$w(c_\Delta(u')) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} |\Delta^a_{v_i}|, \qquad w(c_\Delta(u)) = \sum_{a\notin q\mathbb{Z}} |\Delta^a|,$$

不等式 $w(c_\Delta(u')) \le w(c_\Delta(u))$ 等价于

$$\sum_{a\in q\mathbb{Z}} |\Delta^a_{v_i}| \le \sum_{a\notin q\mathbb{Z}} |\Delta^a_{\neg v_i}.$$

现在，对每个 $t = pq$，定义一个映射

$$\Phi_t : \Delta^{pq}_{v_i} \to \Delta^{pq-\tilde{u}_i}_{\neg v_i}, \qquad \tau \mapsto \tau \setminus \{v_i\}.$$

由于 $\tau \in \Delta$ 蕴含 $\tau\setminus\{v_i\} \in \Delta$，该映射定义良好。此外， $pq-\tilde{u}_i \notin \mathbb{Z}q$，因为 $\tilde{u}_i \notin \mathbb{Z}q$；并且 $p_1q-\tilde{u}_i = p_2q-\tilde{u}_i$ 当且仅当 $p_1 = p_2$。该映射也是单射。因此， $|\Delta^{(pq)}_{v_i}| \le |\Delta^{(pq-\tilde{u}_{i})_{\neg v_i}}|$。对所有 t 求和，得到

$$\sum_{j=\mathbb{Z}q} |\Delta^j_{v_i}| \le \sum_{j=\mathbb{Z}q} |\Delta^{j-\tilde{u}_i}_{\neg v_i}| \le \sum_{j\neq\mathbb{Z}q} |\Delta^j_{\neg v_i}|.$$

因此， $w(c_\Delta(u)) \ge w(c_\Delta(u'))$。 □

推论 3.2。该码的最小重量，以及因此的最小距离，由这样的向量决定： $u \in \mathbb{F}_q^n$ 其支撑由复形的单个顶点组成。

由此结果可以得到的另一个重要结论是，该码的距离不依赖于所选取的 q值。假设 u 具有单位支撑，可以看出，由于

$$l_\sigma(u) \not\equiv 0 \pmod q \iff supp(u)\cap\sigma \neq \emptyset,$$

由此可得

$$w(c_\Delta(u)) = \#\left\{\sigma\in\Delta : supp(u)\cap\sigma\neq\emptyset\right\}.$$

因此，重量的值仅取决于 u的支撑。

推论 3.3. 对于一个由 $\mathbb{F}_q^n$构成、极大元集合为 $\{A_1,\dots,A_s\}$且满足 $\cup_{i=1}^s A_i = [k]$的单纯复形 Δ，如果每个 A_i 都满足 $A_i \setminus \bigcup_{j\in[s]\setminus i} A_j \neq \emptyset$，那么 C_{Δ^*}的参数为

$$[|\Delta|-1, k, \min\{2^{|A_i|-1} : i\in[s]\}].$$

一般而言，对于任意单纯复形 Δ， C_{Δ^*} 的参数为

$$[|\Delta|-1, k, \min\{lk(i) : i\in[k]\}].$$

4 通过拓扑运算构造新码

命题 4.1。设 $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ 是 $\mathbb{F}_q$上的一个单纯复形，具有两个不相交的连通$\widetilde{}$分支；设 Δ 是通过将同维的面 $F_1 \subset \Delta_1$ 与面 $F_2 \subset \Delta_2$ 等同而得到的单纯复形。那么，相关线性码的最小距离在等同后不会减小，即

$$d(\widetilde{\Delta}) \ge d(\Delta).$$

~证明。 我们将 Δ 视为通过将面 F_1 和 F_2等同而得到的 Δ的商，并且对每个单形 $\sigma \in \Delta$ ，用 $\widetilde{\sigma}$ 表示它在商中的像。

根据推论 3.2，与单纯复形相关联的码的最小重量码字，恰好是支撑由单个顶点构成的码字。存在两种可能的情况。

首先，假设存在一个最小重量码字，其支撑是商中未被等同的顶点。在这种情况下，等同不会影响与该支撑相交的单形集合；因此，相应码字的重量保持不变。

否则，每个支撑某个最小重量码字的顶点都属于被等同的某个面。由于这类码字的支撑由单个顶点构成，我们有

$$w(c_{\widetilde{\Delta}}(\widetilde{u})) = \#\left\{\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Delta} : \operatorname{supp}(\widetilde{u}) \cap \widetilde{\sigma} \neq \emptyset\right\} \geq \#\{\sigma \in \Delta : \operatorname{supp}(u) \cap \sigma \neq \emptyset\} = w(c_{\Delta}(u)).$$

事实上，由于 Δ_1 和 Δ_2 是不相交的连通分支， Δ 中没有单形同时包含来自这两个分支的顶点。因此，在等同后，与原连通分支中的单形的交保持不变，而额外交只可能来自~另一个连通分支中的单形。这表明重量不会减小，因此 $d(\Delta) \geq d(\Delta)$。

□

注记 4.2。 在前一个命题的情形下，假设 C_{Δ} 的每个最小重量码字都支撑在属于某个被等同的面中的一个顶点上。令u 为这样的一个码字，并令 $\widetilde{u}$表示它在商中的像。

在这种情况下，等同所导致的重量增加可以~ ~ ~明确描述。记 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$，则有

$$\operatorname{wt}(\widetilde{u}) = \operatorname{wt}(\widetilde{u}_{|\widetilde{\Delta}_1}) + \operatorname{wt}(\widetilde{u}_{|\widetilde{\Delta}_2}) - \operatorname{wt}(\widetilde{u}_{|F_1}),$$

并且由于 $\operatorname{wt}(\widetilde{u}_{|\widetilde{\Delta}_1}) = d(\Delta)$，增加的部分完全来自$\Delta_2$ 包含被等同的面的单形。更准确地说，

$$\operatorname{wt}(\widetilde{u}) = d(\Delta) + \sum_{S \subset \Delta_2 \,:\, F_2 \subset S} \left(\operatorname{wt}(\widetilde{u}_{|S}) - \operatorname{wt}(\widetilde{u}_{|F_2})\right).$$

例4.3。 设 Δ 是一个定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的单纯复形，其极大面集合为$\{\{0,1\},\{0,2,3\},\{4,5,6,7\}\}$。要确定码的长度，只需计算 Δ的非空单形数量，因为生成矩阵的每一列都对应一个这样的单形。因此，将一个维数为 k 的向量乘以该矩阵，会得到一个长度与列数相同的码字。码的维数等于 Δ 的顶点数，也就是生成矩阵的行数。要计算最小距离，我们利用推论 2。2。顶点 $\{1\}$ 包含在最少数量的单形中，因为它只出现在单形 $\{1\}$ 和边 $\{0,1\}$中。因此，该码的最小距离为2。综上，码 C_{Δ} 的参数为 $[24,8,2]$。另一方面，若按照关系 $1 \sim 4$、 $2 \sim 5$和 $3 \sim 6$将顶点等同，我们~得到一个单纯复形 Δ。通过与上述类似的论证，我们得出关联码 $C_{\widetilde{\Delta}}$ 的参数为 $[20,5,5]$。

命题 4.4。 设 Δ 是一个单纯复形，并令 $cone(\Delta)$ 表示以 c 为顶点的 Δ 上的锥。设 u 是与 $cone(\Delta)$ 相关联的码中的一个非零向量。若 $c \notin supp(u)$，则$w_{cone(\Delta)}(u) = 2\, w_{\Delta}(u_{|\Delta})$。若 $c \in supp(u)$，则 $w_{cone(\Delta)}(u) \geq |\Delta| - 1$。

证明。 根据定义， Δ 上的锥由 $cone(\Delta) = \{\langle \mathcal{F}_i \cup \{c\}\rangle\}$给出，其中 $\mathcal{F}_i$ 是 Δ的极大元。

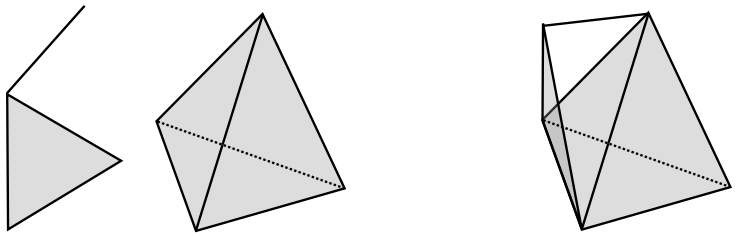


图 1：顶点粘合示例

首先假设 $c \notin \text{supp}(u)$。对于任意单形 $\sigma \in \Delta$，我们有

$$\sum_{v\in\sigma} u_v \equiv \sum_{v\in\sigma\cup\{c\}} u_v \pmod{q}.$$

因此， σ 当且仅当 $\sigma \cup \{c\}$ 对 u 的重量有贡献。由此可知， Δ 中的每个有贡献单形都会在 $cone(\Delta)$ 中产生恰好两个有贡献单形，因此

$$w_{cone(\Delta)}(u) = 2\, w_{\Delta}(u_{|\Delta}).$$

现在假设 $c \in supp(u)$。对于每个单形 $\sigma \in \Delta$， σ 或$\sigma \cup \{c\}$ 中的至少一个单形满足

$$|\tau \cap supp(u)| \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

因此，每一对 $\{\sigma, \sigma \cup \{c\}\}$ 中至少有一个单形对重量有贡献。由于 Δ有 $|\Delta|$ 个单形，且空单形不作贡献，我们得到

$$w_{\text{cone}(\Delta)}(u) \geq |\Delta| - 1.$$

□

推论 4.5。 设与 Δ 相关联的码的参数为 $[n, k, d]$。则与 $cone(\Delta)$ 相关联的码的最小距离为 $d' = 2d$。此外，长度变为 $n' = 2n + 1$，维数变为 $k' = k + 1$。

例 4.6. 设 Δ 是一个单纯复形，其极大面的集合为 $\{\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\ \{1,2,3\}\}$，即一个 3-单形的 2-骨架。其关联码 C_{Δ^*}的参数为$[14, 4, 7]$。若对 Δ取锥，则得到一个参数为 $[29, 4, 14]$的新码。

如果所有极大面都包含一个公共顶点 c，则可以定义一个算子，作为操作 $cone$ 的逆操作；该操作是相对于该顶点进行一系列初等塌缩的复合。更确切地说，给定一个包含极大面 $A_i = \langle v_1,\ .....,\ v_n,\ c\rangle$ 的单纯复形，将移除该极大面以及包含公共顶点 c的自由面，

$$\langle v_1, \ldots, v_n, c\rangle \longrightarrow \bigcup_{i\in[n]} \langle v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n\rangle,$$

其中符号 $\widehat{v_i}$ 表示省略顶点 v_i。对该复形的所有极大面重复此过程，可得到一个单纯复形，它可以被解释为操作 $cone$的逆操作。

一般情况下，当所有极大面不存在公共顶点时，可以定义一个类似的算子来降低单纯复形的维数，即边界算子。给定任意一个极大面，通过移除包含其各顶点的自由面，可以对算子 $cone$ 施加逆运算。对该极大面的所有顶点执行这一过程，也就是通过一系列初等塌缩，即可得到该极大面的边界。对复形的所有极大面重复这一过程，便可得到单纯复形的边界。

命题 4.7. 设 Δ 是一个单纯复形，且 $\partial(\Delta)$表示其边界复形，即由 Δ的所有非极大单形构成的子复形。从 Δ 转到 $\partial(\Delta)$会增大相应反码的最小距离，而对应线性码的最小距离则不会增大。

此　外，如果 Δ 有 s 个极大面且没有孤立顶点，则关联码满足　*fy*

$$d(C_{\Delta^*}) \geq d(C_{\partial(\Delta)^*}),$$

长度从 n 减小到 $n' = n - s$，维数保持不变。

证明。 设 u' 是支撑在 $\partial(\Delta)$上的向量。其重量由

$$w(u') = \#\left\{\partial(\sigma) : \sigma \in \Delta \text{ and } \sum_{v\in\partial(\sigma)} u_v \neq 0 \pmod q\right\},$$

或等价地,

$$w(u') = \#\left\{\sigma \in \Delta : \sigma \text{ is not maximal and } \sum_{v\in\sigma} u_v \neq 0 \pmod q\right\}.$$

从 Δ 过渡到 $\partial(\Delta)$时，唯一可能损失的贡献对应于极大单形。由于有 s个这样的单形，重量的损失不超过

$$w(u) - w(u') \leq s,$$

这意味着

$$d(C_{\Delta^*}) \geq d(C_{\partial(\Delta)^*}).$$

最后，移除 s 个极大单形会将码的长度从 n 降至 $n - s$。若 Δ 没有孤立顶点，则维数保持不变。

从 Δ 转到其边界 ∂（Δ）时， Δ 的极大面会成为补集 Δ^c 中的元素。因此，相应反码的生成矩阵会增加 s 个新列，分别对应这些极大面。由于原有列均未移除，反码的重量只会增加。

□

引理 4.8。 设 $k > 1$，且 $u \in \mathbb{F}_q^k$ 是非零向量。则

$$\#\{x \in \mathbb{F}_q^k : \langle u, x\rangle = 0\} = q^{k-1},$$

因此

$$\#\{x \in \mathbb{F}_q^k : \langle u, x\rangle \neq 0\} = (q-1)q^{k-1}.$$

证明。 由于 $u \neq 0$，映射

$$\varphi_u : \mathbb{F}_q^k \longrightarrow \mathbb{F}_q, \qquad x \longmapsto \langle u, x\rangle$$

是一个非零线性泛函。因此，其核是一个余维数为 1 的子空间，基数为 q^{k-1}。结论得证。

□

定理 4.9。 设 $\{\Delta_k\}_{k>1}$ 是定义在顶点集 $[k]$上的一族单纯复形，并假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\dim \Delta_k \leq n_0 \quad \textit{for all } k.$$

令 $\Delta_k^c = \mathbb{F}_q^k \setminus \{\chi_\sigma : \ \sigma \in \Delta_k\}$ 表示这族补单纯复形。那么，对于每个非零 $u \in \mathbb{F}_q^k$,

$$w(u) = \#\{x \in \Delta_k^c : \langle u, x\rangle \neq 0\} = (q-1)q^{k-1} + \mathcal{O}(k^{n_0+1}),$$

其中隐含常数与 u无关。特别地,

$$\frac{d(\Delta_k^c)}{|\Delta_k^c|} \longrightarrow \frac{q-1}{q} \qquad as\ k \to \infty.$$

相对最小距离收敛到$(q-1)/q$，这是 q元码的相对距离所能达到的最大值。

证明。 固定 k ，并设 $u \in \mathbb{F}_q^k$ 非零。由前一引理,

$$\#\{x \in \mathbb{F}_q^k : \langle u, x\rangle \neq 0\} = (q-1)q^{k-1}.$$

反码 Δ_k^c 由 $\mathbb{F}_q^k$ 通过移除集合 $E_k = \{\chi_\sigma$ 得到: $\sigma \in \Delta_k\}$。由于$\dim \Delta_k \leq n_0$，单形的数目满足 $|E_k| = |\Delta_k| = \mathcal{O}(k^{n_0+1})$。

移除集合 E_k 对重量的影响至多为 $|E_k|$，因此

$$w(u) = (q-1)q^{k-1} - \#\{x \in E_k : \langle x, u\rangle \neq 0\} = (q-1)q^{k-1} + \mathcal{O}(k^{n_0+1}).$$

由于 $|\Delta_k^c| = q^k - \mathcal{O}(k^{n_0})$，除以 $|\Delta_k^c|$ 可得

$$\frac{d(\Delta_k^c)}{|\Delta_k^c|} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{q-1}{q}.$$

□

例 4.10. 设 $\Delta_0 = \langle\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{1,3,5\}\rangle$ 是顶点集为 $\{1,2,3,4,5\}$ 的单纯复形。通过对 Δ_0 的单形进行适当的细分，我们得到一个细化三角剖分

$$\Delta = \langle\{1,2,8\},\{1,3,8\},\{2,3,8\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\},\{1,5,7\},\{1,3,7\},\{3,5,7\}\rangle$$

其顶点集为 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$。

考虑补集 $\Delta^c \subset \mathbb{F}_3^8$，它由 Δ 的单形特征向量集合取补集得到，以及相应的线性码 $C(\Delta^c)$。

直接计算可得，该码的参数为

$$[6527,\ 8,\ 4344].$$

特别地，相对最小距离满足

$$\frac{4344}{6527} \approx 0.6655,$$

其中 v 与前一个定理预测的渐近值（$q-1$）$/q = 2/3$ 非常接近 .

例 4.11. 延续前一个例子中的集合，与 Δ_0 相关联的反码在 $\mathbb{F}_2$ 上的参数为

$$[16, 5, 6],$$

得到的距离长度比为 $6/16 = 0.375$。

而与 Δ 相关联、定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的反码，其参数为

$$[222, 8, 107],$$

其距离长度比约为 $107/222 \approx 0.482$，相较于原始复形有显著改进。

5 利用几何性质在 $\mathbb{F}_2$ 上构造码 s

在本节中，我们重点讨论利用前几节所建立的单纯复形的几何性质，在域 $\mathbb{F}_2$ 上构造线性码。选择 $\mathbb{F}_2$ 作为基域有若干原因。

首先，正如前面所观察到的，对于这类码，最小距离与域的大小无关。此外，在 $\mathbb{F}_2$ 上运算使我们能够从几何视角解释码字的重量，也就是说，可以根据其与单形的交来解释，而不必计算模 q 的和。最后，从计算角度来看，在 $\mathbb{F}_2$ 上构造码的成本要低得多，因此更适合进行显式计算和实验。

设 Δ 是顶点集为 $[N]$ 的单纯复形。对于任意向量 $u \in \mathbb{F}_2^k$，相应码字的重量可以从几何角度解释为： Δ 中与 u 的支撑相交且交集基数为奇数的单形数。也就是说，

$$w(c_{\Delta^*}(u)) = \#\left\{\sigma \in \Delta : |supp(u) \cap \sigma| \equiv 1 \pmod 2\right\}$$

我们从最简单的例子开始。设 Δ 是一个单纯复形，它仅由一个极大面 A_1 组成，且 A_1 有 $|A_1| = N+1$。等价地， Δ 是标准的 N 维单形。

根据上文推论 **??** 中确立的结果，可以直接得到关联码 C_{Δ^*} 的参数

$$[2^{N+1}-1,\ N,\ 2^N].$$

特别地，由此类单纯复形得到的所有码都是最优的。

命题 5.1。 与一个 N–单形的$(N-1)$–骨架相关联的线性码具有如下参数

$$[2^{N+1}-2,\ N+1,\ 2^N-1].$$

特别地，这些码在长度方面是最优的。

证明。 如上一节所示，取单纯复形的边界，会使关联码的长度减少原复形的极大面数量，并且每去除一个极大面，最小距离至多减少一个。由于一个 N–单形恰好有一个极大面，因此长度和最小距离都恰好减少一个。

因此，所得的码具有如下参数

$$[2^{N+1}-2,\ N+1,\ 2^N-1].$$

还需验证这些参数是否达到 Griesmer界。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left\lceil\frac{2^N-1}{2^n}\right\rceil &= 2^N-1+\sum_{n=1}^{N}\left\lceil\frac{2^N-1}{2^n}\right\rceil\\ &= 2^N-1+\sum_{n=1}^{N}\left\lceil\frac{2^N}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right\rceil\\ &= 2^N-1+\sum_{n=1}^{N}\frac{2^N}{2^n} = 2^N-1+2^N-1 = 2^{N+1}-2.\end{aligned}$$

这表明该码达到 Griesmer界，因此是最优的。 □

定理5.2。 通过取一个 N–单形的$(N-1)$–骨架上的锥，可以构造出一族最优线性码。这些码的参数为

$$[\,2(2^{N+1}-2)+1,\ N+2,\ 2(2^N-1)].$$

证明。 根据前面的结果，与一个N–单形的$(N-1)$–骨架相关联的线性码具有如下参数：

$$[\,2^{N+1}-2,\ N+1,\ 2^N-1\,].$$

根据命题 4.4 中确立的几何结果，对这个单纯复形取锥会以可控的方式改变参数。具体而言，长度加倍后再增加一，维数增加一，距离加倍，从而得到一个参数为

$$[\,2(2^{N+1}-2)+1,\ N+2,\ 2(2^N-1)\,].$$

现在我们分析 Griesmer界。直接计算可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N+1}\left\lceil\frac{2(2^N-1)}{2^n}\right\rceil &= 2(2^N-1)+(2^N-1)+\sum_{n=1}^{N}\left\lceil\frac{2^N-1}{2^n}\right\rceil\\ &= 2(2^N-1)+(2^N-1)+\sum_{n=1}^{N}\frac{2^N}{2^n}\\ &= 2(2^N-1)+(2^N-1)+(2^N-1)\\ &= 2(2^{N+1}-2).\end{aligned}$$

因此，该码的长度恰好比 Griesmer界大一。

然而，具有相同长度和维数的码不可能有严格更大的最小距离。事实上，假设存在一个参数为 $[\,2(2^{N+1}-2)+1,\ \ N+2,\ 2(2^N-1)+1\,]$的码。那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N+1}\left\lceil\frac{2(2^N-1)+1}{2^n}\right\rceil = 2(2^N-1)+1+(2^N-1)+1+\sum_{n=1}^{N}\left\lceil\frac{2^N-1}{2^n}\right\rceil \geq\\ 2+\sum_{n=0}^{N+1}\left\lceil\frac{2(2^N-1)}{2^n}\right\rceil >\\ 2(2^{N+1}-2)+1,\end{aligned}$$

这与 Griesmer界矛盾。因此，不存在具有这些参数且最小距离更大的码，而所构造的码是距离最优的。 □

致谢

本研究由 MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID 2022-140934OB-I00 项目以及“安达卢西亚自治区 FQM-425”项目提供支持。第二作者部分获得了 MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2022-138906NB-C21 项目以及 ERDF“建设欧洲的途径”项目的支持。

参考文献

[1] Michal Adamaszek。下集的面数。《美国数学月刊》，122，2013年11月。[2] Alexei Ashikhmin 和 Alexander Barg。线性码中的极小向量。*IEEE Transactionson Infor mation Theory*，44(5):2010–2017，1998年。[3] Anuj Kumar Bhagat、Ritumoni Sarma 和 Vidya Sagar。关于$\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3-x\rangle$上 c-码的子域码。《离散数学》，348:114223，2024年。

[4] Seunghwan Chang 和 Jong Yoon Hyun。由单纯复形构造的线性码。*Designs,Codes and Cryptography*，86(10):2167–2181，2018年。[5] Zhao Hu、Yunge Xu、Nian Li、Xiangyong Zeng、Lisha Wang 和 Xiaohu Tang。由单纯复形构造最优线性码的新方法。*IEEE Transactions onInformation Theory*，70(3):1823–1835，2024年。[6] Jong Yoon Hyun、Hyun Kwang Kim 和 Minwon Na。由下集构造的最优非射影线性码。*Discrete Applied Mathematics*，254:135–145，2019年。[7]Jong Yoon Hyun、Jungyun Lee 和 Yoonjin Lee。由单纯复形构造的最优线性码的无限族。*IEEE Transactions on Information Theory*，66(11):6762–6773，2020年。[8] Xia Li、Qin Yue 和 Deng Tang。常维子空间码导出的一族线性码。*Des. Codes Cryptography*，90(1):1–15，2022年1月。[9] Hongwei Liu 和 Zihao Yu。 $\mathbb{F}_{2^n}$上的单纯复形线性码，2023年。[10] Yang Pan 和 Yan Liu。由单纯复形构造的几类少重量三元码。*AIMS Mathematics*，7(3):4315–4325，2022年。[11] Vidya Sagar 和 Ritumoni Sarma。利用单纯复形构造线性码。*ResearchSquare*，2022年。[12] Vidya Sagar 和 Ritumoni Sarma。利用单纯复形构造的若干二元极小码。*Advances in Mathematics of Communications*，18(2):425–454，2024年。[13] Yansheng Wu 和 Jong Yoon Hyun。与下集相关的 $\mathbb{F}_p + u\mathbb{F}_p$ 上的少重量码及其距离最优格雷像。*Discrete Applied Mathematics*，283:315–322，2020年。[14] Yansheng Wu、Xiaomeng Zhu 和 Qin Yue。由单纯复形构造的最优少重量码。*IEEE Transactions on Information Theory*，PP:1–1，2019年10月。