arXiv:2603.03794v1 [math.DS] 4 Mar 2026

¨等价贝尔单族莫比乌斯变换族与PSL(2, ℂ)的单参数子群

SANDIPAN DUTTA、VANLALRUATKIMI 和 JONATHAN RAMDIKPUIA

Abstract. 我们研究黎曼球面上具有等度量 Baire-一类性质的莫比乌斯变换族。对于双曲型映射 f，我们证明其迭代 $\{f^n\}$ 在吸引盆上构成一个轨道等贝尔第一类族。对于单参数子群 $\{f_t\}$，我们证明它在 $\mathbb{C}$ 的所有紧集上属于等度量 Baire-一类，当且仅当该子群在 SL(2, ℂ) 中相对紧。这为莫比乌斯变换族的等度量 Baire-一类条件提供了动力学刻画。

1. Introduction

莫比乌斯变换理论以及群 PSL(2, ℂ) 在$\widehat{}$扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的作用，一个多世纪以来一直是复分析与$\widehat{}$几何学的核心课题。SL(2, ℂ) 的每个元素都通过分式线性变换作用于 $\widehat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1,$$

且这一作用保持黎曼球面的共形结构。Beardon [Ba], Maskit [Mb],和 Goldman [Gw]后来系统地发展了对这些变换的研究。根据表示矩阵的迹，可将元素分类为椭圆型、抛物型、双曲型和双曲螺旋型，由此可以深入理解 PSL(2, ℂ) 的离散子群及其在黎曼球面上的动力学。尤其是双曲螺旋型情形，展现出丰富的动力学行为：它具有两个不同的不动点，一个是吸引的，另一个是排斥的；这为研究复动力系统中的压缩和扩张现象提供了原型 [Rat]。

与这些几何和动力学发展并行，贝尔第一类函数的概念已成为现代拓扑学和分析中的重要工具。函数f： $X \to Y$ 如果定义在度量空间之间，并且贝尔第一类，就称其为贝尔第一类函数，若它可以表示为一列连续函数的逐点极限。这一概念推广了连续性，并为描述在精确拓扑意义上“几乎连续”的函数提供了框架。Bourgain、Fremlin 和 Talagrand [Bou], Fenecios 等人 [Fj], 以及 Horowitz 和 Todorcevic [Hor]的著作中，对这类函数进行了奠基性研究。近年来，Alikhani-Koopaei [Ak、Ali、Ak19]提出了等度量贝尔一类族这一概念——它是等度连续性的一种推广，其中连续性的一致性

日期：@01:39，星期四 5th 2026年3月。2020 数学主题分类。主要分类 26A18，次要分类 26A21· 37C25 · 37A10 · 37B05。关键词与短语。等度贝尔一类 · 单参数子群 · 等度连续性 · 贝尔一类函数 · 莫比乌斯变换 · SL(2, ℂ)。

从单个连续映射扩展到贝尔第一类函数族。这一概念使得能够在经典等度连续性失效的情形下，统一处理一致收敛与连续性现象。

受动力系统与泛函分析之间这种相互作用的启发，本文研究M¨默比乌斯变换-^族作用于 ℂ时的等度第一类贝尔性质 。我们的重点在于两个基本情形：其一，离散迭代族 $\mathcal{F} = \{f^n : \ n \geq 0\}$，它与双曲变换 $f \in$ SL(2, ℂ)相关联；其二，连续单参数子群 $\mathcal{F} = \{f_t = \exp(tA) : \ t \in [0, \infty)\}$，它由矩阵 $A \in$ SL(2, ℂ)所确定。在第一种情形中，我们证明双曲型映射的迭代在其吸引盆的紧子集上一致地收敛到其吸引不动点，从而表明序列 $\{f^n\}$ 在该区域的每一点处都是轨道等度第一类贝尔的。在第二种情形中，我们对SL(2, ℂ)的单参数子群进行分类，并建立相应族 $\{f_t\}$ 在 $\mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$的紧子集上为等度量贝尔^一类的精确条件。

由双曲螺旋型莫比乌斯变换生成的族，在其吸引盆中各点的紧邻域上构成一个等度量贝尔一类族，并且可利用弦度量构造一个显式的 δ–函数来证明这一性质。此外，对于单参数子群 $\{f_t =$exp$(tA)\}$，族$\curlywedge\{f_t\}$ 在 ℂ 的每个紧子集上都是等度量贝尔一类，当且仅当它在 SL(2, ℂ) 中相对紧，也就是说，它共轭于 SU(2) 的一个子群。这些结果将贝尔意义下的解析正则性与黎曼球面上的几何动力学联系起来，展现了映射族的解析行为如何反映变换群的内在几何结构。

^**定理 1.1.** 令 $f \in \mathrm{SL}(2, \ \mathbb{C})$ 通过相应的莫比乌斯映射作用于 ℂ 。假设f 是双曲螺旋型的，即共轭于 $z \mapsto \lambda z$ ，且 $|\lambda| \neq 1$。那么，对于吸引不动点 p 的吸引盆中的任意点 x，迭代族

$$F = \{f^n : n \geq 0\}$$

在 x处是轨道等度第一类贝尔。此外，见证该性质的一个显式 δ函数由下式给出

$$S(x, r) = \sup_{n \geq 0} \ \sup_{y \in B_r(x)} \ d(f^n(y), f^n(x)), \qquad S(x, r) \to 0 \ \ as \ r \to 0.$$

定理 1.2. 设 $\{f_t\}_{t \in [0, \infty)}$ 是SL(2, ℂ)的单参数子群，其中 $f_t(A) \ =\widehat{} \exp(tA)$ 作用在 ℂ上。则族 $F = \{f_t : \ t \in [0, \infty)\}$ 在 ℂ 的每个^紧子集上是等度量贝尔一类，当且仅当子群 $\{\exp(tA) : \ t \in \mathbb{R}\}$ 在SL(2, ℂ)中相对紧；等价地，当且仅当它共轭于SU(2)的一个子群。

1.1. **论文结构**。 本文结构如下。第2 节回顾了 M¨obius 变换、贝尔一类函数以及黎曼球面的几何结构方面的基本概念和工具。第3节给出了若干引理，这些引理将在主要结果的证明中用到。在第4节中，我们证明了定理1.1 和定理1.2，描述了迭代 M¨obius 变换和 PSL(2, ℂ) 的单参数子群的等度量贝尔一类行为。

2. Preliminaries

本节回顾本文中将贯穿使用的一些基本概念和记号。

2.1. M¨obius 变换与群 SL(2, ℂ)。 SL(2, ℂ)^中的每个元素都通过相应的 M¨obius 变换作用于扩充复平面 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc = 1.$$

M¨obius 变换及其几何性质的理论是经典的（参见 Beardon [Ba], Maskit [Mb]）。SL(2, ℂ) $= \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ 的射影化构成^黎曼球面上的保持定向的共形自同构的全群 ℂ[Ba],[Gw]。

2.2. SL(2, ℂ)的元素分类。 令 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$表示 f。迹决定其类型：

- $|\mathrm{tr}(A)| < 2$ (椭圆型),
- $|\mathrm{tr}(A)| = 2$ (抛物型),
- $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}, |\mathrm{tr}(A)| > 2$ (双曲型),
- $\mathrm{tr}(A) \notin \mathbb{R}$ (双曲螺旋型).

可以看到 [Mb]和 [Rat]证明及动力学解释。
关于 SL(2, ℂ) 的李群结构、指数映射，以及由 SL(2, ℂ) 中矩阵生成的单参数子群的行为的背景知识，可参见
[地狱]和 [知道]。

^**定义 2.1**（弦度量）。 ℂ上的自然度量是球面度量（弦度量）

$$d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}},$$

由 $d(z, \infty) = (1+|z|^2)^{-1/2}$ 延拓而来。

这种度量是经典的，广泛用于研究 M¨obius 变换 [Ba]。^在这种度量下， ℂ 成为一个紧致度量空间。

^ ^**定义 2.2**（吸引盆）。 设 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个莫比乌斯变换，并假设 p 是 f 的一个吸引不动点，也就是说，

$$f(p) = p, \qquad |f'(p)| < 1$$

则 p的吸引盆，也称为吸引域，定义为所有点 x 的集合，这些点在 f 下的正向迭代收敛到 p [Cl]。具体而言

$$\mathcal{A}(p) = \{x \in \widehat{\mathbb{C}} : f^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} p\}.$$

2.3. **贝尔一类函数与等度量贝尔一类族。**

定义 2.3 (Baire-一类)。 函数 $f: X \to Y$ 是贝尔第一类的，如果它是一列连续函数的逐点极限。

背景参考文献包括 Bourgain 等人 [Bou], Fenecios 等人 [Fj], 以及 Horowitz 等人 [Hor]。等度量贝尔一类族的概念由 Alikhani–Koopaei 引入并发展 [Ali],[Ak], ，推广了等度连续性的经典概念。

定义 2.4 （等度量 Baire-一类， [Ali]）。 设 X， Y 为两个度量空间，则函数族 $\mathcal{F} = \{f_t: X \to Y: t \in I\}$ 称为等度量 Baire-一类族，如果存在单一的连续函数序列 g_1， g_2，..... 从 X 映射到 Y，使得对每一个 $f_i \in \mathcal{F}$ 以及每一个 $x \in X$ 我们有

$$g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f_i(x).$$

该 I 在定义 2.4中表示任意指标集。

虽然我们将采用上述定义，但经典的 $\epsilon - \delta$ 定义有助于读者了解等度连续性与等度量 Baire-一类之间的区别。

定义 2.5. 设 (X, ρ),(Y, d) 是两个度量空间，且 $\epsilon > 0$。函数族$\mathcal{F} = \{f_t: X \to Y: t \in I\}$ 称为等度量 Baire-一类函数族，如果存在函数$\delta: X \to \mathbb{R}^+$ ，使得对于所有满足 $\rho(x, y) < \min\{\delta(x) \delta(y)\}$ 的 x, $y \in X$ ，我们有

$$d(f(x), f(y)) \leq \epsilon, \text{ for all } f \in \mathcal{F}.$$

我们将经常用到 Alikhani–Koopaei 的以下结果 [Ali，定理 3。9]。

引理 2.6. 若 $\{f_n\}$ 是紧致度量空间上的贝尔一类映射序列，且该序列一致收敛，则 $\{f_n\}$ 是一个等度量贝尔一类函数族。

2.4. **黎曼球面与球极投影。** 扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 通过球极投影 S^2 同一于球面 [Ba]。 σ 和 σ^{-1} 的标准公式 $\widehat{\mathbb{C}}$赋予 ¨通常的共形结构，使 M S^2 成为

$\widehat{\ }$PSL(2, $\mathbb{C}$) 在 $\mathbb{C}$ 上的作用是忠实且三重传递的 [Ba], [Gw]。这些性质在 M¨obius 变换的共轭分类中起着核心作用。

2.4.1. 共轭与不动点。 PSL(2, $\mathbb{C}$) 的两个元素共轭，当且仅当它们动力等价（它们的作用仅相差一个坐标变换）[Ba], [Mb]。通过计算不动点

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

给出 [Ba]。在双曲型情形下，一个不动点是吸引的，另一个是排斥的 [Rat], [Gw]。

3. Useful Lemmas

在本节中 接下来，我们将建立一些用于证明主要定理的引理 .

引理 3.1。 如果 $f \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 是双曲螺旋型的，那么存在一个 *M¨obius* 变换$h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 以及一个复数 λ，满足 $0 < |\lambda| < 1$，使得

$$f = h^{-1} \circ g \circ h, \qquad g(z) = \lambda z.$$

特别地， f 有两个不同的不动点 p、$q \in \widehat{\mathbb{C}}$，其中 $p = h^{-1}(0)$ 是吸引的，而$q = h^{-1}(\infty)$ 是排斥的。

引理 3.2。 设 x 位于双曲螺旋型映射 $f \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$的吸引不动点 p 的吸引盆中。设 $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$是一个 *M¨obius* 变换，满足 $f = h^{-1} \circ g \circ h$，其中 $g(z) = \lambda z$ 且 $0 < |\lambda| < 1$。那么存在 x 的一个紧邻域 K，使得

$$f^n|_K = h^{-1} \circ g^n \circ h|_K \longrightarrow p$$

在 K 上一致地成立，当 $n \to \infty$时。

证明。 取 x 的一个小邻域 $U \subset \mathbb{C}$，使得 h是一个双全纯映射，将 U 映到开集 $V = h(U) \subset \mathbb{C}$。令 $K = \overline{U}$ 和 $V = h(K)$。由于 $g(z) = \lambda z$且 $0 < |\lambda| < 1$，对任意 $z \in V$，我们有

$$|g^n(z)| = |\lambda|^n |z| \to 0 \quad \text{uniformly on } \overline{V}.$$

因此， $g^n(z)$ 在 V 上 $\to 0$ 一致地。由于 h^{-1} 在紧集 V上连续，该收敛在 h^{-1}作用下仍然成立，因此

$$f^n(z) = h^{-1}(g^n(h(z))) \longrightarrow h^{-1}(0) = p$$

在 K 上一致地。这表明迭代 $\{f^n\}$ 在 x的一个紧邻域上一致收敛到常值映射 p。□

引理 3.3. 设 K 为引理 x中得到的紧邻域3.2。则每个迭代 $f^n|_K$都是连续函数（因而属于贝尔一类），且序列 $\{f^n|_K\}_{n\geq 0}$在 K上一致收敛到常值映射 p。因此，族 $\{f^n|_K\}_{n\geq 0}$ 在 K上是等度量贝尔一类。

证明。 由引理3.2 可知， $f^n|_K \to p$ 在紧度量空间 K上一致收敛。由于每个 f^n 都是莫比¨乌斯变换，因此它在 $\mathbb{C}$上连续，故属于贝尔一类。

由引理2.6（该引理指出，紧致度量空间上一致地收敛的贝尔一类函数序列构成一个等度量贝尔一类族）可知，序列$\{f^n|_K\}$在 K上是等度量贝尔一类。

因此，对每一个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ （依赖于 x），使得对所有 y满足 $d(y, x) < \delta$，

$$d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon \quad \text{for all } n \geq 0.$$

这就证明了 $\{f^n\}$ 在 x处是轨道等度第一类贝尔。 □

引理 3.4. 设 d 表示 $\mathbb{C}$上的弦度量。对 $r > 0$，定义

$$S(x, r) = \sup_{n\geq 0} \sup_{y \in B_r(x)} d(f^n(y), f^n(x)).$$

则：

(i) $S(x, r)$ 对每个固定的 $r > 0$ 都是有限的；

(ii) $S(x,r) \to 0$ 当 $r \to 0$ 时；*(iii)* 函数 $r \mapsto S(x,r)$ 是上半连续的。

证明。 对每个固定的 $r > 0$，集合 $\overline{B_r(x)} \cap K$ 是紧的，并且每个 f^n 在 K 上连续。因此，$S(x, r)$ 是有限的，因为它是有限多个有界量的上确界。

为证明极限性质，令 $\varepsilon > 0$。由引理 3.2，$f^n \to p$ 在 K 上一致收敛。因此，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{y \in B_r(x)} d(f^n(y), p) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{for all } n \geq N.$$

对于有限多个迭代 f^0，f^1，$\ldots$，f^{N-1}，在 x 处的连续性保证存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{y \in B_\delta(x)} d(f^n(y), f^n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{for all } 0 \leq n < N.$$

结合这些估计，我们得到对所有 $n \geq 0$ 和 $y \in B_\delta(x)$，

$$d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon.$$

因此，当 $r \to 0$ 时，$S(x, r) \to 0$。

最后，根据上确界的定义，$S(x, r)$ 的上半连续性直接可得，因为扩大 r 只会增大（或保持不变）取上确界所涉及的集合。□

引理 3.5. 沿用前面引理中的记号，存在常数 $C > 0$，使得对所有充分接近 x 的 y 以及所有 $n \geq 0$，

$$|f^n(y) - f^n(x)| \leq C\,|\lambda|^n\,|h(y) - h(x)|.$$

因此，可以采用更简单的界

$$S(x, r) \leq C'\,r,$$

当 $r \to 0$ 时，它也满足 $S(x,r) \to 0$。

证明。 由于 $f = h^{-1} \circ g \circ h$，且 $g(z) = \lambda z$，对任意 y，我们有

$$f^n(y) = h^{-1}(\lambda^n h(y)), \qquad f^n(x) = h^{-1}(\lambda^n h(x)).$$

根据均值不等式以及 h^{-1} 在紧集 $V = h(K)$ 上的连续性，存在常数 $C > 0$，使得

$$|h^{-1}(z_1) - h^{-1}(z_2)| \leq C\,|z_1 - z_2|, \qquad \text{for all } z_1, z_2 \in V.$$

因此，

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |h^{-1}(\lambda^n h(y)) - h^{-1}(\lambda^n h(x))| \leq C\,|\lambda|^n\,|h(y) - h(x)|.$$

由于 h 在局部在 x 附近满足利普希茨条件，即对于某个 $L > 0$，有 $|h(y) - h(x)| \leq L\,|y - x|$，因此我们得到

$$|f^n(y) - f^n(x)| \leq (CL)\,|\lambda|^n\,|y - x|.$$

对 $y \in B_r(x)$ 取上确界，得到 $S(x, r) \leq C'r$，其中某个 $C' > 0$ 满足该式；当 $r \to 0$ 时，该值趋于 0。这就给出了一个明确的 δ–函数，用以证明在 x 处具有等度贝尔第一类性质。□

引理 3.6。 [Mb] 每个单参数子群 $\{\exp(tA) : t \in \mathbb{R}\}$ 属于 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 在共轭意义下，均属于以下四种类型之一：

(i) 椭圆型： 共轭于 $\mathrm{SU}(2)$ 的一个子群。矩阵 A 具有纯虚特征值 $\pm i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$。相应的 ***Möbius*** 变换在 $\mathbb{C}$ 上作用为旋转 $\widehat{}$。

(ii) 双曲型：共轭于

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\widehat{}$该作用在 $\mathbb{C}$ 上有两个不动点，一个是吸引的，另一个是排斥的。***(iii)*** 抛物型： 共轭于

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\widehat{}$相应的 ***Möbius*** 变换在 $\mathbb{C}$ 上有一个不动点 .

(iv)双曲螺旋型： 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，特征值为 $e^{(\alpha+i\beta)t}$ 和 $e^{-(\alpha+i\beta)t}$，其中 α、$\beta \in \mathbb{R}$、$\alpha \neq 0$ 和 $\beta \neq 0$。该作用有两个不动点，一个是吸引的，另一个是排斥的，并伴有旋转。

$\widehat{}$ $\widehat{}$**引理 3.7**。 单参数族 $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}$ 中的每个 $f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f_t = \exp(tA)$，其中 $\widehat{}$ $\frown A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，都是 $\mathbb{C}$ 的同胚。因此，对于任意紧 $K \subset \mathbb{C}$，每个$f_t|_K$ 都是连续的（因而属于贝尔第一类）。然而，每个 f_t 的连续性并不意味着族 $\mathcal{F} = \{f_t : t \in [0,\infty)\}$ 在 K 上是等度量贝尔一类。

证明。与矩阵 $M \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ 对应的莫比乌斯变换作用于$\widehat{}$黎曼球面 $\mathbb{C}$的方式为

$$z \mapsto M \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

在点 ∞ 处按通常方式解释。这类映射是分母不恒为零的有理函数；因此它们在 $\mathbb{C}$ 上连续。由于 $\det M = 1 \neq 0$，每个莫比乌斯映射都可逆，且其逆变换仍是一个莫比乌斯映射（对应于 $M^{-1} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$）。因此，每个 $f_t = \exp(tA)$ 都是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的同胚。

$\widehat{}$限制到紧集 $K \subset \mathbb{C}$ 后仍保持连续性，因此每个 $f_t|_K$ 都连续，特别地，它是 K 上的第一类贝尔函数。

最后一项是关于等度量贝尔一类性质强度的说明：单个映射属于第一类贝尔函数，意味着每个映射都具有逐点逼近性质；而属于等度量贝尔一类，则要求同一个连续函数序列 $\{g_n\}$ 在K 上逐点收敛到每一个 f_t。对于不可数族（如本例）来说，这一要求强得多，而且一般未必成立——在后续引理中，我们将给出动力学障碍（例如吸引不动点和塌缩行为），说明为何不存在一个逼近序列能适用于整个函数族。□

$\widehat{}$**引理 3.8.** 设 $\{f_t\}_{t\geq 0}$ 是作用于 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个单参数子群。设 $\frown K \subset \mathbb{C}$ 为紧集，并假设存在一个非空开集 $U \subset K$ 和一点 $\frown p \in \mathbb{C}$，使得对某个序列 $t_n \to \infty$，有

$$\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(z) = p \qquad \textit{for every } z \in U.$$

于是 $\mathcal{F} = \{f_t : t \geq 0\}$ 在 K上不是等度量贝尔一类。

证明。反设 $\mathcal{F}$ 在 K上是等度量贝尔一类。则存在 K 上的一个连续映射序列 $\{g_m\}_{m\geq 1}$，使得对每个 $t \geq 0$ 以及每个 $x \in K$，我们有

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = f_t(x).$$

任取一点 $z_0 \in U$。由于 $f_{t_n}(z_0) \to p$ as $n \to \infty$，值 $f_{t_n}(z_0)$ 最终会任意接近 p。另一方面，对每个固定指标 n，假设 $g_m \to f_{t_n}$ 逐点成立，则有

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z_0) = f_{t_n}(z_0).$$

但左侧与 n 无关（它是单个序列 $\{g_m(z_0)\}_m$ 的极限），因此我们必有

$$f_{t_n}(z_0) = \lim_{m\to\infty} g_m(z_0) \quad \text{for all } n.$$

取 $n \to \infty$，得到 $p = \lim_{n\to\infty} f_{t_n}(z_0) = \lim_{m\to\infty} g_m(z_0)$。

现在取一个固定的有限时间来计算相同的极限，例如 $t = 0$。由于 $g_m \to f_0$ 逐点成立，我们有

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z_0) = f_0(z_0) = z_0.$$

将 $\lim_{m\to\infty} g_m(z_0)$ 的两个表达式合并，得到 $p = z_0$，这与假设 $f_{t_n}(z_0) \to p$ 不同于 z_0 相矛盾（只要至少有一个 f_t 在 U 上不是恒等映射，就会出现这种情况——特别是 $f_0 = \mathrm{id}$ 不等于趋向于 p 的常值映射）。因此，不存在一个序列 $\{g_m\}$ 能同时逼近每个 f_t，所以 $\mathcal{F}$ 在 K 上不是等度量贝尔一类。□

引理 3.9。设 $\{f_t\}_{t\geq 0} = \{\exp(tA)\}_{t\geq 0}$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的单参数子群。若子群 $\{\exp(tA)\}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中相对紧，则对每个紧集 $K \subset \mathbb{C}$，族 $\mathcal{F} = \{f_t : t \geq 0\}$ 在 K 上都是等度量贝尔一类。

证明。假设 $\{\exp(tA)\}$ 相对紧，并记 $G = \overline{\{\exp(tA) : t \geq 0\}}$，即在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中的闭包。因此 G 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的一个紧（阿贝尔）子群。考虑求值映射

$$\Phi : G \times K \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \qquad \Phi(g, z) = g \cdot z,$$

该映射是连续的，因为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 上的群作用是连续的。对每个 $g \in G$，限制映射 $g|_K$ 是连续映射 $K \to \mathbb{C}$，因此集合

$$\mathcal{G}_K := \{g|_K : g \in G\} \subset C(K, \widehat{\mathbb{C}})$$

是紧集 G的连续像，因此在 $C(K,\mathbb{C})$ 上的统一拓扑下是紧的。

紧致度量空间是可分的，因此存在一个序列 $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{G}_K$，在一致范数意义下稠密于 $\mathcal{G}_K$。特别地，对于每个 $f \in \mathcal{F}$（注意 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_K$），我们有 $h_n \to f$ 在 K上一致收敛，因此对于每个 $x \in K$，$h_n(x) \to f(x)$。由于每个 h_n都是连续的，序列 $\{h_n\}$ 给出了定义在 K上的一个连续函数序列，它逐点收敛到每个 $f \in \mathcal{F}$。因此，$\mathcal{F}$ 在 K上是等度量贝尔一类的。□

4. Results regarding Equi-Baire One Families of Möbius Transformations and One–Parameter Subgroups of PSL(2, $\mathbb{C}$)

4.1. 定理 1.1 的证明。每个 M¨obius 映射 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 在 $ad - bc = 1$ 时，其不动点由 $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ 给出。在双曲型情形下，这个二次方程有两个不同的根 p、q，其矩阵的特征值 λ_1、λ_2 满足 $\lambda_1\lambda_2 = 1$，且$|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$。一个将 $p \mapsto 0$ 和 $q \mapsto \infty$ 映到 $h(z) = \dfrac{z-p}{z-q}$ 的莫比乌斯变换 ¨（例如）给出

$$g = h \circ f \circ h^{-1},$$

它固定 0 和 ∞，因此 $g(z) = \lambda z$ 对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$。由于 f 是双曲螺旋型的，$0 < |\lambda| < 1$因此 $f = h^{-1} \circ g \circ h$ 具有所述性质。

由引理 3.2 设 x 位于 p的吸引盆中。那么存在一个紧邻域 K 属于 x 使得

$$f^n|_K = h^{-1} \circ g^n \circ h|_K \longrightarrow p$$

在 K 上一致地。

选取 U，使其位于 x 周围，且 h 双全纯映射到 $V = h(U)$。令 $K = U$ 且$V \supseteq h(K)$。由于 $g(z) = \lambda z$ 且 $0 \leq |\lambda| < 1$，$g^n(z) = \lambda^n z \to 0$ 在 V 上一致地。由 h^{-1} 在 V 上的连续性，

$$f^n(z) = h^{-1}(g^n(h(z))) \to h^{-1}(0) = p$$

在 K 上一致地。

由引理 3.3每个 $f^n|_K$是连续的（因而为贝尔一类），且序列 $\{f^n|_K\}$一致收敛于 p 在 K上。由 [Ali，定理 3.9],族 $\{f^n|_K\}$在K上是等度量贝尔一类。

紧致度量空间 K 上的一致收敛由引理 3.2 得出。每个 f^n都是 M¨obius 映射，因此连续且为贝尔一类。由 [Ali，定理 3.9], ，紧致度量空间上贝尔一类函数的一致收敛序列是等度量贝尔一类。因此$\{f^n|_K\}$是等度量贝尔一类，从而对每个 $\varepsilon > 0$ 给出一个 $\delta > 0$，使得只要 $d(y, x) < \delta$，对所有 n 都有 $d(f^n(y)\ f^n(x)) < \varepsilon$。

由引理 3.4定义

$$S(x, r) = \sup_{n \geq 0} \sup_{y \in B_r(x)} d(f^n(y), f^n(x)).$$

于是 $S(x,\ r)$ 是有限的，$S(x,\ r) \to 0$ 当 $r \to 0$ 时成立，并且 $r \mapsto S(x,\ r)$ 是上半连续的。

K 的紧致性以及每个 f^n 的连续性意味着其有限性。令 $\varepsilon > 0$。由引理 3.2，$f^n \to p$ 一致地成立，因此当 $n \geq N$ 足够大时，对于 $y \in B_r(x)$，有 $d(f^n(y)\ p) < \varepsilon/3$。对于 $n < N$，在 x 处的连续性给出 $\delta > 0$，使得对于 $y \in B_\delta(x)$，有 $d(f^n(y)\ f^n(x)) < \varepsilon/3$。因此，对于所有 $n \geq 0$，若 $y \in B_\delta(x)$，则 $d(f^n(y)\ f^n(x)) < \varepsilon$，从而证明 $S(x, r) \to 0$。上半连续性由扩大 r 只会增大上确界的定义域这一点得出。

由 3.5 存在 $C > 0$ 使得对所有 $n \geq 0$ 和 y 在 x附近，

$$|f^n(y) - f^n(x)| \leq C\,|\lambda|^n\,|h(y) - h(x)|.$$

因此，当 $r \to 0$ 时， $S(x,\ r) \le C'r$ 且 $S(x,\ r) \to 0$。

由于 $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$ 满足 $g(z) = \lambda z$,

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |h^{-1}(\lambda^n h(y)) - h^{-1}(\lambda^n h(x))| \le C\,|\lambda|^n\,|h(y) - h(x)|$$

对某个 $C > 0$ （ h^{-1} 在 V 上的 Lipschitz 常数）成立。由于 h 是局部利普希茨的， $|h(y) - h(x)| \le L|y - x|$，从而得到 $|f^n(y) - f^n(x)| \le C'|\lambda|^n|y - x|$。对 $y \in B_r(x)$ 取上确界，得到 $S(x,\ r) \le C'r$。

4.2. **定理 *1.2* 的证明。** 我们将证明分为两部分。

充分性： 假设单参数子群 $G = \{\exp(tA) :\ t \ge 0\}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中具有相对紧的闭包。由引理 3.7，每个 $f_t = \exp(tA)$ 都是 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的同胚，因此每个限制映射 $f_t|_K$ 在紧集 $K \subset \mathbb{C}$ 上连续（因而属于第一类贝尔）。由引理 3.9，只要 $\{\exp(tA)\}$ 相对紧，族 $F|_K = \{f_t|_K :\ t \ge 0\}$ 在 K 上等度量贝尔一类。

必要性： 接下来假设子群

$$H = \{\exp(tA) : t \in \mathbb{R}\}$$

在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中不是相对紧的。根据引理3.6中给出的单参数子群分类， H 必为双曲型、抛物型或双曲螺旋型。在这 $\widehat{\mathbb{C}}$ 三种情形下，它在 $\mathbb{C}$ 上的作用都存在一个吸引点（或抛物型极限点） $p \in \mathbb{C}$。 $\widehat{\mathbb{C}}$ 因此，存在一个非空开集 $U \subset \mathbb{C}$ 和一个序列 $t_n \to \infty$ 使得

$$f_{t_n}(z) \to p \qquad \text{for every } z \in U.$$

$\widehat{\mathbb{C}}$ 设 $K \subset \mathbb{C}$ 是任意满足 $U \subset K$ 的紧集。由引理 3.8，若存在非空开集 $U \subset K$ 和一个序列 $t_n \to \infty$ 满足 $f_{t_n}(z) \to p$ 对所有 $z \in U$ 均成立，则族 $\{f_t :\ t \ge 0\}$ 在 K 上不可能是等度量贝尔一类。因此， F 在 U 的每个紧邻域上都不是等度量贝尔一类。

结合两个方向，我们得出：族 $F = \{f_t : t \ge 0\}$ 在 $\mathbb{C}$ 的每个紧子集上都是等度量贝尔一类 $\widehat{\mathbb{C}}$，当且仅当子群 $\{\exp(tA)\}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中相对紧；而这恰好等价于它共轭于 $\mathrm{SU}(2)$ 的某个子群。

5. Conclusion

引理 3.1-3.5 与定理 1.1 表明，迭代 $\{f^n\}$ 在 p 的紧邻域 K 上一致收敛于 x，该族在此处是等度量贝尔一类（根据 [Ali，定理 3.9]），且函数 $S(x,r)$ 是一个显式的 δ–函数。因此，族 $F = \{f^n :\ n \ge 0\}$ 在 x 处是轨道等度第一类贝尔。

综合定理 1.2 的充分性与必要性论证，我们得出结论：单参数族 $F = \{f_t :\ t \ge 0\}$ 的等贝尔一类行为完全由子群 $\{\exp(tA) :\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$ 的动力学类型所决定。若该 $\widehat{\mathbb{C}}$ 子群是相对紧的——等价地，共轭到 $\mathrm{SU}(2)$ 中——则其在 $\mathbb{C}$ 上的作用在紧集上是一致正则的，并且由引理 3.9 可知，存在单一序列的 $\widehat{\mathbb{C}}$ 连续函数，逐点收敛到每一个 f_t，且在任意紧 $K \subset \mathbb{C}$ 上成立，从而证明 F 在 K 上是等度量贝尔一类的。

反之，当该子群为双曲型、抛物型或双曲螺旋型时，其作用具有一个吸引（或抛物极限）点，从而在非空开集上导致坍缩行为。由引理 3.8，这种行为使得任何单一的连续函数序列都无法同时逼近 F 中的所有映射，因此在这些情形下，该族在每一个紧邻域上都不是等度量贝尔一类的。

因此，$F = \{f_t : t \geq 0\}$ 在 $\mathbb{C}$ 的每个紧子集上都是等度量贝尔一类，当且仅当子群 $\{\exp(tA)\}$ 在 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中相对紧。

Declaration of competent interest

作者声明不存在利益冲突。

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

Acknowledgments

Dutta 感谢米佐拉姆大学提供的研究与促进基金 F.No.A.1-1/MZU(Acad)/14/25-26。Vanlalruatkimi 和 Ramdikpuia 也感谢米佐拉姆大学提供的研究奖学金，文件编号为 No.2-5/MZU(Acad)24/PF。

References

[Ak19] Alikhani-Koopaei，Aliasghar。“典型有界贝尔一类函数的链递归集。”《拓扑学及其应用》257（2019）：1-10。[Ak] Alikhani-Koopaei，Aliasghar。“有界贝尔一类函数的不动点集。”《亚欧数学杂志》12.03（2019）：1950040。[Ali] Alikhani-Koopaei，Aliasghar。“度量空间上的等度量 Baire-一类函数族：等度连续性的一种推广及其若干应用。”《拓扑学及其应用》277（2020）：107170。[Ba] Beardon，Alan F.《离散群的几何学》。第91卷。施普林格科学与商业媒体，2012。[Bou] Bourgain，Jean、David H. Fremlin 和 Michael Talagrand。“Baire 可测函数的逐点紧集。”《美国数学杂志》100.4（1978）：845-886。[Cl] Carleson，Lennart 和 Theodore W. Gamelin。《复动力系统》。施普林格科学与商业媒体，2013。[Fj] Fenecios，Jonald P.、Emmanuel A. Cabral 和 Abraham P. Racca。“贝尔一类函数及其不连续点集。”《波希米亚数学》141.1（2016）：109-114。[Gw] Goldman，William Mark。《复双曲几何》。牛津大学出版社，1999。[Hel] Helgason，Sigurdur。《微分几何、李群与对称空间》。第80卷。学术出版社，1979。[Hor] Horowitz，Haim 和 Stevo Todorcevic。“贝尔一类函数的紧集与极大几乎不相交族。”arXiv 预印本 arXiv:1905.05898（2019）。[kn] Knapp，Anthony W. 和 Anthony William Knapp。《李群：超越入门》。第140卷。波士顿：Birkh¨auser，1996。[Mb] Maskit。《克莱因群》。第287卷。施普林格科学与商业媒体，2012。[Rat] Ratcliffe，John G.《双曲流形基础》。纽约州纽约：施普林格纽约，2006。

Department of Mathematics and Computer Science, Mizoram University, Aizawl 796004, Mizoram

电子邮箱地址: sandipandutta98@gmail.com

Department of Mathematics and Computer Science, Mizoram University, Aizawl 796004,Mizoram

电子邮箱地址: aruatihmar39@gmail.com

Department of Mathematics and Computer Science, Mizoram University, Aizawl 796004,Mizoram

电子邮箱地址: jonathanramdikpuia@gmail.com