用于神经科学的投影各向同性正态分布

Kanti V. Mardia[1] 和 Antonio Mauricio F.L. Miranda de Sá[2]

[1] 利兹大学统计系，英国利兹伍德豪斯，LS2 9JT；
k.v.mardia@leeds.ac.uk

[2] 里约热内卢联邦大学生物医学工程项目，巴西；
amflms@peb.ufrj.br

arXiv:2603.03816v1 [stat.ME] 4 Mar 2026

摘要

本文的研究动机源于神经科学中的一项前沿应用：分析闪光刺激下记录的脑电图（EEG）信号。根据常用的信号处理假设，分析这类应用时只需使用脑电图的相位角。我们证明，这些假设意味着相位服从投影各向同性正态分布。我们重新考察了这一分布，并推导出若干新性质，包括其三角矩的闭式表达式。随后，我们研究平均合向量及其平方的分布——这是基于相位的脑电图研究中的一个重要统计量。合向量的分布在解析上较为复杂；为使其具有实际应用价值，我们基于广为人知的冯·米塞斯分布的合向量分布，提出了两种近似。接着，我们研究了这一投影各向同性正态分布的推断问题。最后，我们通过一项闪光刺激实验脑电图数据的应用来说明该方法。

关键词：分量同步性度量、脑电图、相位角、合向量、得分匹配近似、冯·米塞斯分布

1 引言

我们的论文受到生物医学信号分析领域一项前沿应用的启发，该领域致力于分析生物医学信号。这些信号是在器官、细胞或分子层面从人体采集的。生物医学信号种类繁多，包括脑电图（EEG），它反映了来自大脑的电活动，

以及心电图（ECG），它反映了来自心脏的电活动，此外还有其他信号（例如，参见 Muthuswamy （ 2004 ）、 Subasi （ 2019 ）和 Anand 等人（ 2022 ））。心电图记录广为人知（用于心脏检查）。Mushtaq 等人（2024）在回顾脑电图研究一百年历程时，通过指出“未来的工作应致力于开发透明、可复现，并且能够跨人群和情境进行泛化的脑电图处理流程”，强调了方法学进步的重要性。这一关于改进工作流程的倡议，也隐含地包括采用新的统计工具和分析框架，以处理脑电图数据中固有的复杂性和变异性。

脑电信号通常是单变量时间序列（Muthuswamy 和 Thakor，1998）。对此类序列进行傅里叶变换，可定量描述其频率内容。对于神经学数据，考察频谱或频域特征往往与研究时域行为同样重要。例如，不同睡眠阶段的脑电图（EEG）变化，通过频域特征能够更清晰地呈现。尽管我们的应用聚焦于闪光刺激引发的脑电图响应（第8节），但相同原理也适用于广泛的实验范式。

模型。 为使这一框架形式化，我们将 EEG记录视为轨迹或单变量连续时间序列 $x(t)$，其中 $t \in \mathbb{R}^+$ （非负实数轴），通常认为其定义在 $0 \le t < \infty$ 上。

在一些合理假设下，Mirandade S$\acute{a}$ 等人（2002）以及 Miranda de S$\acute{a}$ 和 Felix（2003）提出，可以将 $x(t)$ 在频率 j 处的离散傅里叶变换 Y_j 建模为

$$Y_j = \mu + e_{1j} + i\, e_{2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$，且 e_{1j} 和 e_{2j} 是相互独立的误差项。此外，多个研究表明，对于我们这类脑电应用，傅里叶变换的相位 比其幅值起着更主要的作用（Busch 等人，2009；Busch 和 VanRullen，2010；Mathewson 等人，2009；Notbohm 和 Herrmann，2016）。也就是说，我们只关注（1.1）中 Y_j 的角分量 θ。尽管 Miranda de S$\acute{a}$ 等人（2002）以及 Miranda de S$\acute{a}$ 和 Felix（2003）提出了联合模型（1.1），但他们并未意识到由此得到的相位分布属于投影正态分布族（例如，参见 Mardia 和 Jupp（2000））。在第2节中，我们针对所研究的情形推导出这一分布，并将其称为投影各向同性正态分布（PIN）。在第3节中，我们求得 PIN 分布的总体矩，并据此构造两种冯·米塞斯分布近似：标准近似，以及一种基于得分匹配法的新近似。

¯方向统计学中广为人知的汇总统计量“平均合向量” R 被发现能够捕捉傅里叶变换相位的行为（见第4节）。在生物医学文献中，其平方（$\bar{R}^2$）也被使用，并被称为“分量同步度量（CSM）”。为了对 CSM 进行统计推断，我们需要了解 PIN分布下合向量长度 R 的抽样分布，该分布

在第4.2节中进行了研究。可以看出，该分布较为复杂，但可使用冯·米塞斯情形下的分布进行近似。对于 PIN分布的集中参数较小或较大的情况，两种近似都非常准确；即使在中等范围内，损失也很小（见第4节和第5节）。

在第6节中，我们讨论参数估计，包括最大似然法；最大似然估计只能通过数值方法获得，因此我们给出了一些近似的闭式估计，其中包括基于得分匹配法的估计。在对刺激作出确定性响应的情况下，各试次的相位将完全相同，而噪声分量的相位分布将是均匀的。因此，相位本身成为构造无响应原假设的关键量。在第7节中，我们讨论 PIN 分布下的假设检验，并为 CSM 提供置信区间。接着，在第8节中，我们将这些结果应用于闪光刺激下记录的生物医学脑电信号。最后，第9节概述本文的主要贡献，并提出后续研究方向。补充材料见附录；附录1 A 详细考察脑电模型；附录2 B 给出 PIN 分布矩公式的证明，附录3 C 则进一步考察冯·米塞斯分布对 PIN 分布的两种近似。

2 投影各向同性正态（PIN）分布

设（x_1，x_2）^{T} 服从均值向量为（μ_1，μ_2）^{T}、协方差矩阵为 $\sigma^2\boldsymbol{I}$ 的各向同性二元正态分布，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。设

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta, \quad r > 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{2.1}$$

则根据傅里叶变换模型，θ 是相位角。θ 的这一分布是 Mardia（1972）第 92 页方程（3.4.17）中给出的广义投影正态分布的一个特例，该方程基于具有一般均值向量和一般协方差矩阵的二元正态分布。为了推导我们情形下的投影正态分布，在该方程中代入

$$\mu = \mu_1 = \beta\cos\mu, \quad \nu = \mu_2 = \beta\sin\mu, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2, \quad \rho = 0, \tag{2.2}$$

从而得到如下形式的投影正态分布，其中 $\gamma = \beta^2/(4\sigma^2)$。

定义 1。θ 的投影各向同性正态（*PIN*）分布具有如下概率密度函数（*pdf*）：

$$f(\theta;\mu,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\exp(-2\gamma) + 2\sqrt{\gamma}\cos(\theta-\mu)\,\Phi(2\sqrt{\gamma}\cos(\theta-\mu))\,\phi(2\sqrt{\gamma}\sin(\theta-\mu)), \tag{2.3}$$

其中，$-\pi \leq \theta \leq \pi$、$\gamma \geq 0$和 γ 是 *PIN* 分布的“集中参数”。我们称 θ 服从 ***PIN(μ, γ)*** 分布；若 $\mu = 0$，则简称为 ***PIN(γ)***。

我们有时写作

$$\mathrm{SNR} = 2\gamma, \gamma = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{SNR}, \tag{2.4}$$

其中，SNR 表示“信噪比”，已在第 1 节中定义。

投影正态分布已广为人知（例如，参见 Mardia 和 Jupp（2000））。一般情形下圆形情形的分布由 Mardia（1972）给出，其中包括若干特例。请注意，在圆形情形下，Mardia 和 Jupp（2000）也将其称为偏移正态分布，Kendall（1974）称其为位移正态分布，而 Watson（1983）称其为角正态分布。

在实践中，冯·米塞斯分布、包裹正态分布和 PIN分布都可视为“圆正态分布”。它们各有优点；例如，PIN分布和包裹正态分布最容易模拟，而在检验均匀性时，冯·米塞斯分布可导出 Rayleigh 检验。请注意，这三种分布都可以由二元正态分布或一元正态分布导出：冯·米塞斯分布是 (r, θ) 中给定 r 时 θ 的条件分布，PIN分布是 (r, θ) 中 θ 的边缘分布，而包裹正态分布则通过对一元正态分布进行包裹得到。

因此，从 Kendall (1974) 开始，使用集中参数的矩估计量（$\mu = 0$ 不失一般性）对这三者进行比较，也就不足为奇了。Watson (1983)（Presnell 等人 (1998) 最近对此作了总结）进行了全面比较，并得出结论：最大差异出现在$\rho = .785$ ($\kappa = 2.7$, $\gamma = 0.64$)处，其中 ρ 表示总体合力。第3节的 3.1 节进一步研究了由冯·米塞斯分布近似的 PIN 分布。

现在我们给出 PIN 分布的一些性质。由于 $\gamma \to \infty$, $\Phi(2\sqrt{\gamma}\cos\theta) \to 1$，因此由 (2.3) 可得

$$f(\theta; \gamma) \propto \sqrt{\gamma}\,|\cos\theta|\,\exp(-2\gamma\sin^2\theta)\,d\theta, \tag{2.5}$$

也就是说,

$$f(\theta) \propto \exp(-2\gamma\theta^2), \tag{2.6}$$

因此，θ服从 $N(0,\ 1/(4\gamma))$ 分布，这意味着 $4\gamma = 2$ 信噪比是集中参数，尽管我们将 γ 作为集中参数。可以看出

$$f(-\theta; \gamma) = f(\theta; \gamma),$$

因此，该分布关于 $\theta = 0$ 对称。此外，令 $2\sqrt{\gamma} = \delta$。那么，$f(\theta; \gamma)$ 对 θ 的导数为

$$-2\delta\sin\theta\left[(1+\delta)\,\Phi(\delta\cos\theta)\,\phi(\delta\sin\theta) + \delta^2\cos^2\theta\,\Phi(\delta\cos\theta)\right].$$

由于方括号中的各项均为正，可以验证众数位于 $\theta = 0$。众数处的概率密度函数值为

$$\frac{1}{2\pi}\exp(-2\gamma) + \sqrt{2\gamma/\pi}\,\Phi(2\sqrt{\gamma}),$$

反众数位于 $\theta = \pi$ 处

$$\frac{1}{2\pi}\exp(-2\gamma) - \sqrt{2\gamma/\pi}\,\Phi(2\sqrt{\gamma}).$$

模拟。从 PIN 分布中模拟一个样本很简单。大多数统计软件都包含用于模拟正态分布的程序，因此我们可以从以下分布中抽取一个样本

$$x_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2), \qquad x_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2),$$

并由（2.1）得到 θ 的样本值。注意，由于我们从二元正态分布出发，因此可以通过众所周知的博克斯–穆勒变换，以一种简单的方法进行模拟。

3 总体矩与冯·米塞斯近似

现在，我们求出 PIN 分布的三角矩，并将在下文中用它们来求得冯·米塞斯分布对 PIN 分布的近似。我们不失一般性地假设这两个分布的平均方向均为零。经过一些繁琐的代数运算，可以证明以下结论成立：

$$E(\sin\theta) = 0, \quad E(\sin 2\theta) = 0, \quad E(\cos\theta) = \sqrt{\pi\gamma/2}\exp(-\gamma)\{I_0(\gamma) + I_1(\gamma)\}, \tag{3.1}$$

其中，$I_p(\cdot)$ 是阶数为 p的第一类修正贝塞尔函数，定义为

$$I_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^{m+\frac{p}{2}}}{m!\,\Gamma(p+m+1)}. \tag{3.2}$$

这一结果最早由 Kendall（1974）提出。此外，总体合力 ρ仅为 $E(\cos\theta)$；请注意，此处 $E(\cos\theta) \geq 0$。我们还有 $E(\cos\theta\sin\theta) = \frac{1}{2}E(\sin 2\theta) = 0$（见下文）。

事实上，我们将上述结果推广到更高阶的矩，结果如下。

定理2。

$$E(\sin p\theta) = 0, \tag{3.3}$$

$$E(\cos p\theta) = \sqrt{\pi\gamma/2}\exp(-\gamma)\{I_{(p-1)/2}(\gamma) + I_{(p+1)/2}(\gamma)\}. \tag{3.4}$$

其中 p 是一个整数。

证明见附录 2。

注意，对于偶数阶矩，(3.4) 可简化如下。对于 $p = 2k$，根据 Abramowitz 和 Stegun（1964年）方程 (10.2.4)，第 445 页，可得

$$\sqrt{\pi\gamma/2}\, I_{k+1/2}(\gamma) = \gamma^k \left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\right)^k \frac{\sinh\gamma}{\gamma}.$$

在 (3.4) 中将此表达式用于 $k = 0$，1，并结合 $p = 2$，可以证明

$$E(\cos 2\theta) = 1 - \frac{\exp(-\gamma)}{\gamma}\sinh\gamma. \tag{3.5}$$

有趣的是，在这种情况下，第二个余弦矩比 (3.1) 给出的第一个余弦矩更简单。

3.1 冯·米塞斯近似

在圆上，冯·米塞斯分布（与正态分布一样）有两个参数，角度 θ 的概率密度函数为

$$f(\theta;\mu,\kappa) = \frac{\exp\{\kappa\cos(\theta-\mu)\}}{2\pi I_0(\kappa)}, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \tag{3.6}$$

其中 μ 为平均方向，$0 \le \mu < 2\pi$，κ为集中（“方差倒数”）参数，$\kappa \ge 0$，$I_0(\kappa)$ 为式（3.2）中给出的零阶第一类修正贝塞尔函数。该分布是对称的，众数位于 μ。对于$\kappa = 0$，θ 在圆上均匀分布。对于较大的 κ，θ 近似服从均值为 μ 、方差为 $2/\kappa$ 的正态分布。我们将该分布记为 vM(μ，κ)；当$\mu = 0$ 时，将该分布记为 vM(κ)。

现在我们说明如何用冯·米塞斯分布 vM(κ) 近似 PIN 分布 PIN(γ)，其集中参数为 κ。

3.1.1 标准冯·米塞斯近似：近似1

标准近似是令两个分布的矩 $E(\cos\theta)$相等。也就是说，

$$A(\kappa) = \sqrt{\pi\gamma/2}\exp(-\gamma)\{I_0(\gamma)+I_1(\gamma)\} \quad \text{or} \quad \kappa = A^{-1}\Big(\sqrt{\pi\gamma/2}\exp(-\gamma)\{I_0(\gamma)+I_1(\gamma)\}\Big), \tag{3.7}$$

其中，$A(\kappa) = I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$，而 $I_p(\cdot)$ 表示(3.2)中给出的、阶数为 p 的第一类修正贝塞尔函数。我们将(3.7)定义的近似称为近似1。

由(3.7)可得，下式表明

$$\text{for small } \kappa \text{ or for small } \gamma, \qquad \kappa = \sqrt{2\pi\gamma}, \tag{3.8}$$

而

$$\text{for large } \kappa \text{ or for large } \gamma, \qquad \kappa = 4\gamma. \tag{3.9}$$

为推导近似1在κ较小和较大时的这些表达式，我们采用第一类修正贝塞尔函数的标准展开式，如 Mardia 和 Jupp（2000）附录1所给出。我们将下列近似代入（3.7），证明如下：

$$\text{For small } \kappa: \qquad I_0(\kappa) \approx 1, \qquad I_1(\kappa) \approx \kappa. \tag{3.10}$$

$$\text{For large } \kappa: \qquad I_0(\kappa) \approx \frac{\exp(\kappa)}{\sqrt{2\pi\kappa}}\left(1+\frac{1}{8\kappa}\right), \qquad I_1(\kappa) \approx \frac{\exp(\kappa)}{\sqrt{2\pi\kappa}}\left(1-\frac{3}{8\kappa}\right). \tag{3.11}$$

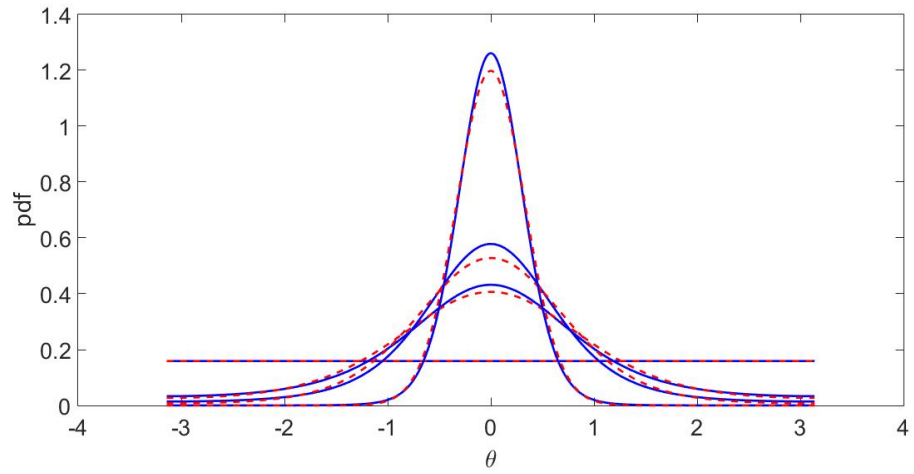

图1：. 不同 γ取值（0,0.25, 0.5,2.5）下的投影各向同性正态分布（PIN）以蓝色实线表示，相应的冯·米塞斯分布近似（近似1）以红色虚线表示。

3.1.2 得分匹配冯·米塞斯近似：近似2

我们现在推导 Mardia（2017）和 Mardia（2018）所提出的得分匹配近似（SMA）。根据 Mardia（2017），

$$\kappa = \frac{2E(\cos\theta)}{1-E(\cos 2\theta)}. \tag{3.12}$$

在 Mardia（2018）中，同一个方程（方程（19））存在一处笔误：该方程右侧的因子 2 应删除，（20）和（21）中给出的特例也应作同样的修正。

将（3.1）中的 $E(\cos\theta)$ 和（3.5）中的 $E(\cos 2\theta)$ 代入（3.12），得到第二个近似式：

$$\kappa = \frac{\gamma\sqrt{2\pi\gamma}\,\{I_0(\gamma) + I_1(\gamma)\}}{\sinh\gamma}. \tag{3.13}$$

我们将由(3.13)定义的这一近似称为近似2。由(3.13)，我们证明

$$\text{for small } \kappa \text{ or for small } \gamma, \qquad \kappa = \sqrt{2\pi\gamma}, \tag{3.14}$$

并且进一步，

$$\text{for large } \kappa \text{ or for large } \gamma, \qquad \kappa = 4\gamma. \tag{3.15}$$

为了推导这些小κ和大κ表达式，我们再次使用第一类修正贝塞尔函数的一些标准展开式，如Mardia 和 Jupp (2000)的附录1中所给出的那样。我们将其代入(3.13)：

- 对于小 κ，使用(3.10)和$(\sinh\gamma)/\gamma \approx 1$。- 对于大 κ，使用(3.11)和$\sinh\ \gamma \approx \exp(\gamma)/2$。

将(3.8)–(3.9)与(3.14)–(3.15)进行比较表明，近似1和近似2在小κ 和大κ 两种情形下都是相同的。

我们注意到，近似2比近似1更简单，因为在近似2中，方程(3.13)的左端不涉及任何贝塞尔函数（参见(3.7)）。然而，我们发现，当应用于涉及PIN分布的问题时，它们的整体表现相似；这些细节在附录3 C中给出。大多数情况下，我们将专注于近似1，除非我们需要近似2的计算优势。

4 平均合向量的分布

设 θ_1，……，θ_n 为抽自 PIN(γ) 的随机样本，并记

$$\bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i, \qquad \bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i, \tag{4.1}$$

¯则样本平均合向量 R 由下式给出

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}. \tag{4.2}$$

我们现在给出脑电图文献中用于平均合向量的不同命名，以突出其目标应用。我们从用于 $\bar{R}^2$的术语开始。

定义 3. $\bar{R}^2$ 称为输出信号的“分量同步性度量”（*CSM*），记作$\hat{}\rho^2(f)$。*CSM* 也称为“相位同步”或“相位同步度量”；例如，参见 *Friedman* 等人（*1984*）。

也就是说，

$$\mathrm{CSM} = \bar{R}^2 = \bar{C}^2 + \bar{S}^2 = R^2/n^2 = \hat{\rho}^2(f), \tag{4.3}$$

其中 f in ˆ$\rho^2(f)$ 表明这些量来自脑电图轨迹的频率。在心理学中，同步性是指两个或更多个体之间随时间自发出现的动作、情绪、思维和生理过程的节律性协调。

此外，平均合向量在 Cohen (2014) 中以脑电图数据特有的术语出现如下：相位锁定值（PLV）是用于平均合向量的名称。具体而言，术语站点间相位聚类（ISPC）（Cohen (2014)，第19章）用于针对单个电极位点计算的相位锁定值，而同一术语也用于根据两个电极位点的相位角差计算的相位锁定值。此处的“聚类”与集中性同义。

¯我们的目标是在PIN分布下得到 R 的分布。我们从渐近性开始，并回顾当 $\gamma = 0$时它是均匀的。

4.1 渐近性

众所周知，在均匀性下，当 n较大时，我们有（参见例如 Mardia 和 Jupp (2000)，第77页）

$$2n\bar{R}^2 \asymp \chi^2_2. \tag{4.4}$$

¯ ¯该结果依赖于如下事实：(C, S)是均值为0、方差为 $1/(2n)$的渐近独立正态分布。注意，在这一均匀情形下，可以写出精确概率密度函数；见下文第4.2节。一般而言，根据Mardia 和 Jupp¯(2000)第76页，我们得到 R 的渐近分布为正态分布。事实上，¯ ¯根据Mardia 和 Jupp (2000)第76页，我们发现在本情形中，当 n较大时，(C, S)是渐近独立正态分布，其均值和方差如下：

$$E(\bar{C}) = \alpha, \qquad E(\bar{S}) = 0, \qquad \mathrm{var}(\bar{C}) = \frac{1}{2n}(1 + \alpha_2), \qquad \mathrm{var}(\bar{S}) = \frac{1}{2n}(1 - \alpha_2), \tag{4.5}$$

其中 $\alpha = E(\cos\theta)$且 $\alpha_2 = E(\cos\ 2\theta)$。

注意，利用(4.4)可以证明，当 n 较大时，我们有

$$E(\bar{R}) = \sqrt{\frac{\pi}{4n}}, \qquad E(\bar{R}^2) = \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{var}(\bar{R}) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \mathrm{var}(\bar{R}^2) = \frac{1}{n^2}. \tag{4.6}$$

4.2 合向量的分布

¯令 $R = nR$。 R 在**均匀性** 下的概率密度函数为（参见 Mardia 和 Jupp（2000），第 66 页）

$$h_n(R) = R\int_0^\infty u\, J_0(Ru)\, J_0(u)^n\, du, \tag{4.7}$$

其中， $J_0(\cdot)$ 表示第一类零阶贝塞尔函数。此外，我们注意到，集中参数为 κ 时， R 在**冯·米塞斯情形** 下的概率密度函数为（参见 Mardia 和 Jupp（2000），第 69 页）

$$p(R) = \frac{I_0(\kappa R)}{I_0(\kappa)^n}\, h_n(R), \qquad 0 < R < n, \tag{4.8}$$

其中， $h_n(R)$由（4.7）给出。因此，利用从 R到 $v = \bar{R}^2 = R^2/n^2$ (v = CSM $= \hat{}$ $\rho^2(f)$)的简单变换（4.3），可得冯·米塞斯分布下 v 的分布为

$$p(v) = \frac{n^2}{2}\, \frac{I_0(n\kappa\sqrt{v})}{I_0(\kappa)^n} \int_0^\infty u\, J_0(n\sqrt{v}\, u)\, J_0(u)^n\, du, \qquad 0 < v < 1. \tag{4.9}$$

注意，对于 $\kappa \geq 4$，Stephens（1969年）给出了冯·米塞斯情形（4.9）下 R 分布的一个非常好的近似:

$$2n\gamma^*(1 - \bar{R}) \sim \chi^2_{n-1}, \tag{4.10}$$

其中

$$\frac{1}{\gamma^*} = \frac{1}{\kappa} + \frac{3}{8\kappa^2}. \tag{4.11}$$

此外，Stephens（1969年）给出了冯·米塞斯情形下该分布的百分位点。

5 CSM 分布与冯·米塞斯近似

上一节中，我们给出了冯·米塞斯总体下 R （或 CSM）的抽样分布的显式表达式，但 PIN分布下的精确抽样分布难以求得，即使在最简单的情形 $n = 2$下也是如此。
Kent 等人（1979年）给出的 $n = 2$情形下合向量长度 R 的分布，对于来自概率密度函数为 $f(\cdot)$的总体的样本（CSM是 R的函数），由方程（2.4）可得:

$$\frac{4\int_0^{2\pi} f(u-t)f(u+t)\, du}{(4 - R^2)^{1/2}}, \qquad 0 < R < 2, \tag{5.1}$$

其中 t =arccos($R/2$)。可以证明，对于冯·米塞斯情形，当 $n = 2$ 时，该表达式可简化为 (4.8)，注意到

$$h_2(R) = \frac{2}{\pi(4 - R^2)^{1/2}}, \qquad 0 < R < 2. \tag{5.2}$$

然而，即使是对于这个最简单的情形，式（5.6）也无法针对 PIN分布进行简化。作为一种实用的解决方案，我们现在假设，对于给定的

在 PIN分布下的 γ 值，近似1 给出了 CSM 的概率密度函数；具体做法是将近似1 中与 γ 对应的 κ 值代入式（4.9）中的 $\gamma > 0$,

$$p(v;\gamma) = \frac{n^2}{2}\,\frac{I_0(n\kappa(\gamma)\sqrt{v})}{I_0(\kappa(\gamma))^n}\int_0^\infty u\,J_0(nu\sqrt{v})\,J_0(u)^n\,du, \qquad 0 < v < 1,\ \gamma > 0, \tag{5.3}$$

其中

$$\kappa(\gamma) = A^{-1}\Big(\sqrt{\pi\gamma/2}\exp(-\gamma)\{I_0(\gamma) + I_1(\gamma)\}\Big),$$

并对 $\gamma = 0$ 使用（4.4）

$$p(v;\gamma = 0) = 2\int_0^\infty u\,J_0(u\sqrt{v})\,J_0(u)^n\,du. \tag{5.4}$$

为了评估这一近似，我们根据 PIN 分布下的 θ 分布，模拟了 CSM（或 R）的分布。θ 的模拟很简单：给定γ，生成两个相互独立的正态变量

$$x = r\cos\theta \sim N(\sqrt{4\gamma}, 1), \qquad y = r\sin\theta \sim N(0, 1),$$

并计算 $\theta =$ arctan 2(y, x)（函数 arctan 2 会返回正确的象限，因此$0 \le \theta \le 2\pi$）。对于 $n = 10$，我们分别进行了 100，000 次模拟，取值为 $\gamma = 0$、0。25、0。5、2。5，并使用 Approx 1 中相应的 κ 值：（0，1。4，2。1，9。3）。图2显示了根据 PIN 密度得到的模拟 CSM 直方图（蓝色、阴影），以及由 Approx 1 的方程（4.9）给出的近似 CSM 密度（红色、实线轮廓）。可以看出，对于较小和较大的 γ值，该近似非常好；对于中间范围的值，也可以接受。注意，我们选择了 $n = 10$，因为在脑电图刺激研究中，这样的低值很常见（另见第8节，其中 $n = 12$。）**备注** 在 EGG 中，如果允许观测之间存在随时间变化的相关性，即使对于 n=2，合向量长度 R 的分布也会受到相关性的影响。假设环面上的角度（θ_1，θ_2）服从 Mardia余弦分布（Mardia（1975a），Mardia（1975b））

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(2\pi)^2 I_0(\lambda)}\exp\{\lambda\cos(\theta_1 - \theta_2)\} \tag{5.5}$$

其中，关联参数 $\lambda > 0$ 偏向 $\theta_1 \approx \theta_2$，因而使 R更大，而 $\lambda < 0$偏向 $\theta_1 \approx \theta_2 + \pi$，并将质量移向更小的 R。注意，两个角度 θ_1 和 θ_2 的n=2合向量可以看出

$$R = 2|\cos(\theta_1 - \theta_2)/2|.$$

现在，根据 Kent 等人（1979年）针对 $n = 2$ 的结果，对于来自概率密度函数为 $f(\cdot)$ 的总体的样本（CSM 是 R 的函数），可将方程（2.4）扩展为：

$$\frac{4\int_0^{2\pi} f(u - t, u + t)\,du}{(4 - R^2)^{1/2}}, \qquad 0 < R < 2, \tag{5.6}$$

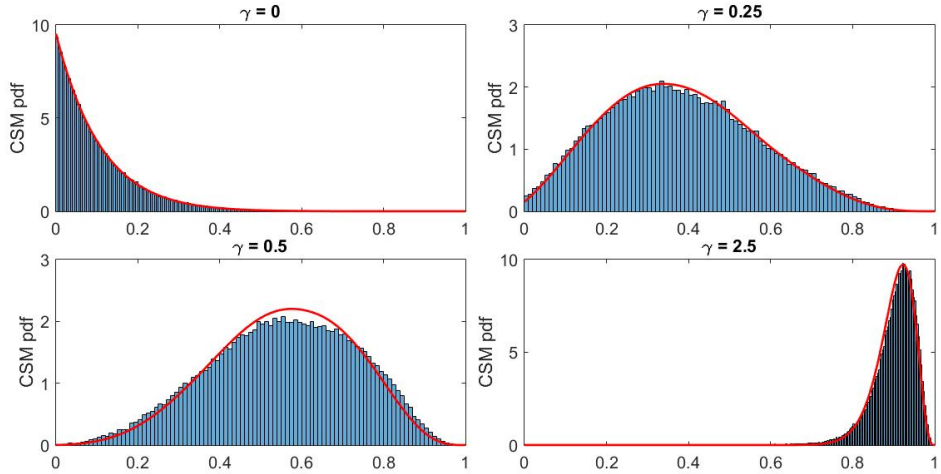

图2：由 PIN 密度（蓝色阴影）模拟得到的 $\gamma = 0$、0.25、0.5、2.5 的 CSM直方图，以及使用近似1得到的 CSM 密度 (5.3)（红色实线轮廓）。

其中 t =arccos($R/2$)。可以证明，对于余弦 von Mises 情形，该余弦表达式可简化为 $n = 2$：

$$f(R) = \frac{2I_0(2\lambda \arccos(R/2))}{\pi I_0(\lambda)(4 - R^2)^{1/2}}, \qquad 0 < R < 2. \tag{5.7}$$

对于 $\lambda \to 0$，它化为 (5.2) 中给出的均匀分布情形。

6 估计

设 θ_i、 $i = 1$、.....、n 是来自 PIN分布 的随机样本。则通过求解 (2.3) 中的（对数）似然方程，可得到 μ、γ 的最大似然估计（MLE）$\hat{}\mu$、$\hat{}\gamma$：

$$\log L(\gamma) = \sum \log f(\theta_i; \mu, \gamma). \tag{6.1}$$

然而，这个表达式无法化简，因此必须通过数值方法计算最大似然估计 $\hat{}\mu$、$\hat{}\gamma$ 。下面给出一些近似方法。

混合估计。设

$$\bar{C} = \bar{R}\cos\bar{\theta}, \qquad \bar{S} = \bar{R}\sin\bar{\theta}, \tag{6.2}$$

¯其中 θ 为样本平均方向。一种方法是代入式 (6.1)

$$\mu = \bar{\theta}, \tag{6.3}$$

并且 th 对 γ 最大化该函数，从而得到混合估计值 $\hat{}\gamma_{\mathrm{HY}}$ B·

矩估计量。我们记

$$E(\sin\theta) = \rho\sin\mu, \qquad E(\cos\theta) = \rho\cos\mu, \tag{6.4}$$

其中 ρ 现在是 γ的函数，记作 $\rho(\gamma)$。对于 μ，我们将样本平均方向作为矩估计量：

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MOM}} = \bar{\theta}.$$

ρ 最简单的矩估计量是

$$\hat{\rho}_{\mathrm{MOM}} = \bar{R}, \tag{6.5}$$

将（3.1）中的 ρ 值代入，可得到 γ 的矩估计量$\hat{}\gamma_{\mathrm{MOM}}$：

$$\bar{R} = \sqrt{\pi\gamma/2}\exp(-\gamma)\{I_0(\gamma) + I_1(\gamma)\}. \tag{6.6}$$

可以证明

$$\text{for small } \gamma, \qquad \hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}} = \frac{2\bar{R}^2}{\pi}, \tag{6.7}$$

而

$$\text{for large } \gamma, \qquad \hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}} = \frac{1}{8(1-\bar{R})}. \tag{6.8}$$

近似2通过在近似2中使用冯·米塞斯分布的 $A(\hat{}\kappa) = R$ ，为 γ 提供了另一种“矩”估计。因此，$\hat{}\gamma_{\mathrm{MOM2}}$ 是下式的解：

$$\bar{R} = A\left(\frac{\sqrt{2\pi\gamma}\,\{I_0(\gamma) + I_1(\gamma)\}}{(\sinh\gamma)/\gamma}\right). \tag{6.9}$$

CSM 的最大似然估计。在某些应用中，我们需要求得总体 CSMρ^2 的最大似然估计。利用 (3.1) 中 ρ 的表达式，ρ^2 的最大似然估计 $\hat{}\rho^2_{\mathrm{MLE}}$ 为

$$\hat{\rho}^2_{\mathrm{MLE}} = (\pi\hat{\gamma}/2)\exp(-2\hat{\gamma})\{I_0(\hat{\gamma}) + I_1(\hat{\gamma})\}^2. \tag{6.10}$$

偏差。我们可以借助关于 κ 的冯·米塞斯情形的著名结果，研究 γ 近似最大似然估计的偏差。估计量 $\hat{}\kappa = A^{-1}(\bar{R})$ 对于$n \le 15$可能存在较大的偏差，因此可采用修正后的估计量 $\hat{}\kappa^*$ （例如参见 Fisher (1993)、Mardia 和 Jupp (2000)）

$$\hat{\kappa}^* = \begin{cases} \max\{\,\hat{\kappa} - 2(n\hat{\kappa})^{-1},\, 0\,\}, & \hat{\kappa} < 2, \\ \dfrac{(n-1)^3\hat{\kappa}}{n^3+n}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.11}$$

的渐近分布$\hat{}\gamma$。由于我们的主要关注点是集中性参数 γ，而非 μ，因此我们只考虑其估计量 $\hat{}\gamma$ 的渐近分布。当 n较大时，

$$\hat{\gamma} \sim N(\gamma,\ 1/(nI)),$$

其中 I 是费 Fisher 信息,

$$I = E\left[\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\log L(\gamma)\right],$$

且 $\log L(\gamma)$ 由式（6.1）给出。 I无法进行解析化简，因此我们采用近似方法。事实上，我们可以证明

$$\hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}} \sim N\left(\gamma,\ \frac{1}{n\,\mathrm{var}(\hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}})}\right),$$

w 这里，$\mathrm{var}(\hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}})$ 推导如下。令 $\hat{\rho} = R$。根据泰勒近似 n,

$$\mathrm{var}(\hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}}) = \left(\frac{d\rho}{d\gamma}\right)^2 \mathrm{var}(\hat{\rho}). \tag{6.12}$$

由式（6.4）以及贝塞尔函数 $I_0(\gamma)$ 和$I_1(\gamma)$ 的标准关系可知

$$\frac{d\rho}{d\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\,\frac{\exp(-\gamma)}{2I_0(\gamma)}\{1 - A(\gamma)\}. \tag{6.13}$$

因此,

$$\mathrm{var}(\hat{\gamma}_{\mathrm{MOM}}) = \frac{\pi}{8\gamma}\,\frac{\exp(-2\gamma)}{I_0(\gamma)^2}\{1 - A(\gamma)\}^2\,\mathrm{var}(\bar{R}). \tag{6.14}$$

现在我们引用以下冯·米塞斯情形下 R 的渐近方差表达式，以便使用近似1。对于较大的 κ，根据 Mardia 和 Jupp（2000）的式（4.8.31），

$$\mathrm{var}_1(\bar{R}) = \frac{1}{2n\kappa^2}, \tag{6.15}$$

而对于较大的 n，根据式（4.8.18），

$$\mathrm{var}_2(\bar{R}) = \frac{1}{n}\left\{1 - A(\kappa)^2 - \frac{A(\kappa)}{\kappa}\right\}. \tag{6.16}$$

因此，根据 κ 和 n的取值，将式 (6.15) 中的 $\mathrm{var}_1(R)$ 或式 (6.16) 中的 $\mathrm{var}_2(R)$ 代入式 (6.14)，即可得到 $\mathrm{var}(\hat{\gamma})$ 的两个渐近表达式。

对于 CSM,

$$\hat{\rho}^2_{\mathrm{MOM}} \sim N\left(\rho^2,\ \frac{2}{n\,\mathrm{var}(\bar{R})}\right),$$

同样，我们可以代入 $\mathrm{var}_1(R)$ 或 $\mathrm{var}_2(R)$。

我们现在报告一些实验，展示最大似然估计具有唯一性，并考察最大似然估计近似值的表现。

6.1 数值实验

的最大似然估计的唯一性 γ。 为了研究最大似然估计量 $\hat{\gamma}$ 的唯一性和准确性，我们进行了一项模拟研究。对于每个真实值$\gamma \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$，我们从 PIN模型中生成样本量为 $n = 10$ 的样本，并计算对数似然 $\log L(\gamma)$（见 6.1）。图3展示了这些设置下的对数似然曲线。每条曲线都是单峰的，且众数非常接近 γ的真实值，这支持了这些情况下最大似然估计在实践中的唯一性。

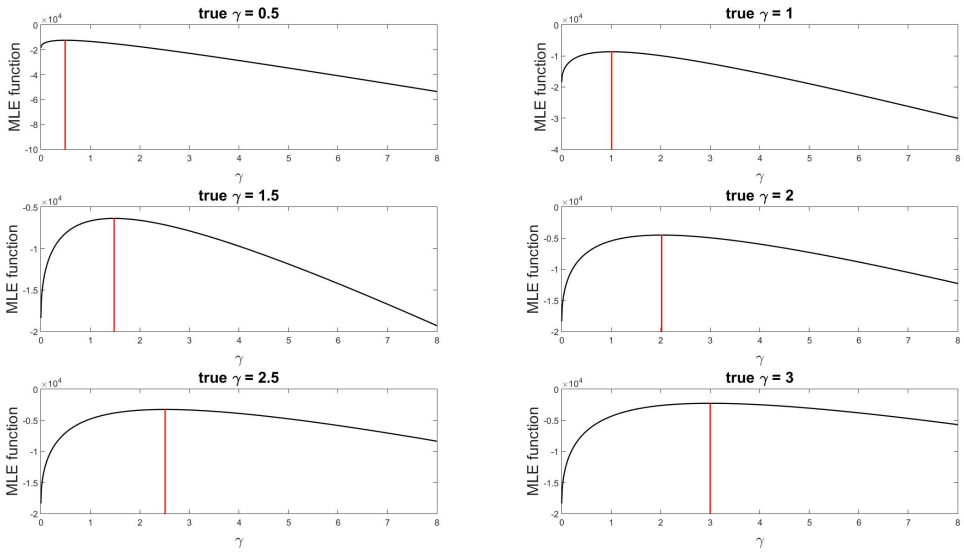

图3：从 PIN 分布中抽取样本量为 $n = 10$ 的样本时的对数似然（6.1），其中 $\gamma = 0.5$、1、1。5、2、2。5、3。红色竖线表示相应曲线的众数。

使用近似方法的最大似然估计。 我们比较了近似1和近似2与跨越 ρ^2 (CSM)的最大似然估计，在一系列信噪比（$=2\gamma$）值和样本量 $n = 10$、100、1000 下的表现。图4展示了通过近似1（蓝色）、近似2（红色）和最大似然估计（黑色）得到的 ρ^2 (CSM)估计值。总体而言，两种近似方法都表现良好，但其相对精度取决于 n和信噪比，下面将对此进行总结。

- 对于较大的 n （例如 $n = 1000$），在整个信噪比范围内，近似1都与最大似然估计非常接近。
- 当 n 较小（例如 $n = 10$）且信噪比较低至中等时，近似2与最大似然估计更接近。
- 在实践中，对于大多数信噪比值，两种近似的结果相似；在中等范围的信噪比下以及样本量较小时，差异最为明显。

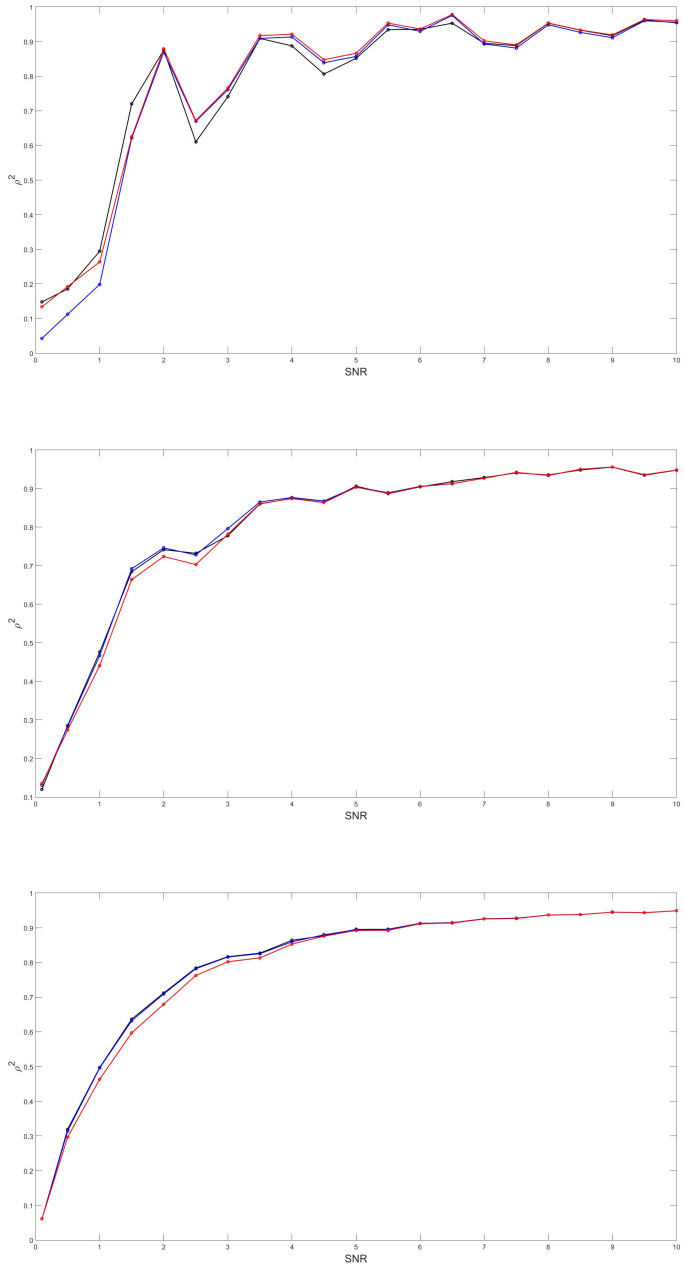

图4：使用近似1（蓝色）、近似2（红色）和最大似然估计（黑色）时，ρ^2 相对于信噪比（$=2\gamma$）的估计结果；样本量为 $n = 10$ （顶部）、$n = 100$ （中部）和 $n = 1000$ （底部）。

对于样本量中等到较大的常规应用，近似1既方便又准确。当样本量较小且信噪比处于中等范围时，近似2能带来适度的改进。若要求尽可能高的准确度（例如在分布尾部进行推断时），最大似然估计仍是首选。

7 假设检验与置信区间

假设检验。 设 θ服从 PIN(μ, γ)，并设 θ_i, $i = 1, \ldots, n$是从该分布中抽取的随机样本。我们要检验均匀性的原假设 H_0，以对抗一个简单备择假设:

$$H_0 : \gamma = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \gamma = \gamma_1.$$

我们可以将式 (2.3) 中的对数似然比（LRT）写为

$$-n \log(2\pi) + \sum \log f(\theta_i; \mu, \gamma_1). \tag{7.1}$$

对于 μ 未知的复合备择假设,

$$H_0 : \gamma = 0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \gamma \neq 0,$$

对数似然比为

$$-n \log(2\pi) + \sum \log f(\theta_i; \hat{\mu}, \hat{\gamma}), \tag{7.2}$$

其中 $\hat{}\mu$ 和 $\hat{}\gamma$ 是第6节中所述的最大似然估计。我们无法简化式 (7.1) 和 (7.2) 中的 LRT 统计量；对于数据，必须通过数值计算得到它们。

部分克服这一困难的一种方法是采用冯·米塞斯近似。对于冯·米塞斯情形，式（7.2）中的似然比检验简化为 Rayleigh 检验，该检验是一致最强的（例如，参见 Mardia 和 Jupp（2000））。该检验为

$$\text{reject } H_0 \quad \text{for large values of } \bar{R}. \tag{7.3}$$

冯·米塞斯情形的检验表可供查阅（参见 Stephens（1969年））。当 n较大时，可以使用近似式（4.4）；该统计量服从自由度为 2 的卡方分布（即指数分布），临界值为

$$\bar{R}^2_{\text{crit}} = \frac{\ln(1/\alpha)}{n}.$$

在第8节中使用时，请注意，对于 $\alpha = 0.05$ 和 $n = 12$，有 $\bar{R}^2_{\text{crit}} = 0.25$ （如图7所示）。根据 Stephens（1969年）， $\bar{R}$ 的精确 5% 临界值为 0.494，因此 $\bar{R}^2 = 0.244$，这表明即使对于 $n = 12$，该近似也很好。

此外，对于较大的 n,

$$E(\bar{R}^2) = \frac{1}{n}, \qquad \text{var}(\bar{R}^2) = \frac{1}{n^2},$$

从而得到更简单的近似

$$(n\bar{R}^2 - 1) \sim N(0, 1). \tag{7.4}$$

对于 5% 显著性和 $n = 12$，该近似给出 $\bar{R}^2 = 0.247$，在这种情况下略好一些。

事实上，我们可以利用相应的冯·米塞斯解，采用近似1或近似2，对PIN分布进行近似推断（尤其是当 n较大时）。这包括通过 κ对 γ 构造置信区间，以及其他推断程序，我们现在将对此进行说明。应用部分还会给出更多示例。

置信区间。 我们来考虑如何对 γ 构造置信区间：采用下文所述的一种近似方法，并使用Mardia和Jupp（2000）第150–151页给出的 κ 置信区间。

1. 对于 $\kappa \geq 2$ （等价地， $\gamma \geq 0.5$），其近似（$1-\alpha$）置信区间为κ

$$(\kappa_l, \kappa_u), \qquad \kappa_l = \frac{1+\sqrt{1+3a}}{4a}, \qquad \kappa_u = \frac{1+\sqrt{1+3b}}{4b}, \tag{7.5}$$

with

$$a = \frac{n-R}{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}, \qquad b = \frac{n-R}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}, \tag{7.6}$$

其中， $\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}$ 表示 χ^2_{n-1} 分布的上 $\alpha/2$ 分位点。

例如，对于较大的 γ，使用 $\kappa = 4\gamma$ （来自近似1或近似2），我们可以根据（7.5）得到 γ 的近似（$1-\alpha$）置信区间：

$$\frac{1}{4}\kappa_l \;\leq\; \gamma \;\leq\; \frac{1}{4}\kappa_u, \tag{7.7}$$

其中， κ_l 和 κ_u 根据 R由（7.5）给出。

2. 对于 $\kappa < 2$ （等价地， $\gamma < 0.5$），我们可以使用自助法（参见 Fisher（1993），第 88–92 页）。不过，在构造置信区间之前，我们应先检验均匀性原假设 $\kappa = 0$。如果接受原假设，那么 κ 的置信区间就没有意义。

注意，对于 $\kappa = 2$，我们有 $\rho = 0.698$ 和 $\rho^2 = 0.487$，也就是说， $\rho^2 \approx 0.5$ 精确到小数点后一位。因此，如果观察到 $\bar{R}^2 \geq 0.5$，我们可以使用（7.7）中给出的 γ 的置信区间。

8 生物医学信号的应用：脑电图刺激研究

我们以生物医学信号中的一个实例为例，介绍视觉刺激的一种类型——间歇性闪光刺激（IPS）期间采集的脑电图（EEG）记录。我们首先说明如何获取 EEG轨迹数据。通常，

电极按照标准位置放置在头皮上，如图5所示。图中展示了常用的国际10–20脑电系统。按照惯例，字母表示电极下方的解剖区域：O（枕部）、T（颞部）、C（中央区）、P（顶叶）和 F（额部）。奇数表示左半球的电极，偶数表示右半球的电极。

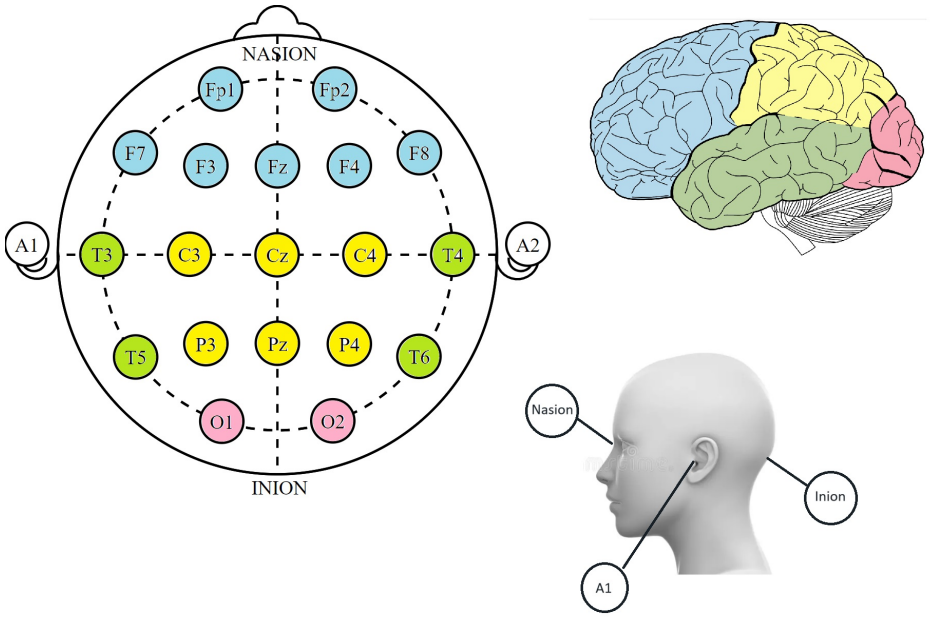

图5：10–20 国际系统中的脑电图电极位置。电极位点的颜色与其对应的大脑脑叶相同：F（额部）、C（中央区）、P（顶叶）、O（枕部）和 T（颞部）。头部示意图标出了基准点的位置（鼻根点、左耳前点和枕外隆凸）。

此处使用的数据采集自 Miranda de Sá 等人（2002）。数据内容为受试者接受间歇性光刺激（IPS）时的脑电图记录；频闪光以 6 Hz（每秒闪烁六次）的频率闪烁，记录来自靠近视觉皮层的两个电极（O_1，位于 O =枕部，以及 P_3，位于 P =顶叶；见图5）。脑电图信号使用 16 位模数转换器进行数字化，采样频率为 256 Hz。每段 1 秒的信号生成一个包含 256 个点的时间序列。图6展示了电极 O_1 在 24 秒内的脑电时间序列。

我们将时间序列划分为连续的 2 秒片段，得到 $n = 12$ 个子时间序列，每个包含 512 个点。图6展示了用于估计 CSM 的完整 24 秒脑电图记录。我们使用快速傅里叶变换（FFT）算法计算每个子序列的离散傅里叶变换（每个子序列有 $2^9 = 512$ 个点）。随后，按照 PIN 模型的要求提取傅里叶变换的相位。因此，在每个频率下，我们获得了 12 个相位角，并根据 (4.3) 计算 CSM。图7展示了该数据集的 CSM 随频率变化的情况（最高为 36 Hz）。

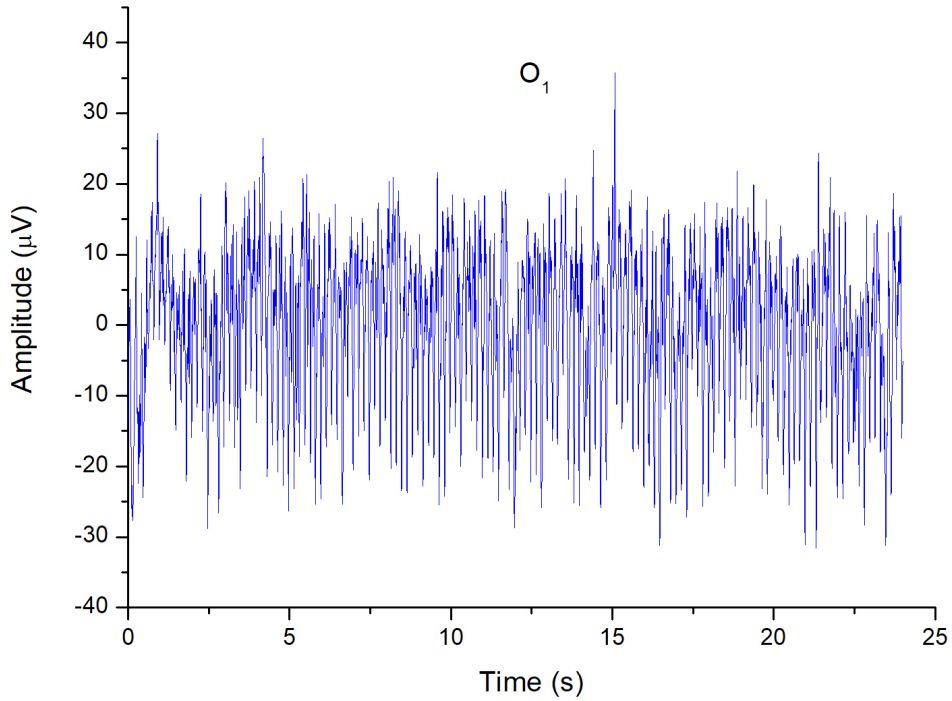

图6：受试者接受 6 Hz 频闪光刺激时，在电极 O_1 处记录的脑电图时间序列。横轴：时间（秒）；纵轴：缩放后的电压。

水平虚线标示均匀性下的 95%临界值，根据第7节，该值为 0.25。图中还显示了根据第7节得到的频率为 6，12，18，24，30 Hz 时的 95%置信区间。

作为比较，我们还给出了电极 P_3的结果。图8显示了相应的时间序列，图9显示了 CSM 随频率的变化。直观来看，两个 CSM 图（图7和图9）在峰值处差异显著，12 Hz 处除外。作为示例，我们检验频率为 $f = 6$ Hz 时两个集中性（信噪比）参数是否相等这一假设。含有 $n = 12$ 的数据列于表1，汇总统计量见表2。

表1： O_1 和 P_3 在 6 Hz 下的相位角， $n = 12$

O1	-2.2032	-1.9798	-2.0625	-2.2151	-2.2389	-2.0569	-2.2505	-2.1924	-2.1404	-2.1541	-2.1244	-2.1647
P3	2.1879	-0.2305	-1.6763	-1.7409	-2.8771	-1.9322	2.9193	2.8651	-3.0499	-1.9783	3.0112	-2.7492

让我们假设 O_1 和 P_3 的样本分别来自PIN(μ_1, γ_1)和PIN(μ_2, γ_2)。首先，我们根据第6节报告， γ_1 和 γ_2 的混合估计值分别为41.24和0.29，从而确认与 P_3相比， O_1 高度集中。

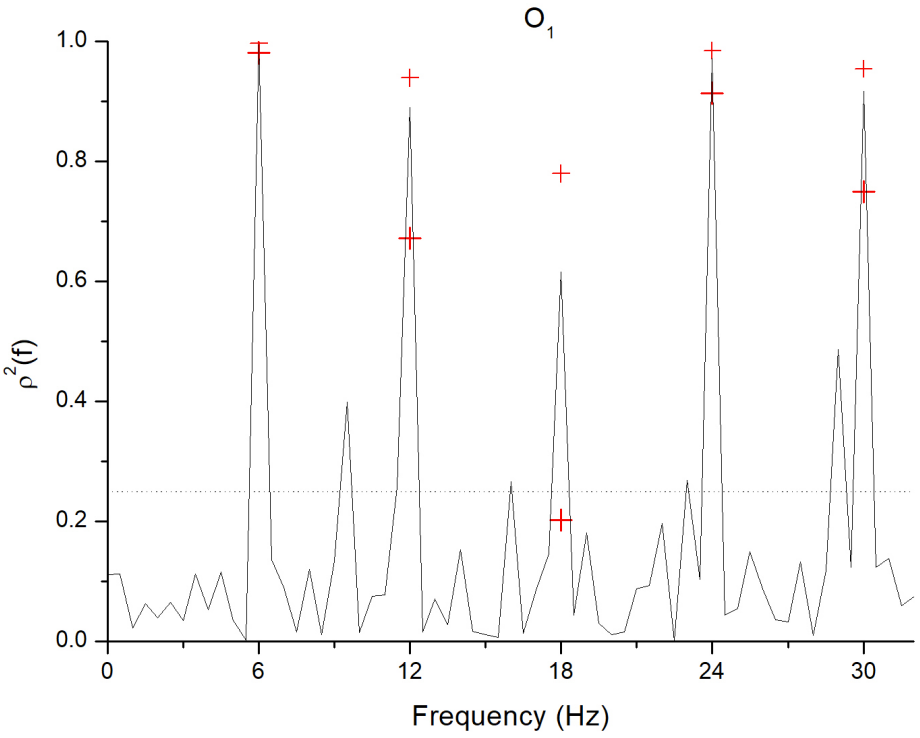

图7：受试者在电极 O_1处接受 6 Hz 频闪光刺激时的 CSM。‘+’符号表示刺激谐波处的 95% 置信限。水平虚线表示均匀性假设下的临界值（$\bar{R}^2 = 0.25, R = 0.5$）。

作为示例，我们现在检验该假设

$$H_0: \gamma_1 = \gamma_2 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \gamma_1 \neq \gamma_2.$$

令 λ 为似然比（第7节）。我们发现 $-2\log \lambda = 43.7$，约为 χ^2_2，因此具有高度显著性。假设服从冯·米塞斯模型，则有

$$F_{11,11} = \frac{1 - \bar{R}_2}{1 - \bar{R}_1} = 101,$$

再次达到高度显著。此外，O_1 第7节中式（7.7）给出的 CSM 的 95% 置信区间为 (0.9810, 0.9967)，而 P_3 的 CSM 的 95% 置信区间为 (0.0507, 0.7652)。这再次证实，O_1 的集中性很高，而 P_3则分散得多。

表2： O_1 和 P_3的相位角数据汇总统计$n = 12$

统计量	O_1	P_3	$O_1 + P_3$
$\bar{C}$	-0.5445	-0.5370	-0.5408
$\bar{S}$	-0.8351	-0.2799	-0.5575
$\bar{\theta}$	$237°$	$208°$	$226°$
$\bar{R}$	0.997	0.606	0.777
CSM	0.9939	0.3667	0.6037

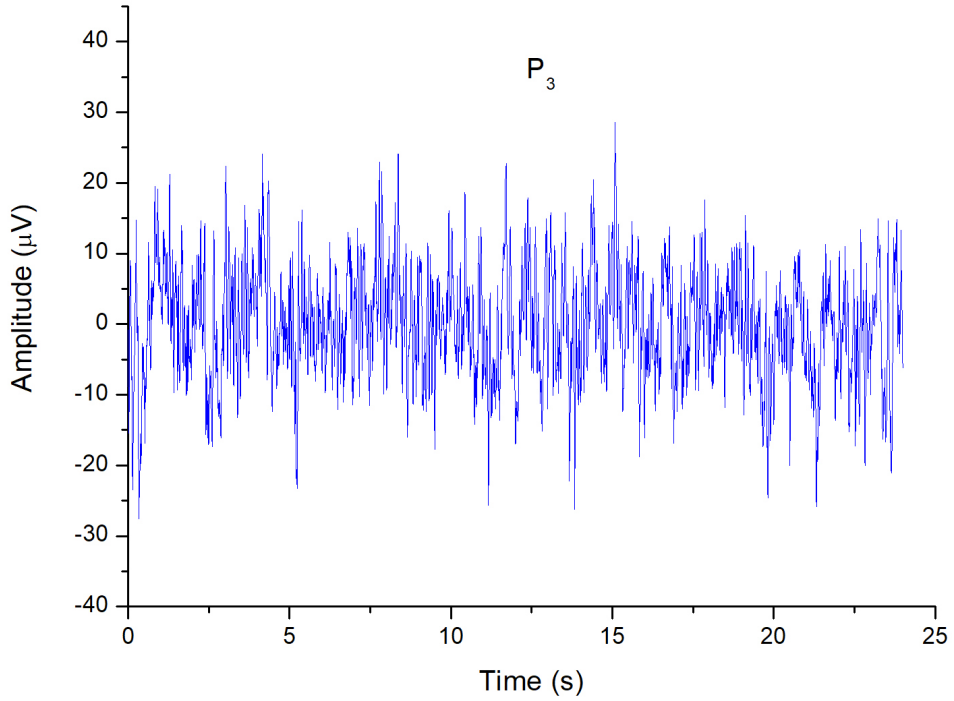

图8：受试者在 6 Hz 频闪光刺激下记录的电极 P_3 脑电图时间序列，横轴：时间（秒）；纵轴：缩放后的电压。

9 讨论

本文基于投影各向同性正态分布（PIN），构建了一个利用相位分析脑电信号的框架。从脑电轨迹的傅里叶表示出发，我们确定相位是检测刺激相关反应的关键量，并表明其分布自然地源自投影各向同性正态模型。我们推导了 PIN 分布的总体矩，并提出了两种冯·米塞斯近似；在广泛的集中参数范围内，这两种近似均表现良好。这些结果为分量同步度量（CSM）的实际推断提供了基础，包括置信区间和假设

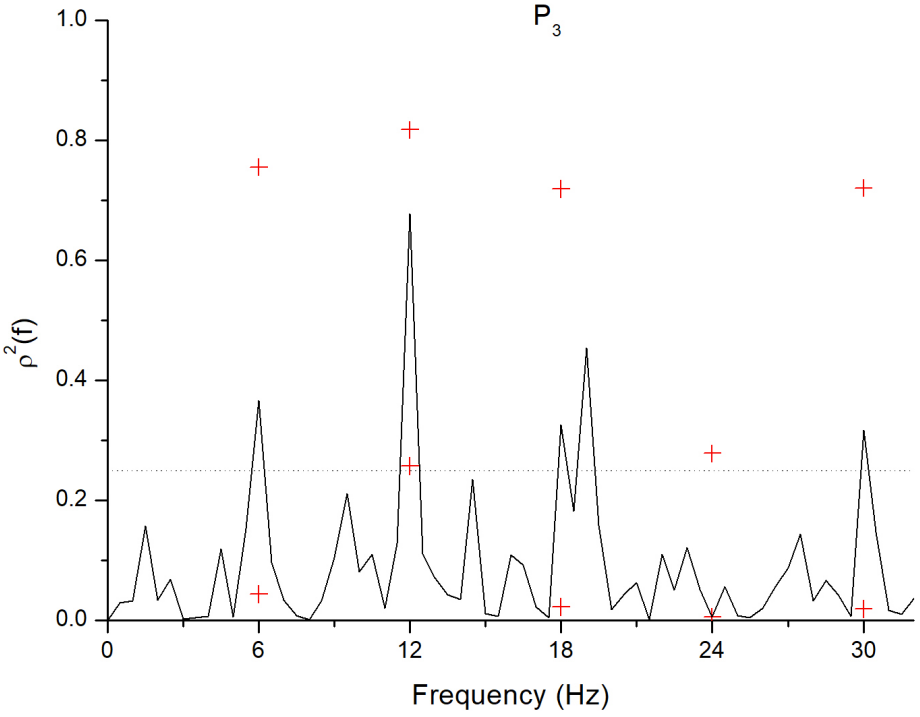

图9：在电极 P_3 处接受 6 Hz 频闪光刺激的受试者的 CSM。“+”符号表示刺激谐波处的 95% 置信限。水平点线表示均匀性检验下的临界值（$\bar{R}^2 = 0.25, R = 0.5$）。

检验。

我们提供了模型参数的估计程序，包括近似闭式估计量和得分匹配方法，并在 PIN 框架下制定了检验程序，包括相位均匀性检验及相关假设检验。

对闪光刺激下脑电图数据的应用展示了所提方法在实践中的用法。这些工具使我们能够评估观测到的相位分布是否偏离均匀分布（这正是刺激相关反应下的预期情况），并使用 CSM 等指标比较不同条件下的同步性。

这里提出的框架为未来研究开辟了多条路径，尤其是在超越本文示例应用中的单电极设置时。尽管我们将 O_1 和 P_3 样本视为相互独立，但它们显然存在相关性，因为它们来自同一受试者。因此，对多个电极进行联合建模是自然的下一步。在这类设置中，相位角位于环面上，而将投影正态分布推广到环面数据的一种方法

由 Kato 等人（1925）提出。此外，脑电图记录在各电极位点之间呈现时空依赖；Kent 和 Mardia（2022）讨论了分析此类时空数据的方法，这些方法将有助于我们未来进一步发展这一方法。

虽然我们的应用重点是分析闪光刺激下记录的脑电图数据，但基于相位的分析也适用于许多其他实验范式。例如，Busch 等人（2009）以及 Busch 和 VanRullen（2010）利用自发脑电图的瞬时相位研究视觉注意。这表明，PIN 框架及其相关的 CSM 推断可能广泛适用于认知神经科学和生物医学神经科学领域。

在推断方面，除了本文采用的经典方法外，还可以采用 Nu˜nez-Antonio 和 Guti´errez-Pe˜na（2005）提出的贝叶斯分析。这类方法在纳入先验信息或同时对多个电极建模时可能尤其有用，也为未来研究提供了灵活的方向。

10 致谢

Kanti Mardia 谨向 John Kent、Faisal Mushtaq 和 Xiangyu Wu 致谢，感谢他们提出的宝贵意见。

参考文献

Abramowitz, M. 和 Stegun, I.（1964年）数学函数手册：公式、图表和数学检验表。纽约：美国商务部、美国国家标准局（NBS）。

Anand, S.、Sharma, V.、Pourush, R. 与 Jaiswal, S.（2022）关于用于新冠肺炎检测的生物医学信号处理方法的综合综述。《医学与外科年鉴》，**76**，103519。

Busch, N. A.、Dubois, J. 与 VanRullen, R.（2009）持续脑电振荡的相位可预测视觉感知。《神经科学杂志》，**29**，7869–7876。

Busch, N. A. 与 VanRullen, R.（2010）自发脑电振荡揭示视觉注意的周期性采样。《美国国家科学院院刊》，**107**，16048–16053。

Cohen, M. X.（2014）《神经时间序列数据分析：理论与实践》。马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社。网址：`https://mitpress.mit.edu/9780262019873/analyzing-neural-time-series-data/`。

Fisher, N. I.(1993) 《圆形数据的统计分析》. CambridgeUniversityPress.

Friedman, J., Zappulla, Bergelson, M., Greenblatt, E., Mails, L., Morrell, F. 和 Hoepp- ner, T. (1984) 将相位谱分析应用于正常受试者及后颅窝肿瘤患者的脑干听觉诱发电位检测。*Au-diology*,**90**, 99–113. Gradshteyn, I. S. 和 Ryzhik, I. M. (1980)《积分、级数与乘积表》。波士顿：Elsevier Academic Press。Kato, S., Mastrantonio, G. 和 Ishikawa, M. (1925) 一类可解释的投影正态分布，以及一种用于超环面数据贝叶斯分析的相关 Copula模型。*arXiv*。Kendall, D. G. (1974) 极点趋近型布朗运动与鸟类导航。《英国皇家统计学会志：*B*辑（方法论）》,**36**, 365–417. Kent, J. T. 和 Mardia, K. V. (2022)《空间分析》。Wiley。Kent, J. T., Mardia, K. V. 和 Rao, J. S. (1979年) 圆上的均匀分布的一种刻画。《统计年刊》,**7**, 882–889. Mardia, K. V. (1972)《方向数据统计学》。Academic Press，伦敦。— (1975a) 方向数据统计学（附讨论）。《英国皇家统计学会志*B*辑》,**37**, 349–393. — (1975b) 方向分布的刻画。载于 *G. P. Patil*、*S. Kotz* 和 *J. K. Ord*（编），《科学工作中的统计分布》，**3**，365–385 Reidel，多德雷赫特。— (2017)得分匹配估计量的妙用及其对流形上分布的近似，以及在分子生物学中的一些前沿应用。第61届国际统计学会世界统计大会论文集，马拉喀什。— (2018) 标准方向分布估计方法的新突破。第20届国际信息融合会议论文集，IEEE，剑桥。Mardia, K. V. 和 Jupp, P. E. (2000)《方向统计学》。Wiley。Mathewson, K. E., Gratton, G., Fabiani, M., Beck, D. M. 和 Ro, T. (2009) 让刺激摆脱不可见状态：诱发的阿尔法相位决定视觉意识。《神经科学杂志》,**29**, 2725–2732. Mushtaq, F., Welke, D., Gallagher, A., Pavlov, Y. G. 等 (2024) 脑电图在脑与行为研究中的百年历程。《自然·人类行为》，**8**，405–419. URL:https://www.nature.com/articles/s41562-024-01941-5。Muthuswamy, J. (2004) 生物医学信号分析。载于 *Kutz, M*（编）《生物医学工程与设计标准手册》。，**14**，1–18。

Muthuswamy, J. 和 Thakor, N. V.（1998）《神经信号的谱分析》。《神经科学方法杂志》，**83**，1–14。Notbohm, A. 和 Herrmann, C. S.（2016）闪烁规律性对于α振荡的同步至关重要。《人类神经科学前沿》，**10**，444。Nu˜nez-Antonio, G. 和 Guti´errez-Pe˜na, E. （ 2005 ）使用投影正态分布对方向数据进行贝叶斯分析。《应用统计学杂志》，**32**，995–1001。Presnell, B.P.、Morrison, S.P. 和 Littell, C.（1998）方向数据的投影多元线性模型。《美国统计学会杂志》，**93**，1068–1077。Miranda de S*á*, A. M. F. L. 和 Felix, L. B.（2003）仅使用相位信息进行多通道诱发反应检测。《神经科学方法杂志》，**129**，1–10。Miranda de S*á*, A. M. F. L.、Infantosi, A. C. 和 M., S. D.（2002）感觉刺激期间脑电图中随机信号与周期信号之间的相干性，用于测量反应强度。《医学与生物工程及计算》，**40**，99–104。Stephens, M. A.（1969年）冯·米塞斯分布的检验。《生物统计学》，**56**，149–160。Subasi, A.（2019）生物医学信号分析及其在医疗保健中的应用。载于 *Paul, S.*（编）《生物医学工程及其在医疗保健中的应用》。，**14**，423–452。

Watson, G. S. (1983) 《球面统计学》。John Wiley & Sons。

A 附录1：脑电模型的深入考察

我们运用信号处理和冲激列的基础知识，对第2节中针对闪光刺激所概述的脑电模型进行完整刻画。这种刻画在文献中有所隐含，但尚未在任何出版物中报告。

闪光产生的间歇性闪光刺激（在第8节的应用中使用）可以建模为周期性冲激列（一系列间隔均匀的狄拉克δ函数）。如果相邻冲激之间的时间为 T，那么 T就是刺激周期，刺激频率为 $f_0 = 1/T$。

周期性冲激列的傅里叶变换，在频域中也是一个冲激列，其冲激位于基频的整数倍处f_0 （见下文）。例如，以 6 Hz 进行刺激，相当于每秒闪烁 6 次 $T = 1/6$ s，并产生间隔为 6 Hz 的频谱冲激。也就是说，频谱

包含位于基频整数倍处的冲激 $f_0 = 1/T$。图10展示了时域中的冲激列（狄拉克δ函数），其间隔为 T （左图），以及频域中对应的冲激列，其间隔为 $1/T$ （右图）。两者都是冲激列。



图10：左：间隔为 T 的冲激列（狄拉克冲激）。右：其离散傅里叶变换的幅值，显示出间隔为 $1/T$ 的频谱冲激。

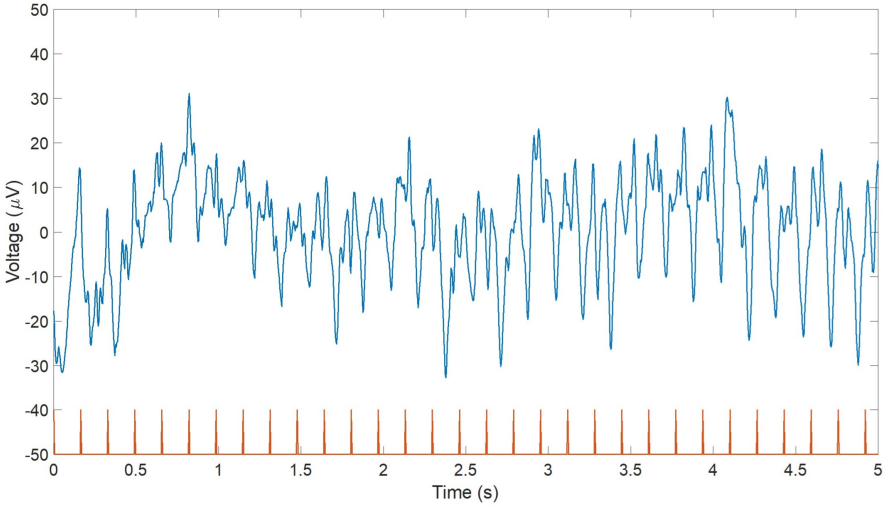

图11：13岁受试者在 6 Hz 闪光刺激期间，于 O1电极记录的 5 秒脑电时间序列。红色标记表示刺激时刻。

A.1 冲激列与加性线性误差模式 l

现在，我们进一步详细介绍与第8节脑电应用相关的输出结果。图11显示了一名13岁受试者在6 Hz闪光刺激期间由O1电极记录的5秒脑电时间序列，其中红色标记表示刺激时刻，刺激步长为1/6秒。相应的图12显示了该5秒脑电片段的离散傅里叶变换幅值，其中竖线标示刺激频率（6 Hz）及其谐波。

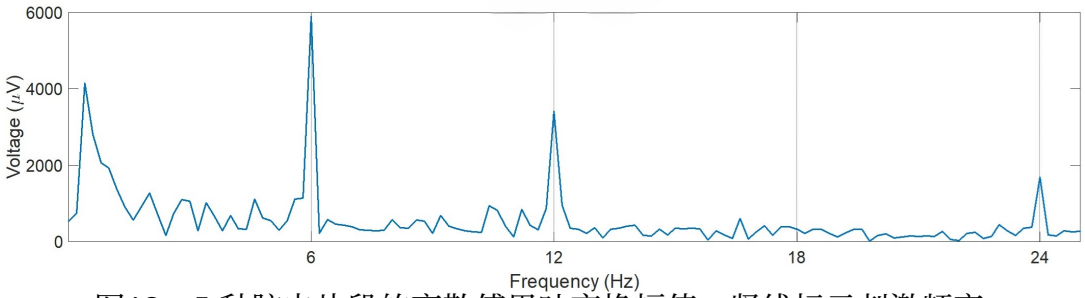

图12：5 秒脑电片段的离散傅里叶变换幅值。竖线标示刺激频率（6 Hz）及其谐波。

确定性冲激列 理想的连续时间冲激列，其周期为T，在**时域**中为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \, \delta(t - nT), \tag{A.1}$$

其中，$\delta(\cdot)$ 是狄拉克δ函数，A_n 是第 n 个冲激的振幅（固定值或随机值），冲激出现在 $t = nT$ 处。在**频域**中，$s(t)$ 的傅里叶变换是一个冲激梳：

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \tag{A.2}$$

其中，f 是频率。

加性误差模型：线性输入输出系统

我们将观测信号（输出）建模为受到加性噪声干扰的冲激列（输入）：

$$x(t) = s(t) + \varepsilon(t), \tag{A.3}$$

其中，$\varepsilon(t)$ 是加性高斯噪声，其 $\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$（逐点作用于时间）。在**频域**中，进行傅里叶变换可得

$$Y(f) = S(f) + N(f) \tag{A.4}$$

其中 $N(f)$ 是复高斯噪声，$N(f) \sim \mathcal{CN}(\mu_N, \sigma_N^2)$。$N(f)$ 的实部和虚部是相互独立的正态变量：Re $N(f)$，Im $N(f) \sim \mathcal{N}(\mu_N, \sigma_N^2)$。式 (1.1) 给出的模型 (A.4) 及其离散傅里叶表示，以及在给定频率处具有确定振幅的 $S(f)$ μ 。

信噪比 将频率特定的信噪比定义为

$$\mathrm{SNR}(f) = \frac{\mathbb{E}\left[|S(f)|^2\right]}{\mathbb{E}\left[|N(f)|^2\right]}.$$

对于每个实分量的方差为 σ_N^2的复高斯噪声， $\mathbb{E}[|N(f)|^2] = 2\sigma_N^2$，因此

$$\mathrm{SNR}(f) = \frac{\mathbb{E}\big[|S(f)|^2\big]}{2\sigma_N^2}.$$

对于给定频率的 $S(f) = \mu$ ，这可简化为

$$\mathrm{SNR}(f) = \mu^2/(2\sigma_N^2), \tag{A.5}$$

这就是信噪比值 (2.4)。

A.2 闪光刺激下脑电图的相位角

该脉冲列加噪声模型捕捉了脑电图中光刺激的主要特征：在刺激频率及其谐波处出现梳状谱，并叠加着可能掩盖或扭曲谱峰的宽带噪声。因此，该模型有助于进行模拟、理解刺激的频谱特征，以及设计基于信噪比的检测或滤波策略。闪光会以与时间相关的方式与大脑的持续节律相互作用：刺激起始时振荡的瞬时相位决定神经元兴奋性，因此，相位测量对于解释和预测短暂视觉刺激的神经效应和感知效应至关重要（Busch 等人，2009；Busch 和 VanRullen，2010）。此外，Notbohm 和 Herrmann（Notbohm 和 Herrmann，2016）以及 Mathewson 等人（Mathewson 等人，2009）的研究提供了有力证据，表明大脑对视觉闪光刺激的反应主要受持续振荡的相位控制，而非其振幅；这说明刺激起始时的相位对齐决定了神经同步的强度以及产生意识知觉的可能性。总之，第?? 节中相位角数据的 PIN分布是合适的。

A.3 CSM 的起源

现在，我们讨论离散时域中的模型 (A.3) 及其在离散傅里叶域中的对应傅里叶表示 (A.4)，并将 Friedman 等人（1984）的方法重述为一个模型框架。下面，我们给出观测脑电图（时域和频域）的表示，并说明 Friedman 等人（1984）使用的相位统计量如何自然地导出 CSM 指标。

设实值离散时间序列 $x(t)$、 $t = 1$、.....、 n，其中 n 为偶数，对应于（A.3）。一种便于分离正弦分量的有限傅里叶级数表示为

$$x(t) = b_0 + \sum_{j=1}^{n/2-1} \big[a_j \sin(2\pi jt/n) + b_j \cos(2\pi jt/n)\big] + b_{n/2} \cos(\pi t), \tag{A.6}$$

其中，系数 $\{a_j, b_j\}$ 决定了各个傅里叶频率上的贡献。我们将给定频率 j 处的系数建模为

$$Y_j = a_j + ib_j = r_j e^{i\theta_j}, \tag{A.7}$$

相位 θ_j 因而是一个圆随机变量，其在信号加噪声模型下的分布即为我们理论推导中使用的 PIN 模型。Friedman 等人（1984）关注的是 $\bar{R}^2$ 或 CSM（以样本圆方差作为 $1-\bar{R}^2$，而非标准方差 $1-R$），该统计量根据相位角集合 $\{\theta_j\}$计算得出。CSM 统计量衡量给定傅里叶系数在不同试次或通道间的相位同步性（集中性），因此可用作区分信号相位分布与均匀（噪声）相位分布的标准。

在我们的实现中，我们对离散化的脑电图 $x(t)$进行离散傅里叶变换,

$$Y_j = r_j e^{i\theta_j} = \sum_{t=1}^{n} x(t)\, e^{-i2\pi jt/n}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{A.8}$$

然后根据感兴趣频率处的相位 $\{\theta_j\}$，得到 $\bar{R}^2$ (CSM)。

备注。作为对 PIN 近似的验证，脑电图数据中观测到的合向量的经验行为与 PIN 模型下的理论分布高度吻合；相关结果参见 Miranda de S$\acute{a}$ and Felix（2003）。

B 附录2：矩

现在我们证明矩公式 (3.3) 和 (3.4)。不失一般性，在模型 (2.1) 中，取 $\sigma = 1$ and $\mu_1 = 2\sqrt{\gamma}$, $\mu_2 = 0$。于是，(2.1) 中 (r, θ) 的联合密度为

$$f(r, \theta; \gamma) = \frac{\exp(-2\gamma)}{2\pi}\, r \exp(-r^2/2) \exp\{2\sqrt{\gamma}\, r \cos\theta\}. \tag{B.1}$$

因此,

$$E(\sin p\theta) = \frac{\exp(-2\gamma)}{2\pi} \int_0^\infty r \exp(-r^2/2)\, a_1(r)\, dr, \tag{B.2}$$

其中

$$a_1(r) = \int_0^{2\pi} (\sin p\theta)\, \exp\{2\sqrt{\gamma}\, r \cos\theta\}\, d\theta. \tag{B.3}$$

$a_1(r)$ 中的被积函数是 θ 的奇函数，因此 $a_1(r) = 0$。这就证明了 (3.3).

为证明（3.4），注意到

$$E(\cos p\theta) = \exp(-2\gamma) \int_0^\infty r \exp(-r^2/2)\, a_2(r)\, dr, \tag{B.4}$$

其中

$$a_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos p\theta)\, \exp\{2\sqrt{\gamma}\, r\cos\theta\}\, d\theta. \tag{B.5}$$

摘自 Mardia 和 Jupp（2000）的附录1,

$$a_2(r) = I_p(2\sqrt{\gamma}\, r). \tag{B.6}$$

根据 Gradshteyn 和 Ryzhik（1980），公式 6.631(7)，第 706 页,

$$\int_0^{\infty} r\exp(-r^2/2)\, I_p(2\sqrt{\gamma}\, r)\, dr = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}\, \exp(\gamma)\{I_{(p-1)/2}(\gamma) + I_{(p+1)/2}(\gamma)\}. \tag{B.7}$$

将 (B.6) 和 (B.7) 代入 (B.4)，得到 (3.4)。

C 附录3：近似1和近似2的评估

现在我们进一步比较第3节中的近似1和近似2。表

表3：对 PIN(γ) 的冯·米塞斯近似；对于给定的 γ、κ_1，采用近似1，对于 κ_2，采用近似2。

γ	κ_1	κ_2
0.05	0.5686	0.5746
0.25	1.3513	1.4161
0.50	2.0786	2.2473
0.75	2.7936	3.0642
1.00	3.5628	3.9059
2.00	7.2644	7.5655
2.50	9.2872	9.5093
3.75	14.3748	14.4765
5.00	19.4204	19.4790

表3给出了 PIN 分布的集中参数 κ，分别对应近似1和近似2（κ_1 和 κ_2）。从表中可以看出，对于所示数值，$\kappa_2 \geq \kappa_1$，因此差异 $\kappa_2 - \kappa_1$ 为非负值。此外，最大差异约为 0.37，出现在 $\gamma \approx 2.5$ 附近；当 γ 非常小或非常大时，两种近似在数值精度范围内重合。图13绘制了两种近似之间的差异；最大偏差出现在中等信噪比范围内。数值均为非负值，这再次证实了 $\kappa_2 \geq \kappa_1$。图14将信噪比为 1、1.5、2 和 4 时的两种冯·米塞斯近似（近似1、近似2）与 PIN 密度进行了比较，预计在这些情况下差异较大。在中间信噪比范围（大约 0.75–2）内，近似2与 PIN 更为接近，这可能是因为它纳入了第二三角矩。

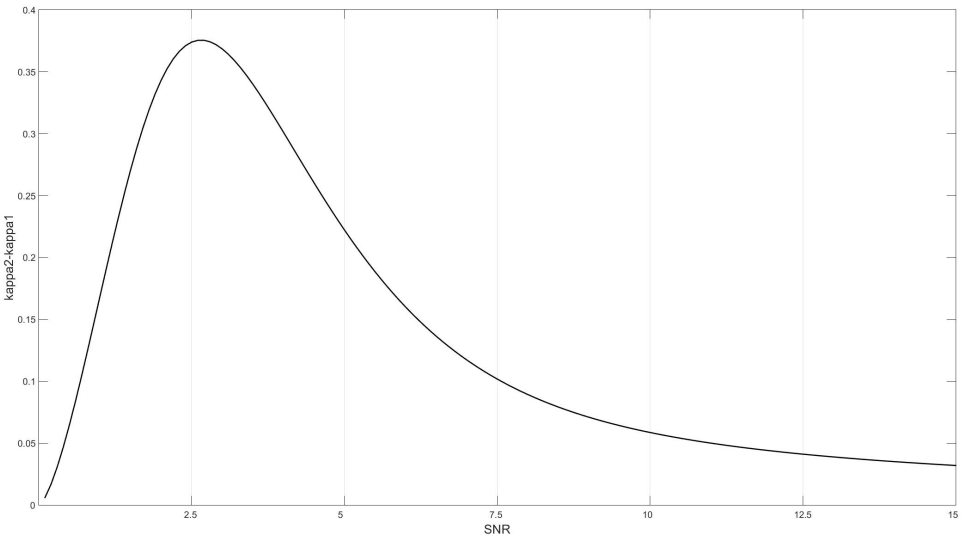

图13：差值 $\kappa_2-\kappa_1$ 随信噪比变化（其中信噪比$=2\gamma$）。

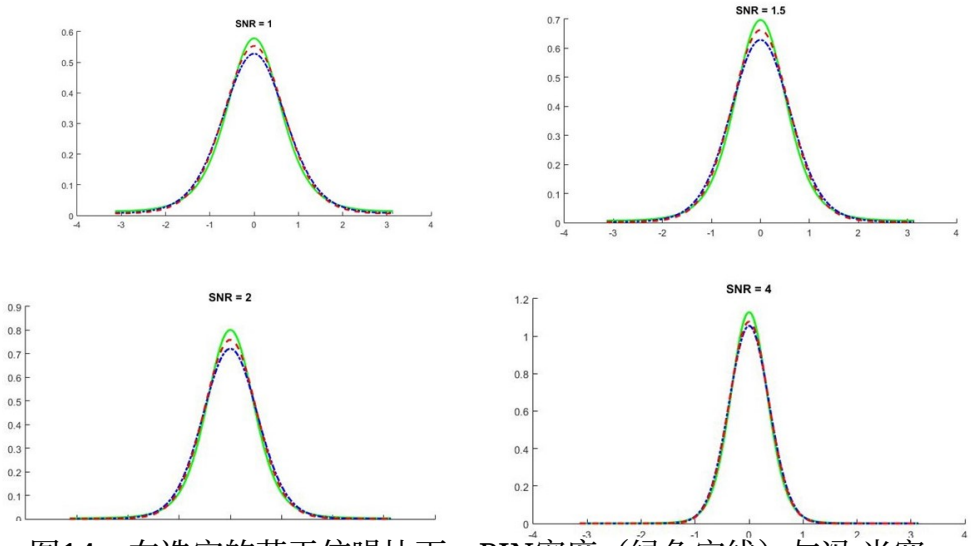

图14：在选定的若干信噪比下，PIN密度（绿色实线）与冯·米塞斯 von Mises 近似 1（蓝色虚线）和近似2（红色虚线）的比较。

Kullback–Leibler 比较

我们使用 PIN 密度的 Kullback–Leibler（KL）散度评估了两种近似。近似1和近似2之间的 KL 差异可以忽略不计：观测到的最大差异约为 0.003，出现在 $\gamma = 0.75$，其中近似1略微更优。因此，我们指出：

- 近似1 是一种成熟可靠的选择，在某些目标 il

区域。

- 近似2在代数上更简单，并计入了更高阶的三角矩，从而改善了在中等信噪比范围内的拟合。_

- 就实际用途而言（例如，阈值化 R 在应用中），这两种近似给出几乎相同的结果；差异仅在极端尾部最为相关。