arXiv:2603.03817v1 [math.AG] 4 Mar 2026

对数典范广义对的极小模型纲领的存在性

ZHENGYU HU 和 JIHAO LIU

Abstract. 我们引入线性可分解（LD）广义对，作为非 NQC 情形下有理分解的一种可行替代。利用 LD 广义对，并结合特殊终止的改进以及 Koll´ar 型粘合理论，我们证明了对数典范广义对的翻转存在性，无需假设 klt 条件、NQC 条件或 $\mathbb{Q}$-阶乘性。结合锥与收缩定理，这便得到任意对数典范广义对的极小模型纲领的存在性。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 6
3. 线性可分解广义对 12
4. 模型 18
5. 带缩放的极小模型纲领 23
6. 特殊终止 27
7. 通过饭高纤维化的约化 31
8. 一般平凡广义对的粘合理论 34
9. 定理 1.4 的证明 40
10. 极小模型纲领的存在性 48
11. $\mathbb{Q}$-阶乘广义对 49
参考文献 52

1. Introduction

我们在复数域上工作 $\mathbb{C}$。

背景。 由 Birkar 和 Zhang [BZ16]在研究有效饭高纤维化猜想时提出的广义对理论，已成为双有理几何中的标准框架。粗略地说，一个广义对（X， B，$\mathbf{M}$）不仅记录了 $\mathbb{R}$-除子 B 上的 X 边界$\mathbf{M}$ ，还记录了生活在高模型上的丰部分，而这种额外的灵活性非常适合归纳构造。基本思想已经出现在 Birkar 和第一作者 [BH14]，的工作中，广义对与伴随型构造密切相关，包括子伴随和典范丛公式 [Kaw98、 FM00]。该领域的许多重大进展，例如

日期：2026年3月5日。2020 数学主题分类。14E30, 14B05, 14E05,14E15。关键词和短语。广义对、极小模型纲领、对数典范奇点、翻转。

Borisov–Alexeev–Borisov 猜想的证明 [Bir19, Bir21] 以及 M^{c}Kernan– Shokurov 猜想 [Bir23]，都依赖于这一框架。尽管近期对 Prokhorov–Shokurov 的 b-半丰性猜想 [BFMT25] 的证明阐明了典范丛公式中模部分的行为，但针对对数典范广义对的系统性极小模型理论仍然是一个独立且自然的问题：在许多情形下，并不假定——也通常不期待——丰部分是半丰的，例如翻转终止（参见 [HM20, CT23, Mor25]）、具有反数值有效典范类的簇的几何（参见[FS23, Bir24]）、K¨ahler 与解析极小模型纲领（参见 [DH23, DHY23, DH24]），以及叶状结构（参见[LLM23, Cas^{+}24, LMX24, Cas^{+}25a]）。

极小模型理论中的一个核心问题是，确定哪些结构类别可以运行极小模型纲领。对于 klt 广义对，极小模型纲领的存在性可由通常的 klt 对的极小模型纲领形式地推出，正如 [BZ16]，中所解释的那样；但对数典范（lc）情形长期以来仍未解决。通常，极小模型纲领的存在性可分为三个部分：锥定理、收缩定理和翻转的存在性。对于广义对，NQC 情形（即丰部分是 nef b-Cartier b-除子的正线性组合时）的锥定理由 [HL23]，证明；一般情形则由 [CHLX23] 证明。收缩定理在 NQC 情形下由 [Xie24] 证明（另见 [CLX23]），一般情形下则由 [CHLX23] 证明。另一方面，翻转已知在 $\mathbb{Q}$-因子化 NQC 情形 [HL23]，、一般 NQC 情形 [LX23]，以及 $\mathbb{Q}$-因子化（不一定是 NQC）情形 [CHLX23] 中存在。剩下的情形是非 NQC、非 $\mathbb{Q}$-因子化、非 klt 的情形；关于 NQC 对数典范广义对的极小模型的存在性，进一步讨论亦见 [TX24]。

主要结果。 本文解决了这一剩余情形，并证明对数典范广义对在完全一般的情形下存在翻转，即不假设 $\mathbb{Q}$ 阶乘性、NQC 条件或 klt条件。特别地，这填补了运行对数典范广义对的极小模型纲领所需的最后一个未解决情形。

定理 1.1。 设$(X, B, \mathbf{M})/U$是一个对数典范广义对，且 $f\colon X \to Z$是一个$(K_X + B + \mathbf{M}_X)$-翻转收缩$/U$。则 f的翻转 $f^{+}\colon X^{+} \to Z$存在。

结合锥与收缩定理 [CHLX23，定理 B]，，我们得到对数典范广义对的极小模型纲领存在。

定理 1.2。 设$(X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个对数典范广义对。则我们可以运行$(K_X + B + \mathbf{M}_X)$-极小模型纲领$/U$。

作为进一步的结果，我们证明，在添加一个丰沛除子之后，一个 $\mathbb{Q}$-阶乘对数典范广义对的对数典范类与 $\mathbb{R}$-线性等价于某个对数典范对的对数典范类（定理 1.5）。我们还描述了广义对的 Fano 收缩的底空间（推论 1.6）。

研究现状。 下表总结了此前关于对数典范广义对的极小模型纲领的研究结果。在本文之前，唯一尚未解决的情形是一般（非 klt、非 NQC、非 $\mathbb{Q}$-阶乘）设定下翻转的存在性。

策略与中间结果。 与经典情形一样，为构造翻转，将问题约化为某些特殊情形下良好极小模型的存在性是方便的。对于对数典范对，这类已知的两个基本判据是：相对潜在对数 Calabi–Yau 对存在良好极小模型 [Bir12，定理 1。1]（另见

TABLE 1. 对数典范广义对的极小模型纲领（X， B，$\mathbf{M}$）

	锥定理	收缩定理	翻转的存在性
KLT，$\mathbf{M}=\mathbf{0}$	参见 [KMM87]	参见。 [KMM87]	[BCHM10]
$\mathbf{M}=\mathbf{0}$	[Amb03]； [Fuj11]	[Amb03]； [Fuj11]	[Bir12， HX13]
Klt	[BZ16]	[BZ16]	[BZ16]
NQC $\mathbb{Q}$ 阶乘	[HL23]	[HL23]	[HL23]
NQC	[HL23]	[谢24]； [CLX23]	[LX23]
$\mathbb{Q}$-阶乘	[CHLX23]	[CHLX23]	[CHLX23]
一般情形	[CHLX23]	[CHLX23]	本文

[Has19，定理 1。1]），以及族中存在良好极小模型 [HX13，定理 1。1]（另见 [Has19，定理 1。2]）。对于 NQC 广义对，这些定理的对应结果已在 [LX23，定理 1.1 和 1。3] 中证明。在非 NQC 情形下，我们确立了以下与 [Bir12，定理 1。1]和 [HX13，定理 1。1]对应的结果。

定理 1.3。 设$(X, B,\mathbf{M})/U$是一个广义对，且 $A\geq 0$ 是一个 $\mathbb{R}$-除子，使得$(X, B+A,\mathbf{M})/U$是对数典范的，并且 $K_X+B+A+\mathbf{M}_X\sim_{\mathbb{R},U}0$.

那么$(X, B,\mathbf{M})/U$ 有良好对数极小模型或对数莫里纤维空间。

定理 1.4。 设 $(X, B, \mathbf{M})/U$是一个 ***LD*** 广义对（参见定义 *3.1*）， $U^0\subset U$是一个非空开子集，并令 $(X^0, B^0, \mathbf{M}^0)$: $=(X, B, \mathbf{M})\times_U U^0$。假设

(1) $(X^0, B^0, \mathbf{M}^0)/U^0$ 有良好极小模型，并且 ***(2)*** $(X, B, \mathbf{M})$ 的任意对数典范中心都与 X^0相交。那么$(X, B, \mathbf{M})/U$ 有良好对数极小模型。

定理1.3 是 [Bir12，定理 1.1] 针对广义对的直接类比。在定理 1.4 中，我们施加一个额外条件“LD”，意为“可线性分解”。从概念上说，在没有 NQC 假设时，LD 条件提供了有理分解的一种可行替代方案：它要求对数典范类在一个有理仿射子空间中变化，且广义对在某个邻域内保持对数典范，从而仍能得到受控的凸分解，分解为 $\mathbb{Q}$-类。

最重要的是，任何由丰沛 $\mathbb{R}$-除子极化的对数典范广义对，都存在一个 LD 结构，使其在 $\mathbb{R}$-线性等价意义下成立（引理 3.13）。利用这一结果，我们得到以下关于 $\mathbb{Q}$-阶乘对数典范广义对的结构定理。

定理 1.5。 设$(X, B, \mathbf{M})/U$是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘对数典范广义对，且 A 是 X上的丰沛$/U\mathbb{R}$-除子。那么存在一个对数典范对(X, Δ) 使得

$$K_X+\Delta\sim_{\mathbb{R},U}K_X+B+\mathbf{M}_X+A.$$

参见定理 11.4 以得到更一般的陈述。结合定理1.5与 Prokhorov–Shokurov 的 ***b***-半丰性定理 [BFMT25]，，我们得到如下推论，它可视为 [HH20定理 1 的广义对类比。6]。

推论 1.6. 设 $(X, B,\mathbf{M})/U$ 为一个 $\mathbb{Q}$-因子的对数典范广义对，且 $f\colon X\to Z$ 为一个收缩$/U$，使得 $-(K_X+B+\mathbf{M}_X)$是丰沛的$/Z$。则 Z是潜在对数典范的，即存在一个对数典范对 (Z, Δ_Z)。

注 1.7。 自然要问：当我们假设$\mathbf{M}$ 仅为数值有效的 ***b***-(1,1)-类而非数值有效的 ***b***-除子时，我们的主要结果对于紧K¨ahler簇（或复解析空间）之间的射影态射是否仍然成立。

在这一方向上已有证据。一方面，对于具有 $\mathbb{Q}$-因子性的射影KLT环境簇的紧K¨ahler广义对，其极小模型纲领的存在性已在 [DH24], 中得到证明，所依据的是Graf–Kirschner分解定理 [GK20，命题4.2]。另一方面，对数典范对的极小模型纲领现已可用于复解析空间之间的射影态射（参见 [EH24, EH25, Fuj24a, Fuj24b, Fuj25, Has25b, EH26]），这建立在KLT情形之上（参见 [Fuj22, LM22, DHP24]）。将这些解析进展与本文的方法相结合，有望得到与紧K¨ahler簇（或复解析空间）之间的射影态射相关联的对数典范广义对的极小模型纲领存在性定理，这似乎是合理的。我们还注意到，在K¨ahler广义对的设定下，伴随与典范丛公式均已可用；见 [HP24]。本文不追求这一方向。

一个更具雄心的问题是，紧致 K¨ähler 簇上的（广义）对数典范极小模型纲领是否存在，即超越极小模型纲领。在 KLT 情形下，关于维数 ≤ 4（参见[DH23、DHY23、DHP24]）已有实质性进展，但对数典范情形似乎仍有许多未解之处。在更高维数下，超越极小模型纲领似乎非常困难，尽管 Ou [Ou25] 近期取得的突破带来了新的可能性。

证明概要。我们重点讨论定理 1.1。回顾一下，定理 1.1的 NQC 情形已由 [LX23，定理 1.2], 证明，我们的目标是将 [LX23] 的策略推广到 NQC 和 $\mathbb{Q}$- 阶乘情形之外。 [LX23，定理 1.2]的证明可以分为三个步骤：

(1) 将翻转的存在性归结为良好极小模型的存在性问题（用我们的记号，即将定理 1.1 归结为定理 1.3）。(2) 在定理 1.3的假设下，构造一个（对数）极小模型。(3) 证明 (2) 中得到的（对数）极小模型实际上是良好的。

(1) 中的归约是标准的，因此关键在于 (2) 和 (3)。在 NQC 情形下， [LX25], 基于 [Has22a], 所发展的对数丰富广义对的极小模型纲领，完成了 (2)；而 (3) 则由 [LX23] 利用 Koll´ar 的粘合理论[Kol13]实现。在非 NQC 情形下，我们沿用同样的思路，但会遇到若干实质性障碍。

(I) 缺乏有理分解。 [LX23]中的论证利用广义对的有理分解来应用粘合理论和某些有限生成性结论（参见[LX23，定理 1.5]）。在此，NQC 条件至关重要：NQC 广义对具有有理分解

$$(X, B, \mathbf{M}) = \sum a_i (X, B_i, \mathbf{M}_i),$$

其中 $a_i \in (0, 1]$, $\sum a_i = 1$, 且每个 $(X, B_i, \mathbf{M}_i)$ 都是一个 $\mathbb{Q}$-广义对（参见 [HL22，命题 3.20]）。对于非 NQC 广义对，这类分解一般并不成立。

（*II*）特殊终止。 特殊终止是 [LX25] 中的关键组成部分。这是因为特殊终止是用困难度函数表述的，而在非 NQC 的情形下，没有令人满意的“nef 部分的系数”概念来使通常的困难度函数定义良好。

（*III*）升链条件型输入。 对于非 NQC 广义对，我们没有以丰沛情形论证所需的形式得到 lc 阈值的升链条件或全局 ACC（参见 [HMX14、BZ16]）。在 NQC 情形下， [LX23]和 [LX25]都没有明确援引升链条件陈述

，但 [LX25，定理 71] 依赖于 [Has22a，定理 35]，，其证明以关键方式使用了 NQC 广义对的升链条件和全局 ACC。因此， [LX25] 中相应的步骤无法直接推广到非 NQC 情形。

为克服这些问题，我们提出了若干新思路。

（a）对数典范类的线性分解。即使（X， B，$\mathbf{M}$）本身不具有有理分解，对数典范 $\mathbb{R}$-除子 $K_X + B + \mathbf{M}_X$ 仍可满足有用的算术约束，尤其是在添加一个丰沛的 $\mathbb{R}$-除子 A之后。在许多情况下，只需控制类 $K_X + B + A + \mathbf{M}_X$（而不是同时分解 B 和$\mathbf{M}$），便可获得分解为 $\mathbb{Q}$-类的凸分解。受此启发，我们引入了线性可分解（LD）广义对（第3节），并建立了其基本性质。

针对障碍（I），由于非 NQC 广义对的子伴随及相关伴随工具已在 [CHLX23], 中建立，我们可以为 LD 广义对建立 Koll´ar 型粘合理论（定理8.9）。这种线性分解可替代 [HL22命题 3.20]中所使用的 NQC 分解。此外， [LX23] 中的有限生成论证仅用于 [LX23定理 5.1 的证明第 2] 步，以约化到一般型情形。 [LX23定理 5.1 的证明第 3] 步中的粘合论证并不要求一般型；唯一使用“一般型”的地方是 [LX23引理 3.5], 我们用类似于 [Bir12定理 1.7]的论证替代了这一点。见下文定理8.10 。

(b) 通过余维二控制实现特殊终止。对于障碍（II），关键观察是，特殊终止所涉及的不变量本质上具有余维二性质。具体而言，若我们在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 KLT 簇 X 上运行对数典范广义对极小模型纲领，相关系数来自曲面纯对数终端点。对于曲面 ϵ-纯对数终端对 (X, S)，局部 Cartier 指数有界于 $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$（参见 [Kol+92，16.6 命题]），且 ϵ-纯对数终端条件在极小模型纲领下保持不变。另一方面，当 $K_X + B + \mathbf{M}_X$ 是一个 $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-除子时（适当扰动后的 LD 广义对便是如此），其 Weil 指数在极小模型纲领过程中保持不变，因此余维二点处的 Cartier 指数一致有界。这使我们能够为 LD 广义对定义适当的困难度函数，并证明特殊终止（第 6 节）。与经典的困难度函数 [Fuj07], 不同，我们的困难度函数取决于给定的广义对以及归纳假设。关于这类特殊终止的初步形式，请读者参见 [Hu25，第 4.2] 小节。

（c）避免使用 lc 阈值的升链条件。对于障碍（III），我们完全避免使用升链条件类型的论证：相反，我们采用 [Has19], 的方法，其中定理1.3 和1.4 的对版本无需降链条件输入即可证明。类似方法也出现在 [HL23]较早的 arXiv 版本中，随后又见于 [Cas+25a]。在我们的设定下，结合（a）和（b），这给出定理1.4 以及定理1.3的 LD 情形。

将本文中“（对数）丰沛广义对”所起的作用与其在文献中的作用加以比较，亦有价值。除依赖升链条件型结果外， [Has22a、LX25]中的方法还利用了（对数）丰沛 NQC 广义对的极小模型纲领的细致性质，其思想源自对情形，尤其是 Hashizume 的工作 [Has24] （另见[Hu17、HH20]）。在对情形中，对数丰沛性至关重要，因为数值有效且对数丰沛的对数典范对具有良好极小模型 [FG14、HX16]。然而，在 NQC 广义情形中已出现反例（参见 [JLX25]），而非 NQC 情形的表现甚至

更差；因此，这些丰沛情形技巧中仅有有限一部分适用于我们的论证。进一步讨论见第7 节。

最后，定理 1.3 的一般情形可由 LD 情形通过标准约化得到，具体做法是替换 $\mathbf{M}$，使得 $K_X + B + A + \mathbf{M}_X \sim_{\mathbb{R},\, U} 0$。由此得到定理 1.1；结合锥与收缩定理 [CHLX23，定理 B]，可得定理 1.2。

我们还利用定理 1.4 推出 [HL23，引理 5。9] 的非 NQC 类比，随后遵循 [HL23]的论证，得到定理1.5。最后，推论 1.6直接由定理 1.5与 [BFMT25，定理 7.6 和 7.2 一并推出。3]。

论文结构。 第 2 节回顾预备知识。第3 节引入 LD 广义对并建立其基本性质。第 4 节和 5 节讨论模型以及 LD 广义对在带缩放的极小模型纲领下的行为。第 6 节证明 LD 广义对的特殊终止。第 7 节研究具有丰沛典范类的广义对的极小模型纲领。第8节建立 LD 广义对的 Koll´ar 型粘合理论。第 9 节证明定理 1.4。第 10 节证明定理1.1、 1.2和 1.3。最后，在第 11节证明定理1.5 和推论 1.6。

致谢。本研究得到国家重点研发计划 #2024YFA1014400 的资助。第一作者得到海外高层次青年人才引进计划的资助，并部分得到重庆市自然科学基金创新发展联合基金 CSTB2023NSCQ-LZX0031 的资助。作者谨向 Caucher Birkar、Paolo Cascini、Christopher D. Hacon、Kenta Hashizume、江晨、欧文浩、Calum Spicer 和徐征教授致谢，感谢他们进行的有益讨论。

2. Preliminaries

我们采用[Sho92、KM98、BCHM10]中的极小模型纲领标准符号和术语，并在下文中自由使用。对于广义对，我们遵循 [BZ16、HL23] 中的符号和定义，但略有不同。为简化记号，我们有时将广义对写成 $\mathfrak{A}$的形式。这一约定最初由[Cas+25a], 引入，我们的记号与 [Cas+25a]一致。见下文记号2.8。

2.1. 特殊记号。

记号 2.1. 设 $X \to U$ 是正规拟射影簇之间的一个射影态射。若一个收缩/U $f : X \to Y$ 是一个射影态射/U，满足 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$，则称其为收缩。对于任意双有理映射/$U$ $h : X \dashrightarrow X'$，我们用 Exc(h) 表示由 h的例外轨迹中余维为一的部分支撑的约化除子。

定义 2.2. 设 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ 是一个向量。 $\boldsymbol{v}$的有理包络是 $\mathbb{R}^m$ 中包含 $\boldsymbol{v} \in V$ 的最小 $\mathbb{Q}$-仿射子空间 V。例如，若 $\boldsymbol{v} = (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2_{xy}$，则 $\boldsymbol{v}$ 的有理包络为 $(x + y = 1)$。

定义 2.3. 设 $X \to U$ 是从正规拟射影簇到簇的射影态射。设 D 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子，且 $\phi : X \dashrightarrow X'$ 是一个双有理映射/U。若 ϕ 不提取任何除子， $D' := \phi_* D$ 是 $\mathbb{R}$-Cartier，且对于任意不定点集的解消

$p\colon W \to X$ 和 $q\colon W \to X'$，其中 ϕ，我们可以写成

$$p^*D = q^*D' + F$$

其中 $F \geq 0$ 且支集$p_*F = \mathrm{Exc}(\phi)$（相应地，$F \geq 0$、 $F = 0$、 $F \leq 0$、 $F \leq 0$ 且支集$p_*F = \mathrm{Exc}(\phi)$）。

定义 2.4. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 为一个集合。设 X 为一个正规簇，并设 D 为 X上的一个 $\mathbb{R}$-除子。记 $D = \sum d_iD_i$，其中 D_i 是 D的不可约分支。我们用$D^{\mathrm{irr}} := \sum_{d_i \notin \mathbb{Q}} d_iD_i$表示。我们用 $||D||_\infty := \sup\{0, |d_i|\}$表示。若对任意 i都有 $d_i \in \Gamma$，则我们用 $D \in \Gamma$ 表示。

2.2. 广义对。

定义 2.5 ($\boldsymbol{b}$-除子)**.** 我们采用 [HL23，定义 2.4]中的记号。设 X 为一个正规拟射影簇。一个 $\boldsymbol{b}$-除子$\mathbf{M}$ 在 X 上是一个（可能无限的） $\mathbb{R}$-线性组合，由除子赋值构成 ν_P，位于 X上

$$\mathbf{M} = \sum_P r_P\nu_P$$

使得对于任意双有理映射 $\phi\colon X \dashrightarrow Y$,

$$\{P \mid \mathrm{center}_Y P \text{ is a divisor}, r_P \neq 0\}$$

是一个有限集。根据定义，$\mathbf{M}$ 也是 $\boldsymbol{b}$-除子。我们称$\mathbf{M}$ 为 $\mathbb{Q}$-$\boldsymbol{b}$-除子，若$r_P \in \mathbb{Q}$ 对于其上的任意素除子 P。对于任意双有理映射 $\phi\colon X \dashrightarrow Y$，我们用

$$\mathbf{M}_Y := \sum_{P|\mathrm{center}_Y P \text{ is a divisor}} r_P\left(\mathrm{center}_Y P\right).$$

我们称$\mathbf{M}$ 下降到 X，若$\mathbf{M}_X$ 是 $\mathbb{R}$-Cartier，并且对于任意射影双有理态射 $h\colon X' \to X$，有 $\mathbf{M}_{X'} = h^*\mathbf{M}_X$。对于 X 上任意 $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子 D，我们用 D 表示满足$\mathbf{M}$ 下降到 X 且$\mathbf{M}_X = D$的 $\boldsymbol{b}$-除子。我们记$\mathbf{0} := 0$。我们称$\mathbf{M}$ 为 $\boldsymbol{b}$-*Cartier*，若存在双有理映射 $\phi\colon X \dashrightarrow Y$，使得$\mathbf{M}$ 下降到 Y 且$\mathbf{M}_Y$ 是 Cartier。

对于任意射影态射 $\pi\colon X \to U$ 到正规拟射影簇 U，若存在一个双有理映射/U $\phi\colon X \dashrightarrow Y$，使得 $\mathbf{M}$ 下降到 Y，且 $\mathbf{M}_Y$ 数值有效/U，则称 $\mathbf{M}$ 数值有效/U；若 U 是一个闭点，则称 $\mathbf{M}$ 数值有效。对于任意非负实数 s，若 $\mathbf{M} = \sum \mu_i\mathbf{M}_i$，其中每个$\mu_i \geq s$ 以及每个 $\mathbf{M}_i$ 都是数值有效/U $\boldsymbol{b}$-Cartier 除子 $\boldsymbol{b}$，则称 $\mathbf{M}$ 是 s-NQC/U。对于 X上的任意 $\mathbb{R}$-Cartier 除子 $\mathbb{R}$ D，若 $D = \sum d_iD_i$，其中每个 $d_i \geq s$ 以及每个 D_i 都是数值有效/UCartier 除子，则称 D 是 s-NQC/U。若 $\mathbf{M}$（分别地， D）是 0-NQC/U，则称 $\mathbf{M}$（分别地， D）是 NQC/U。

定义 2.6。本文将使用 $\boldsymbol{b}$-除子的两种限制。设 X为一个正规拟射影簇，且$\mathbf{D}$ 是 X上的一个 $\boldsymbol{b}$-除子。

(1) 令 V 为 X的一个非空开子集。我们按如下方式定义受限 $\boldsymbol{b}$-除子在$\mathbf{D}$上的限制，记作$\mathbf{D}|_V$。对于任意双有理态射 $\pi\colon W \to V$，存在一个双有理态射$\pi'\colon Y \to X$，使得 $W \subset Y$且 $\pi'|_W = \pi$。令$(\mathbf{D}|_V)_W = (\mathbf{D}_Y)|_W$。容易看出，该定义与 Y 的选取无关，并定义了一个 $\boldsymbol{b}$-除子。(2) 假设$\mathbf{D}$下降到 X的一个双有理模型。令 S 为X 上的一个素除子，并令 $\nu\colon S^\nu \to S$ 为 S的正规化。受限 $\boldsymbol{b}$-除子$\mathbf{D}$ 在 S^ν上的限制，记作$\mathbf{D}|_{S^\nu}$，按如下方式定义。

令 $f\colon Y \to X$ 为(X, S)的一个对数解消，使得$\mathbf{D}$ 下降到 Y。令$S_Y := f_*^{-1}S$。于是存在一个诱导的双有理态射 $f_S\colon S_Y \to S^\nu$，使得$\nu \circ f_S = f|_{S_Y}$。我们定义

$$\mathbf{D}|_{S^\nu} := \overline{\mathbf{D}_Y|_{S_Y}}.$$

显然，$\mathbf{D}|_{S^\nu}$ 是良定义的，并且与 Y的选取无关。

定义 2.7（广义对）。一个广义对 $(X, B, \mathbf{M})/U$ 是如下数据：一个正规拟射影簇 X、到一个正规拟射影簇 U的射影态射 $X \to U$、X上的一个 $\mathbb{R}$-除子 $B \geq 0$，以及一个数值有效/U $\boldsymbol{b}$-除子$\mathbf{M}$，使得$K_X + B + \mathbf{M}_X$是 $\mathbb{R}$-Cartier。我们称$(X, B, \mathbf{M})/U$是 NQC，如果$\mathbf{M}$ 是NQC/U。我们称$(X, B)/U$ 是一个对，如果$\mathbf{M} = \mathbf{0}$。

如果 $B = 0$，或者如果$\mathbf{M} = \mathbf{0}$，或者如果 U 从上下文中是清楚的，则我们可以分别略去 B、$\mathbf{M}$或 U。如果 $U = \{pt\}$，则我们也略去 U，并称$(X, B, \mathbf{M})$是射影的。如果我们允许 B 具有负系数，则我们将加上前缀“sub-”。如果 B 是一个$\mathbb{Q}$-除子且$\mathbf{M}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-$\boldsymbol{b}$-除子，则我们将加上前缀“$\mathbb{Q}$-”。

为使论证简洁，我们采用以下记号。由于规范 [Cas+25a] 除子 $\mathbb{R}$的书写冗长，该记号最初由。

记号 2.8. 设 $(X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个子广义对。在许多情形下，使用记号 $(X, B, \mathbf{M})/U$ 相当不便，也会使论证难以理解。有时，我们无需依赖（子）广义对所包含的全部信息。鉴于此，本文通常将（子）广义对记作“$\mathfrak{A} := (X, B, \mathbf{M})$”，或者仅说“$\mathfrak{A}/U$ 是一个（子）广义对”，而不必完整地列出 $X, B, \mathbf{M}$。

下文中，设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个子广义对。

对于 X 上的任意 $\mathbb{R}$-除子 D，以及 X 上满足 $D + \mathbf{N}_X$ 是 $\mathbb{R}$-Cartier 的数值有效/U $\boldsymbol{b}$-除子 $\mathbf{N}$，定义 $(\mathfrak{A}, D, \mathbf{N}) := (X, B + D, \mathbf{M} + \mathbf{N})$。若 $D = 0$，则可以省略 D；若 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$，则可以省略 $\mathbf{N}$。我们定义

$$K_{\mathfrak{A}} := K_{(X,B,\mathbf{M})} := K_X + B + \mathbf{M}_X$$

是 $\mathfrak{A}$ 的典范 $\mathbb{R}$除子。此外，X、B、$\mathbf{M}$ 分别称为 $\mathfrak{A}$ 的环境簇、边界部分和数值有效部分（或模部分）。$\mathbb{R}$-除子 $B + \mathbf{M}_X$称为 $\mathfrak{A}$ 的广义边界。若 $K_{\mathfrak{A}}$ 是大除子，我们称 $\mathfrak{A}/U$ 为一般型。

定义 2.9. 设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个子广义对。对于任意双有理映射/U ϕ: $X \dashrightarrow X'$，定义 $\phi_*\mathfrak{A} := (X', \phi_*B, \mathbf{M})$，并称 $\phi_*\mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{A}$ 在 X' 上的像。对于任意射影双有理态射 $h\colon X' \to X$，定义 $h^*\mathfrak{A} := (X', B', \mathbf{M})$，其中 B' 是满足 $K_{h^*\mathfrak{A}} = h^*K_{\mathfrak{A}}$ 的唯一 $\mathbb{R}$-除子。对于 X' 上的任意素除子 E，记

$$a(E, \mathfrak{A}) := -\operatorname{mult}_E B'$$

相对于 $\mathfrak{A}$，E 的不一致度。如果对于任意位于 X之上的素除子，$\mathfrak{A}$ 满足子对数正则（分别为子 *Kawamata* 对数终端</*style*），即$(, \mathfrak{A}) \geq -1$（分别为 > -1），则称 $\mathfrak{A}$ 为子对数正则（分别为子 *Kawamata* 对数终端）。如果 $B \geq 0$ 且 $\mathfrak{A}$ 是子对数正则（分别为子 Kawamata 对数终端），则称 $\mathfrak{A}$ 为对数典范（分别为 KLT）。如果存在某个 Δ使得（X，Δ）是 KLT，则称 X 为潜在 *klt*。

$\mathfrak{A}$ 的一个非 *Kawamata* 对数终端位（分别为对数典范位、非对数正则位）是 E 上的一个素除子，满足 X 使得a（E，$\mathfrak{A}$）≤ -1（分别为 a（E，$\mathfrak{A}$）$= -1$、a（E，$\mathfrak{A}$）< -1）。$\mathfrak{A}$ 的一个非 *Kawamata* 对数终端中心（分别为非平凡对数正则中心、非对数典范中心）是 $\mathfrak{A}$ 的一个非 Kawamata 对数终端位（分别为对数典范位、非对数正则位）在 X上的像。$\mathfrak{A}$ 的一个对数典范中心或者是 $\mathfrak{A}$ 的一个非平凡对数正则中心，或者就是 X 本身。X 称为平凡的

$\mathfrak{A}$的对数典范中心。所有非 Kawamata 对数终端中心（分别为所有非对数典范中心）的并集称为 $\mathfrak{A}$ 的非*klt*轨迹（分别为非对数典范轨迹），记作 Nklt($\mathfrak{A}$)（分别为 Nlc($\mathfrak{A}$)）。

我们称 $\mathfrak{A}$ 为除子对数终端，如果 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的，并且对于 $\mathfrak{A}$ 的任意一个对数典范中心 V，其一般点为 η_V，则 (X, B) 在 η_V 附近对数光滑，且 $\mathbf{M}$ 在 η_V 附近下降到 X。我们称 $\mathfrak{A}$ 为 $qdlt$，如果存在一个开子集 $V \subset X$，使得

- $(V$，支集 $B|_V)$ 是 $\mathbb{Q}$-因子阶化的对数环面（参见 [ACSS21，定义 2.1]），并且
- V 包含 $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心的一般点，并且 $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心的一般点都是 $(V, B|_V)$ 的某个对数典范中心的一般点。

根据 [CHLX23，引理 7.1。2]， $\mathfrak{A}$ 是 qdlt，当且仅当对于 $\mathfrak{A}$ 的任意一个对数典范中心，其一般点为 η， $\mathfrak{A}$在 η附近是 $\mathbb{Q}$-因子阶化的环面。

对数解消 $h: Y \to X$ 是 $\mathfrak{A}$ 的对数解消，同时也是 $(X$，支集 $B)$ 的对数解消，并且 $\mathbf{M}$ 下降到 Y。

定义 2.10。设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个子广义对。对于任意非负实数 s，如果 $K_{\mathfrak{A}}$ 是 s-NQC$/U$，则称 $\mathfrak{A}/U$ 是 s-$KNQC$。如果 $K_{\mathfrak{A}}$ 是 NQC$/U$，则称 $\mathfrak{A}/U$ 是 KNQC。

定义 2.11。设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个子广义对。对于带有 $X^0 := X \times_U U^0$ 的任意非空开子集 $U^0 \subset U$，记作

$$\mathfrak{A} \times_U U^0 := \mathfrak{A}|_{X^0} := (X^0, B^0, \mathbf{M}^0) := (X, B, \mathbf{M}) \times_U U^0 := (X^0, B|_{X^0}, \mathbf{M}|_{X^0}).$$

~进一步假设 $B \geq 0$ 且 S 是 $B^{=1}$ 的一个不可约分支，其正规化为S。根据 [BZ16，定义 4，7]，存在一个由伴随诱导的广义对（S， B_S， $\mathbf{M}^S$）$/U$

$$K_S + B_S + \mathbf{M}^S_S = (K_X + B + \mathbf{M}_X)|_S$$

记 $\mathfrak{A}|_S := (S, B_S, \mathbf{M}^S)$。根据 [BZ16，备注 4，8]，如果 $\mathfrak{A}$是对数典范的，则 $\mathfrak{A}|_S$是对数典范的。根据[HL22，引理 2，9],如果 $\mathfrak{A}$ 是除子对数终端的，则 $\mathfrak{A}|_S$ 是除子对数终端的。

如果 $\mathfrak{A}$ 是除子对数终端的，且 V是一个维数为 ≥ 1 的非平凡对数正则中心，属于 $\mathfrak{A}$，则 V是 $\cap_{i=1}^k S_i$ 的一个不可约分支，其中 S_i 是 $\lfloor B \rfloor$ 的不可约分支，且每个 S_i 是正规的，这由 [HL22，引理 2.6] 可得。于是对任意 $1 \leq j \leq k$，存在一个不可约分支 V_j，即 $X \cap \bigcap_{i=1}^j S_i$ 的不可约分支，使得

$$V_j \subset V_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad V_k = V, \quad V_0 = X.$$

由 [HL22，引理 2.9，命题 2.10]，，我们可以归纳地定义 $\mathfrak{A}_{V_j} := \mathfrak{A}_{V_{j-1}}|_{V_j}$，使得 $\mathfrak{A}_{V_j}$ 对任意 j 都是除子对数终端的。我们用 $\mathfrak{A}_V := \mathfrak{A}_{V_k} := \mathfrak{A}|_V$ 表示。

定义 2.12. 对任意子广义对 $\mathfrak{A}_i/U = (X, B_i, \mathbf{M}_i)/U$ 以及实数$a_i \in [0, 1]$，使得 $\sum a_i = 1$，我们记作

$$\sum a_i \mathfrak{A}_i := \left(X, \sum a_i B_i, \sum a_i \mathbf{M}_i\right).$$

定义引理 2.13. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对。一个 $\mathbb{Q}$-因子阶数化（q）除子对数终端修改 的 $\mathfrak{A}$是一个射影双有理态射 $h\colon X' \to X$，满足 $\mathfrak{A}' := h^*\mathfrak{A}$是 $\mathbb{Q}$-因子阶数化的（q）除子对数终端对，且 h 仅抽取 $\mathfrak{A}$的对数典范位。对数典范广义对的 $\mathbb{Q}$-因子阶数化除子对数终端修改的存在性由 [HL22，命题 3.10]证明。

以下引理是众所周知的。为方便读者，我们给出一个证明 f.

引理 2.14. 设$(X, B,\mathbf{M})/U$ 是一个 *qdlt* 广义对。那么 X 是潜在 *klt*。

证明。令 V 为 X 的一个开子集，使得

- $(V$，支集 $B|_V)$是 $\mathbb{Q}$-阶乘环面型的，并且
- V 包含 $\mathfrak{A}$的任意对数典范中心的一般点，且 $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心的一般点是$(V, B|_V)$的某个对数典范中心的一般点。

若 $V=\emptyset$，则 $\mathfrak{A}$ 是 KLT，因此 X 是潜在 klt，这由 [HL22，引理 3.4] 得出。因此，我们可以假设 $V\neq\emptyset$。

它本质上沿用了 [KM98，命题 2.43] 的证明中的相同论证。设 $S:=\lfloor B\rfloor$。则存在非常 ample Cartier 除子 H 于 X 上，使得 $\mathcal{L}:=\mathcal{O}_X(H+S)$ 由整体截面生成。选取整数 $m\gg 0$并令 $\epsilon:=\frac{1}{m}$。设 D' 为 $|\mathcal{L}|$ 的一般成员，并令 $D:=\frac{1}{m}D'$。则

$$K_X+B+\mathbf{M}_X-\epsilon S+\epsilon D$$

是 $\mathbb{R}$-Cartier，因此 $(X, B-\epsilon S+\epsilon D, \mathbf{M})$ 是一个广义对。我们令 $h\colon X'\to X$ 为 $(X, B+\epsilon D, \mathbf{M})$ 的一个对数解消。我们令 E_i 为 h-例外除子，并令 η_i 为每个 i 的 $\operatorname{center}_X E_i$ 的一般点。

由于对于 $0<\epsilon\ll 1$ 只有有限多个 E_i，若 E_i 不是 $(X, B, \mathbf{M})$ 的对数典范位，则 E_i 不是 $(X, B-\epsilon S+\epsilon D, \mathbf{M})$ 的非 Kawamata 对数终端位。若 E_i 是 $(X, B, \mathbf{M})$ 的对数典范位，则 $\operatorname{center}_X E_i$ 是 S 的一个层，并且 V 在 η_i 附近是 $\mathbb{Q}$- 因子 KLT。由于 D' 是一般的，且 $\mathcal{L}$ 是整体生成的，支集 D 不包含 $\operatorname{center}_X E_i$。因此，

$$a(E_i, X, B-\epsilon S+\epsilon D, \mathbf{M})>a(E_i, B, \mathbf{M})=-1.$$

因此，E_i 不是 $(X, B-\epsilon S+\epsilon D, \mathbf{M})$ 对于 $0<\epsilon\ll 1$ 是一个对数典范位。因此 $(X, B-\epsilon S+\epsilon D, \mathbf{M})$ 是 KLT。根据 [HL22，引理 3。4]，X 是潜在 klt。□

2.3. **相对 Nakayama-Zariski 分解。** 我们需要以下相对 Nakayama-Zariski 分解的定义，见 [LX25]。射影版本见 [Nak04]。

定义 2.15。 设 $\pi\colon X\to U$ 是正规拟射影簇之间的射影态射，D 一个伪有效/U $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子，定义在 X上，并且 P 是定义在 X上的一个素除子。我们按照 $\sigma_P(X/U, D)$ 中所定义的方式定义 [LX25，定义 3。1] 将$\sigma_P(X/U, D)$ 视为 $[0,+\infty)$ 中的一个数 $\cup\{+\infty\}$。我们定义

$$N_\sigma(X/U, D)=\sum_Q \sigma_Q(X/U, D)Q$$

其中求和遍历 X 上的所有素除子，并将其视为系数属于 $[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$ 的除子形式和。

若 $N_\sigma(X/U, D)=0$，则称 D 是可动/U 的。

2.4. **将广义对扰动为非对数典范对。** 我们需要以下引理，它允许我们将一个对数典范广义对扰动为一个（可能的）非对数典范对，同时对其非 KLT 轨迹进行良好控制。

引理 2.16。 设 $\mathfrak{A}/U=(X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-阶化 *qdlt* 广义对。置 $S:=\lfloor B\rfloor$。

(1) 若 $B+\mathbf{M}_X$ 是大/U，则存在一对 (X, Δ) 以及一个丰沛/U $\mathbb{R}$-除子 A，使得 $K_X+\Delta+A\sim_{\mathbb{R},U} K_{\mathfrak{A}}$，并且

$$\operatorname{Nlc}(X, \Delta)=\operatorname{Nklt}(X, \Delta)=\operatorname{Nklt}(\mathfrak{A})=S.$$

(2) 若 $K_{\mathfrak{A}}$ 是大/U，则存在一对 (X,Δ)、一个丰沛/U $\mathbb{R}$-除子 A以及一个实数 $\mu>1$，使得 $K_X+\Delta+A\sim_{\mathbb{R},U}\mu K_{\mathfrak{A}}$，并且

$$\mathrm{Nlc}(X,\Delta)=\mathrm{Nklt}(X,\Delta)=\mathrm{Nklt}(\mathfrak{A})=S.$$

证明。 (1) 设 $B+\mathbf{M}_X=2H+E$，其中 H 是丰沛的/U 且 $E\geq 0$。那么存在$\epsilon>0$ 使得 $(X,(1-\epsilon)B-S+\epsilon E,(1-\epsilon)\mathbf{M})$ 是 KLT。根据 [HL22，引理 3。4] 存在一个 klt 对 (X,Δ_0)，使得

$$K_X+\Delta_0\sim_{\mathbb{R},U}K_X+(1-\epsilon)B-S+\epsilon E+(1-\epsilon)\mathbf{M}_X+\epsilon H.$$

我们令 $0<\delta\ll\epsilon$ 为一个实数，使得 $A:=\epsilon H-\delta S$ 是丰沛的，并令

$$\Delta:=\Delta_0+(1+\delta)S,$$

那么 (X,Δ) 和 A 满足我们的要求。

(2) 设 $K_{\mathfrak{A}}=2H+E$，其中 H 是丰沛的/U 且 $E\geq 0$。那么存在 $\epsilon>0$ 使得 $(X,B-S+\epsilon E,\mathbf{M})$ 是 KLT。根据 [HL22，引理 3。4] 存在一个 klt 对 (X,Δ_0)，使得

$$K_X+\Delta_0\sim_{\mathbb{R},U}K_X+B-S+\epsilon E+\mathbf{M}_X+\epsilon H.$$

我们令 $0<\delta\ll\epsilon$ 为一个实数，使得 $A:=\epsilon H-\delta S$ 丰沛，并令

$$\Delta:=\Delta_0+(1+\delta)S,$$

那么 $\mu:=1+\epsilon$、(X,Δ) 和 A 满足我们的要求。 □

引理 2.17. 设 $\mathfrak{A}/U=(X,B,\mathbf{M})/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 *dlt*广义对，且 $S:=\lfloor B\rfloor$。假设 $K_{\mathfrak{A}}$是数值有效的/U，$K_{\mathfrak{A}}$或 $B+\mathbf{M}_X$是大/U，并且 $K_{\mathfrak{A}}|_S$是半丰沛的/U。那么 $K_{\mathfrak{A}}$是半丰沛的/U。

证明. 由引理 2.16，存在一对 $(X,\Delta)/U$、一个丰沛的/U $\mathbb{R}$-除子 A和一个实数 $\mu\geq 1$，使得 $K_X+\Delta+A\sim_{\mathbb{R},U}\mu K_{\mathfrak{A}}$ 且 非对数典范轨迹$(X,\Delta)=S$。由 [Has25a，定理 2.23]，$K_X+\Delta+A$是半丰沛的/U，因此 L是半丰沛的/U。 □

2.5. **饭高维数**。 有关不变饭高维数的定义，请参阅 [Cho08，第 2]，[Hu20，定义 2。3]，[HH20，定义 2。6] 我们需要以下关于数值维数和不变饭高维数基本性质的引理。

引理 2.18 （参见 [LX25，引理 2。3]）。 设 $\pi:X\to U$ 是正规拟射影簇之间的一个射影态射，且 D 是一个 $\mathbb{R}$-*Cartier* $\mathbb{R}$-除子，定义在 X上。则：

(1) D 当且仅当 $\kappa_\sigma(X/U,D)=\dim X-\dim U$时，$D$ 是大/U。*(2)* 设 D_1,D_2 是 X 上的两个 $\mathbb{R}$-*Cartier* $\mathbb{R}$-除子。假设$D_1\sim_{\mathbb{R},U}E_1\geq 0$ 且$D_2\sim_{\mathbb{R},U}E_2\geq 0$，其中 $\mathbb{R}$-除子 E_1,E_2 满足 *Supp* $E_1=$*Supp* E_2。那么$\kappa_\sigma(X/U,D_1)=\kappa_\sigma(X/U,D_2)$，且 $\kappa_\iota(X/U,D_1)=\kappa_\iota(X/U,D_2)$。*(3)* 设 $f:Y\to X$ 是满射双有理态射，且 Y上的 $\mathbb{R}$-*Cartier* $\mathbb{R}$-除子 D_Y满足 $D_Y=f^*D+E$，其中 f-例外 $\mathbb{R}$-除子为 $E\geq 0$。那么$\kappa_\sigma(Y/U,D_Y)=\kappa_\sigma(X/U,D)$，且 $\kappa_\iota(Y/U,D_Y)=\kappa_\iota(X/U,D)$。*(4)* 设 $g:Z\to X$ 是来自正规簇的满射态射，且 Z在 U上是射影的。那么 $\kappa_\sigma(Z/U,g^*D)=\kappa_\sigma(X/U,D)$，且 $\kappa_\iota(Z/U,g^*D)=\kappa_\iota(X/U,D)$。*(5)* 设 $\phi:X\dashrightarrow X'$ 是一个 D-*MMP*$/U$ 的步骤序列，且 $D':=\phi_*D$。那么$\kappa_\sigma(X/U,D)=\kappa_\sigma(X'/U,D')$，且 $\kappa_\iota(X/U,D)=\kappa_\iota(X'/U,D')$

3. Linearly decomposable generalized pair

本节中，我们引入线性可分解（对数典范）广义对这一类对象，并研究其基本性质。

3.1. **LD 广义对的定义**。

定义 3.1（线性可分解广义对）. 设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个对数典范广义对。记

$$K_{\mathfrak{A}} = K_X + B + \mathbf{M}_X =: D = \sum_{i=1}^{m} c_i D_i$$

其中 $D_i \geq 0$ 是互不相同的魏尔除子，$c_i \neq 0$ 和 $D_i \neq 0$ 对任意 i 都成立，且当 $i \leq j$ 时 $c_i \leq c_j$。设 $\boldsymbol{c} := (c_1, \ldots\ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$，并设 V 是 $\boldsymbol{c}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的有理包络。设

$$D(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^{m} v_i D_i, \quad B(\boldsymbol{v}) := B + D(\boldsymbol{v}) - D, \quad \text{and} \quad \mathfrak{A}(\boldsymbol{v}) := (X, B(\boldsymbol{v}), \mathbf{M})$$

对任意 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots\ldots, v_m) \in V$。

根据我们的构造，对于固定的 K_X、m，$\boldsymbol{c}$，V，$D(\cdot)$ $B(\cdot)$，$\mathfrak{A}(\cdot)$ 由 $\mathbb{R}$-除子 $K_{\mathfrak{A}}$ 唯一确定。

$\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的多面体的。如果存在 $\boldsymbol{c}$ 在 V 中的一个开邻域 V_0，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的，我们就称 $\mathfrak{A}/U$ 是线性可分解（简称对数典范）。特别地，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$B(\boldsymbol{v}) \geq 0$。显然，$\mathfrak{A}$ 的多面体不依赖于 U，因此，对数典范性是不依赖于 U 的性质。因此，如果 $\mathfrak{A}/U$ 是对数典范的，我们也称 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的。

下面这个 LD 广义对的等价定义在许多地方都很有用。

引理 3.2。设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个广义对。则以下三个条件等价：

(1) $\mathfrak{A}$是对数典范的。*(2)* 存在 $a_1, \ldots, a_m \in (0, 1]$，它们是 $\mathbb{Q}$-线性无关的，以及对数典范广义对 $\mathfrak{A}_i/U = (X, B_i, \mathbf{M})/U$，使得每个 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 都是一个 $\mathbb{Q}$-除子，$\sum a_i = 1$，且$\sum a_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$。*(3)* 存在 $a_1, \ldots, a_m \in (0, 1]$ 以及对数典范广义对 $\mathfrak{A}_i/U = (X, B_i, \mathbf{M})/U$，使得每个 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 都是一个 $\mathbb{Q}$-除子，$\sum a_i = 1$，且 $\sum a_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$。

证明。设 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 是 $\mathfrak{A}$的多面体的。

(1)⇒(2)：设 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$ 是 V 的一个开子集，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$都是对数典范的。令$m := \dim V + 1$，并设 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V_0$是 $\mathbb{Q}$-向量，使得 $\boldsymbol{c}$位于由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 张成的凸包的内部。于是存在唯一的正实数 $a_1, \ldots, a_m \in (0, 1]$，它们是 $\mathbb{Q}$-线性无关的，使得 $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$且$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{c}$。对每个 i，我们可令 $B_i := B(\boldsymbol{v}_i)$。

(2)⇒(3)：显然。

(3)⇒(1)：令 V' 为由 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 在 $\mathrm{Weil}_{\mathbb{R}}(X)$ 中张成的最小 $\mathbb{Q}$-仿射子空间。于是$K_{\mathfrak{A}} \in V'$，因此根据有理包络的定义，$V \subset V'$。令 $\mathcal{H}$ 为由 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 在 V' 中张成的凸包，并令 V_0 为 $\mathcal{H} \cap V$ 的内部。则 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$ 是 V 的开子集，且对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的。因此 $\mathfrak{A}$ 是 LD 对数典范的。□

3.2. **LD 广义对的对数典范层。**

引理 3.3。 令 $\mathfrak{A}/U$ 为一个具有多面体的 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 的 ***LD*** 广义对。则：

(1) 对任意对数典范位 E ***of*** $\mathfrak{A}$, 我们有 $a(E, \mathfrak{A}(\boldsymbol{v})) = -1$ 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 均成立。*(2)* 假设 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的（分别地，除子对数终端、***qdlt***、***KLT***）。那么存在 V 中的一个开邻域$V' \ni \boldsymbol{c}$，使得 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 是对数典范的（分别地，除子对数终端、***qdlt***、***KLT***），且对任意 $\boldsymbol{v} \in V'$，$\mathrm{Nklt}(\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})) = \mathrm{Nklt}(\mathfrak{A})$。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 是 LD，因此存在 V 中的一个开邻域 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$，使得对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的。

(1) 假设 (1) 不成立。那么存在 $\boldsymbol{v} \in V$ 使得 $a(E, \mathfrak{A}(\boldsymbol{v})) \neq 0$。可能将 $\boldsymbol{v}$ 替换为 $2\boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}$ 后，我们可以假设 $a(E, \mathfrak{A}(\boldsymbol{v})) < -1$。因此

$$a(E, \mathfrak{A}(\boldsymbol{c} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}))) < -1$$

对任意 $t > 0$。由于 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$ 是 V的开子集，存在 $0 < t \ll 1$ 使得$\boldsymbol{c} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}) \in V_0$。因此 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{c} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}))$ 是对数典范的，矛盾。

(2) 由 (1) 可知，对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathrm{Nklt}(\mathfrak{A}) \subset \mathrm{Nklt}(\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}))$。令

$$V' := \left\{ \boldsymbol{v} \middle| \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in V_0 \right\}.$$

由不一致数的线性性以及对数典范、除子对数终端、qdlt 和 KLT 的定义，V_0 满足我们的要求。□

下一个引理表明，对数典范这一性质在 $\mathbb{Q}$-阶乘(q)除子对数终端修改下保持不变。

引理 3.4. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，且 $h : Y \to X$ 是 $\mathfrak{A}$的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 ***qdlt*** 修正。那么，$\mathfrak{A}$ 是对数典范当且仅当 $\mathfrak{A}_Y := h^*\mathfrak{A}$ 是对数典范。

证明。记 $\mathfrak{A} = (X, B, \mathbf{M})$，并记

$$K_X + B + \mathbf{M}_X =: D = \sum_{i=1}^{m} c_i D_i$$

其中 $D_i \geq 0$ 是互不相同的魏尔除子，对于每个 i，有 $c_i \neq 0$、$D_i \neq 0$，且若 $i \leq j$，则有 $c_i \leq c_j$。令 E 为约化的 h-例外除子。记 $h^*\mathfrak{A} = (Y, B_Y, \mathbf{M})$。若存在一个指标 i_0 使得 $c_{i_0} = 1$，则定义 $m' := m$, $D'_i := h_*^{-1}D_i$，若 $i < i_0$ 或 $i > i_0$，并且 $D'_{i_0} := h_*^{-1}D_{i_0} + E$。若对任意 i 都有 $c_i \neq 1$，则令 i_0 为满足 $c_{i_0} < 1 < c_{i_0+1}$ 的指标（这里我们考虑 $c_0 := -\infty$ 和 $c_{m+1} := +\infty$），令 $m' := m+1$，并在 $i \leq i_0$ 时令 $D'_i := h_*^{-1}D_i$，在 $= E$ 时令 $D'_{i_0+1} := E$，且在 $i \geq i_0 + 2$ 时令 $D'_i := h_*^{-1}D_{i-1}$。于是有

$$K_Y + B_Y + \mathbf{M}_Y = h^*D = \sum_{i=1}^{m'} c_i D'_i.$$

设 $\boldsymbol{c} := (c_1, \ldots, c_m)$ $\boldsymbol{c}' := (c_1, \ldots, c_{m'})$，且 V, V' 分别为 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'$ 在 $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m'}$中的有理包络。则存在一一对应 $V \overset{\phi}{\leftrightarrow} V'$：

$$(v_1, \ldots, v_m) \overset{\phi}{\leftrightarrow} (v_1, \ldots, v_m) \text{ if } m' = m$$

and

$$(v_1, \ldots, v_m) \overset{\phi}{\leftrightarrow} (v_1, \ldots, v_{i_0}, 1, v_{i_0+1}, \ldots, v_m) \text{ if } m' = m + 1.$$

对任意 $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_m)\in V$，$\boldsymbol{v}'=(v'_1,\dots,v'_{m'})\in V'$，我们定义 $D(\boldsymbol{v}):=\sum_{i=1}^m v_iD_i$，$B(\boldsymbol{v}):=B+D(\boldsymbol{v})-D$，$D_Y(\boldsymbol{v}'):=\sum_{i=1}^{m'}v'_iD'_i$，以及 $B_Y(\boldsymbol{v}'):=B_Y+D_Y(\boldsymbol{v}')-h^*D$。

根据 [HLS24，引理 5.3、5.4]，可得

$$K_Y+B_Y(\phi(\boldsymbol{v}))+\mathbf{M}_Y=h^*(K_X+B(\boldsymbol{v})+\mathbf{M}_X)$$

对任意 $\boldsymbol{v}\in V$，因此 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}):=(X,\ B(\boldsymbol{v}),\ \mathbf{M})$ 是对数典范的，当且仅当 $\mathfrak{A}_Y(\boldsymbol{v}):=(Y,\ B_Y(\boldsymbol{v}),\ \mathbf{M})$ 是对数典范的。我们有 $\{V,\boldsymbol{c},\mathfrak{A}(\cdot)\}$ 和 $\{V',\boldsymbol{c}',\mathfrak{A}_Y(\cdot)\}$ 分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $h^*\mathfrak{A}$ 的多面体的。由于 ϕ 是有限维仿射空间之间的线性同构，结论得证。□

下面的引理对于刻画 LD 广义对至关重要。粗略地说，它表明 LD 是一种仅取决于丰部分的无理部分的性质。回想一下，对于任意 $\mathbb{R}$-除子 D，D^{irr} 表示 D 的无理部分（见定义2.4）。

引理 3.5。设 $\mathfrak{A}/U:=(X,B,\mathbf{M})/U$ 是一个对数典范广义对。那么：

(1) 若 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的，则 支集$\mathbf{M}_X^{\mathrm{irr}}\subset$ 支集$\{B\}$。*(2)* 若 $\mathfrak{A}$ 是 *qdlt* 且 支集$\mathbf{M}_X^{\mathrm{irr}}\subset$ 支集$\{B\}$，则 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的。

证明。令 $\{V,\boldsymbol{c},\mathfrak{A}(\cdot)\}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的多面体，并对任意 $\boldsymbol{v}\in V$，记 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})=(X,B(\boldsymbol{v}),\mathbf{M})$。

(1) 令 $V_0\ni\boldsymbol{c}$ 为 V 的一个开子集，使得对于任意 $\boldsymbol{v}\in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的。令 S 为 Supp $\mathbf{M}_X^{\mathrm{irr}}$ 的一个不可约分支。若 $S\not\subset\mathrm{Supp}\{B\}$，则要么 S 是$\lfloor B\rfloor$的一个分支，要么 S 不是 B 的一个分支。特别地，S 是 $(K_X+B+\mathbf{M}_X)^{\mathrm{irr}}$ 的一个分支。因此，存在 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V_0$，使得 $\mathrm{mult}_S(B(\boldsymbol{v}_1)-B)>0$ 且 $\mathrm{mult}_S(B(\boldsymbol{v}_2)-B)<0$。若 S 是 $\lfloor B\rfloor$的一个分支，则 $\mathrm{mult}_S B(\boldsymbol{v}_1)>1$，所以 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_1)$ 不是对数典范的，这不可能。若 S 不是 B 的一个分支，则 $\mathrm{mult}_S B(\boldsymbol{v}_2)<0$，所以 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_2)$ 不是对数典范的，这不可能。

(2) 根据引理 2.14，在必要时将 X 替换为一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化后，我们可以假设 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 KLT。记

$$K_X+B+\mathbf{M}_X=:D=\sum_{i=1}^m c_iD_i$$

其中 $\boldsymbol{c}=(c_1,\dots,c_m)$ 和 $D_1,\dots,D_m\geq 0$ 是互不相同的魏尔除子。令 $D(\boldsymbol{v}):=\sum_{i=1}^m v_iD_i$，对任意 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m$，则对任意 $\boldsymbol{v}\in V$，$B(\boldsymbol{v})=B+D(\boldsymbol{v})-D$。

由我们的假设，

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}(B(\boldsymbol{v})-B)=\mathrm{Supp}(D(\boldsymbol{v})-D)&\subset\mathrm{Supp}(K_X+B+\mathbf{M}_X)^{\mathrm{irr}}\\&\subset\mathrm{Supp}\,B^{\mathrm{irr}}\cup\mathrm{Supp}\,\mathbf{M}_X^{\mathrm{irr}}\subset\mathrm{Supp}\{B\}\end{aligned}$$

对任意 $\boldsymbol{v}\in V$。由于 $(X,B,\mathbf{M})$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt，存在 $\epsilon\in(0,1)$，使得 $(X,B+\epsilon$支集$\{B\},\mathbf{M})$ 是 qdlt，且 $\{B\}\in\{0\}\cup[\epsilon,1)$。令 $V_0\ni\boldsymbol{c}$ 为 V 的一个开子集，使得对任意 $\boldsymbol{v}\in V_0$，$||B(\boldsymbol{v})-B||_\infty<\epsilon^2$。于是

$$B+\epsilon\,\mathrm{Supp}\{B\}\geq B(\boldsymbol{v})\geq B-\epsilon\,\mathrm{Supp}\{B\}\geq 0,$$

因此，对于任意 $\boldsymbol{v}\in V_0$，$(X,B(\boldsymbol{v}),\mathbf{M})$ 都是 qdlt。因此，$(X,B,\mathbf{M})$ 是对数典范。□

下面的引理表明，对数典范广义对与 LD 广义对的非平凡组合是对数典范。

引理 3.6. 设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个对数典范广义对，且 C 是 $\mathbb{R}$-*Cartier*$\mathbb{R}$-除子，定义在 X 上。假设 $(\mathfrak{A}, C)$ 是 *LD*，则对于任意 $s \in (0,1]$，$\mathfrak{A}(s) := (\mathfrak{A}, sC)$ 都是 *LD*。

证明。我们只需证明对于任意 $s \in (0,1)$，$\mathfrak{A}(s)$ 是对数典范。固定 $t \in (0,1)$。令$h: X' \to X$ 是 $\mathfrak{A}(t)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶化 dlt 修正，并令 $\mathfrak{A}'(s) := (h_*^{-1}\mathfrak{A}(s), \mathrm{Exc}(h))$，其中 $s \in [0,1]$ 任意。于是 $\mathfrak{A}'(t) = h^*\mathfrak{A}(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶化 dlt。由于 h 只提取 $\mathfrak{A}(t)$ 的对数典范位，且 $\mathfrak{A}(0)$ 和 $\mathfrak{A}(1)$ 是对数典范的，根据不一致数的线性性，对于任意 $s \in [0,1]$，有 $\mathfrak{A}'(s) = h^*\mathfrak{A}(s)$ 是对数典范的。由于 $\mathfrak{A}'(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶化 dlt，且 $\mathfrak{A}'(0)$ 和 $\mathfrak{A}'(1)$ 是对数典范的，再次根据不一致数的线性性，对于任意 $s \in (0,1)$，$\mathfrak{A}'(s)$ 是 dlt 的。

对任意 $s \in [0,1]$，记 $\mathfrak{A}'(s) := (X', B'(s), \mathbf{M})$。由于

$$\mathrm{Supp}\, B \geq B \geq 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Supp}(B+C) \geq B+C \geq 0,$$

我们有

$$\mathrm{Supp}\{B+C\} \subset \mathrm{Supp}\{B+sC\}$$

对任意 $s \in (0,1)$，因此支集$\{B'(1)\} \subset$ 支集$\{B'(s)\}$ 对任意 $s \in (0,1)$。

由引理 3.4, $\mathfrak{A}'(1)$ 是对数典范的。由引理 3.5(1),

$$\mathrm{Supp}\, \mathbf{M}^{\mathrm{irr}}_{X'} \subset \mathrm{Supp}\{B'(1)\} \subset \mathrm{Supp}\{B'(s)\}$$

对任意 $s \in (0,1)$。由引理 3.5(2), $\mathfrak{A}'(s)$ 对任意 $s \in (0,1)$ 是对数典范的。由引理 3.4, $\mathfrak{A}(s)$ 对任意 $s \in (0,1)$ 是对数典范的。□

3.3. **LD广义对的数值有效性与半丰性。** 通常，klt 广义对的典范类可能是数值有效的，但不是 NQC（参见 [HL22，例 3.19]）。然而，这种情况不会发生在 LD广义对上（见引理 3.9）。

引理 3.7. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个带有多面体 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 的 *LD* 广义对。设 $h: X \to Z$ 为一个射影态射 $/U$，使得 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},\, Z} 0$。

则对任意 $\boldsymbol{v} \in V$，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \sim_{\mathbb{R},\, Z} 0$。

证明。本引理是 [HLS24 引理 5 的直接推论3]。□

下面的引理表明，LD广义对的丰模型在分解下是稳定的。

引理 3.8. 设 $\mathfrak{A}/U$ 为一个带有多面体 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 的 *LD* 广义对。假设 $K_{\mathfrak{A}}$ 是半丰沛的 $/U$，其丰模型为$/U$ $h: X \to Z$（参见 [BCHM10，定义 3.6。5]）。则存在 V 的开子集 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$，使得 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})}$ 是半丰沛的$/U$，其丰模型为$/U$ $h: X \to Z$。

证明。我们有 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},\, U} h^*L$ 对某个丰沛的$/U$ $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子 L。由引理 3.7，存在连续函数 $L(\cdot): V \to \mathrm{Weil}_{\mathbb{R}}(Z)$，使得 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \sim_{\mathbb{R},\, U} h^*L(\boldsymbol{v})$ 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 均成立。由于 $L = L(\boldsymbol{c})$ 是丰沛的 $/U$，存在 V 的一个开子集 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$L(\boldsymbol{v})$ 都是丰沛的 $/U$。这样的 V_0 满足我们的要求。□

引理 3.9。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个具有多面体的 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 的 *LD* 广义对。假设 $K_{\mathfrak{A}}$ 数值有效$/U$。那么存在 V 的一个开子集 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的，且 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})}$ 数值有效 $/U$。特别地，$\mathfrak{A}/U$ 是 *KNQC*。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 是对数典范，存在一个开邻域 $V_1 \ni \boldsymbol{c}$，使得对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_1$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范。令 $n := \dim V + 1$。取 $\mathbb{Q}$-向量 $\boldsymbol{v}_1$、……、$\boldsymbol{v}_n \in V_1$，使得 $\boldsymbol{c}$包含于由 $\boldsymbol{v}_1$、……、$\boldsymbol{v}_n$张成的凸包的内部。于是存在正实数 a_1、……、a_n，使得 $\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{c}$且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$。令 I 为一个正整数，使得对于每个 i，$IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)}$ 是 Cartier。令 $d := \dim X$ 且 $a_0 := \min_{1\leq i\leq n}\{a_i\}$。

考虑集合

$$\Gamma := \left\{ \sum a_i \gamma_i \middle| \gamma_i \in [-2dI, +\infty) \cap \mathbb{Z} \right\} \cap (0, +\infty).$$

我们有 $\gamma_0 := \inf\{\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} > 0$。我们令 V_0 为该集合的内部

$$\left\{ \frac{1}{2d+\gamma_0}(2d\boldsymbol{c} + \gamma_0 \boldsymbol{v}) \middle| \boldsymbol{v} \in V_2 \right\}.$$

我们证明 V_0 满足我们的要求。根据构造，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的，因此只需证明对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})}$ 是数值有效的 $/U$。我们令 R 为 $NE(X/U)$ 中的一条极端射线。共有三种情形。

情形 1。$K_{\mathfrak{A}} \cdot R = 0$。在这种情形下，根据 [HLS24，引理 5。3]，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot R = 0$ 对于任意 $\boldsymbol{v} \in V$，因此 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot R = 0$ 对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_1$。

情形 2。$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)} \cdot R \geq 0$ 对于任意 i。在这种情形下，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_2$，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot R \geq 0$，因此对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot R \geq 0$。

情形 3。$K_{\mathfrak{A}} \cdot R > 0$ 且 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_j)} \cdot R < 0$ 对某个 j成立。在这种情况下，由锥定理[CHLX23，定理 2.2.1]，R 由一条曲线 C 张成，使得对于任意 i，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)} \cdot C \geq -2d$ 成立。特别地，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_2$，$K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot C \geq -2d$ 成立。此外，我们有

$$IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)} \cdot C \in [-2dI, +\infty) \cap \mathbb{Z},$$

so

$$IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{c})} \cdot C \in \Gamma_0 .$$

F对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，存在 $\boldsymbol{v}' \in V_2$ 使得 $(2d+\gamma_0)\boldsymbol{v} = 2d\boldsymbol{c} + \gamma_0 \boldsymbol{v}'$。我们有 e

$$IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot C = \frac{\gamma_0}{2d+\gamma_0} IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}')} \cdot C + \frac{2d}{2d+\gamma_0} IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{c})} \cdot C \geq \frac{\gamma_0}{2d+\gamma_0} \cdot (-2d) + \frac{\gamma_0}{2d+\gamma_0} \cdot \gamma_0 = 0,$$

因此 $IK_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} \cdot R \geq 0$。引理得证。 □

3.4. **标准变换下的 LD 广义对**。我们证明 LD 是一种在伴随和极小模型纲领下保持不变的性质。

~**引理 3.10**。设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个 *LD* 广义对，且设 S 是 $\lfloor B \rfloor$ 的一个不可约分支，其正规化为 S。则 $\mathfrak{A}|_S$ 是 *RD*。

证明。由引理 3.2，存在 $a_1, \ldots, a_m \in (0, 1]$ 及对数典广义对 $\mathfrak{A}_i/U := (X, B_i, \mathbf{M})/U$，使得 $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, $\sum_{i=1}^m a_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$，且对每个 i，$K_{\mathfrak{A}_i}$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier。于是，对每个 i，S 是 $\mathfrak{A}_i$ 的一个对数典范位。令 $\mathfrak{A}_{i,S} := \mathfrak{A}_i|_S$，对每个 i 均如此。则 $\mathfrak{A}_{i,S}$ 是对数典的，且对每个 i，$K_{\mathfrak{A}_{i,S}}$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier，并且我们有 $\sum_{i=1}^m a_i \mathfrak{A}_{i,S} = \mathfrak{A}|_S$。由引理 3.2，$\mathfrak{A}|_S$ 是对数典的。□

引理 3.11. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 *LD* 广义对，且 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$ 是一个 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U 的步骤序列（分别地，是一个 $K_{\mathfrak{A}}$-平凡映射/U）。则 $\phi_* \mathfrak{A}$ 是对数典范的。

证明。令 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的多面体的。存在一个开邻域 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$，使得对于任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，ϕ 都是一个 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})}$-极小模型纲领步骤序列/$U$（相应地，是一个 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})}$-平凡映射/$U$）。由于 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的，适当缩小 V_0 后，我们可以假设对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的。因此，对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$，$\phi_* \mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的。

取 $\mathbb{Q}$-向量 $\boldsymbol{v}_1$、……、$\boldsymbol{v}_m \in V_0$，使得 $\boldsymbol{c}$ 包含于由 $\boldsymbol{v}_1$、……、$\boldsymbol{v}_m$ 张成的凸包的内部，其中 $m = \dim V + 1$。则存在唯一的正实数 a_1、……、a_m，使得 $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ 和 $\sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{c}$。于是 $\mathfrak{A}'_i := \phi_* \mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)$ 是

对数典范广义对，$K_{\mathfrak{A}'_i}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子，对每个 i，且 $\sum_{i=1}^m a_i\mathfrak{A}'_i = \phi_*\mathfrak{A}$。由引理 3.2，$\phi_*\mathfrak{A}$是对数典范。□

3.5. **丰裕极化下的 LD 性质**。在本小节中，我们证明，对于任意对数典范广义对 $(X, B, \mathbf{M})$ 以及任意丰沛的 $\mathbb{R}$-除子 A 取在 X上，除子 $K_X + B + A + \mathbf{M}_X$ 都可以实现为某个 LD 广义对的典范类，并由另一个丰裕类极化。本文其余部分不会用到本小节的结果；不过，这些结果在概念上自然直观，有助于引入 LD 广义对。事实上，下面的引理 3.13可以立即将翻转存在性问题（定理 1.1）归约到 LD 广义对范畴中。

引理 3.12。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 *LD* 广义对，$|H_i|_U$ 是无基点/U 线性系，且 $c_1, \dots, c_n \in [0,1]$ 是实数。那么对于任意一般的 $A_i \in |H_i|_U$，$(\mathfrak{A}, \sum_{i=1}^n c_i A_i)$ 都是 *LD* 的。

证明。记 $\mathfrak{A} = (X, B, \mathbf{M})$。由引理 3.2，可写作 $\mathfrak{A} = \sum b_j\mathfrak{A}_j$，使得每个 $\mathfrak{A}_j := (X, B_j, \mathbf{M})$ 都是对数典范的，$K_{\mathfrak{A}_j}$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier，且 $\sum b_j = 1$。令 $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)$，并令 V 为 $\boldsymbol{c}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的有理包络。我们可以选取 $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_k \in V \cap \mathbb{Q}^n$，使得 $\boldsymbol{c}$ 包含于由 $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_k$ 张成的凸包的内部。令 $a_1, \dots, a_k \in (0,1]$ 为实数），使得 $\sum_{l=1}^k a_i = 1$ 且 $\sum_{l=1}^k a_l\boldsymbol{c}_l = \boldsymbol{c}$。对任意 l，记 $\boldsymbol{c}_l = (c_{l,1}, \dots, c_{l,n})$。那么

$$K_{\mathfrak{A}} + \sum_{i=1}^n c_i A_i = \sum_j \sum_{l=1}^k b_j a_l \left(K_{\mathfrak{A}_j} + \sum_{i=1}^n c_{l,i} A_i \right)$$

且每个（$\mathfrak{A}_j$，$\sum_{i=1}^n c_{l,i}A_i$）均为对数典范。由引理 3.2，（$\mathfrak{A}$，$\sum_{i=1}^n c_i A_i$）是对数典范。□

引理 3.13。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，A 是 X上的一个丰沛/U $\mathbb{R}$-除子。则存在 X 上的三个丰沛/U $\mathbb{R}$-除子 H、J 和 L，满足以下条件。

(1) $A = H + J + L$。*(2)* $K_{\mathfrak{A}} + H$ 和 L 是 $\mathbb{Q}$-除子。*(3)* 对于某些 $J' \in |J|_{\mathbb{R}/U}$和 $L' \in |L|_{\mathbb{Q}/U}$，$\left(\mathfrak{A}、 J' + L'、 H\right)$ 是对数典范的。

证明。我们将 $K_{\mathfrak{A}} = D_0 + \sum_{i=1}^c r_i D_i$ 写作如下形式，其中 1、r_1、.....、r_c 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的，且D_0、.....、D_c 是 $\mathbb{Q}$-除子。由 [HLS24，引理 5.3]，，每个 D_i 都是 $\mathbb{Q}$-Cartier。设 $H_0 \geq 0$是一个丰沛/U $\mathbb{Q}$-除子，使得 $A - H_0$ 是丰沛的/U。则存在一个实数$\epsilon > 0$，使得对于任意 $\epsilon_i \in (-\epsilon, \epsilon)$，$H_0 + \sum_{i=1}^c \epsilon_i D_i$ 和 $A - H_0 + \sum_{i=1}^c \epsilon_i D_i$ 都是丰沛的。

取 $r'_i \in \mathbb{Q}$ 使得 $|r'_i - r_i| < \epsilon$，并令

$$H := H_0 + \sum_{i=1}^c (r'_i - r_i) D_i.$$

则 H 是丰沛的/U，$A - H$ 是丰沛的/U，并且

$$K_{\mathfrak{A}} + H = D_0 + H_0 + \sum_{i=1}^c r'_i D_i$$

是一个 $\mathbb{Q}$-除子。令 L 为一个丰沛的/U $\mathbb{Q}$-除子，使得 $J := A - H - L$ 是丰沛的/U。于是（1-2）成立。

取一个充分可整除的整数 $m > 0$，使得 $\mathcal{O}_X(mL)$ 整体生成/U，并令 $L' := \frac{1}{m}G$，其中 $G \in |mL|_U$ 为某个一般元素。记 $J = \sum_{i=1}^m s_i J_i$，其中 $s_i \in \in (0,1)$，且对每个 i，$\mathcal{O}_X(J_i)$ 整体生成/U；并令 $J' := \sum_{i=1}^m s_i G_i$，其中 $G_i \in |J_i|_U$ 为一般元素。则 $\left(\mathfrak{A}, \sum_{i=1}^m G_i + L', H\right)$ 是对数典范的。

令 V 为 $\boldsymbol{s}:=(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{R}^m$ 的有理包络，并令 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{m+1}\in V\cap\mathbb{Q}^m\cap\in(0,1)^m$ 为满足 $\boldsymbol{s}$ 包含于由 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{m+1}$ 张成的凸包内部的向量。则存在唯一的正实数 $a_1,\dots,a_{m+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{m+1}a_i=1$ 且 $\sum_{i=1}^{m+1}a_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{s}$。令

$$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}):=\left(\mathfrak{A},\sum_{i=1}^{m}v_iG_i+L',\overline{H}\right)$$

对于任意 $\boldsymbol{v}=(v_1,\ \dots\dots,\ v_m)\in\mathbb{R}^m$，则

$$\sum_{i=1}^{m+1}a_i\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)=\left(\mathfrak{A},J'+L',\overline{H}\right)$$

且 $K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子，对每个 i。由引理 3.2，$\left(\mathfrak{A},\ J'+L',\ H\right)$ 是对数典范。□

4. Models

本节回顾广义对模型的一些基本性质。本节与 [Bir12，第 2]，[HL23，第 3]，[LMX24，第 4]，以及[Cas+25b，第 3]相对应。本节的一些结果是 [LMX24、Cas+25b] 中结果的特殊情形；这些文献中的结果针对的是更一般的代数可积伴随叶状结构范畴。为方便读者，我们仍在本节给出精确陈述。

4.1. 模型的基本性质。

定义 4.1（对数双有理模型）。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个环境簇为 X 且 $\phi\colon X\dashrightarrow X'$ 为双有理映射 $/U$ 的对数典范广义对。令 $\mathfrak{A}':=(\phi_*\mathfrak{A},\ \mathrm{Exc}(\phi^{-1}))$。若 $K_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{R}$-Cartier，则称 $\mathfrak{A}'/U$ 为 $\mathfrak{A}/U$ 的对数双有理模型。

定义 4.2（模型）。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个广义对，其环境簇为 X；设 $\mathfrak{A}'/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的一个对数双有理模型，其环境簇为 X'，并与双有理映射 $/U\ \phi\colon X\dashrightarrow X'$ 相关联。考虑以下条件：

(1) $K_{\mathfrak{A}'}$ 数值有效$/U$。(2) $K_{\mathfrak{A}'}$ 半丰沛$/U$。(3) 对于 X 上任意例外 $/X'$素除子 D，$a(D,\ \mathfrak{A})\le a(D,\ \mathfrak{A}')$。(4) 对于 X 上任意例外 $/X'$素除子 D，$a(D,\ \mathfrak{A})<a(D,\ \mathfrak{A}')$。(5) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{Q}$-因子阶化的 qdlt。

若条件 (1)(3)（分别地，(1)(4)、(2)(3)、(2)(4)、(1)(4)(5)、(2)(4)(5)）成立，则称 $\mathfrak{A}'/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的 *bs*-弱对数典范模型（分别地，*bs*-极小模型、*bs*-半丰模型、*bs*-良好极小模型、对数极小模型、良好对数极小模型）。若条件 (4)（分别地，(4)(5)）成立，且 $f\colon X'\to Z$ 是一个 $K_{\mathfrak{A}'}$-莫里纤维空间$/U$，则称 $f\colon\mathfrak{A}'\to Z$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的 bs-Mori 纤维空间（分别地，对数莫里纤维空间）。

这里，“bs-”表示“按照比尔卡尔-肖库罗夫的意义”。如果 ϕ不提取任何除子，那么我们可以从上述定义中去掉前缀“bs-”。

引理4.3. 设 $\mathfrak{A}/U$ 为一个以 X 为环境簇的对数典范广义对，并设 $\mathfrak{A}'/U$ 为 $\mathfrak{A}/U$ 的一个 *bs*-弱对数典范模型，其环境簇为 X'，且与双有理映射$/U\phi\colon\ X\dashrightarrow X'$相关联。设 $p:\ W\to X$ 与 $q:\ W\to X'$ 为 ϕ的一个不定点消解。假设

$$p^*K_{\mathfrak{A}}=q^*K_{\mathfrak{A}'}+E,$$

则 $E \geq 0$ 且为例外/X'。

证明。 这是 [Cas+25b 的一个特例，引理 3。3]。 □

引理 4.4。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对。设 $\mathfrak{A}_1/U$ 和 $\mathfrak{A}_2/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$的两个 *bs*-弱对数典范模型。设 X、X_1、X_2 分别是 $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{A}_1$、$\mathfrak{A}_2$ 的环境簇，其诱导双有理映射为 $\phi\colon X_1 \dashrightarrow X_2$。设 $h_1 : W \to X_1$ 和 $h_2 : W \to X_2$ 是两个双有理态射，且满足 $\phi \circ h_1 = h_2$。则：

(1) $h_1^* K_{\mathfrak{A}_1} = h_2^* K_{\mathfrak{A}_2}$.*(2)* 若 $K_{\mathfrak{A}_2}$是半丰沛的/U，则 $K_{\mathfrak{A}_1}$是半丰沛的/U。*(3)* 若 $K_{\mathfrak{A}_2}$ 是丰沛的/U，则 ϕ 是一个态射。

证明。 这是 [Cas+25b的一个特殊情形，引理 34]。 □

引理 4.5。 设 r 是一个正实数。设 $\mathfrak{A}_1/U$ 和 $\mathfrak{A}_2/U$ 是两个具有相同环境簇 X 的对数典范广义对，使得

$$K_{\mathfrak{A}_2} \equiv_U rK_{\mathfrak{A}_1}.$$

设 $\mathfrak{A}'_1/U$ 是 $\mathfrak{A}_1/U$ 的弱对数典范模型（分别为极小模型），其环境簇为 X'，诱导双有理映射为 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$。设 $\mathfrak{A}'_2 := \phi_*\mathfrak{A}$。则：

(1) $\mathfrak{A}'_2/U$ 是 $\mathfrak{A}_2/U$ 的弱对数典范模型（分别为极小模型）。*(2)* 若 $\mathfrak{A}'_1/U$ 是 $\mathfrak{A}_1/U$ 的半丰沛模型（分别为良好极小模型），并且

$$K_{\mathfrak{A}_2} \sim_{\mathbb{R},U} rK_{\mathfrak{A}_1},$$

则 $\mathfrak{A}'_2/U$ 是 $\mathfrak{A}_2/U$ 的半丰沛模型（分别为良好极小模型）。

证明。 这是 [Cas+25b的一个特殊情形，引理 35]。 □

定理 4.6 (非常例外极小模型纲领)。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个具有环境簇 X 的对数典范代数可积伴随叶状结构。假设 X 是潜在 *klt* 的，并且 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},\, U} E \geq 0$ 对某个非常例外的 $/U$ （参见 [Bir12，定义 3。1]） $\mathbb{R}$-除子 E 成立。则我们可以运行一个带有丰沛 $/U$ $\mathbb{R}$-除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U，且任何这样的极小模型纲领都会终止于一个 $\mathfrak{A}/U$ 的良好极小模型 $\mathfrak{A}'/U$，使得$K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R},\, U} 0$。

特别地，该 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U 所收缩的约化除子恰好是 支集 E。

证明。 这是 [Cas+25b，定理 3。6]的特殊情形。 □

4.2. **对数环面模型**。

定义 4.7 （对数环面模型）。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个具有环境簇 X 且 $h : X' \to X$ 为射影双有理态射的对数典范广义对。设 $E \geq 0$ 是一个 h-例外的 $\mathbb{R}$-除子，并令 $\mathfrak{A}' := (h^*\mathfrak{A}, E)$。记 $\mathfrak{A}' = (X', B', \mathbf{M})$。如果$h : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 是一个对数环面模型，则称其为

(1) $(X'$，支集 $B' \cup$例外$(h))$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘对数环面的，$B' \geq 0$，且 $\mathbf{M}$ 下降到 X'；(2) $\mathfrak{A}'$ 是对数典范的；(3) 对任意满足 $a(D, \mathfrak{A}) > -1$ 的 h-例外素除子 D，D 是 E 的一个不可约分支。

此外：

- 如果 $(X'$，支集 $B' \cup$例外$(h))$ 是对数光滑的，那么我们称 $h : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 是一个 对数光滑模型。
- 如果 Supp $E \subset$ Supp$\{B'\}$，那么我们称 $h : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 为一个适当对数环面模型。

- 如果 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 是一个对数光滑模型和适当对数环面模型，那么我们称 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 为一个适当对数光滑模型。
- 如果 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 是一个（真）对数环面模型（分别为（真）对数光滑模型），则称 $\mathfrak{A}'$ 是 $\mathfrak{A}$的（真）对数环面模型（分别为（真）对数光滑模型）。

定义 4.8. 设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个广义对，且 $\pi\colon X \to Z$ 是一个收缩。若满足以下条件，则称 $\mathfrak{A}/Z$ 为相对对数环面。

(1) X 至多具有 $\mathbb{Q}$-阶乘商奇点。(2) (X, Σ) 对某个约化除子 Σ 是对数环面的，且满足支集 $B \subset \Sigma$。特别地， X 是 KLT 的。(3) π 是一个收缩。(4) 存在一个对数光滑对 (Z, Σ_Z)，使得 $\pi\colon (X, \Sigma) \to (Z, \Sigma_Z)$ 是一个等维环面收缩。特别地， Z 是光滑的。(5) $\mathbf{M}$下降到 X。

注意，我们不要求 π 是一个收缩/U。

定义-引理 4.9. 设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$是一个广义对，且 $\phi\colon X \dashrightarrow Z$是一个优势映射。关于 ϕ 的 $\mathfrak{A}$ 对数环面修改 是一个射影双有理态射 $h\colon X' \to X$，使得存在一个射影双有理态射$h_Z\colon Z' \to Z$和一个收缩 $f\colon X' \to Z'$，满足 $\phi \circ h = h_Z \circ f$，从而

$$(X', h_*^{-1}B + \operatorname{Exc}(h), \mathbf{M})/Z$$

是相对对数环面的。对数环面修改总是存在：事实上， $\mathfrak{A}$ 的对数环面修改是 $(X, \mathcal{F}, B, \mathbf{M})$ 的叶状对数解消，其中 $\mathcal{F}$ 是由 ϕ 诱导的叶状结构，已知其由 [CHLX23，引理 6.2.4]。

我们称 $f\colon X' \to Z'$ 与 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$相关联。

定义-引理 4.10。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是以 X 为环境簇的对数典范广义对，$\phi\colon X \dashrightarrow Z$ 为优势映射，且 $h\colon X' \to X$ 是 $\mathfrak{A}$ 关于 ϕ 的对数环面修改。则存在适当对数环面模型 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$，使得若 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的，则 $\mathfrak{A}'$ 是对数典范的。我们称 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 为适当对数环面模型，相对于ϕ。若 $\mathfrak{A}'$ 是对数典范的，则我们称 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 为适当 *LD* 对数环面模型，相对于 ϕ。

证明。 记 $\operatorname{Exc}(h) = E_1 + E_2$，其中 $E_1 \wedge E_2 = 0$， E_1 的任一不可约分支都是 $\mathfrak{A}$ 的对数典范位，且 E_2 的任一不可约分支都不是 $\mathfrak{A}$ 的对数典范位。记 $E_2 = \sum_{i=1}^m F_i$，其中 F_i 是 E_2 的不可约分支。

如果 $\mathfrak{A}$ 不是对数典范的，则我们可以任意选取 $0 < \epsilon \ll 1$，并且 $\mathfrak{A}' := (h_*^{-1}\mathfrak{A}, E_1 + (1-\epsilon)E_2)$满足我们的要求。因此，我们可以假设 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的。

我们令 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 为 $\mathfrak{A}$的多面体。由引理 3.3，对任意 $\boldsymbol{v} \in V$， E_1 的任意不可约分支都是 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 的对数典范位。因此存在 V 中的一个开邻域 $V_0 \ni \boldsymbol{c}$，使得对任意 $\boldsymbol{v} \in V_0$， $a(F_i, \mathfrak{A}(\boldsymbol{v})) > -1$ 对任意 i，且 $a(F, \mathfrak{A}(\boldsymbol{v})) = -1$ 对 E_1的任意不可约分支 F均成立。令 $n := \dim V + 1$，并令 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 为 V_0中的 $\mathbb{Q}$-向量，使得 $\boldsymbol{c}$ 包含于由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$张成的凸包的内部中，则存在唯一的实数 $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1]$ 使得 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{c}$。于是存在 X' 上的 $\mathbb{Q}$-除子 $G_i \geq 0$，使得 $\operatorname{Supp} G_i = \operatorname{Supp} E_2$，且 $\mathfrak{A}'_i := (h^*\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i), E_1 + G_i)$ 是 $\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}_i)$的一个适当对数环面模型。令 $\mathfrak{A}' := \sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{A}'_i$。由引理 3.2， $\mathfrak{A}'$ 是对数典范，且 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$的一个适当对数环面模型。□

引理 4.11。令 $\mathfrak{A}/U$ 为一个对数典范广义对。则 $\mathfrak{A}$具有一个适当对数光滑模型。此外，若 $\mathfrak{A}$ 是对数典范，则 $\mathfrak{A}$ 具有一个适当 *LD* 对数环面模型。

证明。由定义—引理 4.10 取 ϕ 为恒等态射即可得出该引理。□

引理 4.12。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，$\mathfrak{A}'$ 是 $\mathfrak{A}$的对数环面模型。那么，$\mathfrak{A}'/U$ 的任意 *bs*-弱对数典范模型（分别地，*bs*-极小模型、*bs*-半丰模型、*bs*-良好极小模型、对数极小模型、良好对数极小模型）都是 $\mathfrak{A}/U$的 *bs*-弱对数典范模型（分别地，*bs*-极小模型、*bs*-半丰模型、*bs*-良好极小模型、对数极小模型、良好对数极小模型）。

证明。这是 [Cas+25b，引理 3.8] 的一个特例。□

4.3. **双有理变换下的模型**。

引理 4.13。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，$\mathfrak{A}'/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$的 *bs*-弱对数典范模型。设$\mathfrak{A}_W$ 是 $\mathfrak{A}$ 的对数环面模型，并假设诱导双有理映射 $\phi\colon\ W \dashrightarrow X'$是一个态射，其中 W 和 X' 分别是 $\mathfrak{A}_W$ 和 $\mathfrak{A}'$ 的环境簇。

那么，我们可以运行带有丰沛$/X'$ $\mathbb{R}$除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}_W}$-极小模型纲领$/X'$，且任何此类极小模型纲领都会终止于 $\mathfrak{A}_W/X'$ 的一个良好极小模型 $\mathfrak{A}_Y/X'$，使得 $\mathfrak{A}_Y = q^*\mathfrak{A}'$；其中$Y$ 是 $\mathfrak{A}_Y$ 的环境簇，而 $q\colon\ Y \to X'$ 是诱导态射。

特别地，$\mathfrak{A}_Y/U$是 $\mathfrak{A}_W/U$的一个 $\mathbb{Q}$-因子阶 *qdlt* 极小模型。

证明。这是 [Cas+25b 引理 310] 的特例。□

引理 4.14。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对。若 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 *bs*-弱对数典范模型（分别地，*bs*-半丰模型），则 $\mathfrak{A}/U$ 有一个对数极小模型（分别地，良好对数极小模型）。

证明。这是 [Cas+25b 引理 312] 的特例。□

引理 4.15。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对。设 $h\colon\ X' \to X$ 是一个射影双有理态射，且 $\mathfrak{A}'/U$ 是一个对数典范广义对，满足 $\mathfrak{A}' = (h^*\mathfrak{A}, E)$，其中$E \geq 0$ 是例外的$/X$。那么：

(1) $\mathfrak{A}/U$ 的任意 *bs*-弱对数典范模型都是 $\mathfrak{A}'/U$的 *bs*-弱对数典范模型。*(2)* 若 $\mathfrak{A}/U$ 具有 *bs*-弱对数典范模型（相应地，*bs*-半丰模型），则 $\mathfrak{A}'/U$ 具有对数极小模型（相应地，良好对数极小模型）。

证明。这是一个特例，见 [Cas+25b，引理 3。13]。□

引理 4.16. 设 $\mathfrak{A}/U$ 为一个对数典范广义对。设 $h\colon\ X' \to X$ 为仅提取 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}' := h^*\mathfrak{A}$的 *lc* 位的双有理态射。则 $\mathfrak{A}'/U$ 的任意 *bs*-弱对数典范模型（相应地，*bs*-极小模型）都是 $\mathfrak{A}/U$的 *bs*-弱对数典范模型（相应地，*bs*-极小模型）。

证明。这是一个特例，见 [Cas+25b，引理 3。14]。□

4.4. **MMP 下的模型**。下述定理表明，当环境簇为 KLT 时，bs-弱对数典范模型的存在性等价于极小模型的存在性。

定理 4.17. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个环境簇为 X 的对数典范广义对。假设 X 是潜在 *klt*，且 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 *KNQC bs*-弱 *lc* 模型（分别为 *bs*-半丰模型）。那么，任意一个带有丰沛 $/U$ $\mathbb{R}$-除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领步骤序列 $/U$ 都会终止于 $\mathfrak{A}/U$ 的极小模型（分别为良好极小模型）。特别地，$\mathfrak{A}/U$ 有一个 $\mathbb{Q}$-阶乘极小模型（分别为 $\mathbb{Q}$-阶乘良好极小模型）。

证明. 根据 [Cas+25b，定理 4.6]，，任意一个带有丰沛 $/U$ $\mathbb{R}$-除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领步骤序列 $/U$ 都会终止于 $\mathfrak{A}/U$ 的极小模型 $\mathfrak{A}'/U$。由引理 4.4，若 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 bs-半丰模型，则 $\mathfrak{A}'/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的良好极小模型。由于 X 是潜在 klt，$\mathfrak{A}'$ 的环境簇 X' 也是潜在 klt。因此，存在一个小的 $\mathbb{Q}$- 阶乘化 $\pi: X'' \to X'$。$\pi^*\mathfrak{A}'/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的 $\mathbb{Q}$- 阶乘极小模型（分别为 $\mathbb{Q}$- 阶乘良好极小模型）。□

引理 4.18. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，且 $\phi: X \dashrightarrow X'$ 是一个 $K_{\mathfrak{A}}$-负映射$/U$，其中 $\mathfrak{A}' := \phi_*\mathfrak{A}$。则：

(1) $\mathfrak{A}/U$ 的任意（*bs*-）极小模型都是 $\mathfrak{A}'/U$的（*bs*-）极小模型。*(2)* $\mathfrak{A}'/U$ 的任意（*bs*-）极小模型都是 $\mathfrak{A}/U$的（*bs*-）极小模型。

证明。 这是 [Cas+25b，引理 3。15]。 □

引理 4.19. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对。设

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \quad \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}$$

是一个 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$ 的步骤序列，并按某个 $\mathbb{R}$-除子 C进行缩放。令 X_i 为 $\mathfrak{A}_i$ 的环境簇，并令 C_i 为 C 在 X_i 上的像，对每个 i，且令

$$\lambda_i := \inf\{s \geq 0 \mid K_{\mathfrak{A}_i} + sC_i \text{ is } nef/U\}$$

为此极小模型纲领的缩放数。假设此极小模型纲领不终止。令 λ：=极限$_{i\to+\infty}\lambda_i$。那么对任意 $i \gg 0$，有如下结论。

(1) ϕ_i 是一个翻转。*(2)* 若 $\lambda = 0$，则 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 是可动的$/U$。*(3)* 假设 $\lambda = 0$ 和 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 *bs*-极小模型（分别为极小模型）$\mathfrak{A}'/U$，其环境簇为 X'。令 ψ_i：$X_i \dashrightarrow X'$ 为诱导双有理映射。那么ψ_i 不收缩任何除子（分别地，ψ_i 是小的）。

证明。这是 [Cas+25b，引理 3 的一个特例。16]。 □

4.5. **LD 模型**。下面的引理表明，LD 是在取极小模型或弱对数典范模型时保持不变的性质。

引理 4.20。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 *LD* 广义对，且 $\mathfrak{A}'/U$ 是$(X, B, \mathbf{M})/U$的一个 *bs*-弱对数典范模型。那么 $\mathfrak{A}'/U$是 *LD*。特别地，$K_{\mathfrak{A}'}$是 *NQC*$/U$。

证明。 令 X 和 X' 分别为 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 的环境簇，令 $\phi: X \dashrightarrow X'$ 为相应的双有理映射$/U$。令 $\{V, \boldsymbol{c}, \mathfrak{A}(\cdot)\}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的多面体，并令 $\mathfrak{A}'(\boldsymbol{v}) :=(\phi_*\mathfrak{A}(\boldsymbol{v}), \text{Exc}(\phi^{-1}))$，其中任意 $\boldsymbol{v} \in V$均成立。令 $p: W \to X$ 和 $q: W \to X'$ 为 ϕ 的不定点消解，并记

$$p^*K_{\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})} = q^*K_{\mathfrak{A}'(\boldsymbol{v})} + E(\boldsymbol{v})$$

对于某个 $\mathbb{R}$-除子 $E(\boldsymbol{v})$。于是 $E(\cdot): V \to \text{Weil}_{\mathbb{R}}(W)$ 是 $\mathbb{Q}$-仿射的，并且有 $E(\boldsymbol{c}) \geq 0$。因此，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 和 $||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}|| \ll 1$，$E(\boldsymbol{v}) \geq 0$。由于对于任意满足$||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}|| \ll 1$的 $\boldsymbol{v} \in V$，$\mathfrak{A}(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的；对于任意满足 $||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}|| \ll 1$的 $\boldsymbol{v} \in V$，$\mathfrak{A}'(\boldsymbol{v})$ 都是对数典范的。因此 $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'(\boldsymbol{c})$ 是对数典范的。特别部分由引理 3.9 得出。□

5. Minimal model program with scaling

本节的目标是证明，对于 LD 广义对，极小模型的存在性等价于带缩放的极小模型纲领的终止性（定理5.2）。对于对数典范对，这一结果已由 [Bir12，定理 1，证明。9], 对于 NQC 广义对， [HL22，定理 4，证明了这一结果。1] 而 [LT22，定理 4，1], 则将其推广至代数可积伴随叶状结构，见 [Cas+25b，定理 4。1]。我们还需要证明，在非空开子集上运行的极小模型纲领也有类似结果（引理5.3），并构造一个缩放数始终递减至 0 的带缩放的特殊极小模型纲领（引理 5.5）。

5.1. 带缩放的极小模型纲领的存在性。

引理 5.1 （参见 [Hu25，引理 4.1]）。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，且 （$\mathfrak{A}$， C）$/U$ 是某个 $\mathbb{R}$-除子 C对应的 *LD* 广义对。假设 $K_{\mathfrak{A}}+C$ 是数值有效的$/U$。令

$$\lambda := \inf\{t \mid t \geq 0, K_{\mathfrak{A}}+tC \text{ is } nef/U\}.$$

则要么 $\lambda = 0$ 且 $K_{\mathfrak{A}}$ 是数值有效的$/U$，要么存在一个 $K_{\mathfrak{A}}$-负的极端射线 $R \in \overline{NE}(X/U)$，使得 $(K_{\mathfrak{A}}+\lambda C)\cdot R = 0$。

证明。 由于数值有效性$/U$是一个闭条件， $K_{\mathfrak{A}}+\lambda C$是数值有效的$/U$。不妨设 $\lambda > 0$。令 $\mathfrak{A}(s) := (\mathfrak{A}, \frac{1+s}{2}\lambda C)$ 对任意 $s \in \mathbb{R}$。由引理 3.6， $\mathfrak{A}(0)$ 和 $\mathfrak{A}(1)$ 是 LD。由引理3.2 和 3.9，可写为

$$\mathfrak{A}(0) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathfrak{A}_i, \quad \text{and} \quad \mathfrak{A}(1) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathfrak{C}_j,$$

使得 $a_i, b_j \in (0,1]$, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} c_j = 1$, $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{C}_j$是对数典范的，并且与 $\mathfrak{A}$ 具有相同的丰部分，且 $K_{\mathfrak{A}_i}, K_{\mathfrak{C}_j}$ 是数值有效$/U$ $\mathbb{Q}$-除子。设 I 为正整数，使得 $IK_{\mathfrak{A}_i}$ 与$IK_{\mathfrak{C}_j}$ 对任意 i,j均为 Cartier。

由 [CHLX23，定理 2.2.1], 我们可以令 $\{R_k\}_{k\in\Lambda}$ 为 $K_{\mathfrak{A}(0)}$-负极端射线的集合，这些射线位于 $\overline{NE(X/U)}$ 中，并且 C_k 为一条生成 R_k 的曲线，使得

$$-2\dim X \leq K_{\mathfrak{A}_i}\cdot C_k, \quad -2\dim X \leq K_{\mathfrak{C}_j}\cdot C_k$$

对任意 i,j,k。令 $\alpha_k := K_{\mathfrak{A}(0)}\cdot C_k$ 且 $\beta_k := K_{\mathfrak{A}(1)}\cdot C_k$ 对每个 k成立。则对每个 k，我们有

$$-2\dim X \leq \alpha_k = K_{\mathfrak{A}(0)}\cdot C_k = \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i l_{i,k}}{I} < 0 \quad \text{and} \quad \beta_k = K_{\mathfrak{A}(1)}\cdot C_k = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j l'_{i,k}}{I} \geq 0,$$

其中 $l_{i,j}, l'_{i,k}$ 为整数，每个 $l_{i,j} \geq -2I\dim X$，且每个 $l'_{i,j} \geq 0$。因此，

$$\Gamma := \{\alpha_k\}_{k\in\Lambda} \quad \text{and} \quad \Gamma' := \{\beta_k\}_{k\in\Lambda}$$

是下降链条件集。对于任意 $k \in \Lambda$，令

$$t_k := -\frac{\alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} = \frac{1}{1+\frac{\beta_k}{-\alpha_k}},$$

则 $\{t_k\}_{k\in\Lambda}$ 是一个升链条件集。我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \inf\{s \geq 0 \mid K_{\mathfrak{A}(s)} \text{ is nef}/U\} = \inf\{s \geq 0 \mid K_{\mathfrak{A}(s)}\cdot C_k \geq 0, \forall k\} \\ &= \sup\{t_k\}_{k\in\Lambda} = \max\{t_k\}_{k\in\Lambda} = t_{k_0} \end{aligned}$$

对于任意 $k_0 \in \Lambda$。因此 $\beta_{k_0} = 0$，并且我们取 $R = R_{k_0}$。 □

5.2. **带缩放的极小模型纲领与极小模型的存在性。**

定理 5.2。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，X 上有一个 $\mathbb{R}$-除子 $C \geq 0$，使得$(\mathfrak{A}, C)$ 是对数典范的。设

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}$$

b取一个带 C 缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$，对每个 i，C 在 X_i 上的像为 C_i，并令 t

$$\lambda_i := \inf\{s \geq 0 \mid K_{\mathfrak{A}_i} + sC_i \ is \ nef/U\}$$

为缩放数，并令 $\lambda_0 := 1$。那么：

(1) 若 $\mathfrak{A}$ 是对数典范的，则对任意 i 和任意 $s \in [0, \lambda_{i-1}]$，$(\mathfrak{A}_i, sC_i)$ 均为对数典范的，除非 $s = \lambda_{i-1} = 1$ 且 $(\mathfrak{A}, C)$ 不是对数典范的。*(2)* 假设以下条件之一成立。*(a)* $\mathfrak{A}$ 是对数典范的，且 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 *bs*-弱对数典范模型。*(b)* $K_{\mathfrak{A}}$ 不是伪有效的$/U$。*(c)* $\mathfrak{A}/U$ 有一个 *KNQC bs*-弱 *lc* 模型。那么，该极小模型纲领要么终止，要么 $\lim_{i\to+\infty} \lambda_i > 0$。

证明。对任意 $s \in [0, 1]$，令 $\mathfrak{A}_i(s) := (\mathfrak{A}_i, sC_i)$。

(1) 我们对 i 进行归纳。当 $i = 1$ 时，(1) 由引理 3.6 得出，因为 $\mathfrak{A}_1(0)$ 是对数典范的，且 $\mathfrak{A}_1(1)$ 是对数典范的。对 i 进行归纳，我们可以假设对于任意 $s \in [0, \lambda_{i-1})$，$(\mathfrak{A}_i, sC_i)$ 都是对数典范的；并且当 $\lambda_{i-1} < 1.$ 时，$(\mathfrak{A}_i, \lambda_{i-1}C_i)$ 是对数典范的。

我们有，ϕ_i 是一个 $(K_{\mathfrak{A}_i} + sC_i)$-极小模型纲领$/U$的步骤，对任意 $s \in [0, \lambda_i)$ 都成立，并且是 $(K_{\mathfrak{A}_i} + \lambda_i C_i)$-平凡的。由于 $\lambda_i \leq \lambda_{i-1}$，对于任意 $s \in [0, \lambda_i)$，$(\mathfrak{A}_i, sC_i)$ 都是对数典范的；当$\lambda_i < \lambda_{i-1}$，或 $\lambda_i = \lambda_{i-1} < 1$，或 $\lambda_i = \lambda_{i-1} = 1$ 时，$(\mathfrak{A}_i, \lambda_i C_i)$ 是对数典范的，并且 $(\mathfrak{A}, C)$ 是对数典范的。由引理 3.11，对于任意 $s \in [0, \lambda_i)$，$(\mathfrak{A}_{i+1}, sC_{i+1})$ 都是对数典范的；当 $\lambda_i < 1$ 或 $(\mathfrak{A}, C)$ 是对数典范的时，$(\mathfrak{A}_{i+1}, \lambda_i C_{i+1})$ 也是对数典范的。由对 i的归纳可知结论成立。

(2) 我们可以假设该极小模型纲领不会终止，且 $\lim_{i\to+\infty} \lambda_i = 0$。

若 (2.b) 成立，则存在 $\lambda > 0$，使得 $K_{\mathfrak{A}} + \lambda C$ 不是伪有效的$/U$，因此对于任意 i，$K_{\mathfrak{A}_i} + \lambda C_i$ 都不是伪有效的$/U$。我们有 $\lim_{i\to+\infty} \lambda_i > \lambda > 0$。

若 (2.a) 或 (2.c) 成立，则由引理 3.9 和4.20可知 (2.c) 成立，从而与 [Cas+25b，定理 4.1]矛盾。□

引理 5.3。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘的对数典范 *qdlt* 广义对，A 是 X 上的一个丰沛$/U$ $\mathbb{R}$-除子，且 $U^0 \subset U$ 是一个非空开子集。设 $\mathfrak{A}^0 := \mathfrak{A} \times_U U^0$。假设 $\mathfrak{A}^0/U^0$ 有一个 *bs*-弱对数典范模型。那么我们可以运行一个带有 A 缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$，且任何这样的极小模型纲领

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}$$

终止于一个模型 $\mathfrak{A}_n/U$，使得 $\mathfrak{A}_n^0/U^0 := (\mathfrak{A}_n \times_U U^0)/U^0$ 是 $\mathfrak{A}^0/U^0$ 的 $\mathbb{Q}$-因子阶化 *qdlt* 极小模型。

证明。写作 $A = \sum r_i H_i$，其中每个 $r_i \in$ 都属于 (0，1)，且每个 H_i 都是丰沛且整体生成的$/U$。可能需要将 A 替换为 $\sum r_i H_i'$，其中每个 $H_i' \in |H_i|_U$ 都是一般的；于是我们可以假设 $(\mathfrak{A}, A)$ 是 lc 的 $\mathbb{Q}$-因子阶化 qdlt，且 $K_{\mathfrak{A}} + A$ 是数值有效的$/U$。令 X_i 为 $\mathfrak{A}_i$ 的环境簇，并令 A_i 为 A 在 X_i 上的像，对每个 i均如此。我们可以假设这个极小模型纲领不终止。令

$$\lambda_i := \inf\{t \mid t \geq 0, K_{\mathfrak{A}_i} + tA_i \text{ is nef}/U\}$$

为这个极小模型纲领的缩放数，并令 $\lambda := \lim_{i\to+\infty} \lambda_i$。

假设 $\lambda > 0$。由于 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 KLT 的，根据 [HL22，引理 3.4]，$K_{\mathfrak{A}} + \frac{\lambda}{2}A \sim_{\mathbb{R},\, U} K_{X_1} + \Delta$ 存在某个 KLT 对 (X_1, Δ)，使得 Δ 是大$/U$，且 ϕ_i 是以下步骤序列

a $(K_{X_1}+\Delta)$-极小模型纲领$/U$，带有 A的缩放。根据 [BCHM10，推论 1.4，该序列终止。2],矛盾。因此， $\lambda=0$。

令 $\mathfrak{A}_i^0:=\mathfrak{A}_i\times_U U^0$， $X_i^0:=X_i\times_U U^0$对每个 i, $\phi_i^0:=\phi_i|_{X^0}$, $A_i^0:=A_i|_{X^0}$，并令

$$\mathcal{N}:=\{i\in\mathbb{N}^+\mid \phi_i \text{ 在 } U^0\text{上不是恒等映射}\}.$$

由于 $\mathfrak{A}/U$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt，故对于任意 i， $\mathfrak{A}_i^0$ 都是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt。由于每个 ϕ_i 都不提取任何除子且是 $K_{\mathfrak{A}_i}$-负的，因此对于任意 i，诱导双有理映射 $X\dashrightarrow X_i$ 不提取任何除子且是 $K_{\mathfrak{A}}$-负的，从而对于任意 i，诱导双有理映射$X^0\dashrightarrow X_i^0$不提取任何除子且是 $K_{\mathfrak{A}^0}$-负的。

存在两种情形:

情形 1。 $\mathcal{N}$是一个有限集。在此情形下，令 $n:=\max\{j\mid j\in\mathcal{N}\}+1$。则对于任意 $i\geq n$， ϕ_i^0在 U^0上是恒等映射。在此情形下，对于任意 $i\geq n$， $K_{\mathfrak{A}_i^0}+\lambda_i A_i^0$是数值有效的$/U^0$，因此对于任意 $i\geq n$， $K_{\mathfrak{A}_n^0}+\lambda_i A_n^0$是数值有效的$/U^0$。由于 $\lambda=0$， $K_{\mathfrak{A}_n^0}$是数值有效的$/U^0$。因此， $\mathfrak{A}_n^0/U^0$是 $\mathfrak{A}^0/U^0$的$\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt 极小模型。

情形 2。 $\mathcal{N}$不是有限集。我们可以写成 $\mathcal{N}=\{n_i\}_{i=1}^{+\infty}$，使得对每个 i，都有 $n_i<n_{i+1}$，于是得到一列诱导双有理映射

$$\mathfrak{A}^0\cong\mathfrak{A}_{n_1}^0\dashrightarrow\mathfrak{A}_{n_2}^0\dashrightarrow\cdots\dashrightarrow\mathfrak{A}_{n_i}^0\dashrightarrow\ldots,$$

它是以下序列 $K_{\mathfrak{A}^0}$-极小模型纲领$/U^0$，其缩放对象为 A^0。由于 $\mathfrak{A}$ 是对数典范， $\mathfrak{A}^0$ 是对数典范。由于$\mathfrak{A}^0/U^0$ 存在一个 bs-弱对数典范模型，由定理 5.2可知，此极小模型纲领终止，矛盾。□

5.3. 具有严格递减标度数的特殊极小模型纲领。

引理 5.4. 设 d 为正整数， ϵ 为正实数。则 $\delta:=\frac{\epsilon}{2d+\epsilon}$满足以下性质。设 $\mathfrak{A}/U$ 为一个维数为d、环境簇为 X的 ϵ-*KNQC* 对数典范广义对。设 C 为 X 上的一个 $\mathbb{R}$-除子，使得 $(\mathfrak{A},C)/U$ 为对数典范。那么对于任意$s\in[0,\delta)$，任意一列 $(K_{\mathfrak{A}}+sC)$-极小模型纲领步骤$/U$ $\phi:\ X\dashrightarrow X'$ 均为 $K_{\mathfrak{A}}$-平凡，$(\phi_*\mathfrak{A},\phi_*C)/U$ 为对数典范，且 $\phi_*\mathfrak{A}/U$ 为对数典范且为 ϵ-*KNQC*。

证明。 不妨设 ϕ 是一个 $(K_{\mathfrak{A}}+sC)$-极小模型纲领$/U$的单步。记 $K_{\mathfrak{A}}=\sum r_iH_i$，其中每个 $r_i\geq\epsilon$，且每个 H_i 都是数值有效的$/U$ Cartier。我们有

$$K_{\mathfrak{A}}+C+\sum\left(\frac{1}{s}-1\right)r_iH_i=\frac{1}{s}(K_{\mathfrak{A}}+sC)$$

并且对任意 i都有 $\left(\frac{1}{s}-1\right)r_i>2d$。于是， ϕ 也是一个 $(K_{\mathfrak{A}}+C)$-极小模型纲领$/U$的单步。由极端射线长度 [CHLX23，定理 2.2.1]， ϕ 对任意 i都是 H_i-平凡的。由收缩定理 [CHLX23，定理 2.2.6]，对每个 i， ϕ_*H_i 都是数值有效的$/U$ Cartier。因此， ϕ 是 $K_{\mathfrak{A}}$-平凡的，而 $\phi_*K_{\mathfrak{A}}$ 是 ϵ-NQC$/U$，从而 $\phi_*\mathfrak{A}/U$ 是 ϵ-KNQC。由于 ϕ 也是一个 $(K_{\mathfrak{A}}+C)$-极小模型纲领$/U$的单步，$(\phi_*\mathfrak{A},\phi_*C)/U$ 是对数典范的。引理得证。□

引理 5.5。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-因子阶乘对数典范广义对，其环境簇为 X。假设 X 是 *KLT*。设 $H\geq0$是 X上的一个 $\mathbb{R}$-除子，使得 $(\mathfrak{A},H)/U$是对数典范的， $K_{\mathfrak{A}}+H$是 *NQC*$/U$，且对于任意 $s\in(0,1]$，$(\mathfrak{A},sH)/U$都有一个 *KNQC bs*-弱对数典范模型。则我们可以运行一个带有 H缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$

$$\phi_i:\mathfrak{A}_i\dashrightarrow\mathfrak{A}_{i+1},\mathfrak{A}_1:=\mathfrak{A}$$

带缩放数

$$\lambda_i:=\inf\{t\mid t\geq0,K_{\mathfrak{A}_i}+tH_i\ is\ nef/U\},$$

其中， X_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的环境簇， H_i 是 H 在 X_i上的像，使得该极小模型程序要么终止，要么 $\lim_{i\to+\infty}\lambda_i=0$。

证明。 我们按如下方式运行极小模型纲领。假设我们已经得到一个 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U 步骤序列，其缩放由 H给出

$$\phi_i:\mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1:=\mathfrak{A}, 1\le i\le n-1,$$

X_i 是 $\mathfrak{A}_i$的环境簇，且 H_i 是 H 在 X_i 上的像，对每个 i皆如此。若 $\lambda_n=0$则结论成立。当 $\lambda_n>0$时，我们有 $K_{\mathfrak{A}_n}+H_n$ 是 NQC/U。由引理 5.4，我们可以选取 $0<\mu\ll 1$，使得任意一个 $(K_{\mathfrak{A}_n}+(\lambda_n-\mu)H_n)$-极小模型纲领/$U$ 步骤序列都是 $(K_{\mathfrak{A}_n}+\lambda_nH_n)$-平凡的。

由于诱导双有理映射 $X\dashrightarrow X_n$ 也是一个 $(K_{\mathfrak{A}}+(\lambda_n-\mu)H)$-极小模型纲领/$U$步骤序列，且 $(\mathfrak{A},(\lambda_n-\mu)H)/U$ 有良好极小模型，因此 $(\mathfrak{A}_n,(\lambda_n-\mu)H_n)/U$ 有良好极小模型。由 [Cas+25b 定理 4.6]，，带有丰沛除子 ϕ_i 的缩放的 $(K_{\mathfrak{A}_n}+(\lambda_n-\mu)H_n)$-极小模型纲领/$U$： $X_i\dashrightarrow X_{i+1}$, $n\le i\le m$ 终止于一个 KNQC 极小模型 $(\mathfrak{A}_m,(\lambda_n-\mu)H_m)/U$，其中 $\mathfrak{A}_i$和 H_i分别是任意 $n\le i\le m$时， $\mathfrak{A}_n$和 H_n在 X_i上的像。我们有， $\phi_i, n\le i\le m$ 是一个带有 H_n缩放的 $K_{\mathfrak{A}_n}$-极小模型纲领/U步骤序列。因此， $\phi_i, 1\le i\le m$ 是一个带有 H缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U 步骤序列。由于 $K_{\mathfrak{A}_m}+(\lambda_n-\mu)H_m$ 是数值有效的/U，我们有 $\lambda_m\le\lambda_n-\mu<\lambda_n$。

通过重复这一过程，我们得到一个 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U 带 H缩放的步骤序列

$$\phi_i:\mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1:=\mathfrak{A}$$

使得要么该极小模型程序终止，要么 $\lambda_i>\lambda:=\lim_{j\to+\infty}\lambda_j$ 对任意 i。若 $\lambda>0$，则这也是一个无穷步骤序列，即一个（$K_{\mathfrak{A}}+\lambda H$）-极小模型纲领/$U$ 带 H 缩放的，其缩放数为（$\lambda_i-\lambda$），且 $\lim_{i\to+\infty}(\lambda_i-\lambda)=0$。这与 [Cas+25b，定理 4。1]。因此 $\lambda=0$。 □

5.4. **带缩放的极小模型纲领的提升**。 本节的目标是证明，对于广义对，极小模型纲领（带缩放）可以提升为一个 $\mathbb{Q}$-因子的 (q)dlt 极小模型纲领（带缩放）的步骤序列。这对于证明第 6 节中的特殊终止很重要，但其本身也具有独立的意义。

命题 5.6. 设 $\mathfrak{A}/U$ 为一个以 X 为环境簇的对数典范广义对，且 C 为 X上的一个$\mathbb{R}$-除子。设 h： $X'\to X$ 为 $\mathfrak{A}'$ 的一个 $\mathbb{Q}$-因子 *qdlt* 修正，且 $\mathfrak{A}':=h^*\mathfrak{A}$。设

$$\phi_i:X_i\dashrightarrow X_i,\quad X_1:=X,\quad 1\le i\le n-1$$

是一列双有理映射/U，且不提取任何除子， $\mathfrak{A}_i, C_i$ 分别是 X_i 上 $\mathfrak{A}, C$ 的像。假设存在射影态射/U

$$f_i:X_i\to T_i\quad and\quad f_i^+:X_{i+1}\to T_i,\quad 1\le i\le n-1$$

使得 $f_i^+\circ\phi_i=f_i$, $-K_{\mathfrak{A}_i}$ 是丰沛的/T_i，且 $K_{\mathfrak{A}_{i+1}}$ 是丰沛的/T_i。

那么存在一列双有理映射/U

$$\phi_i':X_i'\dashrightarrow X_{i+1}',\quad X_1':=X',\quad 1\le i\le n-1$$

以及双有理态射

$$h_i:X_i'\to X_i,\quad h_1:=h,\quad 1\le i\le n-1$$

满足以下条件。设 $\mathfrak{A}_i'$ 是 $\mathfrak{A}_i'$上 $\mathfrak{A}'$ 的像，则对每个 i:

(1) h_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 和 $\mathfrak{A}'_i = h_i^*\mathfrak{A}_i$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘 *qdlt* 修正。此外，若 h 是 $\mathfrak{A}$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘 *dlt* 修正，则 h_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的 $\mathbb{Q}$- 阶乘 *dlt* 修正。*(2)* $h_{i+1} \circ \phi'_i = \phi_i \circ h_i$。*(3)* ϕ'_i 是一个 $K_{\mathfrak{A}'_i}$-*MMP*$/T_i$，除非 ϕ_i 是恒等态射，否则它不是恒等态射；并且 $\mathfrak{A}'_{i+1}/T_i$ 是 $\mathfrak{A}'_i/T_i$ 的 $\mathbb{Q}$- 阶乘良好极小模型。*(4)* $\{\phi'_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是一个 $K_{\mathfrak{A}}$-*MMP*$/U$ 的步骤序列。*(5)* 对每个 i，设

$$\lambda_i := \inf\{s \geq 0 \mid K_{\mathfrak{A}_i} + sC_i \ is \ nef/U\}$$

并假设 $K_{\mathfrak{A}_i} + \lambda_i C_i \equiv_{T_i} 0$. 那么：*(a)* ϕ'_i 是一个具有 C' 缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$ 的步骤序列：$= h^*C$，且该极小模型纲领的缩放数均等于 λ_i。*(b)* $\{\phi'_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是一个具有 C'缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$ 的步骤序列。这里，“步骤序列”可以是0 步。

证明。假设我们已经为 $1 \leq i \leq j-1$ 构造了 ϕ'_i，并为 $i \leq j$ 构造了 h_i，且它们满足我们的要求。当 $j = 1$ 时，这立即由我们的假设得出。如果$j = n$，则我们已经完成。因此我们可以假设 $1 \leq j \leq n-1$。接下来，我们构造满足要求的 ϕ'_j 和 h_{j+1}。设 C'_j 是 C' 在 X'_j 上的像。

由于 ϕ_j 是$/T_j$ 的丰模型，$\phi_j \circ h_j$ 是 $K_{\mathfrak{A}'_j}$的丰模型。由于$\phi_j \circ h_j$ 不提取任何除子，根据负性引理，$\mathfrak{A}_{j+1}/T_n$ 是 $\mathfrak{A}'_j/T_n$的半丰沛模型。由于 $\mathfrak{A}'_j$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt，X'_j 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 KLT。根据定理 4.17，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{A}'_j}$-极小模型纲领$/T_j$，并对丰沛除子 A_j 进行缩放，最终得到 $\mathfrak{A}'_j/T_j$的良好极小模型 $\mathfrak{A}'_{j+1}/T_j$。令 X'_{j+1} 为 $\mathfrak{A}_{j+1}$的环境簇。由于 $\mathfrak{A}'_j$是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt，$\mathfrak{A}'_{j+1}/T_j$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt；若 $\mathfrak{A}'_j$ 是除子对数终端，则 $\mathfrak{A}'_{j+1}$ 也是除子对数终端。此外，诱导双有理映射 $h_{j+1} : X'_{j+1} \dashrightarrow X_{j+1}$ 是 $K_{\mathfrak{A}'_{j+1}}$的丰模型$/T_j$。由于$K_{\mathfrak{A}'_{j+1}}$ 是半丰沛的$/T_j$，h_{j+1} 是一个收缩，并

$$K_{\mathfrak{A}'_{j+1}} = h_{j+1}^* \left(h_{j+1,*} K_{\mathfrak{A}'_{j+1}}\right) = h_{j+1}^* K_{\mathfrak{A}_{j+1}},$$

因此 $\mathfrak{A}'_{j+1} = h_{j+1}^*\mathfrak{A}_j$。

令 ϕ'_j 为诱导双有理映射 $X'_j \dashrightarrow X'_{j+1}$。如果 ϕ_j 不是恒等态射，那么 ϕ'_j 也不是恒等态射；否则 $h_j^*\mathfrak{A}_j = h_{j+1}^*\mathfrak{A}_{j+1}$，这与 $-K_{\mathfrak{A}_j}$ 是丰沛的 $/T_j$ 且 $K_{\mathfrak{A}_{j+1}}$ 是丰沛的 $/T_j$ 矛盾。

此外，在条件 (5) 下，$K_{\mathfrak{A}'_j} + \lambda_j C'_j \equiv_{T_j} 0$ 且

$$K_{\mathfrak{A}'_j} + \lambda_j C'_j = h_j^*(K_{\mathfrak{A}_j} + \lambda_j C_j)$$

是数值有效的 $/U$。因此，ϕ'_j 也是一个带有 C'_j 缩放的 $K_{\mathfrak{A}'_j}$-极小模型纲领 $/U$，且缩放数均等于 λ_j。

因此，我们构造了满足要求的 ϕ'_j 和 h_{j+1}。该命题通过对 j 进行归纳得证。□

6. Special termination

本节旨在为 LD 广义对建立一项特殊终止结果，这些广义对可视为 [Hu25 第 4 节中特殊终止结果的推广。2]正如引言中所解释的，这里的特殊终止不同于 [Fuj07]中的特殊终止，因为我们构造的困难度函数集可能

依赖于原始广义对和归纳假设。更确切地说，我们需要系数集 Γ_k ，如下引理所示。

引理 6.1。令 d 为正整数， $1 \leq k \leq d-1$ 为整数。设 $\mathfrak{A}/U =(X, B,\mathbf{M})/U$ 为一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端 *LD* 广义对。令

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}$$

为一个 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U的步骤序列。假设

(1) ϕ_i 在 $\mathfrak{A}_i$ 的任意对数典范中心的一般点附近为同构，且 d

(2) ϕ_i 在 $\mathfrak{A}_i$ 的任意维数为 $\leq k-1$ 的对数典范中心附近为同构。

那么存在一个满足以下条件的有限集 $\Gamma_k \subset [0,1]$ 。对每个 i，记 $\mathfrak{A}_i = (X_i, B_i,\mathbf{M})$。令 S 为 $\mathfrak{A}$ 的一个维数为 k 的对数典范中心， S_i 为对于每个 i， S 在 X_i 上的像，并令 $\mathfrak{A}_{S_i} := \mathfrak{A}_i|_{S_i}$。记

$$\mathfrak{A}_{S_i} = (S_i, B_{S_i}, \mathbf{M}^i).$$

于是 $B_{S_i} \in \Gamma_k$。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 是对数典范，存在一个正整数 I、 a_1、……、 $a_m \in (0,1]$ 以及对数典范广义对 $\mathfrak{A}^j = (X, B^j, \mathbf{M})$ $1 \leq j \leq m$，使得 $\sum_{j=1}^m a_j = 1$、 $\sum_{j=1}^m a_j\mathfrak{A}^j = \mathfrak{A}$、 $\mathfrak{A}^j$ 是对数典范的，并且对每个 j，$IK_{\mathfrak{A}^j}$ 都是一个Weil除子。由于每个 $\mathfrak{A}^j$ 都是对数典范的，对于任意 j，有 $\lfloor B \rfloor \subset \lfloor B^j \rfloor$ ；对于任意 j，有 $B^j \geq 0$。对于任意 i、 j，我们令 $\mathfrak{A}_i^j$、 B_i^j 分别为 $\mathfrak{A}^j$、 B^j 在 X_j 上的像。于是，对于任意 i、 j、 l，$IK_{\mathfrak{A}_i^j}$ 是魏尔除子。由于 $\mathfrak{A}_{S_1}$ 是除子对数终端的，

$$\mathcal{S} := \{E \mid E \text{ is a prime divisor over } S_1, a(E, \mathfrak{A}_{S_1}) < 0, \operatorname{center}_{S_1} E \not\subset \lfloor B_{S_1} \rfloor\}$$

是一个有限集。我们令

$$\epsilon := \inf\{a(E, \mathfrak{A}_{S_1}) \mid E \in \mathcal{S}\} + 1 = \min\{a(E, \mathfrak{A}_{S_1}) \mid E \in \mathcal{S}\} + 1,$$

于是 $\epsilon > 0$。根据假设（1），存在唯一的 $\boldsymbol{b}$-除子 $\mathbf{M}^S$ ，使得对于任意 i， $\mathbf{M}^i = \mathbf{M}^S$。我们令 $g : S' \to S$ 为一个射影双有理态射，使得对于任意 $E \in \mathcal{S}$ ，$\operatorname{center}_X E$ 是一个素除子，并令

$$\Gamma := \{\operatorname{mult}_E \mathbf{M}^S_{S'} \mid E \in \mathcal{S}\}.$$

那么 Γ 是一个有限集。

我们令 $\phi_i : X_i \xrightarrow{f_i} Z_i \xleftarrow{f_i^+} X_{i+1}$ 表示该 MMP 的每一步，并令 $S_i \xrightarrow{g_i} T_i \xleftarrow{g_i^+} S_{i+1}$ 表示诱导态射，其中 $g_i = f_i|_{S_i}$、 $g_i^+ = f_i^+|_{S_{i+1}}$，且 T_i 是f_i(S_i)的正规化。那么 $K_{\mathfrak{A}_{S_i}}$ 是反丰沛的/T_i ，且 $K_{\mathfrak{A}_{S_{i+1}}}$ 是丰沛的/T_i，因此由负性引理可得

$$a(E, \mathfrak{A}_{S_i}) \leq a(E, \mathfrak{A}_{S_{i+1}})$$

对 $S = S_1$之上的任意素除子 E ，均有。

设 D 是 B_{S_i} 的一个不可约分支，其中某个 i 满足 $\operatorname{mult}_D B_{S_i} < 1$。则$D$ 不包含于 $\lfloor B_{S_i} \rfloor$中。由假设 (2)，$\operatorname{center}_{S_1} D$ 不包含于 $\lfloor B_{S_1} \rfloor$中。我们有

$$a(D, \mathfrak{A}_{S_1}) \leq a(D, \mathfrak{A}_{S_i}) < 0,$$

这意味着 $D \in \mathcal{S}$。因此

$$\epsilon \leq a(D, \mathfrak{A}_{S_1}) + 1 \leq a(D, \mathfrak{A}_{S_i}) + 1 < 1.$$

令 N 为最小正整数，使得对于 X 上的任意 Weil 除子 P， NP 在 X_i 上 D 的一般点附近是 Cartier。于是

$$(K_{X_i}+\lfloor B_i\rfloor)\,|_{S_i}=K_{S_i}+\frac{N-1}{N}D$$

在 D 的一般点附近，因此

$$-a(D,\mathfrak{A}_{S_i})=\operatorname{mult}_D B_{S_i}\geq\frac{N-1}{N},$$

因此

$$\epsilon\leq a(D,\mathfrak{A}_{S_i})+1\leq\frac{1}{N}.$$

因此 $N\leq\frac{1}{\epsilon}$。令 $u_{i,j}$ 为满足以下条件的唯一实数

$$K_{S_i}+u_{i,j}D+\mathbf{M}^S_{S_i}=K_{\mathfrak{A}_i^j}\Big|_{S_i}=\left(K_{X_i}+B_i^j+\mathbf{M}_{X_i}\right)\Big|_{S_i}$$

在 D 的一般点附近。则对任意 i,j，都有 $u_{i,j}\geq 0$。由于 $NIK_{\mathfrak{A}_i^j}$ 在 D 的一般点附近是 Cartier 的，我们有

$$NI(u_{i,j}+\operatorname{mult}_D\mathbf{M}^S_{S_i})\in\mathbb{Z}.$$

由于

$$\operatorname{mult}_D\mathbf{M}^S_{S_i}=\operatorname{mult}_{\operatorname{center}_{S'}D}\mathbf{M}^S_{S'}\in\Gamma,$$

$u_{i,\ j}$ 属于一个离散集。我们有

$$K_{S_i}+\sum_{j=1}^m a_ju_{i,j}D+\mathbf{M}^S_{S_i}=K_{\mathfrak{A}_i}|_{S_i}=K_{\mathfrak{A}_{S_i}}$$

在 D 的一般点附近。由于 $\mathfrak{A}_{S_i}$ 是对数典范的，$\sum_{j=1}^m a_ju_{i,\ j}\leq 1$。因此，$u_{i,\ j}$ 属于一个有界集，故 $u_{i,\ j}$ 属于一个有限集。因此，

$$\operatorname{mult}_D B_{S_i}=\sum_{j=1}^m a_ju_{i,j}$$

属于一个有限集。引理得证。 □

定理 6.2. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 ***LD dlt*** 广义对，且 $C\geq 0$ 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-除子，使得 $(\mathfrak{A},C)$ 是对数典范的，且 $K_{\mathfrak{A}}+C$ 数值有效/U。设

$$\phi_i:\mathfrak{A}_i\dashrightarrow\mathfrak{A}_{i+1},\mathfrak{A}_1:=\mathfrak{A}$$

是一个带有 C 缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/U，其中 X_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的环境簇，而对于每个 i， C_i 是 C 在 X_i 上的像。设

$$\lambda_i:=\inf\{t\mid t\geq 0,K_{\mathfrak{A}_i}+tC_i\ is\ nef/U\}$$

为此极小模型纲领的缩放数。

假设极限$\lim_{i\to+\infty}\lambda_i=0$。假设对于任意 $i\gg 0$ 以及 $\mathfrak{A}_i$的任意维数为 ≥ 1的对数典范中心 S_i，要么 $\mathfrak{A}|_{S_i}$ 有一个基点自由弱模型，要么 $K_{\mathfrak{A}|_{S_i}}$ 不是伪有效的/U。对任意 i，记 $\mathfrak{A}_i=(X_i,B_i,\mathbf{M})$。那么对于任意 $i\gg 0$， ϕ_i 在 $\lfloor B_i\rfloor$ 附近是一个同构。

证明。证明大体遵循 [Fuj07中定理 4.2 的证明思路。1] 不过，我们需要归纳地将难处理的系数集替换为引理6.1 中给出的集合。为方便读者，我们在此给出完整证明。

我们可以假设这个极小模型纲领不终止。设 $\mathfrak{A}_i(s) := (\mathfrak{A}_i, sC_i)$ 对任意$s \in [0,1]$ 以及任意 i，并设 $\lambda_0 := 1$。由定理 5.2，$(\mathfrak{A}_i, sC_i)$ 对任意 $s \in [0, \lambda_{i-1}]$、对任意 i 是对数典范的。我们令 ϕ_i：$X_i \xrightarrow{f_i} Z_i \xleftarrow{f_i^+} X_{i+1}$ 为该极小模型纲领的每一步，其中 f_i 是$K_{\mathfrak{A}_i}$-负极端收缩/U。则对 $i \gg 0$，ϕ_i 是一个翻转，且 f_i、f_{i+1} 是小的。

步骤1. 在这一步中，我们将问题归结为在单个非平凡对数正则中心附近的终止。由于 $\mathfrak{A}$ 只有有限多个 lc中心，通过比较不一致数，$\mathfrak{A}_i$ 的 lc中心个数在减少；并且若 f_i 的例外轨迹包含 $\mathfrak{A}_i$ 的一个对数典范中心，则 $\mathfrak{A}_{i+1}$ 的 lc中心个数严格少于 $\mathfrak{A}_i$ 的 lc中心个数。因此，对任意 $i \gg 0$，ϕ_i 在 $\mathfrak{A}_i$ 的任意对数典范中心的一般点附近是一个同构。特别地，对任意 $i \gg 0$，ϕ_i 在 $\mathfrak{A}_i$ 的任意 0 维对数典范中心附近是一个同构。

现在我们只需证明，对任意 $i \gg 0$，极小模型程序在 $\mathfrak{A}$ 于 X_i 上的任意非平凡对数正则中心 S的像附近终止。我们对 k作归纳：$=$维 S $<$维 X。由于 $k = 0$ 情形已经完成，我们可以假设 $k > 0$，并且对任意 $i \gg 0$，ϕ_i 在 $\mathfrak{A}_i$ 的任意维数 $\leq k-1$ 对数典范中心附近是同构。我们令 S_i 为 S 在 X_i 上对任意 i的双有理变换，T_i 为 $f_i(S_i)$的正规化，以及 f_{S_i}：$S_i \to T_i$，$f_{S_i}^+$：$S_{i+1} \to T_i$ 为诱导态射。则对任意 $i \gg 0$，f_{S_i}与 $f_{S_i}^+$是双有理的，因为ϕ_i 在 S_i的一般点附近是同构。此外，对 $i \gg 0$，$\mathbf{M}|_{S_i}$ 是一个固定$\boldsymbol{b}$-除子，并且对 $i \gg 0$，我们记$\mathbf{M}^S$:= $\mathbf{M}|_{S_i}$。对任意 i，令 $\mathfrak{A}_{S_i}$:= $\mathfrak{A}_i|_{S_i}$。

步骤 2. 在这一步中，我们证明 $\mathfrak{A}_{S_i}$ 的不一致数随 $i \gg 0$ 增大。由负性引理，我们有

$$a(E, \mathfrak{A}_{S_i}) \leq a(E, \mathfrak{A}_{S_{i+1}})$$

对任意 $i \gg 0$ 以及位于 S_i 之上的任意素除子 E。更精确地，令 W_i 为 $X_i \times_{Z_i} X_{i+1}$ 的主分支的正规化，并令 p_i：$W_i \to X_i$ 和 q_i：$W \to X_{i+1}$ 为诱导的双有理态射，则我们有

$$p_i^* K_{\mathfrak{A}_i} - q_i^* K_{\mathfrak{A}_{i+1}} := F_i \geq 0$$

对某个 $F_i \geq 0$，这是通过对诱导的双有理态射 $W_i \to Z_i$ 应用负性引理得到的。对于任意 $i \gg 0$，由于 ϕ_i 在 S_i 的一般点附近是同构，p_i 和 q_i 分别在 S_i 和 S_{i+1} 的一般点上是同构，因此我们可以令 S_{W_i} 为 S_i 在 W_i 上的严格变换，并令 p_{S_i}：$S_{W_i} \to S_i$ 和 q_{S_i}：$S_{W_i} \to S_{i+1}$ 为诱导的双有理态射。于是我们有

$$p_{S_i}^* K_{\mathfrak{A}_{S_i}} = p_i^* K_{\mathfrak{A}_i}|_{S_{W_i}} \geq (p_i^* K_{\mathfrak{A}_i} - F_i)|_{S_{W_i}} = q_i^* K_{\mathfrak{A}_{i+1}}|_{S_{W_i}} = q_{S_i}^* K_{\mathfrak{A}_{S_{i+1}}},$$

因此，对于位于 S_i 之上的任意素除子 E，$a(E, \mathfrak{A}_{S_i}) \leq a(E, \mathfrak{A}_{S_{i+1}})$。

步骤 3. 在这一步中，我们构造困难度函数，并用它来证明ϕ_{S_i} 不提取任何除子，对任意 $i \gg 0$。记 $\mathfrak{A}_{S_i} = (S_i, B_{S_i}, \mathbf{M}^S)$，对任意 $i \gg 0$。由引理6.1 以及归纳假设，存在一个有限集 Γ_k，使得对任意 $i \gg 0$，$B_{S_i} \in \Gamma_k$。我们定义

$$d_i := \sum_{\alpha \in \Gamma} \#\{E \mid a(E, \mathfrak{A}_{S_i}) < 1 - \alpha \text{ and } \operatorname{center}_{S_i} E \not\subset \lfloor B_{S_i} \rfloor\}.$$

由于 Γ_k 是有限集，且对于任意 $i \gg 0$，$\mathfrak{A}_{S_i}$ 都是除子对数终端，并且对于任意 $i \gg 0$，$d_i \geq 0$ 和 $d_i < +\infty$。

设 $\phi_{S_i} := \phi_i|_{S_i} : S_i \dashrightarrow S_{i+1}$ 对于任意 $i \gg 0$。根据归纳假设，对于任意 $i \gg 0$， ϕ_{S_i} 在 $\lfloor B_{S_i} \rfloor$ 附近是同构。因此，对于任意 $i \gg 0$ 以及其上的任意素除子 E，若 $\mathrm{center}_{S_i}(E) \subset \lfloor B_{S_i} \rfloor$（分别地，$\mathrm{center}_{S_{i+1}}(E) \subset \lfloor B_{S_{i+1}} \rfloor$），则根据负性引理，$\phi_i$（分别地，$\phi_i^{-1}$）在 $\mathrm{center}_{S_i}(E)$（分别地，$\mathrm{center}_{S_{i+1}}(E)$）的一般点附近是同构。因此，对于任意 $i \gg 0$，$\mathrm{center}_{S_i}(E) \subset \lfloor B_{S_i} \rfloor$当且仅当 $\mathrm{center}_{S_{i+1}}(E) \subset \lfloor B_{S_{i+1}} \rfloor$。根据**步骤 2**，我们有 $d_n \geq d_{n+1}$。

此外，对于 $i \gg 0$，假设 $f_{S_i}^+$ 收缩一个除子 E。那么 $\mathrm{mult}_E B_{S_{i+1}} = \alpha \in \Gamma_k$对于某个 α。由于 $K_{\mathfrak{A}_{S_i}}$ 是反丰沛的/T_i，且 $K_{\mathfrak{A}_{S_{i+1}}}$ 是丰沛的/T_i，由 [KM98，引理 3.38]，可得

$$a(E, \mathfrak{A}_i) < a(E, \mathfrak{A}_{i+1}) = 1 - \alpha,$$

因此，在此情形下 $d_i > d_{i+1}$。

因此，对于任意 $i \gg 0$， $f_{S_i}^+$ 都不收缩任何除子，故 ϕ_{S_i} 不提取任何除子。

步骤 4。固定 $n \gg 0$。令 $g_n : Y_n \to S_n$ 为 $\mathfrak{A}_{S_n}$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端 dlt 修正，并令$\mathfrak{A}_{Y_n} := g_n^* \mathfrak{A}_{S_n}$。由步骤 3，对于任意 $i \geq n$， ϕ_{S_i} 都不提取任何除子。由于对于无穷多个 $i \geq n$， ϕ_{S_i} 不是同构，由命题 5.6，对于任意 $i \geq n$，存在 $\mathfrak{A}_i$ 的双有理态射 $g_i : Y_i \to S_i, i \geq n$ 以及双有理映射 $\psi_i : Y_i \dashrightarrow Y_{i+1}, i \geq n$，使得对于任意 $i \geq n$，

- g_i 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正 $\mathfrak{A}_{S_i}$，
- $g_{i+1} \circ \psi_i = \phi_{S_i} \circ g_i$ 并且

$$\mathfrak{A}_{Y_{i+1}} := g_{i+1}^* \mathfrak{A}_{S_{i+1}} = \psi_{i,*} \mathfrak{A}_{Y_i}$$

对于任意 $i \geq n$，并且

- ψ_i 是一个带有 $g_i^*(C_i|_{S_i})$ 缩放的 $K_{\mathfrak{A}_{Y_n}}$-MMP/U 步骤序列，该 MMP 的缩放数为 λ_i。

由于 $\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = 0$， $\{\psi_i\}_{i=n}^{+\infty}$ 是一个带有$g_n^*(C_n|_{S_n})$缩放的 $K_{\mathfrak{A}_{Y_n}}$-MMP/U 步骤序列，且该 MMP 的缩放数的极限为 0。

由于 $\mathfrak{A}_n$ 是对数典范的，由引理 3.10， $\mathfrak{A}_{S_n}$ 是对数典范的。由引理 3.4， $\mathfrak{A}_{Y_n}$ 是对数典范的。由于$\mathfrak{A}_{S_n}/U$ 或者有一个 bs-弱对数典范模型，或者 $K_{\mathfrak{A}_{S_n}}$ 不是伪有效的/U，由引理 4.15，$\mathfrak{A}_{Y_n}/U$ 或者有一个 bs-弱对数典范模型，或者 $K_{\mathfrak{A}_{Y_n}}$ 不是伪有效的/U。这与定理5.2矛盾。□

7. 饭高纤维化

本节利用相对 Iitaka 纤维化，将广义对存在良好极小模型的问题化归为丰沛情形。我们首先处理相对 Iitaka 维数为零的情形，并在额外假设下得到良好极小模型。随后，我们证明 klt 丰富广义对存在良好极小模型，这是第8节粘合理论的关键依据。

7.1. 相对 Iitaka 维数为零时的良好极小模型。本小节研究广义对 $\mathfrak{A}/U$ 存在良好极小模型的问题，其中它们/U π 具有一个收缩 $X \to Z$，使得 $\kappa_\sigma(X/Z, K_{\mathfrak{A}}) = \kappa_\iota(X/Z, K_{\mathfrak{A}}) = 0$，其中 X 是 $\mathfrak{A}$的环境簇。我们证明，在某些情形下，这类广义对存在良好极小模型。

引理 7.1. 设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘对数典范广义对，其中 X是 *KLT*，且 $\pi : X \to U$ 为诱导态射。假设：

(1) π 是等维收缩。*(2)* U 是 $\mathbb{Q}$-阶乘。
(3) $\kappa_\sigma(X/U, K_{\mathfrak{A}}) = \kappa_\iota(X/U, K_{\mathfrak{A}}) = 0$。

则 $\mathfrak{A}/U$ 具有一个 $\mathbb{Q}$-因子的良好极小模型 $\mathfrak{A}'/U$，使得$K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R},\, U} 0$。

证明。此为 [CHLX23，命题 11.2.1(2.b)] 通过令 $\mathcal{F} = T_X$所得的特例。 □

引理 7.2。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个以 X 为环境簇的对数典范广义对，且 $f\colon X \to Z$为一个收缩 $/U$。假设：
(1) $\kappa_\sigma(X/U, K_{\mathfrak{A}}) = \dim Z - \dim U$。
(2) $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},\, Z} 0$。*(3)* $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心支配 Z。
则 $\mathfrak{A}/U$ 具有一个良好对数极小模型。

证明。由引理 4.14，我们只需证明 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 bs-半丰模型。令$h\colon X' \to X$ 为 $\mathfrak{A}$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正，并令 $\mathfrak{A}' := h^*\mathfrak{A}$。由引理 4.16，必要时以 $h^*\mathfrak{A}$替换 $\mathfrak{A}$ 后，我们可以假设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt。由 [CHLX23, Theorem 2.3.2],，存在一个 klt 广义对 $\mathfrak{A}_Z/U$，使得 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R}} f^*K_{\mathfrak{A}_Z}$。由引理 2.18(1)，$K_{\mathfrak{A}_Z}$是大/$U$。由 [Cas+25a, Theorem 2.1.1],，我们可以运行一个带有丰沛除子 ϕ 缩放的 $K_{\mathfrak{A}_Z}$-极小模型纲领/U：$Z \dashrightarrow Z'$，并以 $\mathfrak{A}_Z/U$的良好极小模型$\mathfrak{A}_{Z'}/U$终止。令 $p\colon Y \to Z$，并令 $q\colon Y \to Z'$为 ϕ的不定点集解消，则有

$$p^*K_{\mathfrak{A}_Z} = q^*K_{\mathfrak{A}_{Z'}} + F$$

对某个例外的 $F \geq 0$ /Z'。我们令 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 为$\mathfrak{A}$的适当对数光滑模型，X' 为 $\mathfrak{A}'$的环境簇，使得诱导映射 $f'\colon X' \dashrightarrow Y$是一个态射。我们有

$$\mathfrak{A}' = (h^*\mathfrak{A}, E)$$

对某个 h-例外的 $\mathbb{R}$-除子 $E \geq 0$。则

$$K_{\mathfrak{A}'} = h^*K_{\mathfrak{A}} + E \sim_{\mathbb{R}} (f \circ h)^*K_{\mathfrak{A}_Z} + E = f'^*p^*K_{\mathfrak{A}_Z} + E = f'^*q^*K_{\mathfrak{A}_{Z'}} + f'^*F + E. \tag{7.1}$$

由于 ϕ 不抽出任何除子，存在开子集 $Z_0 \subset Z$ 与 $Z_0' \subset Z'$，使得 $\phi_0 := \phi|_{Z_0}\colon Z_0 \dashrightarrow Z_0'$ 是一个同构，且$\dim Z' \backslash Z_0' \leq \dim Z - 2$（此处我们考虑$\dim \emptyset = -\infty$）。我们运行一个带充足除子的缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领/Z'

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \quad \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}'$$

并令 $\mathfrak{A}_i^0 := \mathfrak{A}_i \times_{Z'} Z_0$ 对每个 i。则存在 $i \gg 0$，使得 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 是可动的/Z'。令 X_i 为 $\mathfrak{A}_i$的环境簇，$X_i^0 := X_i \times_{Z'} Z_0$，$E_i$ 为 E 在 X_i上的像，$E_i^0 := E_i|_{X_i^0}$，F_i 为 f'^*F 在 X_i上的像，且 $f_i\colon X_i \dashrightarrow Z'$ 为每个 i 的诱导态射。

我们有$K_{\mathfrak{A}_i^0}$ 是可动的/Z_0。根据 [LX25，引理 3.4(2)],我们有

$$N_\sigma(X_1^0/Z_0, K_{\mathfrak{A}_1^0}) = N_\sigma\left(X_1/Z_0, (h^*K_{\mathfrak{A}} + E)\,|_{X_1^0}\right) = E_1^0.$$

根据 [LMX24，引理 2。25]，E_1^0 被诱导双有理映射$X_1^0 \dashrightarrow X_i^0$压缩。因此$E_i|_{X_i^0} = 0$。由于 $\dim Z' \backslash Z_0' \leq \dim Z - 2$，$\dim f_i$(支集 E_i) $\leq \dim Z - 2$。因此 $\dim f_i$(支集 $F_i \cup$ 支集 E_i) $\leq \dim Z - 2$，所以 $F_i + E_i$是非常例外的/Z'。我们有

$$K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R}, Z'} F_i + E_i \geq 0$$

且 $K_{\mathfrak{A}'}$ 是可动的/Z'。根据 [Bir12，引理 3。3]，$F_i = E_i = 0$ 且$K_{\mathfrak{A}_i} \sim_{\mathbb{R},\, Z'} 0$。根据（7.1），

$$K_{\mathfrak{A}_i} \sim_{\mathbb{R}} f_i^*K_{\mathfrak{A}_{Z'}}$$

是半丰沛的$/U$。因此， $\mathfrak{A}_i/U$是 $\mathfrak{A}/U$的良好极小模型。引理得证。 □

命题 7.3。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个环境簇为 X 且 $f\colon X\to Z$ 为收缩$/U$ 的对数典范广义对。假设

(1) $\kappa_\sigma(X/U,K_{\mathfrak{A}})=$维数 $Z-$维数 U。

(2) $\kappa_\iota(X/Z,K_{\mathfrak{A}})=\kappa_\sigma(X/Z,K_{\mathfrak{A}})=0$。

(3) $\mathfrak{A}$ 的任一对数典范中心都支配 Z。

那么 $\mathfrak{A}/U$ 有良好对数极小模型。

证明。 根据定义-引理 4.10，存在一个适当对数环面模型 $h\colon \mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}$ 关于$\mathfrak{A}$，相对于 f 与之关联 $f'\colon X'\to Z'$。由引理 2.18(3)，可得

$$\kappa_\iota(X'/Z',K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\iota(X/Z,K_{\mathfrak{A}})=0=\kappa_\sigma(X/Z,K_{\mathfrak{A}})=\kappa_\sigma(X'/Z',K_{\mathfrak{A}'}).$$

由引理 7.1和定理 4.17，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{A}'}$-极小模型纲领$/Z'$，并通过丰沛除子的缩放使其终止于 $\mathfrak{A}''/Z'$ 的 $\mathfrak{A}'/Z'$良好极小模型。由引理 2.18(5)，

$$\kappa_\sigma(X''/U,K_{\mathfrak{A}''})=\kappa_\sigma(X'/U,K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\sigma(X/U,K_{\mathfrak{A}})=\dim Z-\dim U.$$

由于 $\mathfrak{A}'$ 的任意对数典范位都是 $\mathfrak{A}$ 的对数典范位，因而支配 Z，故 $\mathfrak{A}'$ 的任意对数典范中心支配Z'，从而 $\mathfrak{A}''$ 的任意对数典范中心支配 Z'。由引理 7.2， $\mathfrak{A}''/U$ 具有良好对数极小模型。由引理 4.18与4.12， $\mathfrak{A}/U$ 具有 bs-半丰模型。由引理 4.14，$\mathfrak{A}/U$ 具有良好对数极小模型。 □

7.2. **丰沛广义对的良好极小模型**。本小节的目标是证明终端奇点丰沛伪有效广义对具有良好极小模型。这将在后文建立粘合理论时使用。请读者参阅 [Hu23，定义 2.2]，以了解不变岩泽纤维化的定义（另见[CHL24，定义 6.1]）。

引理 7.4. 设 $\mathfrak{A}/U$ 为一个对数典范广义对，其环境簇为 X，使得 $K_{\mathfrak{A}}$ 丰沛$/U$ 且伪有效$/U$。设 $\phi\colon X\dashrightarrow Y$ 为不变 *Iitaka* 映射$/U$，它是 $K_{\mathfrak{A}}$ 的，并设 $h\colon \mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}$ 为适当对数环面模型，它相对于 ϕ，且与 $f\colon X'\to Z$相关联。则

$$\kappa_\sigma(X'/U,K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\iota(X'/U,K_{\mathfrak{A}'})=\dim Z-\dim U,\ \kappa_\sigma(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\iota(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=0.$$

证明。 令 $\pi\colon X\to U$ 为相关态射， $X\to U'\to U$ 为 π的 Stein 分解。可能需要将 U 替换为 U'，我们可以假设 π 是一个收缩。令 $\kappa:=\kappa_\sigma(X/U,K_{\mathfrak{A}})$。那么 $\kappa\geq 0$。由于 $K_{\mathfrak{A}}$ 是伪有效$/U$ 且丰沛$/U$，并且 ϕ 是 $K_{\mathfrak{A}}$的一个不变 Iitaka 映射$/U$，我们有

$$\dim Z-\dim U=\kappa_\iota(X/U,K_{\mathfrak{A}})=\kappa_\sigma(X/U,K_{\mathfrak{A}})=\kappa.$$

由于 $\mathfrak{A}'$ 是的对数环面模型，由引理 2.18(3)，我们有

$$\kappa_\sigma(X'/U,K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\sigma(X/U,K_{\mathfrak{A}})=\dim Z-\dim U=\kappa_\iota(X/U,K_{\mathfrak{A}})=\kappa_\iota(X'/U,K_{\mathfrak{A}'}).$$

因此我们只需证明

$$\kappa_\sigma(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\iota(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=0.$$

我们有 $\mathfrak{A}'=(h^*\mathfrak{A},E)$，其中某个 $E\geq 0$ 是例外$/X$。此外，存在 Z 上的一个丰沛$/U$ $\mathbb{R}$-除子 $A\geq 0$ 以及 X'上的一个例外$/X$ $\mathbb{R}$-除子 $E'\geq 0$，使得

$$h^*K_{\mathfrak{A}}\sim_{\mathbb{R},U} f^*A+E'.$$

则对任意正实数 k，我们有

$$K_{\mathfrak{A}'}+kf^*A\sim_{\mathbb{R},U}(1+k)f^*A+E+E'.$$

由于

$$(1+k)f^*A+E+E'\geq f^*A+E+E'\geq\frac{1}{1+k}((1+k)f^*A+E+E')),$$

且 E 是例外的$/X$，对任意 $k\geq 0$，由引理2.18(2)(3)，

$$\kappa_\sigma(X'/U,K_{\mathfrak{A}'}+kf^*A)=\kappa_\sigma(X'/U,(1+k)f^*A+E+E')$$
$$=\kappa_\sigma(X'/U,f^*A+E+E')=\kappa_\sigma(X'/U,h^*K_{\mathfrak{A}}+E)=\kappa_\sigma(X'/U,K_{\mathfrak{A}'})=\kappa_\sigma(X/U,K_{\mathfrak{A}})=\kappa.$$

设 F为 $\pi\circ h$的一般纤维，$Z_F:=f(F)$，且 $f_F:=f|_F$。由 [Fuj20，(3.3)]和引理 2.18(1)，可得

$$\kappa=\kappa_\sigma(X'/U,K_{\mathfrak{A}'}+kf^*A)=\kappa_\sigma((K_{\mathfrak{A}'}+kf^*A)|_F)\geq\kappa_\sigma(F/Z_F,K_{\mathfrak{A}'}|_F)+\kappa(A|_{F_Z})$$
$$=\kappa_\sigma(F/Z_F,K_{\mathfrak{A}'}|_F)+\dim Z_F=\kappa_\sigma(F/Z_F,K_{\mathfrak{A}'}|_F)+\kappa=\kappa_\sigma(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})+\kappa.$$

因此，$\kappa_\sigma(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=0$。由于 $K_{\mathfrak{A}}$是丰沛的$/U$且伪有效的$/U$，$K_{\mathfrak{A}'}$是丰沛的$/U$且伪有效的$/U$。于是

$$0\leq\kappa_\iota(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})\leq\kappa_\sigma(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=0,$$

因此 $\kappa_\iota(X'/Z,K_{\mathfrak{A}'})=0$，引理得证。□

引理 7.5. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 *klt* 广义对，使得 $K_{\mathfrak{A}}$ 丰沛$/U$ 且伪有效$/U$。那么 $\mathfrak{A}/U$ 有一个 $\mathbb{Q}$-阶乘良好极小模型。

证明. 设 $\mathfrak{A}:=(X,B,\mathbf{M})$。将 X 替换为一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化后，不妨设 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 KLT。由于 $K_{\mathfrak{A}}$ 丰沛$/U$ 且伪有效$/U$，$\kappa:=\kappa_\iota(X/U,K_{\mathfrak{A}})\geq 0$。设 $\phi:X\dashrightarrow Y$ 是一个不变 Iitaka 映射$/U$（参见[CHL24，定义 6.1]）的 $K_{\mathfrak{A}}$。由定义-引理 4.10，存在一个关于 ϕ 且与 $f:X'\to Z$相关联的适当对数环面模型 $h:\mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}$。那么 $\mathfrak{A}'$ 是 KLT。由引理 7.4 和命题 7.3，$\mathfrak{A}'/U$ 有一个良好对数极小模型。由引理 4.12，$\mathfrak{A}/U$ 有一个 bs-半丰模型。由定理 4.17，$\mathfrak{A}/U$ 有一个 $\mathbb{Q}$-阶乘良好极小模型。□

8. Gluing theory for generically trivial generalized pairs

本节将建立 LD 广义对的粘合理论。关于分层、分层概形、分层概形的边界、分层态射、分层关系以及性质 (N)、(SN)、(HN)、(HSN) 的定义，我们将采用 [Kol13，定义 9.15、9.16、9.18]中的记号。

我们的主要成果是定理 8.9，它可以视为 [Bir12，定理 17] 的 LD 类比，并将在第 9节中使用。

8.1. 对数典范保正结构的粘合理论。

定义 8.1。 设 $\mathfrak{A}/U$ 是与态射 $\pi:X\to U$ 相关联的广义对。若 π 是收缩，$\mathfrak{A}$ 是 lc（分别为 dlt），且 $K_{\mathfrak{A}}\sim_{\mathbb{R},\,U}0$，则称 $\pi:\mathfrak{A}\to U$ 是一个*lc*（分别为*dlt*）保正对数结构。保正对数结构 $\pi:\mathfrak{A}\to U$ 的一个对数典范中心是 $\mathfrak{A}$ 在 U 中的一个对数典范中心的像。

定义 8.2（[CHLX23，定义 13.1.4]）。设 $\pi: \mathfrak{A} \to U$ 是一个 lc crepant对数结构。对于任意整数 $0 \leq k \leq \dim U$，记 $S_k^*(U,\mathfrak{A})$ 为 $\pi: \mathfrak{A} \to U$ 的所有维数为 $\leq k$ 的对数典范中心之并。定义 $S_{-1}^*(U,\mathfrak{A}) := \emptyset$，并且对于任意 $0 \leq k \leq \dim U$，令 $S_k(U,\mathfrak{A}) := S_k^*(U,\mathfrak{A}) \setminus S_{k-1}^*(U,\mathfrak{A})$。

U 的*lc* 分层 由 $\pi: \mathfrak{A} \to U$ 诱导，即由 $S_*(U,\mathfrak{A})$诱导，并记为$(U, S_*(\mathfrak{A}))$；也就是说，对于任意 k，都有 $S_k(\mathfrak{A})(U) = S_k(U,\mathfrak{A})$。我们记

$$B(U,\mathfrak{A}) := U \setminus S_{\dim U}(U,\mathfrak{A}).$$

定义 8.3 ([CHLX23，定义 13.1。5])。若半正规分层空间(Y, S_*) 对于任意 均具有 *lc* 起源，则称其为 $S_i(Y)$ 单分支，并且存在 lc 保正对数结构$\pi_j: \mathfrak{A}_j \to U_j$ 以及一个有限满射分层态射

$$\phi: \bigsqcup_j (U_j, S_*(\mathfrak{A}_j)) \to (Y, S_*).$$

以下两个构造和一个引理几乎逐字照录自 [LX23，构造 4.12 和 4.13、引理 4。14]，不同之处在于我们考虑 LD 广义对，而非 NQC 广义对。为方便读者，我们在此给出完整陈述。

构造 8.4. 设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 是一个 dlt广义对，$W \subset \lfloor B \rfloor$ 是一个约化除子，π: $W^n \to W$是 W的正规化，D是 W^n的二重轨迹，D^n是 D的正规化，τ: $D^n \to D^n$是诱导的对合，并且 (τ_1, τ_2): $D^n \rightrightarrows W^n$是一个有限分层等价关系，其正规化映射由商态射 π: $W^n \to W = W^n/R$给出，其中 R是由D^n生成的有限等价关系。设 $L_W := K_{\mathfrak{A}}|_W$，

$$L := K_{\mathfrak{A}}|_{W^n} = K_{\mathfrak{A}_W^n}$$

其中 $\mathfrak{A}_W^n := \mathfrak{A}|_{W^n} := \left(W^n, B_{W^n}, \mathbf{M}^{W^n}\right)$，并假设 L是半丰沛的。令g^n: $W^n \to Y^n$和 h^n: $D^n \to T^n$ 为由 L 和 $L|_{D^n}$ 分别诱导的态射 $/U$，使得我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} D^n & \overset{\tau_1}{\underset{\tau_2}{\rightrightarrows}} & W^n \\ \downarrow{\scriptstyle h^n} & & \downarrow{\scriptstyle g^n} \\ T^n & \overset{\sigma_1}{\underset{\sigma_2}{\rightrightarrows}} & Y^n \end{array}$$

其中 (σ_1, σ_2): $T^n \rightrightarrows Y^n$由 (τ_1, τ_2): $D^n \rightrightarrows W^n$诱导。令

$$\mathfrak{A}_D^n := \mathfrak{A}_W^n|_{D^n} := \left(D^n, B_{D^n}, \mathbf{M}^{D^n}\right).$$

显然，$g^n: \mathfrak{A}_W^n \to Y^n$ 和 $h^n: \mathfrak{A}_D^n \to T^n$ 是 dlt 无亏格对数结构。分别令 $(Y^n, S_*(\mathfrak{A}_W^n))$ 和 $(T^n, S_*(\mathfrak{A}_D^n))$ 为它们诱导的分层概形。

构造 8.5. 记号与条件同构造 8.4。假设 $K_{\mathfrak{A}}$是 $\mathbb{Q}$-Cartier。令 m 为一个充分可整除的正整数，使得 mL_W 是 Cartier，$|mL/U|$ 定义 g^n，并且存在一个非常丰沛的$/U$ 除子 H 在 Y^n 上，使得 $(g^n)^*H = M := mL$。

令 $p_W\colon W_M^n \to W^n$, $p_Y\colon Y_H^n \to Y^n$ 分别为线丛 M和 H的全空间。令 $B_{W_M^n} := p_W^{-1}(B_{W^n})$, $\mathfrak{A}^n_{W_M} := (W_M^n,\ B_{W_M^n},\ p_W^*\mathbf{M}^{W^n})$, 以及 $g_M^n\colon \mathfrak{A}^n_{W_M} \to Y_H^n$为具有诱导分层 $(Y_H^n,\ S_*(\mathfrak{A}^n_{W_M}) := p_Y^{-1}S_*(\mathfrak{A}^n_W))$ 的除子对数终端保正对数结构。

设 $p_D\colon D_M^n \to D^n$ 和 $p_T\colon T_H^n \to T^n$ 是线丛 $M|_{D^n}$和 $H|_{T^n}$的全空间。设 $B_{D_M^n} := p_D^{-1}(B_{D^n})$, $\mathfrak{A}^n_{D_M} := (D_M^n,\ B_{D_M^n},\ p_D^*\mathbf{M}^{D^n})$, 并设 $h_M^n\colon \mathfrak{A}^n_{D_M} \to T_H^n$ 为具有诱导分层 $(T_H^n,\ S_*(\mathfrak{A}^n_{D_M}) := p_T^{-1}S_*(\mathfrak{A}^n_D))$ 的 dlt 无亏格对数结构。

于是，我们得到一个有限预关系 $(\sigma_{1H},\ \sigma_{2H})\colon T_H^n \rightrightarrows Y_H^n$，它由有限关系 $(\tau_{1M},\ \tau_{2M})\colon D_M^n \rightrightarrows W_M^n$ 诱导，其中 $\tau_{1M},\ \tau_{2M}\colon D_M^n \to W_M^n$ 分别是 $\tau_1,\ \tau_2$ 的提升。

引理 8.6 (参见 [HX13，引理 3。11])。 记号和条件同构造 *8.4*。那么

(1) $(\sigma_1, \sigma_2)\colon T^n \rightrightarrows Y^n$ 给出一个分层等价关系，并且 *(2)* $(Y^n, S_*(\mathfrak{A}^n_W))$ 和 $(T^n, S_*(\mathfrak{A}^n_D))$ 满足 *(HN)* 和 *(HSN)*。若我们采用构造 *8.5* 中的附加记号和条件，则 *(3)* $(\sigma_{1H}, \sigma_{2H})\colon T_H^n \rightrightarrows Y_H^n$给出一个分层等价关系，并且 *(4)* $(Y_H^n, S_*(\mathfrak{A}^n_{W_M}))$ 和 $(T_H^n, S_*(\mathfrak{A}^n_{D_M}))$ 满足 *(HN)* 和 *(HSN)*。

证明。(2)(4) 由 [CHLX23, 定理 13.2.5] 得出。我们证明 (1)(3)。对于 $\mathfrak{A}_D^n$ 的任意对数典范中心V（分别地，对于 $\mathfrak{A}^n_{D_M}$）， $\tau(V)$（分别地， $\tau_M(V)$）也是 D^n（分别地， D_M^n）上的对数典范中心。因此，由 $h^n\colon \mathfrak{A}_D^n \to T^n$（分别地， $h_M^n\colon \mathfrak{A}^n_{D_M} \to T_H^n$）诱导的 lc 分层，与由 $h^n \circ \tau\colon \mathfrak{A}_D^n \to T^n$（分别地， $h_M^n \circ \tau_M\colon \mathfrak{A}^n_{D_M} \to T_H^n$）诱导的 lc 分层相同。因此，我们只需验证 $\sigma^{-1}S_*(\mathfrak{A}^n_W)$（分别地， $\sigma_H^{-1}S_*(\mathfrak{A}^n_{W_M})$）与 $S_*(\mathfrak{A}^n_D)$（分别地，$S_*(\mathfrak{A}^n_{D_M})$）一致，其中 σ（分别地， σ_H）是典范态射 $T^n \to Y^n$（分别地， $T_H^n \to Y_H^n$）。但这直接由 [CHLX23, 引理 13.2.4] 得出。□

8.2. **粘合到 lc 分层。**

定理 8.7. 设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 *LD dlt* 广义对， U^0 是 U, W的非空子集: $= \lfloor B \rfloor$， 且 $\mathfrak{A}^0 := \mathfrak{A} \times_U U^0$。假设:

(1) $K_{\mathfrak{A}}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子。*(2)* $K_{\mathfrak{A}^0}$ 是半丰沛的$/U^0$。*(3)* $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心在 U 中的像都与 U^0相交。*(4)* 对于 W的任意不可约分支 S， $K_{\mathfrak{A}}|_S$ 都是半丰沛的$/U$ 。

则 $K_{\mathfrak{A}}|_W$ 是半丰沛的$/U$。

证明。 设 $X^{\cdot} = X \times_U U^0, W^0 := W \cap X^0, L_W := K_{\mathfrak{A}}|_W, L_{W^0} := L_W|_{W^0}$， 且 $L := L_W|_{W^n}$, 其中 W^n是 W的正规化。由假设 (3)， L是半丰沛的$/U$。令 $g^n\colon W^n \to Y^n$为由 L诱导的收缩$/U$，并令 $g^0\colon W^0 \to Z^0$为由 L_{W^0}诱导的收缩$/U$ 。那么存在一个充分可整除的正整数m，使得

- $mK_{\mathfrak{A}}$ 是 Cartier,
- $|mK_{\mathfrak{A}^0}|$ 是整体生成的$/U^0$,
- 存在一个非常丰沛的$/U$ 除子 H ，它定义在 Y^n 上，满足 $(g^n)^*H = M = mL$，并且
- 存在一个非常丰沛的$/U^0$除子 H_{Z^0}，它定义在 Z^0上，满足 $(g^0)^*H_{Z^0} = mL_{W^0}$。

根据构造，构造 8.4 和 8.5 的所有条件均成立。因此，下文将采用构造 8.4 和 8.5 中的所有记号。由引理 8.6，$(\sigma_1, \sigma_2)\colon T^n \rightrightarrows Y^n$和 $(\sigma_{1H}, \sigma_{2H})\colon T_H^n \rightrightarrows Y_H^n$是分层等价关系，而 $(Y^n, S_*(\mathfrak{A}^n_W))$、$(T^n, S_*(\mathfrak{A}^n_D))$、$(Y_H^n, S_*(\mathfrak{A}^n_{W_M}))$ 和 $(T_H^n, S_*(\mathfrak{A}^n_{D_M}))$ 满足 (HN) 和 (HSN)。

令 $p_{Z^0}:Z^0_{H_{Z_0}} \to Z^0$ 为线丛 H_{Z^0}的全空间。

令 $Y^{n,0} = Y^n \times_U U^0, T^{n,0} = T^n \times_U U^0, Y^{n,}{}_H{}^0 = Y^n_H \times_U U^0$，以及 $T^{n,}{}_H{}^0 = T^n_H \times_U U^0$。根据 [Kol13，引理 9.8]，几何商 $Z^0 = Y^{n,0}/T^{n,0}$ 和 $Z^0_{H_{Z^0}} = Y^{n,}{}_H{}^0/T^{n,}{}_H{}^0$ 存在。特别地，由 $(\sigma_1,\sigma_2)|_{T^{n,0}}$：$T^{n,0} \rightrightarrows Y^{n,0}$ 和 $(\sigma_{1H},\sigma_{2H})|_{T^{n,}{}_H{}^0}$：$T^{n,}{}_H{}^0 \rightrightarrows Y^{n,}{}_H{}^0$ 生成的等价关系是有限的。根据 [Kol13，引理 9.55],，由 (σ_1,σ_2)：$T^n \rightrightarrows Y^n$ 和 $(\sigma_{1H},\sigma_{2H})$：$T^n_H \rightrightarrows Y^n_H$ 生成的等价关系是有限的（参见 [HX13，命题 3.12]）。根据 [Kol13，定理 9.21],，几何商 Y^n/T^n 和 Y^n_H/T^n_H 存在。

记 $Z := Y^n/T^n$ 以及 $Z_{H_Z} := Y^n_H/T^n_H$。则存在诱导态射 $p_Z:Z_{H_Z} \to Z$、$g:W \to Z$ 和 $\pi_Z:Y^n \to Z$，使得

- $p_Z:Z_{H_Z} \to Z$ 是 Z上的线丛 H_Z 的全空间,
- $Z^0 = Z \times_U U^0$和 $Z^0_{H_{Z^0}} = Z_{H_Z} \times_U U^0$,
- $g^0 = g|_{W^0}$和 $g^*H_Z = mL_W$，并且
- $\pi_Z^*H_Z = H$。

由于 H是丰沛的$/U$，H_Z是丰沛的$/U$。因此，$L_W = K_{\mathfrak{A}}|_W$是半丰沛的$/U$。 □

8.3. **向高维粘合**。

引理 8.8.设 $X \to U$ 是正规拟射影簇之间的射影态射，$f:\ X \to Z$ 是一个收缩，D 是$/Z$ $\mathbb{R}$-*Cartier* 竖直 $\mathbb{R}$-除子，X是一个丰沛$/U$ $\mathbb{R}$-除子。那么，对于任意 $0 < t \ll 1$，$f^*A - tD$ 都是丰沛的$/U$。

证明。设 $V := f$(支集 D)。那么存在$A \sim_{\mathbb{R},\ U} A' + L$使得 A'是丰沛的$/U$，$L \geq 0$且 $V \subset$ 支集 L。因此，对于任意 $0 < t \ll 1$,

$$f^*A - tD \sim_{\mathbb{R},U} f^*A' + (f^*L - tD).$$

且 $f^*L - tD \geq 0$。由引理 2.18(1),

$$\dim Z = \kappa_\iota(X/U, f^*A) \geq \kappa_\iota(X/U, f^*A - tD) \geq \kappa_\iota(X/U, f^*A') = \dim Z$$

and

$$\dim Z = \kappa_\sigma(X/U, f^*A) \geq \kappa_\sigma(X/U, f^*A - tD) \geq \kappa_\sigma(X/U, f^*A') = \dim Z$$

and the lemma follows. □

本小节的目标是证明以下定理。

定理 8.9. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，且 $U^0 \subset U$ 是一个非空开子集。设 $\mathfrak{A}^0 :\ = \mathfrak{A} \times_U U^0$。假设:

(1) $K_{\mathfrak{A}}$ 是数值有效的$/U$。*(2)* $K_{\mathfrak{A}^0}$ 是半丰沛的$/U^0$。

(3) $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心在 U 中的像与 U^0相交。

则 $K_{\mathfrak{A}}$ 是半丰沛的$/U$。

为证明定理8.9，我们将其与下述定理一起归纳证明。显然，定理8.10 是定理8.9的较弱版本。

定理 8.10. 设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, \mathbf{M})/U$ 为一个 $\mathbb{Q}$-因子的*dlt*广义对，$U^0 \subset U$为一个非空开子集，且 $\mathfrak{A}^0 :\ = \mathfrak{A} \times_U U^0$。假设:

(*1*) $K_{\mathfrak{A}}$ 是数值有效$/U$ $\mathbb{Q}$-除子。(*2*) $K_{\mathfrak{A}^0}$ 是半丰沛$/U^0$。

(3) $\mathfrak{A}$ 在 U 中的任意对数典范中心的像与 U^0相交。(4) 对 $\lfloor B \rfloor$的任意不可约分支 S， $K_{\mathfrak{A}}|_S$ 是半丰沛/U 。(5) 要么 $K_{\mathfrak{A}}$ 是大/U，要么在 X 上存在一个 $\mathbb{R}$-除子 $P \geq 0$，使得支集 $P \subset$支集$\lfloor B \rfloor$，并且对任意 $0 < t \ll 1$， $K_{\mathfrak{A}} - tP$ 是半丰沛/U 。

那么， $K_X + B + \mathbf{M}_X$ 是半丰沛的/U。

命题 8.11。设 $d \geq 2$ 为一个整数。那么，定理 *8.10* 在维数 d 和定理 *8.9* 在维数 $\leq d-1$ 推出定理 *8.9* 在维数 d。

证明。由引理 3.3、3.8和3.9，可假设 $K_{\mathfrak{A}}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子。由引理3.4，必要时将 $\mathfrak{A}$ 替换为一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正后，可假设 $\mathfrak{A}$ 是$\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端的。记 $\mathfrak{A} = (X, B, \mathbf{M})$。分两种情形。

情形 1. 存在一个不可约分支 S 属于 $\lfloor B \rfloor$，使得对于任意 $\epsilon > 0$， $K_{\mathfrak{A}} - \epsilon S$ 都不是伪有效的/U 。由引理 5.4 以及 [情形+25a，定理 2.1.5]，，我们可以选取 $0 < \epsilon \ll 1$，并运行一个带丰沛除子缩放的$(K_{\mathfrak{A}} - \epsilon S)$-极小模型纲领/$U$，其终止于一个莫里纤维空间/$U$ $f : X' \to Z$，使得诱导的双有理~映射/U $\phi : X \dashrightarrow X'$ 是 $K_{\mathfrak{A}}$-平凡的。令 $\mathfrak{A}' := \phi_* \mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}'^0 := \mathfrak{A}' \times_U U^0$， $S := \phi_* S$， S' 为~ S的正规化，并令 $S'_0 := S' \times_U U^0$。令 $\mathfrak{A}_{S'} := \mathfrak{A}'|_{S'}$ 且 $\mathfrak{A}^0_{S'} := \mathfrak{A}_{S'} \times_U U^0$。

由引理 3.11， $\mathfrak{A}'$ 是对数典范的。由引理3.10， $\mathfrak{A}_{S'}$ 是对数典范的。由于 ϕ 是 $K_{\mathfrak{A}}$-平凡的， $K_{\mathfrak{A}'}$ 是数值有效的/U且 $K_{\mathfrak{A}'^0}$是半丰沛的/U^0。因此 $K_{\mathfrak{A}_{S'}}$是数值有效的且 $K_{\mathfrak{A}^0_{S'}}$是半丰沛的/U^0。由定理 8.9 在维数 $d-1$下， $K_{\mathfrak{A}_{S'}}$ 是半丰沛的/U。

由于 f是 $K_{\mathfrak{A}'}$-平凡的，并且是一个 $\left(K_{\mathfrak{A}'} - \epsilon \widetilde{S}\right)$-极小模型纲领的一步，$K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R},\, Z} 0$ 且 $\widetilde{S}$是水平的/Z。因此$K_{\mathfrak{A}_{S'}} \sim_{\mathbb{R},\, Z} 0$。设 $f_S : S' \to Z$ 为相应的射影态射。则在 Z 上存在一个 $\mathbb{R}$-除子 L，使得

$$K_{\mathfrak{A}_{S'}} \sim_{\mathbb{R}} f_S^* L,$$

因此 $K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R}} f^* L$。由于 $K_{\mathfrak{A}_{S'}}$是半丰沛的/U， L是半丰沛的/U，从而 $K_{\mathfrak{A}'}$是半丰沛的/U，进而 $K_{\mathfrak{A}}$是半丰沛的/U。

Case 2. $K_{\mathfrak{A}} - t\lfloor B \rfloor$ 是伪有效的/U，对某个 $t > 0$ 成立。令 $B_0 := B|_{X^0}$。我们令

$$\psi_0 : X^0 \dashrightarrow Z^0$$

为丰模型/U^0的 $K_{\mathfrak{A}^0}$。由于 $K_{\mathfrak{A}^0} - t\lfloor B_0 \rfloor$是伪有效的/$U^0$， $\lfloor B_0 \rfloor$ 的任一不可约分支都是竖直的/Z^0。对于任意 $0 < t \ll 1$，由引理 8.8， $K_{\mathfrak{A}^0} - t\lfloor B_0 \rfloor$ 是丰沛的/U^0，因此 $K_{\mathfrak{A}} - t\lfloor B \rfloor$是丰沛的/$U$。

令 $\mathfrak{A}(t) := (\mathfrak{A}, -t\lfloor B \rfloor)$，对任意 $t \in \mathbb{R}$ 成立。对于任意 $0 < t \ll 1$，由于 $\mathfrak{A}(t)$ 是 KLT 且 $K_{\mathfrak{A}(t)}$ 丰沛/U，由引理 7.5， $\mathfrak{A}(t)/U$ 有一个 $\mathbb{Q}$-阶乘良好极小模型。由定理 4.17 和引理 5.4，我们可以固定 $0 < t_1 \ll 1$，并运行一个带有丰沛除子 ϕ 缩放的 $K_{\mathfrak{A}(t_1)}$-极小模型纲领/U： $X \dashrightarrow X'$，该过程终止于一个良好极小模型 $\mathfrak{A}'(t_1)/U$，它是 $\mathfrak{A}(t_1)/U$ 的良好极小模型。令 X' 为 $\mathfrak{A}'(t_1)$ 的环境簇，并令 $\phi : X \dashrightarrow X'$ 为相应的双有理映射。对任意 $t \in \mathbb{R}$，令 $\mathfrak{A}'(t) := \phi_* \mathfrak{A}(t)$。那么对于任意 $t \in (0, t_1]$， ϕ 也是一个 $K_{\mathfrak{A}(t)}$-极小模型纲领/U 的步骤序列，且 $K_{\mathfrak{A}'(t)}$ 是数值有效的/U，因此 $\mathfrak{A}'(t)/U$ 是 $\mathfrak{A}(t)$ /U 的极小模型。由引理 4.4， $\mathfrak{A}'(t)/U$ 是 $\mathfrak{A}(t)/U$ 的良好极小模型，对任意 $t \in (0, t_1]$ 成立。

令 $h : Y \to X'$ 是 $\mathfrak{A}'$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正， $\mathfrak{A}_Y := h^* \mathfrak{A}'$， $\mathfrak{A}'^0 := \mathfrak{A}' \times_U U^0$，且 $\mathfrak{A}^0_Y := \mathfrak{A}_Y \times_U U^0$。由于 ϕ 是 $K_{\mathfrak{A}}$-平凡的，且 $K_{\mathfrak{A}}$ 是一个数值有效的 /U $\mathbb{Q}$-除子，因此 $K_{\mathfrak{A}'}$ 是数值有效的 /$U\mathbb{Q}$-除子，而 $K_{\mathfrak{A}'^0}$ 是半丰沛的 /U^0，于是

- $K_{\mathfrak{A}_Y}$ 是一个数值有效的 /U $\mathbb{Q}$-除子，并且
- $K_{\mathfrak{A}^0_Y}$ 是半丰沛的/U^0。

此外，由于 $\mathfrak{A}_Y$ 的任何对数典范位都是 $\mathfrak{A}$ 的对数典范位，

- 任意对数典范中心在 $\mathfrak{A}_Y$ 于 U 中的像都与 U^0相交。

写出 $\mathfrak{A}_Y = (Y, B_Y, \mathbf{M})$。对于 S_Y的任意不可约分支 $\lfloor B_Y \rfloor$， $K_{\mathfrak{A}_Y|_{S_Y}} = K_{\mathfrak{A}_Y}|_{S_Y}$是数值有效/$U$ $\mathbb{Q}$-除子，因此 $\mathfrak{A}|_{S_Y}$是对数典范的， $K_{\mathfrak{A}|_{S_Y}\times_U U^0} = K_{\mathfrak{A}^0_Y}|_{S_Y\times_U U^0}$是半丰沛的/$U^0$；又由于$\mathfrak{A}|_{S_Y}$ 的任意对数典范中心都是 $\mathfrak{A}_Y$的对数典范中心，$\mathfrak{A}|_{S_Y}$ 在 U中的任意对数典范中心的像都与 U^0相交。由定理8.9 在维数 $d-1$,

- $K_{\mathfrak{A}_Y|_{S_Y}}$是半丰沛的，$/U$ 对于 $\lfloor B_Y \rfloor$的任意不可约分支 S_Y均成立。

令 $\mathfrak{A}_Y(t) := h^*\mathfrak{A}(t)$，其中 $t \in \mathbb{R}$ 任意；并令 $P := h^*\lfloor B' \rfloor$，其中 B' 是 B 在X'上的像。由于对于任意 $0 < t \ll 1$， $\mathfrak{A}(t)$都是KLT的，因此 $\mathrm{Supp}\, P = \mathrm{Supp}\lfloor B_Y \rfloor$。于是

- $K_{\mathfrak{A}_Y\ (t)} - tP$对于任意 $0 < t \ll 1$ 都是半丰沛的，其中 $\mathrm{Supp}\, P = \mathrm{Supp}\lfloor B_Y \rfloor$。

根据8.10 维数 d中的定理， $K_{\mathfrak{A}_Y}$ 是半丰沛的/U，因此 $K_{\mathfrak{A}'}$ 是半丰沛的/U，从而$K_{\mathfrak{A}}$ 是半丰沛的/U。定理得证。□

命题 8.12。设 $d \geq 2$ 为整数。那么，*8.9* 维数 $\leq d-1$中的定理蕴含*8.10*维数 d中的定理。

证明。当 $K_{\mathfrak{A}}$是大/U时，根据（2-4）和定理8.7， $K_{\mathfrak{A}}|_{\lfloor B \rfloor}$是半丰沛的/$U$。根据引理2.17， $K_{\mathfrak{A}}$ 是半丰沛的/U。因此我们可以假设存在一个 $\mathbb{R}$-除子 $P \geq 0$ 在X 上，使得 $\mathrm{Supp}\, P \subset \mathrm{Supp}\lfloor B \rfloor$，且 $K_{\mathfrak{A}} - tP$对于任意 $0 < t \ll 1$都是半丰沛的，并且$K_{\mathfrak{A}}$ 不是大/U。

对任意实数 t，记 $\mathfrak{A}(t) := (\mathfrak{A}, -tP)$。固定 $0 < t_0 \ll 1$，取一般的 $t_1 \in (0, t_0)$，并令 $g : X \to Y$ 为 $K_{\mathfrak{A}(t_1)}$ 的丰模型/U。由于 t_1 一般，我们有$P \sim_{\mathbb{R},\ Y} 0$，且 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},\ Y} 0$。由于 $K_{\mathfrak{A}}$ 不大/U， $K_{\mathfrak{A}(t_1)}$不大/U，因此 $\dim\ Y < \dim\ X$。若 $\dim\ Y = 0$，则 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R}} 0$，结论得证。因此我们不妨假设 $\dim Y > 0$。

由于 $K_{\mathfrak{A}}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子，由 [CHLX23、引理11.4.2、定理 11.4。4], 存在一个对数典范广义对 $\mathfrak{A}_Y/U$，由 g 的典范模型公式诱导，即 $\mathfrak{A} \to Y$。

$$K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{Q}} g^* K_{\mathfrak{A}_Y}.$$

令 $h\colon Z \to Y$ 为 $\mathfrak{A}_Y, \mathfrak{A}_Z := h^*\mathfrak{A}_Y$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正，并令 $\mathfrak{A}^0_Z := \mathfrak{A}_Z \times_U U^0$。由于 $K_{\mathfrak{A}}$ 是一个数值有效/U $\mathbb{Q}$-除子， $K_{\mathfrak{A}_Y}$ 是一个数值有效/U $\mathbb{Q}$-除子。因此

- $K_{\mathfrak{A}_Z}$ is a nef/U $\mathbb{Q}$-divisor.

Since $K_{\mathfrak{A}^0}$是半丰沛的/U^0， $K_{\mathfrak{A}^0_Y}$是半丰沛的/U^0，其中 $\mathfrak{A}^0_Y := \mathfrak{A}_Y \times_U U^0$，因此

- $K_{\mathfrak{A}^0_Z}$ is semi-ample/U^0.

对于 V 的任意对数典范中心 $\mathfrak{A}_Z$， $h(V)$ 是 $\mathfrak{A}_Y$ 的一个对数典范中心，因此，由 W 的一个对数典范中心 $\mathfrak{A}$ 在 Y 下的像，根据 [CHLX23，定理11.4.4(4)]。因此， V 在 U 中的像是 W 在 U 中的像，它与 U^0 相交。因此，

- $\mathfrak{A}_Z$ 的任意对数典范中心在 U 中的像都与 U^0相交。

根据维数为 8.9的定理 $\leq d-1$， $K_{\mathfrak{A}_Z}$是半丰沛的/U。因此， $K_{\mathfrak{A}_Y}$是半丰沛的/U，所以 $K_{\mathfrak{A}}$ 是半丰沛的/U。□

定理*8.9*和*8.10*的证明。显然，定理8.9 在一维时成立。由命题8.11 和8.12，□

9. Proof of Theorem 1.4

本节有两个目标：证明定理1.4，以及证明定理1.3在（X，B，$\mathbf{M}$）为对数典范时的情形。事实上，我们将证明以下定理，它可视为定理1.3的对数典范情形的更一般版本（对应于 $U^0 = U$的情形），也可视为 [Has19，定理 41]的类比。

定理 9.1。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个 *LD* 广义对，其环境簇为 X，$U^0 \subset U$ 是一个非空开子集，$A \geq 0$ 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-*Cartier* $\mathbb{R}$-除子，$\mathfrak{A}^0 := \mathfrak{A} \times_U U^0$，并且 $A^0 := A|_{X^0}$。假设

(1) $(\mathfrak{A}^0, A^0)$ 是对数典范的，*(2)* $K_{\mathfrak{A}^0} + A^0 \sim_{\mathbb{R},\, U^0} 0$，
(3) $K_{\mathfrak{A}}$ 是伪有效的/U，并且 *(4)* $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范中心在 U 中的像都与 U^0 相交。

那么 $\mathfrak{A}/U$ 有一个良好对数极小模型。

定理 1.4 和9.1 的证明采用了 [Has19]的思路。证明分为两部分：首先，我们需要构造 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正，使其满足额外性质，从而基本上将问题归结为一个特殊终止问题。第二部分是构造一个模型，使其成为若干广义对的良好极小模型，运行带缩放的特殊极小模型纲领，然后利用特殊终止性推出结论。

9.1. 特殊 dlt 修正的构造。

在本小节中，我们构造$\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正，并使其满足一些额外性质。这类$\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正的构造思路源于 [Has18]。

引理 9.2. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对。那么存在一个适当对数光滑模型 $h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$，其满足 $\mathfrak{A}' = (X', B', \mathbf{M})$，使得 $B' = B^h + B^v$ 满足以下条件。

(1) $B^h \geq 0$ 和 B^v 是约化的。*(2)* B^v 是竖直的/U。*(3)* 对任意实数 $t > 0$，$(\mathfrak{A}', -tB^v)$ 的任意对数典范中心都支配 U。

证明。取 $g\colon \mathfrak{A}'' \to \mathfrak{A}$ 为一个适当对数光滑模型，并记 $\mathfrak{A}'' := (X'', B'', \mathbf{M})$。根据[Has18，引理 2。10]，，存在一个适当对数光滑模型 $f\colon (X', B' = B^h + B^v) \to (X'', B'')$，使得

- $B^h \geq 0$ 且 B^v 是约化的，
- B^v 是竖直的/U，并且
- 对于任意实数 $t > 0$，$(X', B' - tB^v)$的任意对数典范中心都支配 U。

设 $h := g \circ f$，并设 $\mathfrak{A}' := (X', B', \mathbf{M})$。根据定义，$h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的适当对数光滑模型。由于$\mathbf{M}$ 下降到 X'，对于任意实数 $t > 0$，$(\mathfrak{A}, -tB^v)$的任意对数典范中心都是$(X', B' - tB^v)$的对数典范中心，因此支配 U。于是，$h\colon \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ 满足我们的要求。□

引理 9.3。设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个环境簇为 X的对数典范广义对。那么存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正 $h\colon X' \to X$，使其为 $\mathfrak{A}$ 的修正，并且 $\mathfrak{A}' := h^*\mathfrak{A} := (X', B', \mathbf{M})$，使得 $B' = B^h + B^v$ 满足以下条件。

(1) $B^h \geq 0$ 和 B^v 是约化的。*(2)* B^v 是竖直的/U。*(3)* 对于任意实数 $t > 0$，$(\mathfrak{A}', -tB^v)$ 的任意对数典范中心都支配 U。

证明。由引理 9.2，存在一个适当对数光滑模型 $g:\ \mathfrak{A}_W \to \mathfrak{A}$，其中 $\mathfrak{A}_W =(W,\ B_W,$ M），使得 $B_W = B_W^h + B_W^v$满足以下条件：

- $B_W^h \geq 0$ 和 B_W^v 是约化的。
- B_W^v 是竖直的/U。
- 对于任意实数 $t \in (0,1],$，$(\mathfrak{A}_W, -tB_W^v)$ 的任意对数典范中心都支配 U。

由引理 4.13，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{A}_W}$-极小模型纲领/X，并以一个丰沛除子的缩放为参数；该纲领终止于 $\mathfrak{A}_W/X$ 的一个良好极小模型 $\mathfrak{A}'/X$，使得 $K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R},X} 0$，且诱导双有理态射为 $h: X' \to X$，从而 h 是 $\mathfrak{A}$ 和$\mathfrak{A}' = h^*\mathfrak{A}$ 的一个 $\mathbb{Q}$-因子ial qdlt 修正。由于 $\mathfrak{A}_W$ 是除子对数终端的，$\mathfrak{A}'$ 也是除子对数终端的，因此 h 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $\mathbb{Q}$- 因子 ial 除子对数终端修正。我们令 B', B^h 和 B^v 分别为 B_W, B_W^h 和 B_W^v 在 X' 上的像。

(1) 和 (2) 立即成立。对于任意 $0 < s \ll 1$，诱导双有理映射 $\phi: W \dashrightarrow X'$ 也是一个 ($K_{\mathfrak{A}_W} - sB_W^v$)-极小模型纲领/$X$的步骤序列。由于 $\mathfrak{A}'$ 是对数典范的，对于任意$t > 0$，$(\mathfrak{A}', -tB^v)$ 的任意对数典范位都是 $0 < s \ll 1$ 时 $(\mathfrak{A}', -stB^v)$ 的对数典范位，因此也是 $(\mathfrak{A}_W, -stB_W^v)$ 的对数典范位，进而支配 U。这意味着 (3) 成立，因此 h 和 $\mathfrak{A}'$ 满足我们的要求。□

引理 9.4. 设 $\mathfrak{A}/U = (X, B = B^h + B^v, \mathbf{M})/U$是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 *dlt*广义对，且 $\pi:\ X \to Z$ 是一个收缩/U。假设：

- $B^h \geq 0$ 且 B^v 是约化的。
- B^v 是竖直的/Z。
- 对于任意实数 $t > 0$，$(\mathfrak{A}, -tB^v)$ 的任意对数典范中心都支配 Z。
- $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},Z} E \geq 0$。
- E 是竖直的/Z，且 支集 $B^v \subset$ 支集 E。

那么 存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正 $h:\ Y \to X$，满足以下条件 .

(1) $\mathfrak{A}_Y :\ = h^*\mathfrak{A} :\ = (Y, B_Y, \mathbf{M})$。*(2)* $B_Y = B_Y^h + B_Y^v$且 $K_{\mathfrak{A}_Y} \sim_{\mathbb{R},Z} E_Y^h + E_Y^v$。*(3)* $0 \leq E_Y^h, E_Y^v$是竖直的/Z，支集 $E_Y^v =$支集 B_Y^v，且 B_Y^v 是约化的。*(4)* 对任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}_Y, tE_Y^h)$ 都是除子对数终端的。*(5)* 对任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}_Y, -tB_Y^v)$ 的任意对数典范中心都支配 Z。

证明。令 $g:\ \mathfrak{A}_W \to \mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的一个适当对数环面模型，并记 $\mathfrak{A}' :=(W, B_W, \mathbf{M})$。令

$$B_W^v := \lfloor B_W \wedge \operatorname{Supp}(g^*B^v) \rfloor \quad \text{and} \quad B_W^h := B_W - B_W^v.$$

那么 B_W^v是约化的，我们可以写成 $g^*E = E_W^h + E_W^v$，使得 $E_W^h, E_W^v \geq 0$、支集 $E_W^v =$支集 B_W^v，且 $E_W^v \wedge E_W^h = 0$。由于 E是竖直的/Z，E_W^h和 E_W^v是竖直的/Z。

对于 $\lfloor B_W \rfloor$的任何一个同时也是 g^*E 的不可约分支的不可约分支 D，我们有

$$g(D) \subset \operatorname{Supp} g(E) \subset \operatorname{Supp} g(g^*E)) = \operatorname{Supp} E,$$

因此 D 是竖直的 /Z。由于 D 是 $\lfloor B_W \rfloor$的一个不可约分支，D 是 $\mathfrak{A}_W$ 的对数典范位，所以 D 是 $\mathfrak{A}$ 的对数典范位。由于对于任意 $t > 0$，$(\mathfrak{A},\ -tB^v)$ 的任何对数典范中心都支配 Z，因此 $g(D) \subset$ 支集 B^v，所以 $D \subset$ 支集(g^*B^v)。于是 D 是 Supp B_W^v 的一个不可约分支，因此 D 不是 Supp $B_W^h =$Supp E_W^h 的一个不可约分支。因此，D 不是 E_W^h 的一个不可约分支。因此，$E_W^h \wedge \lfloor B_W \rfloor = 0$。

由于 B_W的系数属于 ≤ 1 且 $B_W^v \subset \lfloor B_W \rfloor$，$B_W^v \wedge B_W^h = 0$，因此 $E_W^v \wedge E_W^h = 0$。由引理 4.13，我们可以运行带有丰沛除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}_W}$-极小模型纲领/X

其终止于 $\mathfrak{A}_Y/X$ 的一个良好极小模型，其中 $\mathfrak{A}_W/X$ 满足 $K_{\mathfrak{A}_Y} \sim_{\mathbb{R},\, X} 0$，并诱导出双有理态射 $h\colon Y \to X$，使得 h 是$\mathfrak{A}$ 的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt 修正，且 $\mathfrak{A}_Y = h^*\mathfrak{A}$。由于 $\mathfrak{A}_W$ 是除子对数终端， $\mathfrak{A}_Y$ 也是除子对数终端，因此 h 是 $\mathfrak{A}$的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正。

由于 $E^h \wedge \lfloor B_W \rfloor = 0$，对于任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}_W,\ tE^h_W)$ 是除子对数终端的，且诱导双有理映射 $\phi\colon W \dashrightarrow Y$ 是一个 $(K_{\mathfrak{A}_W} + tE^h_W)$- 极小模型纲领 $/X$ 的步骤序列，也是一个 $(K_{\mathfrak{A}_W} - tB^v_W)$- 极小模型纲领$/X$ 的步骤序列。令 $B^h_Y,\ B^v_Y,\ E^h_Y,\ E^v_Y$ 是 $B^h_W,\ B^v_W,\ E^h_W,\ E^v_W$ 在 Y 上的像。那么 (1-4) 成立，而 (5) 也成立，因为 $(\mathfrak{A}_Y,\ -tB^v_Y)$ 的任意对数典范位都是 $(\mathfrak{A}_W,\ -tB^v_W)$ 的对数典范位。□

9.2. **特殊情形的证明**。 本小节中，我们在假设低维情形下这两个定理成立的前提下，证明定理1.4 和 9.1的一个特殊情形。定理 1.4 和 9.1 的一般情形将归结为这一特殊情形。此特殊情形的证明与 [Has19，定理 1.2 的证明中步骤 6 之后的部分，以及定理 4 的证明非常相似。1]后来 [Cas+25a、Cas+25b]中也采用了一些相关思路。

命题 9.5。 假设定理 *1.4* 和 *9.1* 在维数 $\leq d-1$中成立。

设 $\mathfrak{A}/U := (X, B、\mathbf{M})/U$ 是一个维数为 d 的 ***LD*** 广义对，且 $U^0 \subset U$ 是一个非空开子集。设 $\mathfrak{A}^0 := \mathfrak{A} \times_U U^0$。假设

(1) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端的；***(2)*** $B = B^h + B^v$ 和 $K_{\mathfrak{A}} \sim_{\mathbb{R},U} E^h + E^v$。***(3)*** E^h, $E^v \geq 0$，支集 $E^v =$ 支集 B^v，且 B^v 是约化的。***(4)*** 对任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}, tE^h)$ 都是除子对数终端的。***(5)*** 对任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}, -tE^v)/U$ 有一个良好极小模型。***(6)*** 对 $\mathfrak{A}$ 的任意对数典范位 D， D 在 U 上的像与 U^0相交。***(7)*** 设 $X^0 := X \times_U U^0$，且设 $A \geq 0$是 X上的一个 $\mathbb{R}$-***Cartier*** $\mathbb{R}$除子，并满足 $A^0 := A|_{X^0}$，使得以下两种情形之一成立：（情形 *1*） $\mathfrak{A}^0/U^0$ 是自身的一个良好极小模型。（情形 *2*）$(\mathfrak{A}^0, A^0)$ 是对数典范的，且 $K_{\mathfrak{A}^0} + A^0 \sim_{\mathbb{R},U^0} 0$。那么 $\mathfrak{A}/U$ 有一个良好极小模型。

证明。 在开始证明命题之前，我们先简要说明证明中的关键思路。关键思路是利用这样一个事实：对于任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}, -tE^v)/U$ 都是良好极小模型。如果我们能找到 $t_1 < t_2$，使得 $(\mathfrak{A}, -t_1E^v)/U$和 $(\mathfrak{A}, -t_2E^v)/U$分别都是自身的良好极小模型，那么我们可以对 $-E^v$运行带缩放的 $K_{\mathfrak{A}}$-极小模型纲领$/U$，而极小模型纲领将通过特殊终止和归纳假设终止。对于一般情形，我们需要运行极小模型纲领来获得模型，使得 $(\mathfrak{A}, -t_1E^v)/U$和 $(\mathfrak{A}, -t_2E^v)/U$的双有理变换分别都是自身的良好极小模型，并运用类似但更精细的论证。

步骤1。 在这一步中，我们引入一些基本记号，并固定实数 $r > 0$。对于任意 $t \in \mathbb{R}$，令$\mathfrak{A}(t) := (\mathfrak{A}, -tE^v)$，以及 $\mathfrak{C}(t) := (\mathfrak{A}, tE^h)$。于是我们有 $K_{\mathfrak{A}(0)} = K_{\mathfrak{C}(0)} = K_{\mathfrak{A}}$并且

$$K_{\mathfrak{A}(t)} \sim_{\mathbb{R},U} (1-t)K_{\mathfrak{C}\left(\frac{t}{1-t}\right)}$$

对任意 $t \in [0,1)$。根据条件 (2)， $K_{\mathfrak{A}(t)}$ 是伪有效的$/U$ 对任意 $0 \leq t \ll 1$。令$N_t := N_\sigma(X/U,\ K_{\mathfrak{A}(t)})$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$。根据条件 (7) 和 [Cas+25a，引理 3.23]，对任意 $0 < t \ll 1$，支集 N_t 是一个固定除子 F，且支集 $N_0 \subset F$。

由于 $\mathfrak{A}(t)$ 与 $\mathfrak{C}(t)$ 对任意 $0 \leq t \ll 1$ 均为除子对数终端，若我们处于 **情形 1**，则由引理 5.4，存在实数 r 使得 $0 < r \ll 1$ 并满足如下条件：对于

任意 $0 < t \leq r$ 以及 $K_{\mathfrak{A}(t)}$-极小模型纲领$/U$ 或 $K_{\mathfrak{C}(t)}$-极小模型纲领$/U$ ξ的任意步骤序列， $\xi|_{X^0}$ 是 $K_{\mathfrak{A}^0}$-平凡的。若我们处于**情形 2**，则令 $r := 1$。

步骤 2. 在此步骤中，我们固定一个实数 $0 < t \ll r$，并构造 $X \dashrightarrow X'$ 的一个双有理模型 X'，它与双有理映射 $\phi\colon X \dashrightarrow X'$ 相关联，使得 $\phi_*\mathfrak{A}(t)$ 是半丰沛的$/U$。

固定 $0 < t \ll r$。由于 $\mathfrak{A}(t)/U$ 有一个良好极小模型，且是 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端的，根据定理 4.17，我们可以运行一个带丰沛除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}(t)}$-极小模型纲领$/U$，并终止于 $\mathfrak{A}(t)/U$ 的一个良好极小模型 $\mathfrak{A}'(t)/U$。令 X' 为 $\mathfrak{A}'(t)$ 的环境簇， $\phi\colon X \dashrightarrow X'$ 为诱导双有理映射，$\mathfrak{A}' := \phi_*\mathfrak{A}$， $\mathfrak{A}'(s) := \phi_*\mathfrak{A}(s)$，并且对任意 $s \in \mathbb{R}$，$\mathfrak{C}'(s) := \phi_*\mathfrak{C}(s)$。那么被 ϕ 收缩的约化除子恰为 F。根据[Cas+25a，引理 3.21]，对任意 $0 \leq s \ll 1$， $K_{\mathfrak{A}'(s)}$ 都是可动的$/U$。由于 ϕ 也是一个 $K_{\mathfrak{C}(\frac{t}{1-t})}$-极小模型纲领$/U$的步骤序列，因此 $\mathfrak{C}'\left(\frac{t}{1-t}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端的。于是， $\mathfrak{C}'(0) = \mathfrak{A}'(0) = \mathfrak{A}'$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端的。由于 $0 < t \ll r$， $\mathfrak{C}(\frac{t}{1-t})$ 的任何对数典范位都是 $\mathfrak{A}$ 的对数典范位；若处于情形 1，则根据极端射线长度， $\phi|_{X^0}$ 是 $K_{\mathfrak{A}^0}$-平凡的。

步骤 3。 在此步骤中，我们固定一个实数 $0 < t - \mu \ll \mu$，并构造与双有理映射 ψ 相关的 X 的双有理模型X''： $X' \dashrightarrow X''$，使得 $\psi_*\mathfrak{A}'(\mu)/U$ 是半丰沛的。

固定 $\mu < t$ 使得 $0 < t - \mu \ll \mu$。则 ϕ 也是一个 $K_{\mathfrak{A}(\mu)}$-MMP$/U$的步骤序列。由于 $\mathfrak{A}(\mu)/U$ 具有良好极小模型，根据引理 4.18， $\mathfrak{A}'(\mu)/U$ 具有良好极小模型。因此，我们可以运行一个带有充足除子的缩放的 $K_{\mathfrak{A}'(\mu)}$-MMP$/U$，其终止于 $\mathfrak{A}'(\mu)/U$的良好极小模型 $\mathfrak{A}''(\mu)/U$。令 X'' 为 $\mathfrak{A}''(\mu)$ 的环境簇，并令 $\psi : X' \dashrightarrow X''$ 为诱导双有理映射。由于

$$\frac{t}{t-\mu}K_{\mathfrak{A}'(\mu)} = K_{\mathfrak{A}'(0)} + \frac{\mu}{t-\mu}K_{\mathfrak{A}'(t)},$$

ψ也是一个 $\left(K_{\mathfrak{A}'(0)} + \frac{\mu}{t-\mu}K_{\mathfrak{A}'(t)}\right)$-极小模型纲领$/U$的步骤序列。由于$K_{\mathfrak{A}'(t)}$是半丰沛$/U$且 $0 < t - \mu \ll \mu$，由引理 5.4， ψ是$K_{\mathfrak{A}'(t)}$-平凡的。令 $\mathfrak{A}'' := \psi_*\mathfrak{A}'$， $\mathfrak{A}''(s) := \psi_*\mathfrak{A}'(s)$，且对任意 $s \in \mathbb{R}$， $\mathfrak{C}''(s) := \psi_*\mathfrak{C}'(s)$。由于$K_{\mathfrak{A}'(\mu)}$是可动$/U$， ψ 是小的。由于$\mathfrak{C}'(\frac{t}{1-t})$是 $\mathbb{Q}$-因子除子对数终端， $\mathfrak{C}'(\frac{\mu}{1-\mu})$与 $\mu < t$一样是 $\mathbb{Q}$-因子除子对数终端。由于 ψ也是一个$K_{\mathfrak{C}'(\frac{\mu}{1-\mu})}$-极小模型纲领$/U$的步骤序列， $\mathfrak{C}''(\frac{\mu}{1-\mu})$是 $\mathbb{Q}$-因子除子对数终端。特别地， $\mathfrak{C}''(0) = \mathfrak{A}''(0) = \mathfrak{A}''$是 $\mathbb{Q}$-因子除子对数终端。由于 ψ是$K_{\mathfrak{C}'(\frac{t}{1-t})}$-平凡的， $\mathfrak{C}''(\frac{t}{1-t})$是对数典范的。由于 $\mu < t \ll r$，由 r的构造，若我们处于情形 1，则$\psi|_{X'^0}$ 是$K_{\mathfrak{A}'^0}$-平凡的，其中 $X'^0 := X' \times_U U^0$且 $\mathfrak{A}'^0 := \mathfrak{A}' \times_U U^0$。

记 $\mathfrak{A}'' = (X'', B'', \mathbf{M})$，并令 B''^h， B''^v， E''^h， E''^v， A'' 分别为 B^h， B^v， E^h， E^v在 X'' 上的像。

步骤 4。 在这一步中，我们构造一个带有 $K_{\mathfrak{A}''(t)}$缩放的 $K_{\mathfrak{A}''}$-极小模型纲领$/U$。

对任意 $s \in (0, t]$，令 $\mathfrak{A}_{Y_s}(s)/U$ 为与双有理映射 $\alpha_s\colon X \dashrightarrow Y_s$ 相关联的 $\mathfrak{A}(s)/U$ 的良好极小模型。则被 α_s 收缩的除子恰为 F。因此，相关联的双有理映射 β_s： $X'' \dashrightarrow Y_s$ 是小的。因此，对于任意 $s \in (0, t]$， $\mathfrak{A}_{Y_s}(s)/U$ 都是 $\mathfrak{A}''(s)/U$ 的良好极小模型。特别地，对于任意 $s \in (0, t]$， $\mathfrak{A}''(s)/U$ 都有良好极小模型，因此对于任意 $s \in \left(0, \frac{t}{1-t}\right]$， $\mathfrak{C}''(s)/U$ 都有良好极小模型。由于 $K_{\mathfrak{C}''(\frac{t}{1-t})}$ 和 $K_{\mathfrak{C}''(\frac{\mu}{1-\mu})}$ 是半丰沛的 $/U$，由引理 5.5，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{C}''(0)}$-极小模型纲领 $/U$，以 $K_{\mathfrak{C}''(\frac{t}{1-t})}$ 为缩放，缩放数为 λ_i

$$\phi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}, \quad X_1 := X''.$$

使得该极小模型纲领要么终止，要么 $\lim_{i\to+\infty}\lambda_i=0$。对于任意 i，我们令 $\mathfrak{A}_i$，$\mathfrak{A}_i(s)$、$\mathfrak{C}_i(s)$ 分别为 $\mathfrak{A}''$，$\mathfrak{A}''(s)$ $\mathfrak{C}''(s)$ 在 X_i 上的像；对于任意 $s\in\mathbb{R}$，令 B_i^h，B_i^v，E_i^h，E_i^v，A_i 分别为 B''^h，B''^v，E''^h，E''^v，A'' 在 X_i 上的像，并令 $X_i^0:=X_i\times_U U^0$，以及 $A_i^0:=A_i|_{X^0}$。

由于 $\mathfrak{A}$ 是对数典范，由引理 3.5(1)，支集$\mathbf{M}_X^{\mathrm{irr}}\subset$支集$\{B\}$。由于 $0<\mu<t\ll 1$，

$$\operatorname{Supp}\mathbf{M}_X^{\mathrm{irr}}\subset\operatorname{Supp}\left\{B+\frac{\mu}{1-\mu}B^h\right\},$$

so

$$\operatorname{Supp}\mathbf{M}_{X''}^{\mathrm{irr}}\subset\operatorname{Supp}\left\{B''+\frac{\mu}{1-\mu}B''^h\right\}\quad\text{and}\quad\operatorname{Supp}\mathbf{M}_{X''}^{\mathrm{irr}}\subset\operatorname{Supp}\{B''\}.$$

由于 $\mathfrak{C}''\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$-因子的除子对数终端，$\mathfrak{C}''(0)=\mathfrak{A}''$ 是 $\mathbb{Q}$-因子的除子对数终端。由引理 3.5(2)，$\mathfrak{C}''\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$ 与 $\mathfrak{C}''(0)$ 是对数典范。由定理 5.2，$\mathfrak{C}_i(0)=\mathfrak{A}_i$ 对任意 i是对数典范。

步骤 5. 我们证明，对任意 i 以及 $\mathfrak{A}_i$ 的任意非平凡对数正则中心 S_i，要么 $(\mathfrak{A}|_{S_i})/U$ 具有良好极小模型，要么 $K_{\mathfrak{A}|_{S_i}}$ 不是伪有效的/U。该证明使用归纳假设。

对某个 $i\gg 0$，取 $\mathfrak{A}_i$ 的一个非平凡对数正则中心 S_i。则存在 $\mathfrak{A}''$ 的一个非平凡对数正则中心 S，使得诱导双有理映射 $\psi_i\colon X''\dashrightarrow X_i$ 在 S 的一般点附近是同构。我们令 $\mathfrak{A}_{S_i}:=\mathfrak{A}_i|_{S_i}$。由于 $\mathfrak{A}_i$ 是对数典范，$\mathfrak{A}_{S_i}$ 是对数典范。令 $\mathfrak{A}_{S_i}^0:=\mathfrak{A}_{S_i}\times_U U^0$ 与 $S_i^0:=S_i\times_U U^0$。

步骤 5.1。 我们首先证明，$\mathfrak{A}_{S_i}$ 中任意对数典范中心在 U 中的像都与 U^0相交。令V 为 $\mathfrak{A}_{S_i}$的一个对数典范中心。不妨设 V 是 $\mathfrak{A}_{S_i}$的一个非平凡对数正则中心。由于$\mathfrak{A}_i$ 是除子对数终端，V 是 $\mathfrak{A}_i$ 的一个对数典范中心，且包含于 S_i中。令 D 为 $\mathfrak{A}''$ 的一个对数典范位，使得 $\operatorname{center}_{X_i}D=V$。由于诱导双有理映射 $X''\dashrightarrow X_i$ 是 $K_{\mathfrak{A}''}$-负的，D 也为 $\mathfrak{A}''$的一个对数典范位。因此，D也为$\mathfrak{C}''\left(\frac{t}{1-t}\right)$的一个对数典范位。由于 $\psi\circ\phi$是$K_{\mathfrak{C}\left(\frac{t}{1-t}\right)}$-非正的，$D$ 也为 $\mathfrak{C}\left(\frac{t}{1-t}\right)$的一个对数典范位。因此，$D$ 也为 $\mathfrak{A}$的一个对数典范位。于是，D在 U中的像与 U^0相交，进而 V在 U中的像与 U^0相交。

步骤 5.2。我们处理情形 1。假设我们处于情形 1。由于 $K_{\mathfrak{A}^0}$ 是半丰沛的/U^0且 $(\psi\circ\phi)|_{X^0}$是$K_{\mathfrak{A}^0}$-平凡的，因此$K_{\mathfrak{A}''^0}$是半丰沛的/U^0，其中$\mathfrak{A}''^0:=\mathfrak{A}''\times_U U^0$。因此，$\psi_i|_{X''^0}$是 $K_{\mathfrak{A}''^0}$-平凡的，其中 $X''^0:=X''\times_U U^0$，且 $K_{\mathfrak{A}_i^0}$是半丰沛的/U^0，其中 $\mathfrak{A}_i^0:=\mathfrak{A}_i\times_U U^0$。因此，$K_{\mathfrak{A}_{S_i}^0}=K_{\mathfrak{A}_i^0}|_{S_i^0}$是半丰沛的/$U^0$。由维数为 $\le d-1$时的定理 1.4，$\mathfrak{A}_{S_i}/U$ 有一个良好极小模型。

步骤 5.3。 我们处理**情形 2**。假设我们处于**情形 2**。我们可以假设 $K_{\mathfrak{A}_{S_i}}$ 是伪有效的/U。令 $\tau\colon X\dashrightarrow X_i$ 为诱导双有理映射，且$\tau^0:=\tau|_{X^0}$。由于 $(\mathfrak{A}^0,A^0)$ 是对数典范的，且 $K_{\mathfrak{A}^0}+A^0\sim_{\mathbb{R},U^0}0$，$\tau_*^0(\mathfrak{A}^0,A^0)=(\mathfrak{A}_i^0,A_i^0)$ 是对数典范的，且$K_{\mathfrak{A}_i^0}+A_i^0\sim_{\mathbb{R},U^0}0$。令 $A_{S_i}:=A_i|_{S_i}$ 且 $A_{S_i}^0:=A_{S_i}|_{S_i^0}$，则

$$(\mathfrak{A}_{S_i}^0,A_{S_i}^0)=(\mathfrak{A}_i^0,A_i^0)|_{S_i^0}$$

是对数典范

且

$$K_{\mathfrak{A}_{S_i}^0}+A_{S_i}^0=\left(K_{\mathfrak{A}_i^0}+A_i^0\right)\Big|_{S_i^0}\sim_{\mathbb{R},U^0}0.$$

由定理 9.1 在维数 $\le d-1$中成立，$\mathfrak{A}_{S_i}/U$ 具有良好极小模型。

步骤 6. 我们证明 $\{\phi_i\}$ 终止于 $\mathfrak{A}/U$ 的弱对数典范模型。

由于 $\{\phi_i\}$ 也是一个 $K_{\mathfrak{A}''}/U$缩放参数为$K_{\mathfrak{C}''\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)}-K_{\mathfrak{A}''}$的步骤序列，因此根据定理6.2，$\{\phi_i\}$ 在 $\lfloor B''\rfloor$附近终止。由于 B''^v 是约化的，$\{\phi_i\}$ 在 B''^v处终止。

由于 ϕ_i 也是一个 $K_{\mathfrak{A}''}$-极小模型纲领/U，其缩放参数为 $-E''^v$，且 Supp E''^v =Supp B''^v，因此极小模型纲领终止。

令

$$\beta : X'' \dashrightarrow Y$$

设这是该极小模型纲领，并且对于任意 $s \in \mathbb{R}$，$\mathfrak{A}_Y(s)$ $\mathfrak{C}_Y(s)$ 分别是 $\mathfrak{A}''$、$\mathfrak{A}''(s)$ $\mathfrak{C}''(s)$ 在 Y 上的像。令 λ 为该极小模型纲领最后一个非零缩放数，则对于任意 $0 \leq s \leq \lambda$，$K_{\mathfrak{C}_Y(s)}$ 数值有效。特别地，对于任意 $0 \leq s \ll 1$，$K_{\mathfrak{A}_Y(s)}$ 数值有效。

回顾（在**步骤 4**中），对于任意 $0 < s \ll 1$，$\mathfrak{A}_{Y_s}(s)/U$ 是 $\mathfrak{A}(s)/U$ 的良好极小模型。由于 $K_{\mathfrak{A}'(\mu)}$ 可动/U，所以 ψ 是小的。由于 $K_{\mathfrak{A}'}$ 可动/U，$K_{\mathfrak{A}''}$ 可动/U，所以 β 是小的。对于任意 $0 < s \ll 1$，诱导双有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 和 $X \dashrightarrow Y_s$ 所收缩的除子均为 F。令 $p_s : W_s \to Y_s$ 和 $q_s : W_s \to Y$ 为诱导双有理映射 $Y_s \dashrightarrow Y$ 的不定点消解。于是我们有

$$p_s^* K_{\mathfrak{A}_{Y_s}(s)} = q_s^* K_{\mathfrak{A}_Y(s)} + G_s$$

对于某个在 Y_s 和 Y 上都是例外的 G_s。由负性引理两次可得 $G_s = 0$。因此，对于任意 $0 < s \ll 1$，$\mathfrak{A}_Y(s)/U$ 是 $\mathfrak{A}(s)/U$ 的 bs-半丰模型。令 $p : W \to X$ 和 $q : W \to Y$ 为 $\beta \circ \psi \circ \phi : X \dashrightarrow Y$ 的不定点消解，则有

$$p^* K_{\mathfrak{A}(s)} = q^* K_{\mathfrak{A}_Y(s)} + L_s$$

对于某个例外的 $L_s \geq 0$ /Y。由不一致数的线性性可得

$$p^* K_{\mathfrak{A}} = q^* K_{\mathfrak{A}_Y} + L$$

其中 $L := \lim_{s \to 0} L_s \geq 0$。因此，$\mathfrak{A}_Y/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的弱对数典范模型。

步骤 7. 我们在这一步完成证明。

如果属于 **情形 1**，那么由定理 8.9，$\mathfrak{A}_Y/U$ 是 $\mathfrak{A}/U$ 的半丰沛模型。由定理4.17，$\mathfrak{A}/U$ 有良好极小模型。

若处于情形 2，则令 A_Y 为 A 在 Y上的像，$\pi_Y : Y \to U$ 为相应的射影态射，$Y^0 := Y \times_U U^0$，$A_Y^0 := A_Y|_{Y^0}$，$\mathfrak{A}_Y^0 := \mathfrak{A}_Y \times_Y Y^0$，$U^1 := U^0 \backslash \pi_Y$（支集 A_Y），且 $Y_1 := Y \times_U U^1$。由于 $K_{\mathfrak{A}_Y}$数值有效/U，故 $K_{\mathfrak{A}_Y^0}$数值有效/U^0。由于 $(K_{\mathfrak{A}_Y} + A_Y)|_{Y^0} \sim_{\mathbb{R}} 0$，故 $-A_Y^0$数值有效/U^0。因此，支集 $A = \pi_Y^{-1}\pi_Y$（支集 A）。由于 $(\mathfrak{A}_Y^0, A_Y^0)$ 是对数典范的，支集 A_Y^0 不包含 $\mathfrak{A}_Y^0$的任何对数典范中心。因此，$\mathfrak{A}_Y^0$的任意对数典范中心在 U^0中的像都与 U^1相交。令 $\mathfrak{A}_Y^1 := \mathfrak{A}_Y^0 \times_{U^0} U^1$，则 $\mathfrak{A}_Y^1/U^1$是自身的良好极小模型，因为 $\mathfrak{A}_Y^1$是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt 且 $K_{\mathfrak{A}_Y^1} \sim_{\mathbb{R}, U^1} 0$。由情形 1，$\mathfrak{A}_Y^0/U^0$ 有一个良好极小模型，因此 $\mathfrak{A}_Y^0/U^0$ 是自身的良好极小模型。由定理 8.9，$\mathfrak{A}_Y/U$是 $\mathfrak{A}/U$的半丰沛模型。由定理 4.17，$\mathfrak{A}/U$ 有一个良好极小模型。□

9.3. **一般情形的证明。** 在本小节中，我们证明定理 1.4和9.1。

命题 9.6。 *假设定理 1.4 和 9.1 在 $\leq d-1$ 维数下成立。那么定理 1.4 在 d 维数下成立。*

证明。记号与条件如定理 1.4。设 $\mathfrak{A} := (X, B, \mathbf{M})$，$\mathfrak{A}^0 := \mathfrak{A} \times_U U^0$，并设 $\pi : X \to U$ 为相关态射。设 $\phi : X \dashrightarrow Z_1$ 为 $K_{\mathfrak{A}}$的不变 Iitaka 映射/U。设 $h : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$为相对于 ϕ、与 $f : X' \to Z$ 相关联的适当 LD 对数环面模型，其存在性由定义-引理 4.10 保证，并设 $\mathfrak{A}'^0 := \mathfrak{A}' \times_U U^0$，$X'^0 := X' \times_U U^0$。设 $h^0 := h|_{X'^0}$，则 $h^0 : \mathfrak{A}'^0 \to \mathfrak{A}^0$ 是 $\mathfrak{A}^0$ 的适当对数环面模型。由于 $\mathfrak{A}^0/U^0$ 具有 bs-半丰模型，由引理 4.15，

$\mathfrak{A}'^0/U^0$具有良好对数极小模型，并且 $K_{\mathfrak{A}}$是丰沛的/U且伪有效/U。由引理 7.4,

$$\kappa_\sigma(X'/U, K_{\mathfrak{A}'}) = \kappa_\iota(X'/U, K_{\mathfrak{A}'}) = \dim Z - \dim U,\ \kappa_\sigma(X'/Z, K_{\mathfrak{A}'}) = \kappa_\iota(X'/Z, K_{\mathfrak{A}'}) = 0.$$

由引理 7.1 和定理 4.17，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{A}'}$-极小模型纲领/Z，并对丰沛除子进行缩放，该纲领终止于一个与双有理映射/Z $\psi: X' \dashrightarrow X''$相关联的 $\mathfrak{A}''/Z$ 的良好极小模型 $\mathfrak{A}'/Z$，使得$K_{\mathfrak{A}''} \sim_{\mathbb{R},Z} 0$。令 $\psi^0 := \psi|_{X'^0}$ 和$\mathfrak{A}''^0 := \mathfrak{A}'' \times_U U^0$，则 ψ^0是 $K_{\mathfrak{A}'^0}$-负的。由引理 4.18，$\mathfrak{A}''^0/U^0$有一个 bs-良好极小模型。由于 $\mathfrak{A}'$ 是对数典范的，由引理 3.11，$\mathfrak{A}''$ 是对数典范的。

由于$K_{\mathfrak{A}''} \sim_{\mathbb{R},Z} 0$和 $\kappa_\sigma(X''/U, K_{\mathfrak{A}''}) =$维 $Z -$维 U，由引理 2.18(1)(4)，我们有 $K_{\mathfrak{A}''} \sim_{\mathbb{R},U} f''^* G_Z$，其中某个 $G_Z \geq 0$是大/U，且 $f'': X'' \to Z$是伴随收缩。由引理 9.3，存在一个 $\mathbb{Q}$-因子阶 dlt 修正 $g: Y \to X''$，它是 $\mathfrak{A}''$的修正，满足

$$\mathfrak{A}_Y := g^*\mathfrak{A}'' := (Y, B_Y = B_Y^h + B_Y^v, \mathbf{M}),$$

使得

- $B_Y^h \geq 0$ 且 B_Y^v是约化的，
- B_Y^v是竖直的/Z，并且
- 对于任意实数 $t > 0$，$(\mathfrak{A}_Y, -tB_Y^v)$ 的任意对数典范中心都支配 Z。

由于 G_Z是大/U，在必要时替换 G_Z 后，我们可以假设 $\pi'' \circ f$(支集 B_Y^v) $\subset$支集 G_Z。因此，

- $K_{\mathfrak{A}_Y} \sim_{\mathbb{R},\ U} E := (\pi'' \circ f)^* G_Z \geq 0$，并且
- E是竖直的/Z且支集 $B^v \subset$支集 E。

根据引理 9.4，存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正 $p: W \to Y$ 满足以下条件的 $\mathfrak{A}_Y$。

- $\mathfrak{A}_W := p^*\mathfrak{A}_Y := (W, B_W, \mathbf{M})$。
- $B_W = B_W^h + B_W^v$和 $K_{\mathfrak{A}_W} \sim_{\mathbb{R},\ Z} E_W^h + E_W^v$。
- $0 \leq E_W^h$，E_W^v是竖直的/Z，支集 $E_W^v =$支集 B_W^v，且 B_W^v是约化的。
- 对于任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}_W, tE_W^h)$ 是除子对数终端。
- 对于任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{A}_W, -tB_W^v)$ 的任意对数典范中心都支配 Z。

对于任意 $0 < t \ll 1$，我们有

$$0 \leq E_W^h + E_W^v - tE_W^v \leq E_W^h + E_W^v \text{且支集}(E_W^h + E_W^v - tE_W^v) = \text{支集}(E_W^h + E_W^v)。$$

根据引理 2.18(2),

$$\kappa_\sigma(W/U, K_{\mathfrak{A}_W} - tE_W^v) = \kappa_\sigma(W/U, E_W^h + E_W^v - tE_W^v) = \kappa_\sigma(W/U, E_W^h + E_W^v)$$
$$= \kappa_\sigma(W/U, K_{\mathfrak{A}_W}) = \kappa_\sigma(X''/U, K_{\mathfrak{A}''}) = \kappa_\sigma(X'/U, K_{\mathfrak{A}'}) = \dim Z - \dim U.$$

由于 E_W^h，E_W^v 是竖直的/Z，我们有

$$\kappa_\sigma(W/Z, K_{\mathfrak{A}_W} - tE_W^v) = \kappa_\sigma(W/Z, E_W^h + E_W^v - tE_W^v) = 0$$

and

$$\kappa_\iota(W/Z, K_{\mathfrak{A}_W} - tE_W^v) = \kappa_\iota(W/Z, E_W^h + E_W^v - tE_W^v) = 0.$$

由于对于任意 $t > 0$ 且支集 $B_W^v =$支集 E_W^v，$(\mathfrak{A}_W, -tB_W^v)$ 的任意对数典范中心都支配 Z，所以对于任意 $t > 0$，$(\mathfrak{A}_W, -tE_W^v)$ 的任意对数典范中心都支配 Z。

By 命题 7.3，$(\mathfrak{A}_W, -tE_W^v)/U$对于任意 $0 < t \ll 1$ 都有一个良好极小模型。

由于 $\mathfrak{A}''^0/U^0$ 有一个 bs-良好极小模型，由引理4.15,

$$\mathfrak{A}_W^0/U^0 := \left(\mathfrak{A}_W \times_U U^0\right)/U^0$$

有一个良好对数极小模型。由于 $\mathfrak{A}''$ 是对数典范，由引理3.4， $\mathfrak{A}_W$ 是对数典范。由引理5.3，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{A}_W}$-极小模型纲领$/U$ 的带有充足除子的缩放的步骤序列

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}_W, 1 \leq i \leq n-1$$

使得 $\mathfrak{A}_n^0/U^0$:=$(\mathfrak{A}_n \times_U U^0)$ $/U^0$是 $\mathbb{Q}$-阶乘的良好极小模型 $\mathfrak{A}_W^0/U^0$。令 X_n 为 $\mathfrak{A}_n$ 的环境簇，并令 B_n、B_n^h、B_n^v、E_n^h、E_n^v 分别为 B_W、B_W^h、B_W^v、E_W^h、E_W^v在 X_n上的像。则：

- 由引理 3.11 以及由于 $\mathfrak{A}_W$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的对数典范除子对， $\mathfrak{A}_n = (X_n, B_n, \mathbf{M})$是 $\mathbb{Q}$-阶乘的对数典范除子对。
- $B_n = B_n^h + B_n^v$和 $K_{\mathfrak{A}_n} \sim_{\mathbb{R},\, U} E_n^h + E_n^v$。
- E_n^h， $E_n^v \geq 0$，支集 $E_n^v =$支集 B_n^v， 一个 B_n^v是约化的。
- 由于 $\{\phi_i\}_{i=1}^{n-1}$ 也是任意$0 < t \ll 1$的 $(K_{\mathfrak{A}_W} + tE_W^h)$-极小模型纲领$/U$ 的步骤序列，因此 $(\mathfrak{A}_n, tE_1^h)$ 对于任意 $0 < t \ll 1$都是除子对数终端的。
- 由于 $(\mathfrak{A}_W, -tB_W^v)$ $/U$具有良好极小模型，且 $\{\phi_i\}_{i=1}^{n-1}$对于任意$K_{\mathfrak{A}_W} - tB_W^v$，也是一个$(/U)$-MMP 的步骤序列 $0 < t \ll 1$，由命题4.18可知， $(\mathfrak{A}_n, -tB_n^v)$ $/U$对于任意 $0 < t \ll 1$均具有 bs-良好极小模型。
- 对于 $\mathfrak{A}_n$的任意对数典范位 D ，

$$0 = a(D, \mathfrak{A}_n) \geq a(D, \mathfrak{A}_W) = a(D, \mathfrak{A}'') \geq a(D, \mathfrak{A}'),$$

因此， D 是 $\mathfrak{A}'$的对数典范位，故 D 是 $\mathfrak{A}$的对数典范位。因此， D 在 U中的像与 U^0相交。

- $\mathfrak{A}_n^0/U^0$ 是自身的良好极小模型。

由命题9.5可知， $\mathfrak{A}_n/U$ 具有良好极小模型。由命题4.18可知， $\mathfrak{A}_W/U$ 具有良好极小模型。由命题4.16可知， $\mathfrak{A}''/U$ 具有 bs-良好极小模型。由命题4.18可知，$\mathfrak{A}'/U$ 具有 bs-良好极小模型。由命题4.12可知， $\mathfrak{A}/U$ 具有 bs-良好极小模型。由命题4.14可知， $\mathfrak{A}/U$ 具有良好对数极小模型。□

命题 9.7。 假设定理 *1.4* 和 *9.1* 在维数 $\leq d-1$中成立。那么定理 *9.1* 在维数 d中成立。

证明。 记号和条件同定理 9.1。令 π： $X \to U$ 为相关态射，并令 $X \to U' \to U$为 π的 Stein 分解。必要时用 U替换 U'，并用 U^0替换 $U' \times_U U^0$，我们可以假设 π是一个收缩。

由引理9.3，存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正 h： $X' \to X$ ，它是 $\mathfrak{A}$的$\mathfrak{A}' := h^*\mathfrak{A} := (X', B', \mathbf{M})$，使得 $B' = B^h + B^v$满足以下条件。

- $B^h \geq 0$ 且 B^v 是约化的。
- B^v 是竖直的$/U$。
- 对任意实数 $t > 0$，$(\mathfrak{A}', -tB^v)$ 的任意对数典范中心都支配 U。

令 $A' := h^*A$, $X'^0 := X' \times_U U^0$，以及 $A'^0 := A'|_{X'^0}$。则 $(\mathfrak{A}'^0, A'^0)$ 是对数典范的，且 $K_{\mathfrak{A}'^0} + A'^0 \sim_{\mathbb{R},U^0} 0$。由于 $A \geq 0$, $A' \geq 0$。由于 $K_{\mathfrak{A}'} = h^*K_{\mathfrak{A}}$ 是伪有效的$/U$，A' 是竖直的$/U$。因此， $K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R}} 0$在 U 的一般点上，故我们可以写成

- $K_{\mathfrak{A}'} \sim_{\mathbb{R},U} E \geq 0$

对于某个 E 竖直的$/U$ (参见 [BCHM10，引理 3.2。1], [HL23，引理 2。3])。令$H \geq 0$为 U上的一个丰沛除子，使得 $(\pi \circ h)$(支集 B^v) $\subset$支集 H。必要时以E 替换为 $E + (\pi \circ h)^*H$，我们可以假设

- E竖直的$/U$且支集 $B^v \subset$支集 E。

由引理 9.4，存在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 dlt 修正 g： $Y \to X'$ 使得 $\mathfrak{A}'$ 满足以下条件。

- $\mathfrak{a}_Y := g^*\mathfrak{a}' := (Y,\ B_Y,\ \mathbf{M})$。由于 $\mathfrak{a}$ 是对数典范，根据引理 3.4，$\mathfrak{a}_Y$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘对数典范 dlt。
- $B_Y = B_Y^h + B_Y^v$ 和 $K_{\mathfrak{a}_Y} \sim_{\mathbb{R},\ U} E_Y^h + E_Y^v$。
- $0 \le E_Y^h$，E_Y^v 是竖直的/U，支集 E_Y^v = 支集 B_Y^v，且 B_Y^v 是约化的。
- 对任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{a}_Y,\ tE_Y^h)$ 是除子对数终端的。
- 对任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{a}_Y,\ -tB_Y^v)$ 的任意对数典范中心都支配 U。

由于支集 B_Y^v = 支集 E_Y^v，对于任意 $0 < t \ll 1$，$(\mathfrak{a}_Y,\ -tE_Y^v)$ 的任意对数典范中心都支配 U。由于

$$K_{\mathfrak{a}_Y} - tE_Y^v \sim_{\mathbb{R},U} E_Y^h + (1-t)E_Y^v$$

是 ≥ 0 且是竖直的/U，我们有

$$\kappa_\sigma(Y/U, K_{\mathfrak{a}_Y} - tE_Y^v) = \kappa_\iota(Y/U, K_{\mathfrak{a}_Y} - tE_Y^v) = 0.$$

根据命题 7.3，

- $(\mathfrak{a}_Y,\ -tE_Y^v)/U$ 对任意 $0 < t \ll 1$ 都有一个良好对数极小模型。

此外：

- 对于 $\mathfrak{a}_Y$ 的任意对数典范位 D，它也是 $\mathfrak{a}$ 的一个对数典范位，因此 D 在 U 上的像与 U^0 相交。
- 设 $A_Y := g^*A'$，$Y^0 := Y \times_U U^0$，$\mathfrak{a}_Y^0 := \mathfrak{a}_Y \times_U U^0$，以及 $A_Y^0 := A_Y|_{Y^0}$。那么 $(\mathfrak{a}_Y^0,\ A_Y^0)$ 是对数典范的，并且 $K_{\mathfrak{a}_Y^0} + A_Y^0 \sim_{\mathbb{R},Y^0} (h \times g)|_{Y^0}^* (\mathfrak{a}^0, A^0)$，

$$(\mathfrak{a}_Y, A_Y) \xrightarrow{(h\times g)|_{Y^0}} (\mathfrak{a}^0, A^0),$$

由命题 9.5，$\mathfrak{a}_Y/U$ 有一个良好极小模型。由引理 4.16，$\mathfrak{a}/U$ 有一个 bs-良好极小模型。由引理 4.14，$\mathfrak{a}/U$ 有一个良好对数极小模型。□

定理*1.4* 和 *9.1*的证明。定理 1.4 和 9.1 在一维情形下显然成立。定理 1.4和 9.1 在一般情形下由命题 9.5、9.6和9.7 以及维数归纳法得出。□

10. Existence of the minimal model program

本节的目标是证明定理1.1、1.2和1.3。

我们先给出一个变动陈述（定理 10.1），将一般情形归约为第 9 节中建立的 LD 情形。随后，通过将此陈述应用于适当的（q）除子对数终端修改，并运行带缩放的极小模型纲领，便可推出其余定理。

定理 10.1. 设 $\mathfrak{a}/U$ 是一个广义对，且 $A \ge 0$ 是一个 $\mathbb{R}$-除子，使得$(\mathfrak{a}, A)/U$ 是对数典范的，并且 $K_{\mathfrak{a}} + A \sim_{\mathbb{R},\ U} 0$ 和 $K_{\mathfrak{a}}$ 是伪有效的/U。那么 $\mathfrak{a}/U$ 有一个良好对数极小模型。

证明。令 $h\colon X' \to X$ 为 $\mathfrak{a}$的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正。由引理 4.16，必要时以 $h^*\mathfrak{a}$ 替换 $\mathfrak{a}$，并以 h^*A替换 A，我们可以假设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端的。

记 $\mathfrak{a} = (X,\ B,\ \mathbf{M})$。由引理 4.5，必要时替换 $\mathbf{M}$，我们可以假设$K_{\mathfrak{a}} + A = 0$。特别地，$(\mathfrak{a},\ A)$ 是对数典范的。由引理 3.6，$(\mathfrak{a},\ \frac{1}{2}A)$ 是对数典范的。由定理9.1，$(\mathfrak{a},\ \frac{1}{2}A)/U$有一个良好对数极小模型。由定理 4.17，$(\mathfrak{a},\ \frac{1}{2}A)/U$有一个$\mathbb{Q}$-阶乘良好极小模型。由于

$$K_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}A \sim_{\mathbb{R},U} \frac{1}{2}K_{\mathfrak{a}},$$

由引理4.5，$\mathfrak{a}/U$ 有一个良好极小模型。定理得证。□

定理 10.2. 设 $\mathfrak{A}/U$ 是一个对数典范广义对，其环境簇为 X，并设 $f\colon X \to Z$ 是一个 $K_{\mathfrak{A}}$-负极端收缩。若 维数 $X =$ 维数 Z，则 $K_{\mathfrak{A}}$ 的丰模型$/Z$ $\phi\colon X \dashrightarrow X^+$ 存在。

证明。 我们有 $K_{\mathfrak{A}}$ 是伪有效的$/Z$ 且 $-K_{\mathfrak{A}}$ 是丰沛的$/Z$，因此可以选取一个丰沛的$/Z$ $\mathbb{R}$-除子 $0 \leq A \sim_{\mathbb{R}} -K_{\mathfrak{A}}$ 在 X 上，使得（$\mathfrak{A}$，A）是对数典范的。由定理 10.1， $\mathfrak{A}/Z$有一个良好极小模型。因此，我们可以令 $\phi\colon X \dashrightarrow X^+$ 为$/Z$ 的丰模型 $K_{\mathfrak{A}}$，定理得证。□

定理 *1.1* 的证明。 这是定理 10.2 在考虑$\mathfrak{A} =$（X， B， $\mathbf{M}$）且 f 为一个 $K_{\mathfrak{A}}$-翻转收缩时的特例。□

定理 *1.2* 的证明。 由锥定理和收缩定理 [CHLX23，定理 2.2。1], 我们知道，只要 $K_X + B + \mathbf{M}_X$不是数值有效的，就存在一个（$R\mathbf{M}$ $X \to Z$-负极端射线 R 以及一个收缩 $K_X + B + \mathbf{M}_X$。如果 $\dim X > \dim Z$，则得到一个（$K_X + B + \mathbf{M}_X$）-莫里纤维空间，证明完毕。否则，根据定理 10.2 ，我们可以运行一步与收缩 R相对应的极小模型纲领。重复这一过程即可得证。□

定理 1.3 的证明。令 $\mathfrak{A} := (X, B, \mathbf{M})$。若 $K_{\mathfrak{A}}$ 是伪有效的$/U$，则由定理 10.1 可得结论。若 $K_{\mathfrak{A}}$ 不是伪有效的$/U$，则可令 $h\colon X' \to X$为 $\mathbb{Q}$-因子阶乘除子对数终端修正 $\mathfrak{A}$，并令 $\mathfrak{A}' := h^*\mathfrak{A}$。我们可以运行一个带丰沛除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}'}$-极小模型纲领$/U$，该纲领终止于莫里纤维空间 $f\colon X'' \to Z$，它与双有理映射 $\phi\colon X' \dashrightarrow X''$相关。令 $\mathfrak{A}'' := \phi_*\mathfrak{A}'$，则 $f\colon \mathfrak{A}'' \to Z$ 是 $\mathfrak{A}/U$的对数莫里纤维空间。□

11. Structure of $\mathbb{Q}$-factorial generalized pairs

本节的目标是证明定理1.5 和推论 1.6，从而完成引言中陈述的所有主要结果的证明。我们首先给出一个 P-平凡极小模型纲领的结论（引理 11.2），然后遵循 [HL23], 的策略，用 LD 分解替换 NQC 分解，从而推导出结构定理及其推论。

定义 11.1. 设 $\pi\colon X \to U$ 是正规准射影簇之间的射影态射。$\overline{NE}(X/U)$中的最小长度极端曲线是指X上的曲线 C，使得 $[C]$张成 $\overline{NE}(X/U)$中的极端射线 R，并且对于 X 上的任意曲线 C'，若 $[C']$ 张成 R，则对某个 $\lambda \leq 1$有 $[C] \equiv \lambda[C']$ 。

引理 *11.2*（参见 [*Hu25,* 引理 *3.*8]）。设 $\mathfrak{A}/U = (X, B, M)/U$ 是一个 $\mathbb{Q}$-因子阶化 *qdlt* 广义对，且 P 是 X上的数值有效$/U$ $\mathbb{R}$除子。假设 $\mathit{Supp}\{P\} \subset \mathit{Supp}\{B\}$。那么对于任意 $\alpha \gg 0$，任意一个 $(K_{\mathfrak{A}} + \alpha P)$-极小模型纲领$/U$ 步骤序列都是 P-平凡的。

证明。写作 $\{P\} = \sum_{i=1}^m d_i D_i$，其中 D_i 是素除子。对于任意 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)$，令 $Q(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^m v_i D_i$ ；令 $\boldsymbol{d} := (d_1, \ldots, d_m)$，并令 $V \ni \boldsymbol{d}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中 $\boldsymbol{d}$ 的有理包络。令 $c := \dim V + 1$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_c \in V \cap \mathbb{Q}^m$ 为向量，使得 $\boldsymbol{d}$ 包含在由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_c$ 张成的凸包内部，并且对任意 j有 $||\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{d}||_\infty \ll 1$。那么存在唯一的实数 $\beta_1, \ldots, \beta_c \in (0, 1]$，使得 $\sum_{j=1}^c \beta_j = 1, \sum_{j=1}^c \beta_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{d}$，且 $\beta_1, \ldots, \beta_c$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的。

设 $Q_j := Q(\boldsymbol{v}_j)$、 $P_j := \lfloor P \rfloor + Q_j$、 $B_j := B + P - P_j$，以及 $\mathfrak{A}_j := (X, B_j, \mathbf{M})$ 对任意 j 成立。由于 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt,

$$\mathrm{Supp}(P_j - P) \subset \mathrm{Supp}\{P\} \subset \mathrm{Supp}\{B\},$$

并且 $||\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{d}|| \ll 1$，我们有 $\mathfrak{A}_j$ 对任意 $\mathbb{Q}$-阶乘 qdlt j。那么，对任意 $K_{\mathfrak{A}}$-负极端曲线/U C，根据极端射线长度 [CHLX23定理 2.2.1(2)]，，可得

$$-2\dim X < K_{\mathfrak{A}_j} \cdot C = K_{\mathfrak{A}} \cdot C + (P_j - P) \cdot C < P_j \cdot C.$$

设 I 为正整数，使得对任意 j， IP_j 都是 Cartier，并令

$$\Gamma := \min\left\{ \sum \beta_j p_j \middle| Ip_j \in [-2I\dim X, +\infty) \cap \mathbb{Z} \right\}.$$

那么， Γ 是一个仅取决于 I的离散集，因此我们可以定义

$$\gamma_0 := \min\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > 0\}.$$

由于 P 是数值有效的/U 和 $P = \sum_{j=1}^{c} \beta_j P_j$，我们有

$$P \cdot C = 0 \quad \text{or} \quad P \cdot C \geq \gamma_0$$

对于 $NE(X/U)$中任意 $K_{\mathfrak{A}}$-负的最小长度极端曲线。由极端射线长度可知，对于任意 $\alpha \geq \alpha_0 := {}^{2\text{维数}}\gamma_0^{X+1}$，$(K_{\mathfrak{A}} + \alpha P)$-MMP/$U$的一步是 P-平凡的。

由于 β_1、……、β_c 线性无关，对于任意 j，若$(K_{\mathfrak{A}} + \alpha P)$-MMP/$U$ ϕ 的任意步骤序列 $X \dashrightarrow X'$ 是 P-平凡的，则 ϕ 是 P_j-平凡的，因此 ϕ 也是 $K_{\mathfrak{A}_j}$-MMP/U的一个步骤序列。

注意， α_0 仅依赖于维数 X、 β_1、……、 β_c 以及 I。设 $P' := \phi_* P$，且 $P'_j := \phi_* P_j$。则对任意 j，由收缩定理 [CHLX23，定理 2.2.1(4)]，维数 X' =维数 X， IP'_j 为 Cartier， $P' = \sum_j \beta_j P'_j$，并且对任意 j， $\phi_* \mathfrak{A}_j$ 为 $\mathbb{Q}$-因子 qdlt。因此我们可以用 $\phi_* \mathfrak{A}$、P'、P'_j 替换 $\mathfrak{A}$、P、P_j，并继续该过程。□

引理 11.3. 设 $\mathfrak{A}/U := (X, B, \mathbf{M})/U$ 为一个对数典范广义对，使得 $\mathbf{M}_X$ 为 $\mathbb{R}$-*Cartier*。则存在一个射影双有理态射 $f: Y \to X$ 以及 Y 上的一个 $\mathbb{R}$-除子$L \geq 0$，满足以下条件。

(1) $\mathbf{M}$ 下降到 Y。 *(2)* 支集$(f^*\mathbf{M}_X - \mathbf{M}_Y)$ =例外集(f)。 *(3)* 支集 L =例外集(f) 且 $-L$ 是丰沛的/X。

证明。我们可以用 X 替换 U，并假设相关态射 $X \to U$ 是恒等态射。令 $h: W \to X$ 是 $(X, B, \mathbf{M})$ 的对数解消，并令 $E := h^*\mathbf{M}_X - \mathbf{M}_W$。于是 $-E \sim_{\mathbb{R},X} \mathbf{M}_W$ 是数值有效的/X 且为例外的/X。由负性引理， $E \geq 0$。必要时用 $-E$替换$\mathbf{M}$，我们可假设$\mathbf{M}_W = -E \leq 0$。特别地， $\mathbf{M}$ 是例外的/X 且$\mathbf{M}_X = 0$。我们可以写成

$$K_W + B_W(t) + t\mathbf{M}_W = K_W + B_W(t) - tE = h^*(K_X + B) = h^*(K_X + B + t\mathbf{M}_X)$$

对于任意 $t \in [0, 1]$。取 $0 < \delta \ll 1$。令

$$\Delta_W := B_W(1/2) \vee (1 - \delta)\mathrm{Exc}(h)$$

并令

$$\mathfrak{A}_W(t) := (W, \Delta_W, t\mathbf{M})$$

对于任意实数 $t \geq 0$。则对任意 $t \geq 0$， $\mathfrak{A}_W(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的除子对数终端对数光滑的。此外，对于 W 上任意作为例外的 /X 素除子 D，或者 $\mathrm{mult}_D \Delta_W = \mathrm{mult}_D B_W(1/2) = 1$，或者 $\mathrm{mult}_D \Delta_W > \mathrm{mult}_D B_W(1/2)$。特别地，我们有

$$K_{\mathfrak{A}_W(t)} \sim_{\mathbb{R},X} (t - 1/2)\mathbf{M}_W + F = F - (t - 1/2)E$$

对于某个 $F \geq 0$ 例外的/X，使得 Supp F 恰好是所有h-例外素除子 D 的并集，且 $\mathrm{mult}_D B_W(1/2) < 1$。

根据我们的构造,

$$\operatorname{Supp}\mathbf{M}_X = \operatorname{Supp} E \subset \operatorname{Exc}(h) \subset \operatorname{Supp}\Delta_W.$$

此外，对于 E 的任意不可约分支 D，我们有

$$\operatorname{mult}_D B_W(1/2) = \operatorname{mult}_D B_W(1) - t\operatorname{mult}_D E < 1,$$

因此，$\operatorname{mult}_D \Delta_W < 1$。由于 $\Delta_W \geq 0$，我们有

$$\operatorname{Supp}\mathbf{M}_X = \operatorname{Supp} E \subset \operatorname{Supp}\{\Delta_W\}.$$

因此，对于任意实数 $t \geq 0$，$\mathfrak{A}_W(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-因子阶乘的除子对数终端 LD 对数光滑 .

取一个整数 $\alpha \gg 0$。由引理 11.2，我们可以运行一个 $K_{\mathfrak{A}_W(\alpha)}$-极小模型纲领$/X$，并对丰沛除子进行缩放

$$\phi_i : \mathfrak{A}_i \dashrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}_W(\alpha)$$

且此极小模型纲领是 E-平凡的。令 X_i 为每个 i 对应的 $\mathfrak{A}_i$ 的环境簇，并令 $\mathfrak{A}_i(t)$ F_i, E_i 为每个 i 上 $\mathfrak{A}_W(t)$ F, E 在 X_i 上的像。则存在 $i > 0$ 使得 $K_{\mathfrak{A}_i}$ 可动$/X$。我们有

$$K_{\mathfrak{A}_i} \sim_{\mathbb{R},X} F_i - (\alpha - 1/2)E_i.$$

由 [Bir12, 引理 3.3], $F_i - (\alpha - 1/2)E_i \geq 0$。令 $h_i\colon X_i \to X$ 为诱导的双有理态射。由于极小模型纲领是 E-平凡的，$-E_i$ 是数值有效的$/X$。因此，对于任意闭点 $x \in X$和任意不可约曲线 $C \subset h_i^{-1}(x)$，有 $-E_i \cdot C \geq 0$，故要么 C 与支集 $\operatorname{Supp} E_i$ 不相交，要么 $C \subset$ 包含于 $\operatorname{Supp} E_i$。由于 h_i 具有连通纤维，因此 $\operatorname{Supp} E_i = h_i^{-1}(h_i(\operatorname{Supp} E))$。

对于任意 $t \geq 0$，令 $X^0 := X \backslash h_i(\operatorname{Supp} E_i)$、$X_i^0 := X_i \times_X X^0$、$\mathfrak{A}_i^0 := \mathfrak{A}_i \times_X X^0$，以及 $\mathfrak{A}_i^0(t) := \mathfrak{A}_i(t) \times_X X^0$。记

$$\mathfrak{A}_i(t) := (X_i, \Delta_i, t\mathbf{M})$$

对于任意 $t \geq 0$。由于 $\operatorname{Supp} E$ 不包含 $\lfloor \Delta_W \rfloor$的任何层，$\operatorname{Supp} E_i$ 不包含 $\lfloor \Delta_i \rfloor$的任何层。由引理 3.11，$\mathfrak{A}_i$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt 对数典范对，因此 $\operatorname{Supp} E_i$ 不包含 $\mathfrak{A}_i$的任何对数典范中心。由于 M 下降到 X_i，对于任意$t \geq 0$，$\mathfrak{A}_i(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的 qdlt 对数典范对。因此，对于任意 $t \geq 0$，$\operatorname{Supp} E_i$ 不包含 $\mathfrak{A}_i(t)$ 的任何对数典范中心。因此，对于任意 $t \geq 0$，X_i^0与 $\mathfrak{A}_i(t)$ 的所有对数典范中心相交。此外，有

$$\operatorname{Supp}(F_i - (\alpha - 1/2)E_i) = \operatorname{Supp}(F_i - (\alpha - 1/2)E_i)^{\leq 0} = \operatorname{Supp} E_i,$$

因此 $\operatorname{Supp} F_i \subset \operatorname{Supp} E_i$。我们有

$$K_{\mathfrak{A}_i(t)} \sim_{\mathbb{R},X} F_i - (t - 1/2)E_i$$

对任意 $t \geq 0$，因此

$$K_{\mathfrak{A}_i^0(t)} \sim_{\mathbb{R},X^0} 0,$$

因此，对于任意 $t \geq 0$，$\mathfrak{A}_i^0(t)/X^0$ 自身是一个良好极小模型。

由于 ϕ_i 是 E-平凡的，对于任意 $t \geq 0$，ϕ_i 是一个 $K_{\mathfrak{A}_W(t)}$-极小模型纲领$/X$ 的步骤序列。根据引理 3.11，对于任意 $t \geq 0$，$\mathfrak{A}_i(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-因子阶化的 qdlt 对数典范对。根据定理 1.4，对于任意 $t \geq 0$，$\mathfrak{A}_i(t)$ $/X$ 有一个良好极小模型。根据引理 4.18，对于任意 $t \geq 0$，$\mathfrak{A}_W(t)/X$ 有一个良好对数极小模型。

我们选取一个实数 $s \gg 0$，使其在 $\mathbb{R}$ 中一般，并运行一个带丰沛除子缩放的 $K_{\mathfrak{A}_W(s)}$ -极小模型纲领$/X$。由定理 5.2，该极小模型纲领终止，并得到一个良好极小模型 $\mathfrak{A}_V(s)/X$，它对应于 $\mathfrak{A}_W(s)$ $/X$，其伴随双有理映射$/X$ ψ 为：$W \dashrightarrow V$。由引理11.2，ψ 是$\mathbf{M}_W$-平凡的。设 $g\colon V \to Y$ 是 $K_{\mathfrak{A}_V(s)}$ 的丰模型$/X$，$f\colon Y \to X$ 是

伴随收缩，并设 $\mathfrak{A}_Y(s) := g_*\mathfrak{A}_V(s)$。由于 s 在 $\mathbb{R}$ 中一般， g 是$\mathbf{M}_V$-平凡的，因此$\mathbf{M}$ 下降到 Y。设 F_Y 和 E_Y 分别为 F、 E 在 Y 上的像，那么

$$K_{\mathfrak{A}_Y(s)} \sim_{\mathbb{R},X} F_Y - (s-1/2)E_Y$$

是丰沛的$/X$。令 $L := (s-1/2)E_Y - F_Y$。由于 L 是例外的$/X$，根据负性引理，我们有 $L \geq 0$ 和

$$\operatorname{Exc}(f) = \operatorname{Supp} L.$$

由于 $s \gg 0$,

$$\operatorname{Supp} L = \operatorname{Supp} E_Y = \operatorname{Supp} \mathbf{M}_Y = \operatorname{Supp}(f^*\mathbf{M}_X - \mathbf{M}_Y).$$

因此， Y和 L 满足我们的要求。 □

定理 11.4. 设 $(X, B,\mathbf{M})/U$ 是一个对数典范广义对，满足 $\mathbf{M}_X$ 是 $\mathbb{R}$-*Cartier*，且 A 是 X 上的一个丰沛$/U$ $\mathbb{R}$-除子。则存在一个对数典范对 (X, Δ) 使得

$$K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R},U} K_X + B + \mathbf{M}_X + A.$$

证明。可能将 $\mathbf{M}$ 替换为 $(1-\epsilon)\mathbf{M}$，并将 A 替换为某个 $0 < \epsilon \ll 1$对应的 $A + \epsilon\mathbf{M}_X$ 后，不妨假设 $\operatorname{Nklt}(X, B, \mathbf{M}) = \operatorname{Nklt}(X, B)$。由引理 11.3，存在一个双有理态射 f: $Y \to X$，其具有一个反丰沛$/X$ 有效 $\mathbb{R}$-除子 $E \geq 0$，使得 $\mathbf{M}$ 下降到 Y ，且

$$\operatorname{Supp}(f^*\mathbf{M}_X - \mathbf{M}_Y) = \operatorname{Exc}(f) = \operatorname{Supp} E.$$

I特别地，$\operatorname{Exc}(f)$ =支集 E不包含 $(X, B, \mathbf{M})$ 的任何对数典范中心。Le t

$$K_Y + B_Y := f^*(K_X + B),$$

那么我们可以找到 $0 < \delta \ll 1$，使得 $(Y, B_Y + \delta E)$ 是子对数正则的，且 $f^*A - \delta E$ 是丰沛的$/U$。特别地，存在一个丰沛的$/U$ $\mathbb{R}$-除子 $0 \leq H_Y \sim_{\mathbb{R},U} \mathbf{M}_Y + f^*A - \delta E$，使得 $(Y, B_Y + H_Y + \delta E)$ 是对数典范的。我们可以取 $\Delta := B + f_*H_Y$。□

定理 *1.5* 的证明。 这是定理 11.4 的一个特例。 □

推论 *1.6* 的证明。 令 $A := -(K_X + B + \mathbf{M}_X)$。由定理 1.5，存在一个对数典范对 (X, Δ), 使得

$$K_X + \Delta \sim_{\mathbb{R},Z} K_X + B + \mathbf{M}_X + A \sim_{\mathbb{R},Z} 0.$$

该推论由 [BFMT25、定理 7.6 和 7.2 得出。3]。 □

References

[Amb03] F. Ambro, 《准对数簇》, 斯捷克洛夫数学研究所汇刊, **240** (2003), 220–239（双有理几何、线性系统与有限生成代数）, 译载于《斯捷克洛夫数学研究所论文集》**240** (2003), 第1期, 214–233。[ACSS21]F. Ambro、P. Cascini、V. V. Shokurov 和 C. Spicer, 《模部分的正性》, arXiv:2111.00423。[BFMT25] B. Bakker、S. Filipazzi、M. Mauri 和 J. Tsimerman, 《周期像的 *Baily–Borel* 紧化与 *b*-半丰性猜想》, arXiv:2508.19215。[BCHM10] C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. M^{c}Kernan, 《对数一般型簇的极小模型的存在性》, 美国数学会杂志 **23** (2010), 第2期, 405–468。[Bir12] C. Birkar, 《对数典范翻转的存在性与特殊对数极小模型纲领》, Publ. Math. IH ́ES**115** (2012), 325–368。[BH14] C. Birkar 和 Z. Hu, 《极化对、对数极小模型与 *Zariski* 分解》, Nagoya Math. J. **215** (2014), 203–224。

[BZ16] C. Birkar 和 D.-Q. Zhang, 《极化对的饭高纤维化与多重典范系的有效性》, Publ. Math. IH´ES 123（2016）, 283–331。[Bir19] C. Birkar, 《Fano簇上的反多重典范系》, Ann. of Math. (2) 190（2019）, 345–463。[Bir21] C. Birkar, 《线性系的奇点与 Fano簇的有界性》, Ann. of Math. 193（2021）, 第2期, 374–405。[Bir23] C. Birkar, 《Fano纤维化及其推广中的奇点》, arXiv:2305.18770。[Bir24] C. Birkar, 《关于对的奇点的非 klt 轨迹的连通性》, J. Differential Geom. 126（2024）, 第2期, 431–474。[Cas+24] P. Cascini、J. Han、J. Liu、F. Meng、C. Spicer、R. Svaldi 和 L. Xie, 《代数可积伴随叶状结构的极小模型纲领》, arXiv:2408.14258。[Cas+25a] P. Cascini、J. Han、J. Liu、F. Meng、C. Spicer、R. Svaldi 和 L. Xie, 《伴随叶状结构的有限生成与有界性》, arXiv:2504.10737。[Cas+25b] P. Cascini、J. Liu、F. Meng、R. Svaldi 和 L. Xie, 《代数可积伴随叶状结构的变形》, arXiv:2510.02498。[CHLX23] G. Chen、J. Han、J. Liu 和 L. Xie, 《代数可积叶状结构与广义对的极小模型纲领》, arXiv:2309.15823。[CLX23] B. Chen、J. Liu 和 L. Xie, 《广义对的消失定理》, arXiv:2305.12337。[CT23] G. Chen 和 N. Tsakanikas, 《对数典范广义对的翻转终止》, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 39（2023）, 第6期, 967–994。[CHL24] G. Chen、J. Han 和 J. Liu, 《有效对数饭田纤维化与补边的存在性》, Int. Math. Res. Not.（2024）, 第10期, 8329–8349。[Cho08]S. R. Choi, 《对数模型的地理学及其应用》, 博士论文, 约翰斯·霍普金斯大学（2008）。[DH23] O. Das 和 C. D. Hacon, 《K¨ahler 三维簇的极小模型纲领》, arXiv:2306.11708。[DHY23]O. Das、C. D. Hacon 和 J. Y´a˜nez, 《K¨ahler 三维簇上广义对的极小模型纲领》, arXiv:2305.00524。[DH24]O. Das 和 C. D. Hacon, 《射影簇的超越极小模型纲领》, arXiv:2412.07650。[DHP24] O. Das、C. D. Hacon 和 M. P˘aun, 《K¨ahler 簇上的四维极小模型纲领》, Adv. Math. 443（2024）, 109615。[EH24] M. Enokizono 和 K. Hashizume, 《复解析空间上对数典范对的极小模型纲领》, arXiv:2404.05126。[EH25] M. Enokizono 和 K. Hashizume, 《复解析空间的半稳定化约》, Trans. Amer. Math. Soc. 378（2025）, 7667–7688。[EH26] M. Enokizono 和 K. Hashizume, 《复解析空间上对数典范对的极小模型纲领的终止性》, J. Lond. Math. Soc. (2) 113（2026）, 第1期, 论文编号 e70409。[FS23] S. Filipazzi 和 R. Svaldi, 《广义对的连通性原理与对偶复形》, Forum Math. Sigma 11（2023）, 论文编号 e33, 39。[FM00] O. Fujino 和 S. Mori, 《典范丛公式》, J. Differential Geom. 56（2000）, 第1期, 167–188。[Fuj07] O. Fujino, 《特殊终止与约化为 pl 翻转》, 载于《三维与四维簇的翻转》, 牛津大学出版社（2007）。[Fuj11] O. Fujino, 《对数极小模型纲领的基本定理》, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47（2011）, 727–789。[FG14]O. Fujino 和 Y. Gongyo, 《对数多重典范表示与丰沛猜想》, Compos. Math. 150 （2014）, 593–620。[Fuj20] O. Fujino, 《更正：关于对数 Kodaira 维数的次可加性》, J. Math. Soc. Japan 72（2020）, 第4期, 1181–1187。[Fuj22] O. Fujino, 《复解析空间之间射影态射的极小模型纲领》, arXiv:2201.11315。[Fuj24a] O. Fujino, 《关于解析空间上的消失定理》, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 100（2024）, 第4期, 21–25。[Fuj24b] O. Fujino, 《复解析空间之间射影态射的锥与收缩定理》, MSJ Memoirs 42（2024）, 日本数学会, 东京。

[Fuj25] O. Fujino，复解析空间之间射影态射的消失定理，Math. Res. Lett. 32 (2025)，第 3 期，739–769。[GK20] P. Graf 和 T. Kirschner，三维复环面的有限商，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 70 (2020)，第 2 期，881–914。[HX13] C. D. Hacon 和 C. Xu，对数典范闭包的存在性，Invent. Math. 192 (2013)，第 1 期，161–195。[HMX14] C. D. Hacon、J. M^{c}Kernan 和 C. Xu，对数典范阈值的 ACC，Ann. of Math. (2) 180 (2014)，第 2 期，523–571。[HX16] C. D. Hacon 和 C. Xu，关于 B-表示的有限性与半对数典范丰沛性，载于：极小模型与极端射线（京都，2011），Adv. Stud. Pure Math. 70 (2016)，日本数学会，东京，361–378。[HM20] C. D. Hacon 和 J. Moraga，关于弱 Zariski 分解与翻转终止，Math. Res. Lett. 27 (2020)，第 5 期，1393–1421。[HL23] C. D. Hacon 和 J. Liu，广义对数典范对的翻转存在性，Camb. J. Math. 11 (2023)，第 4 期，795–828。[HP24] C. D. Hacon 和 M. P$^{\smile}$aun，关于广义凯勒对的典范丛公式与伴随，arXiv:2404.12007。[HL22] J. Han 和 Z. Li，广义极化对的弱 Zariski 分解与对数终端模型，Math. Z. 302 (2022)，707–741。[HLS24]J. Han、J. Liu 和 V. V. Shokurov，例外奇点极小对数不一致数的 ACC，Peking Math. J. (2024)。[Has18] K. Hashizume，相对平凡对数典范对的极小模型理论，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 68 (2018)，第 5 期，2069–2107。[Has19] K. Hashizume，关于相对对数极小模型纲领的若干特殊类型，Manuscripta Math. 160 (2019)，第 3 期，285–314。[HH20] K. Hashizume 和 Z. Hu，关于对数丰沛对数典范对的极小模型理论，J. Reine Angew. Math. 767 (2020)，109–159。[Has22a] K. Hashizume，带极化的广义对数典范对的非消失定理，Sel. Math. New Ser. 28 (2022)，文章编号 77。[Has24] K. Hashizume，带缩放的对数极小模型纲领中对数丰沛对数典范对的有限性，Michigan Math. J. 74 (2024)，第 5 期，1053–1108。[Has25a] K. Hashizume，沿对数典范轨迹的正规对极小模型纲领，Forum Math. Sigma 13 (2025)，论文编号 e143，1–71。[Has25b] K. Hashizume，复解析情形下沿对数典范轨迹的正规对极小模型纲领，arXiv:2501.04057。[Hu17] Z. Hu，边界包含丰沛除子的对数典范对，arXiv:1712.07219。[Hu20] Z. Hu，对数典范平凡纤维化的模 b-除子的对数丰沛性，arXiv:2003.14379。[Hu23] Z. Hu，Kawamata 对数终端对典范模型的存在性，载于：I. Cheltsov、X. Chen、L. Katzarkov、J. Park（编），双有理几何、K ¨ahler–Einstein 度量与退化，BGKEMD 409 (2023)，Springer 数学与统计丛书论文集，Springer，Cham。[Hu25]Z. Hu，广义对的 P-平凡极小模型纲领、Zariski 分解与极小模型，arXiv:2501.07551。[JLX25] J. Jiao、J. Liu 和 L. Xie，关于具有 b- 对数丰沛 nef 部分的广义对数典范对（附 J. Han 的附录），Front. Math. (2025)。[KMM87] Y. Kawamata、K. Matsuda 和 K. Matsuki，极小模型问题导论，《代数几何，仙台（1985）》，283–360，Adv. Stud. Pure Math.，10 (1987)，North-Holland，阿姆斯特丹。[Kaw98] Y. Kawamata，对数典范除子的子伴随，II，Amer. J. Math. 120 (1998)，893–899。[Kol^{+}92] J. Koll´ar 等，代数三维簇的翻转与丰性，Ast ´erisque 第 211 号（1992）。´KM[J. Koll98] ar 和 S. Mori，代数簇的双有理几何，Cambridge Tracts in Math. 134 (1998)，剑桥大学出版社。´Kol[J. Koll13] ar，极小模型纲领的奇点，Cambridge Tracts in Math. 200 (2013)，剑桥大学出版社。与 S´andor Kov´acs 合作。´LT[V. Lazi 22] c 和 N. Tsakanikas，对数典范广义对的特殊极小模型纲领（附与 Xiaowei Jiang 合写的附录），Sel. Math. New Ser. 28 (2022)，文章编号 89。

[LLM23] J. Liu、Y. Luo 和 F. Meng，关于带叶丛的三维簇的全局 ACC，Trans. Amer. Math. Soc. 376 (2023)，第 12 期，8939–8972。[LX23] J. Liu 和 L. Xie，NQC 广义对数典范对的半丰性，Adv. Math. 427 (2023)，109126。[LMX24] J. Liu、F. Meng 和 L. Xie，KLT 簇上代数可积叶状结构的极小模型纲领，arXiv:2404.01559。[LX25] J. Liu 和 L. Xie，广义对的相对 Nakayama-Zariski 分解与极小模型，Peking Math. J. (2025)，第 8 期，299–349。[LM22] S. Lyu 和 T. Murayama，等特征零下优代数空间与解析空间的相对极小模型纲领，arXiv:2209.08732。[Mor25] J. Moraga，伪有效四维翻转的终止，Math. Z. 310 (2025)，第 4 期，论文编号 73，32。[Nak04] N. Nakayama，Zariski 分解与丰性，MSJ Memoirs 14 (2004)，日本数学会，东京。[Ou25] W. Ou，单有理紧致 K ¨ahler 流形的刻画，arXiv:2501.18088。[Sho92] V. V. Shokurov，三维簇对数翻转，附 Y. Kawamata 用英文撰写的附录，Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 56 (1992)，第 1 期，105–203（Y. Kawamata 的附录）。[TX24] N. Tsakanikasand L. Xie，关于对数典范广义对极小模型存在性的评注，Math. Z. 307 (2024)，文章编号 20。[Xie24] L. Xie，广义对的收缩定理，Algebraic Geometry and Physics 1 (2024)，第 1 期，101–124。Mathematical Sciences Research Center, Chongqing University of Technology, No.69Hongguang Avenue, Chongqing, 400054, China电子邮箱：zhengyuhu16@gmail.com
Department of Mathematics, Peking University, No. 5 Yiheyuan Road, Haidian District, Peking 100871, China电子邮箱：liujihao@math.pku.edu.cn