arXiv:2603.03822v1 [math.AC] 4 Mar 2026

图、轴代数及其自同构群

HANS CUYPERS

摘要。我们引入一类定义在域 $\mathbb{F}$ 上、与有向图相关的代数，其中所有边都标记为域 $\mathbb{F}$ 的非零元素。若所有标记都不等于 1，这些代数便是轴代数。我们确定了它们的融合律，证明几乎在所有情况下它们都是单代数，并在图的度和围长满足某些条件时确定其自同构群。

通过构造一类具有指定自同构群的此类图，我们能够为每个群 G 构造无穷多个单（轴）代数（具有固定的融合律），使得代数的自同构群同构于 G。

谨以此文献给 *Arjeh*、*Jonathan* 和 *Sergey*，祝贺他们分别迎来 *75* 岁和 *65* 岁生日

1. 引言

轴代数构成了一类不一定满足结合律的代数。这些代数定义为由一类称为幂等元的元素生成，这类元素称为轴，其左、右伴随映射均为半单，并满足所谓的融合律。这些律描述了轴的伴随映射的两个特征向量的乘积如何分解为特征向量。

更确切地说，设 A 是域 $\mathbb{F}$上的代数，A 可以是非交换或非结合的，并设 $x \in A$ 是一个元素，使得 x 是幂等元，即 $x^2 = x$；左伴随映射 $L_x : A \to A$ 定义为 $L_x(a) = xa$（对所有 $a \in A$ 均成立），右伴随映射 $R_x : A \to A$ 定义为 $R_x(a) = ax$（对所有 $a \in A$ 均成立），且二者均为半单。因此

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(L_x)} A_\lambda(L_x)$$

and

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}(R_x)} A_\lambda(R_x),$$

其中 $\mathrm{spec}(L_x)$ 和 $\mathrm{spec}(R_x)$ 分别是 L_x 和 R_x的谱（特征值集合）；对于 λ 属于 $\mathrm{spec}(L_x)$ 或 $\mathrm{spec}(R_x)$，子空间 $A_\lambda(L_x) = \{a \in A \mid L_x(a) = \lambda a\}$ 和 $A_\lambda(R_x) = \{a \in A \mid R_x(a) = \lambda a\}$ 是相应的特征子空间。我们称这样的 x 为 A的轴 。

一个融合律 是一个二元组 $(\mathrm{F}, \star)$，由 $\mathbb{F}$ 的一个子集 F 和一个映射 $\star$ （从 $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ 到 F 的幂集 2^{F}，采用中缀记法）构成。

一个二元组 (A, X)，由域 $\mathbb{F}$ 上的代数 A、其由轴组成的生成集 $X \subseteq A$，以及左、右融合律 $(\mathrm{F}_L, \star_L)$ 和 $(\mathrm{F}_R, \star_R)$ 构成，若对所有 $x \in X$ 均有下述性质，则称为满足左融合律 $(\mathrm{F}_L, \star_L)$ 和右融合律 $(\mathrm{F}_R, \star_R)$ 的轴代数：

(i) 元素 x 是一个轴，且 $\mathrm{spec}(L_x) \subseteq \mathrm{F}_L$ 和 $\mathrm{spec}(R_x) \subseteq \mathrm{F}_R$。

$\star$	1	0	η
1	1		η
0		$1,0$	η
η	η	η	$1,0$

$\star$	1	0	α	β
1	1		α	β
0		0	α	β
α	α	α	$1,0$	β
β	β	β	β	$1,0,\alpha$

表 1. J 型（η）和 M（α，β）的融合律

(ii) 对所有 $\lambda,\mu\in \mathrm{F}_L$，我们有

$$A_\lambda(L_x)A_\mu(L_x)\subseteq \bigoplus_{\rho\in\lambda\star_L\mu} A_\rho(L_x)$$

并且对所有 λ，$\mu\in \mathrm{F}_R$，我们有

$$A_\lambda(R_x)A_\mu(R_x)\subseteq \bigoplus_{\rho\in\lambda\star_R\mu} A_\rho(R_x).$$

如果轴集 X 可由上下文明确，则我们也称 A 为轴代数。如果 $(\mathrm{F}_L,\ \star_L)$ 和 $(\mathrm{F}_R,\ \star_R)$ 相同，则称代数 A 及其轴生成集X 满足融合律 $(\mathrm{F}_L,\ \star_L)$ =$(\mathrm{F}_R,\ \star_R)$。显然，当 A 是由 X中的轴生成的交换轴代数时，可以选择使这些融合律相同。

若轴 $x\in X$ 的特征值 1 对L_x 和 R_x 的重数均为一，则称其为本原，因此 $A_1(L_x)$ = $A_1(R_x)$ = x。

一般而言，轴代数会满足相当不规则的融合律，因而似乎很难发展出一般理论。然而，研究满足严格融合律且集合 F_L 与 F_R 较小的轴代数则更有希望。

若代数 A 是交换的，则对每个轴 a，我们有 $L_a = R_a$，并且可以将两个映射 $\star_L = \star_R$ 等同起来。

特别值得关注的是满足如下融合律的交换轴代数：*Jordan* 型 $\mathcal{J}(\eta)$ 或 *Monster* 型 $\mathcal{M}(\alpha,\beta)$。这些融合律见表 1。（在该表中，行和列以 $\mathcal{F}$ 的元素为标记。对于 λ，$\mu\in\mathcal{F}$，我们发现 $\lambda\star\mu$ 是表中 λ，μ 项所给出的元素集合。）对满足这些特定融合律的（交换）轴代数的兴趣，来自与（三个）Fischer散在群以及 Monster 相关的例子。

事实上，（交换）轴代数由 Hall、Shpectorov 和 Rehren 在 [18] 中引入，其重点是 Jordan 型 $\mathcal{J}(\eta)$ 的、由一组本原轴生成的轴代数。我们对轴代数的定义将这一概念推广到可能的非交换代数。Hall、Shpectorov 和 Rehren 已经证明，这些交换轴代数是（作为商的）Matsuo 代数，它们与 3-换位群相关，其中包括三个 Fischer散在群，或者 $\eta = \frac{1}{2}$。（见 [18]。）在后一情形中，分类仍然是开放的。出现的不仅有 Matsuo 代数，还有那些由本原幂等元生成的 Jordan 代数，因为此时它们的轴分解等于 Peirce 分解，该分解为 $\mathcal{J}(\frac{1}{2})$ 型。在魔群型轴代数中，我们找到了与 Monster 相关的 Griess 代数。

与此同时，其他几类轴代数也已得到研究，它们与 3-传递群有关：[18, 21, 3], Majorana 代数 [20], Chevalley 群 [11], 码[7], Steiner 系统 [13], 或几何 [9]。Rowen 和 Segev 在 [24, 25, 26]中研究了非交换轴代数。

本文研究一类由边标记有向图定义的（轴）代数，这些图没有自环或重边。有向图的底层图 Γ 是定义在该有向图 Γ的顶点 Γ 上的（普通）图，其边为集合 $\{x, y\}$，其中 (x, y) 是该有向图 Γ的一条边。当且仅当图 Γ 的底层图是连通图时，称该图为弱连通。

在全文中，$\mathbb{F}$ 表示一个域，而 $\Gamma = (X, E)$ 表示顶点集为 X 、有向边集为 E 的有向图，但不含自环或重边。E 中的边均标记为来自 $\mathbb{F}$的非零元素。边 (x, y) 的标记记作 $\alpha_{x,y}$。

代数 $A := A_\Gamma$ 是向量空间 $\mathbb{F}X$ ，其基为 X ；对所有 $x, y \in X$ ，双线性乘积定义为

$$xy = \begin{cases} x & \text{if } x = y, \\ \alpha_{x,y}(x + y) & \text{if } (x, y) \text{ is an edge }, \\ 0 & \text{if } (x, y) \text{ is not an edge.} \end{cases}$$

代数 A_Γ 是交换的，当且仅当对于所有边 (x, y)，$\in E$ 也有 $(y, x) \in E$以及 $\alpha_{x,y} = \alpha_{y,x}$。

如果 $\Gamma^\intercal$ 是 Γ的反向图，即具有相同顶点集以及边 (y, x) 的图，其中 $(x, y) \in E$，那么代数 $A_{\Gamma^\intercal}$（其中 $\Gamma^\intercal$的一条边 (x, y) 的标记为 $\alpha_{y,x}$ ）是代数 A_Γ的对代数。

在我们的第一个结果中，我们确定了这类代数的结构，并证明当所有标记均不为 1 时，它们是轴代数。

定理 1.1。设 $\mathcal{F}$ 是域 $\mathbb{F}$ 的一个子集，且包含 1。令 $\Gamma = (X, E)$ 为一个弱连通有向图，其边由$\mathcal{F}$ 中不同于0的元素标记。则有如下结论：

(i) 除非发生以下情形之一，否则代数 A_Γ 在 $\mathbb{F}$上是单代数：*(a)* Γ 包含一个完全子图 $\Delta = (Y, F)$，其中 $|Y| > 1$，且所有标记均等于 $\frac{1}{2}$。如果 x 是不属于 Δ 的顶点，并且对于 Δ中的某个顶点 y_0，E 中存在一条边 (x, y_0) 或 (y_0, x)，那么对于 Δ 中的所有顶点 y，在 E中既有 (x, y)，也有 (y, x)；此外，还有 $\alpha_{x,y} = \alpha_{x,y_0}$ 以及 $\alpha_{y,x} = \alpha_{y_0,x}$。在此情形下，$A_\Gamma$ 具有如下理想 $\{\sum_{y\in Y} \lambda_y y \in A \mid \sum_{y\in Y} \lambda_y = 0\}$。*(b)* Γ 是一个有限完全图，且所有标记均等于 $\frac{1}{2-|X|}$；在此情形下，$\langle \sum_{x\in X} x \rangle$ 是一个理想。

(ii) 代数 A_Γ 是由 X 中的轴生成的轴代数，满足表 $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ 中的 2 所示的左右融合律，前提是没有标记等于 1，且 $0 \in \mathcal{F}$ 在 Γ 不完全时成立。

$\star$	1	α	$\dots$	β	(0)
1	1	α		β	0
α	α	$1, \alpha$		$1, \alpha, \beta$	$1, \alpha, 0$
$\vdots$					
β	β	$1, \alpha, \beta$		$1, \beta$	$1, \beta, 0$
(0)	0	$1, \alpha, 0$		$1, \beta, 0$	0

表 2. 图类型 G(F) 的融合律，其中 F $=\{1, \alpha, \dots, \beta, (0)\}$。元素 0 置于括号中，因为它可能不是特征值。当任意两个顶点相邻时即为此情形。

上述定理意味着，即使在 $\mathcal{F} = \{0,1,\alpha\}$（其中某个固定的$\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0,1\}$）的情况下，图类型 $\mathsf{G}(\mathcal{F})$ 的轴代数也有着千差万别的形式。

根据代数 $A = A_\Gamma$ 的定义可直接得出，标记图 Γ 的自同构群可单射地嵌入代数 A 的自同构群 $\mathrm{Aut}(A)$ 中。群 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 不一定是代数 A的全自同构群。

不过，我们能够证明以下两个关于对称有向图 $\Gamma = (X, E)$ 的结果（这意味着，如果 $(a, b) \in E$，那么 $(b, a) \in E$ 也成立），并给出一些条件，使得 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 与 $\mathrm{Aut}(A)$ 同构。

设 $\Gamma = (X, E)$ 是一个对称有向图。定义顶点 v 的度 δ_v为其入度和出度；对于对称有向图，这二者相等。因此，$\delta_v = |\{w \in X \mid (v, w) \in E\}|$。此外，我们用 $k_{\min}$ 和 $k_{\max}$ 表示度 δ_v 的最小值和最大值；如果它们存在，则取值为 $v \in X$。否则，它们定义为 ∞。

Γ （以及 Γ）的围长 是 Γ 中最小圈的长度（若存在这样的圈）。否则将其设为 ∞。

定理 1.2. 设$\mathcal{F}$ 是域 $\mathbb{F}$的一个子集。设 Γ 是一个边标记弱连通对称有向图，其标记取自 $\mathcal{F} \setminus \{0, 1\}$。设 A_Γ 为相应的 $\mathbb{F}$-代数。设 Γ 具有有限围长 g。

若 $2 < k_{\min} < g - 2$ 与 $k_{\max} \le$ 均$\min(2(k_{\min} - 1)\ g - 3)$，则 $\mathrm{Aut}(A_\Gamma)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$，即标记图 Γ的自同构群。

在 $k_{\min} = k_{\max} = 3$ 与 $g \ge 6$ 的最小情形中，我们已经遇到满足该定理假设的各种有趣的图。事实上，设 Π是一个广义 n-边形，具有 $n \ge 3$，每条直线上有三个点，每个点上有三条直线，而 Γ为其有向关联图，即以 Π 的点与直线为顶点、以满足 x 是直线 y 上的一个点或 x 是过点 y的一条直线的点对 (x, y) 为边的图。则 Γ 的价为 $k_{\min} = k_{\max} = 3$，围长为 $g = 2n \ge 6$。对于边 (x, y)（其中 x是一个点）用元素 $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ 所作的每一种标记，以及对每条满足 x 为直线且带有 $\beta \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ 的边 (x, y)，我们得到一个代数 A_Γ，其自同构群同构于 Γ的自同构群。若 $n = 3$与 $\alpha \ne \beta$，则该自同构群同构于 $\mathrm{PSL}_3(2)$；而若 $\alpha = \beta$，则自同构群为 $\mathrm{PSL}_3(2) : 2$。对于 $n = 4$ 与 $\alpha \ne \beta$，我们发现自同构群同构于 Sym_6，而对于 $n = 6$ 则同构于 $\mathrm{G}_2(2)$。在 $\alpha = \beta$ 的情形中，这些群的大小是其两倍。注意，代数 A_Γ 是交换的当且仅当 $\alpha = \beta$。

在上述定理中，我们要求掌握顶点的所有度数信息，并将它们与图的围长联系起来。考虑图Γ 或部分线性空间 Δ的有向关联图后，我们还能得出更多结论。该图的顶点集由 Δ 的顶点和边组成，边则是形如(x, e)和(e, x)的点对，其中 x 是 Δ的边或直线 y 上的一个顶点。

定理 1.3。 设$\mathcal{F}$ 是域 $\mathbb{F}$的一个子集。设 Δ 是一个所有顶点的度至少为三的连通图，或一个每条直线上有三个点且每个点至少位于四条直线上的连通部分线性空间。设 Γ 是 Δ的有向关联图。假设 Γ 的边标记为$\mathcal{F} \setminus \{0,1\}$ 中的元素，或者在 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ 的情形下标记为1。

于是，$\mathrm{Aut}(A_\Gamma)$ 与$\mathrm{Aut}(\Gamma)$同构，后者是标记图 Γ 的自同构群。

由于对 Δ 的限制相当宽松，我们可以将我们的结果应用于许多有趣的图或部分线性空间 Δ。相关示例请参阅第 5 节。

我们注意到，上述定理中的图不必是有限图，但在命题1.2中，这些图的顶点当然都具有有限度。

Popov [23] 提出了这样一个问题：每个有限群是否都是某个有限维单代数的自同构群？他与 Gordeev [16] 对于足够大的域给出了肯定的回答。

在 [8] Costoya、Muñoz、Tocino 和 Viruel 证明，对于每个有限群 G，都存在一个有限维单演化代数，其自同构群与 G同构。他们要求域 $\mathbb{F}$ 的大小大于该群的阶的两倍。对于特征为 0 的域， [29] 也得到了相同的结果。

利用 Frucht 的著名定理 [14, 15]——每个有限群 G 都是某个有限图的自同构群——以及 de Groot [10] 和 Sabidussi [28]，将该定理推广到无限群和无限图的结果，我们可以证明：

定理1.4。设 G 是一个群， $\mathbb{F}$ 是一个域。

(i) 若 $\mathbb{F}$ 至少含有三个元素，则存在无穷多个两两不同构的有向图 $\Gamma = (X, E)$，其边以 $\mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ 中的元素标记，使得 A_Γ 是 $\mathbb{F}$ 上由一组图类型为 $G(F)$ 的本原幂等元 X 生成的交换单轴代数，其中 F 是包含 0、1 及所有标记的集合，且 G 同构于 $Aut(A_\Gamma)$。*(ii)* 若 $\mathbb{F}$ 至少含有四个元素，则存在无穷多个两两不同构的有向图 $\Gamma = (X, E)$，其边以 $\mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ 中的元素标记，使得 A_Γ 是 $\mathbb{F}$ 上由一组图类型为 $G(F)$ 的本原幂等元 X 生成的非交换单轴代数，其中 F 是包含 0、1 及所有标记的集合，且 G 同构于 $Aut(A_\Gamma)$。*(iii)* 若 $\mathbb{F}$ 仅有两个元素，则存在无穷多个两两不同构的有向图 Γ，其边以 1 标记，使得 A_Γ 在 $\mathbb{F}_2$ 上是单的，且其自同构群同构于 G。

此外，当 G 是有限群时，上述陈述中的图 Γ 可以假设为有限图，这意味着代数 A_Γ 是有限维的。

Gorshkov, McInroy、Shumba 和 Shpectorov 证明了 [17] 若$1_2 \notin \mathcal{F}$，则融合律定义在$\mathcal{F}$ 上的有限维交换轴代数的自同构群是有限群。上述命题1.4表明，每个有限群都是某个有限维交换轴代数的自同构群，这为该结果提供了一个对应结论。

本文结构安排如下。下一节中，我们针对弱连通有标号有向图 Γ，考察代数 A_Γ 并找出所有可能的理想，由此证明命题1.1的第一部分。第3节确定命题1.1中得到的融合律。

第4 节研究代数 a中的幂等元 A_Γ ，其中图$\Gamma = (X, E)$ 满足 L_a 和 R_a 作为从 A 到自身的线性映射具有小秩。特别地，我们推导出该秩与图的围长及其顶点的度之间的判定准则，从而能够得出元素Γ 属于 a 的结论。 X这些研究构成了命题1.2和命题1.3证明的核心，相关证明见第5节。

在最后一节6 我们由命题 1.4推出命题1.3。

致谢。作者谨此感谢 Yoav Segev 对本文早期版本提出的若干建设性意见。此外，Arjeh Cohen 和 Jonathan Hall 于2024年庆祝了他们的 75^{th} 岁生日。Sergey Shpectorov 庆祝了他的 65^{th}岁生日。他们的数学造诣与友谊一直激励着我开展一般性的研究，尤其是撰写本文。最后，我们感谢匿名审稿人提出的若干意见，这些意见改善了本文的表达。

2. 由图构造的代数

设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$\mathbf{F} \subseteq \mathbb{F}$ 是一个满足 $1 \in \mathbf{F}$ 的集合，并且 $\Gamma = (X, E)$ 是一个弱连通有向图，其顶点集为 X，边集为 E，且所有边均以集合 $\mathbf{F}$ 中非零元素作为标记。（条件 $1 \in \mathbf{F}$ 将在后续章节中发挥作用。）

用 $A := A_\Gamma$ 表示向量空间 $\mathbb{F}X$ 上的代数，其基为 X，双线性乘积定义如下：

$$xy = \begin{cases} x & \text{if } x = y, \\ \alpha_{x,y}(x+y) & \text{if } (x,y) \text{ is an edge with label } \alpha_{x,y}, \\ 0 & \text{if } (x,y) \text{ is not an edge,} \end{cases}$$

对所有 $x, y \in X$。

若 $a \in A$，则由于 X 是 A的基，我们得到 $a = \sum \lambda_x x$，其中 $\lambda_x \in \mathbb{F}$。用 $\text{supp}(a) = \{x \in X \mid \lambda_x \neq 0\}$表示满足 $\lambda_x \neq 0$的元素 $x \in X$ 组成的集合。它称为 a的支撑。请注意，此支撑是 X的有限子集。

对于 $x, y \in X$，我们记作 $x \sim y$，并称 y 与.....相邻（或为 x 的邻点）当且仅当 x 与 y 不同，且 (x, y) 是一条边；用 $x \not\sim y$ 表示 x 与 y 不同且不相邻。

例 2.1。设 G 是一个群，S 是 G 的一个生成元集。考虑将 Γ 视为 G 关于 S 中生成元的凯莱图 。这是一个顶点集为 $X = G$ 的带标号有向图，其边为形如 (g, gs) 的点对，标记为 s，其中 $g \in G$ 且 $s \in S$。

设 $\mathbb{F}$ 是一个域，且 $\alpha : S \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 是一个映射。那么对于所有 $g \in G$ 和 $s \in S$，我们可以将 Γ 中一条边的标记 s 替换为 $\alpha(s)$。由此得到的标记图 Γ 的代数 A_Γ 以群 G 为自同构群，该群通过左乘作用于 X 中的基元素上。

引理 2.2. 如果 Γ包含一条边，那么 A 是非结合的。

证明。假设 (x, y) 是 Γ中的一条边。那么在 A_Γ 中我们得到

$$(xx)y = xy = \alpha_{x,y}(x+y),$$

当

$$x(xy) = x(\alpha_{x,y}(x+y)) = \alpha_{x,y}x + \alpha_{x,y}^2(x+y).$$

因此，A 具有结合性意味着 $\alpha_{x,y} = \alpha_{x,y} + \alpha_{x,y}^2$，从而 $\alpha_{x,y} = 0$，这与我们的假设相矛盾。□

我们将确定代数 $A = A_\Gamma$的结构。在此之前，我们先给出任意元素 $a \in A$ 与来自 X的元素进行乘法时的若干性质，这些性质将在本文后续部分中直接使用。

引理 2.3。令 a 为 A 和 $x \in X$中的一个元素。则有如下结论：

(i) $supp(ax)$ 等于 $\{z \in supp(a) \mid z \sim x\}$ 或 $\{z \in supp(a) \mid z \sim x\} \cup \{x\}$，且 $supp(xa)$ 等于 $\{z \in supp(a) \mid x \sim z\}$ 或 $\{z \in supp(a) \mid x \sim z\} \cup \{x\}$。*(ii)* 如果对于 $supp(a)$ 中唯一的元素 z，$x \notin supp(a)$ 位于边 (x, z) 上，则 $supp(xa) = \{x, z\}$。如果对于 $supp(a)$ 中唯一的元素 z，x 位于边 (z, x) 上，则 $supp(ax) = \{x, z\}$。

证明。这直接由乘积的定义得出。 □

若图 Γ 的导出子图 $\Delta = (Y, F)$（其标记继承自 Γ）满足以下条件，则称其为 理想子图：$|Y| \geq 2$，Y 中的所有顶点彼此相邻，Δ 的所有边均标记为 1_2；此外，对于每个顶点 $x \in X \setminus Y$，顶点 x 要么与 Y 中的任何顶点都不相邻，要么与其中所有顶点相邻；而每个顶点 $y \in Y$ 要么与 x 相邻，要么与其中任何顶点都不相邻。最后，对于固定的 $x \in X \setminus Y$，所有满足 $y \in Y$ 的边 (x, y) 具有相同的标记 α_x，而边 (y, x) 的标记也都相同，均为 β_x。

给定图 $\Gamma = (X, E)$ 的理想子图 $\Delta = (Y, F)$，我们将图 Γ/Y 定义为如下图：其顶点集为 $(X \setminus Y) \cup \{\Delta\}$，边为 (x, y)，其中 x 和 y 是来自 $X \setminus Y$ 的顶点，且在 Γ 中相邻，标记为 $\alpha_{x,\, y}$；以及 (x, Δ)，其中 $x \in X \setminus Y$ 与一个标记为 α_x 的顶点相邻；还有标记为 β_x 的 (Δ, x)。我们将子图 Δ 收缩为一个点。

引理 2.4. 设 $\Delta = (Y, F)$ 是 Γ 的理想子图。那么其任意子空间

$$I_Y = \langle \sum_{y \in Y} \lambda_y y \in A \mid \sum_{y \in Y} \lambda_y = 0 \rangle$$

都是 A 的双边理想。

代数 A/I_Y 与 $A_{\Gamma/Y}$ 同构。

证明. 固定一个理想子图 $\Delta = (Y, F)$，并设 $z \in I_Y$。因此 $z = \sum \lambda_y y$ 使得$_{y \in Y}$

$$\sum_{y \in Y} \lambda_y = 0.$$

现在考虑一个元素 $x \in X$。若 $x \in Y$，则

$$\begin{aligned} xz &= \lambda_x x + \sum_{y \in Y, y \neq x} \lambda_y (xy) \\ &= \lambda_x x + \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y, y \neq x} \lambda_y (x + y) \\ &= \lambda_x x + \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y, y \neq x} \lambda_y x + \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y, y \neq x} \lambda_y y \\ &= \tfrac{1}{2} \lambda_x x + \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y, y \neq x} \lambda_y x + \tfrac{1}{2} \lambda_x x + \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y, y \neq x} \lambda_y y \\ &= \tfrac{1}{2} (\sum_{y \in Y} \lambda_y) x + \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y} \lambda_y y \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{y \in Y} \lambda_y y = \frac{1}{2} z \in I_Y. \end{aligned}$$

如果 $x \notin Y$，那么 $xz = 0$ 或

$$\begin{aligned} xz &= \sum_{y \in Y} \lambda_y \, xy \\ &= \sum_{y \in Y} \alpha_x \lambda_y (x + y) \\ &= \alpha_x (\sum_{y \in Y} \lambda_y) x + \alpha_x \sum_{y \in Y} \lambda_y y \\ &= \alpha_x \sum_{y \in Y} \lambda_y y = \alpha_x z \in I_Y. \end{aligned}$$

因此， I_Y 的任意子空间都是 A_Γ的左理想。类似地，我们发现 I_Y 的每个子空间都是 A_Γ的右理想。显然， A/I_Y 与 $A_{\Gamma/Y}$同构。□

引理 2.5。 设 Γ 的任意两个顶点都相邻，且 Γ 的所有边均标记为 $\frac{1}{2-|X|}$。则 $\langle \sum_{x\in X} x\rangle$ 是 A的双边理想。

证明。 令 $x \in X$ 和 $\alpha = \frac{1}{2-|X|}$ 则

$$\begin{aligned} x(\sum_{y\in X} y) &= x + \sum_{y\in X, y\neq x} xy \\ &= x + \sum_{y\in X, y\neq x} \alpha(x+y) \\ &= x + (|X|-1)\alpha x + \alpha \sum_{y\in X, y\neq x} y \\ &= (|X|-1)\alpha x + (1-\alpha)x + \alpha \sum_{y\in X} y \\ &= \alpha \sum_{y\in X} y. \end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$(\sum_{y\in X} y)x = \alpha \sum_{y\in X} y.$$

由于 X 生成 A，我们确实得到 $\sum_{x\in X} x$ 是 A的双边理想。 □

定理 2.6。 代数 A 是单代数，除非满足以下条件之一：

(i) 存在一个理想子图 Δ，其顶点集为 Y，属于 Γ，且 I_Y 是 A_Γ 的理想。

(ii) Γ 是有限团，且所有边具有相同的标记 $\frac{1}{2-|X|}$，并且$\langle \sum_{x\in X} x\rangle$ 是一个1维理想。

我们通过以下引理证明这个定理。先固定记号。设 I 是 A 的非平凡双边理想，即 $I \neq \{0\}$。

引理 2.7. 若 $X \cap I \neq \emptyset$，则 $I = A$。

证明。 假设存在一个元素 $x \in X \cap I$。那么，我们找到 $xy - \alpha_{x,y} x = \alpha_{x,y} y \in I$，对于 $y \in X$，满足 $(x, y) \in E$ 或 $yx - \alpha_{y,x} x = \alpha_{y,x} y \in I$，对于 $y \in X$，满足 $(y, x) \in E$。利用 Γ 的弱连通性，我们找到 $X \subseteq I$ 和 $I = A$。□

现在假设 $X \cap I = \emptyset$。令 $a = \sum \lambda_y y \in I$为一个元素，使得 $|\mathrm{supp}(a)|$ 在 $I \setminus \{0\}$ 的所有元素中最小。注意， $|\mathrm{supp}(a)| > 1$。

于是对于 $x \in X$，我们发现，对所有 $\beta \in \mathbb{F}$， $xa - \beta a$ 和 $ax - \beta a$ 都属于 I。我们将对 x 和 β作特定选择，并利用这一点。

引理 2.8。 以下情况之一成立。

(i) 存在一个 $\lambda \in \mathbb{F}^*$，具有 $a = \lambda \sum_{y\in \mathrm{supp}(a)} y$。对于$\mathrm{supp}(a)$的任意两个顶点 x、y，我们找到$(x, y) \in E$，其标记为$2-|\mathrm{supp}(a)| \neq 2$ 和 $|\mathrm{supp}(a)| > 2$。*(ii)* 对于$\mathrm{supp}(a)$的任意两个顶点 x、y，我们找到$(x, y) \in E$，其标记为$1\,2$。此外，$\sum_{y\in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = 0$ 在 $\mathbb{F}$中。

证明。 设 $x \in \mathrm{supp}(a)$。则我们找到

$$\begin{aligned} xa - \beta a &= \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y (xy - \beta y) \\ &= \lambda_x (1-\beta)x + \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (xy - \beta y) - \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \not\sim y} (\beta \lambda_y y) \\ &= \lambda_x (1-\beta)x + \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (\alpha_{x,y} x + (\alpha_{x,y} - \beta) y) - \beta \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \not\sim y} \lambda_y y. \end{aligned}$$

这个元素是 I 的一个元素。

如果 x 在 $\mathrm{supp}(a)$ 中没有邻点，那么 $xa = \lambda_x x \in I$，这与我们关于 $X \cap I = \varnothing$ 的假设相矛盾。因此， x 在 $\mathrm{supp}(a)$ 中确实有邻点。但取 $\beta = 0$ 后，我们发现 $\mathrm{supp}(xa)$ 包含 x 在 $\mathrm{supp}(a)$ 中的邻点以及可能还有 x。由于 $|\mathrm{supp}(xa)| \geq |\mathrm{supp}(a)| > 1$，根据 $|\mathrm{supp}(a)|$ 的极小性，我们发现所有 $y \in \mathrm{supp}(a)$ 要么等于 x，要么与 x 相邻。改变 x 后，我们发现 $\mathrm{supp}(a)$ 内的任意两个顶点都相邻。

此外，当对某个不同于 x 的 $z \in \mathrm{supp}(a)$ 取 $\beta = \alpha_{x,z} \in F$ 时，我们发现其支撑

$$xa - \alpha_{x,z} x = \lambda_x (1 - \alpha_{x,z}) x + \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (\alpha_{x,y} x + (\alpha_{x,y} - \alpha_{x,z}) y)$$

包含于 $\mathrm{supp}(a) \setminus \{z\}$ 中。因此，根据 $|\mathrm{supp}(a)|$ 的极小性，我们发现

$$\lambda_x (1 - \alpha_{x,z}) x + \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), y \sim x} \lambda_y (\alpha_{x,y} x + (\alpha_{x,y} - \alpha_{x,z}) y) = 0,$$

这意味着 $\alpha_{x,y} = \alpha_{x,z}$ 对于所有不同于 x 和 $y \in \mathrm{supp}(a)$ 的情形

$$\lambda_x (1 - 2\alpha_{x,z}) + \alpha_{x,z} \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = 0.$$

考虑到

$$ax - \alpha_{z,x} x = \lambda_x (1 - \alpha_{z,x}) x + \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (\alpha_{y,x} x + (\alpha_{y,x} - \alpha_{z,x}) y)$$

我们还发现 $\alpha_{y,x} = \alpha_{z,x}$ 对于所有不同于 x 和 $y \in \mathrm{supp}(a)$ 的情形

$$\lambda_x (1 - 2\alpha_{z,x}) + \alpha_{z,x} \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = 0.$$

特别地，如果 $\alpha_{x,z} \neq \frac{1}{2}$ 且 $\alpha_{z,x} \neq \frac{1}{2}$，那么

$$\lambda_x = \frac{\alpha_{x,z}}{2\alpha_{x,z} - 1} \cdot \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = \frac{\alpha_{z,x}}{2\alpha_{z,x} - 1} \cdot \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y$$

并且，由于 $\lambda_x \neq 0$，我们得到

$$\frac{\alpha_{x,z}}{2\alpha_{x,z} - 1} = \frac{\alpha_{z,x}}{2\alpha_{z,x} - 1},$$

由此我们推出 $\alpha_{x,z} = \alpha_{z,x}$。因此，在这种情况下，我们可以得出结论：$\mathrm{supp}(a)$ 的所有边都具有相同的标记 α，并且 $\lambda_y = \lambda_x$ 对所有 $y \in \mathrm{supp}(a)$ 均成立。因此， $|\mathrm{supp}(a)|$ 的极小性 | 意味着 $\lambda_x(1-2\alpha) + \alpha|\mathrm{supp}(a)|\lambda_x = 0$，由此我们推出 $\alpha = \frac{1}{2 - |\mathrm{supp}(a)|}$。

注意，这也意味着 $|\mathrm{supp}(a)| > 2$。

And if $\alpha_{x,z} = \frac{1}{2}$ or $\alpha_{z,x} = \frac{1}{2}$, then $\sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = 0$ and $\alpha_{x,z} = \alpha_{z,x} = \frac{1}{2}$. So, in both

在这些情形下，我们发现 $\mathrm{supp}(a)$ 中任意两个顶点都相邻，且所有边都具有相同的标记。□

引理 2.9。 假设$\mathrm{supp}(a)$ 是 X 的真子集。那么，$\mathrm{supp}(a)$上的导出子图是一个理想子图。

证明。 假设 supp(a) 是 X 的真子集。那么，考虑一个不属于 supp(a) 的元素$x \in X$，但它与 supp(a) 中至少一个顶点相邻，设该顶点为z。于是对于 $\beta \in \mathbb{F}$，我们得到

$$\begin{aligned} xa - \beta a &= \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y (xy - \beta y) \\ &= \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (xy - \beta y) - \beta \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \not\sim y} \lambda_y y \\ &= \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (\alpha_{x,y} x + (\alpha_{x,y} - \beta) y) - \beta \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \not\sim y} \lambda_y y. \end{aligned}$$

令 $\beta = 0$，我们发现这个乘积非零，而 |supp(a)| 的极小性意味着 x 至少与 supp(a) 中除一个以外的所有顶点相邻。

现在假设 x 与 supp(a) 中除一个以外的所有顶点相邻。设 $u \in$supp(a) 是唯一一个与 x 不相邻的顶点。那么，由于 $xa \neq 0$，xa 的支撑与 a 的支撑大小相同。特别地，命题 2.8 也适用于 supp(xa)，因此对于所有不同于 u 的 $y \in$supp(a)，我们有 $\alpha_{x,y} = \alpha_{x,z}$。若 $\alpha_{x,z}$ 和 $\alpha_{z,u}$ 均不同于 1 2，则由命题 2.8 分别应用于 a 和 xa，可设（相差一个标量） $a = \sum_{y} y$ 和 $xa = \lambda \sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} y \in \mathrm{supp}(xa)$

–

对于某个非零的 $\lambda \in \mathbb{F}$。但此时 $xa - \lambda a = \lambda(x - u)$ 和 $x(x - u) = x \in I$，这与我们的假设相矛盾。因此，$\alpha_{x,z}$ 或 $\alpha_{z,u}$ 中至少有一个等于 1 2。 –

若 |supp(a)| > 2，则 supp(a) 与 supp(xa) 至少有两个顶点相交，这意味着它们并集内的所有边都具有相同的标记 1 2。我们发现 $xa - \frac{1}{2}a \in I$的支撑大小小于 |supp(a)|，因此它为 0。但此时

$$\sum_{y \in \mathrm{supp}(a), y \sim x} \lambda_y = \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), y \neq u} \lambda_y = 0.$$

上文还发现 $\sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = 0$，因此 $\lambda_u = 0$，这是不可能的。

在 |supp(a)| = 2 的情况下，不失一般性，我们可以假设 $a = z + \lambda_u u$。但此时 $xa = \alpha_{x,z}(x + z)$，且 $x + z \in I$。因此 $x(x + z - a) = x(x - \lambda_u u) = x \in I$ 也成立，这与我们的假设相矛盾。

我们得出，x 始终与 supp(a) 中的顶点全都不相邻，或与它们全都相邻。

因此，假设 $x \in X$ 不属于 supp(a)，但 x 与某个固定的 $z \in$supp(a) 相邻，因而与所有 $y \in$supp(a) 都相邻。令 $\beta = \alpha_{x,z}$，代入方程

$$xa - \beta a = \sum_{y \in \mathrm{supp}(a), x \sim y} \lambda_y (\alpha_{x,y} x + (\alpha_{x,y} - \beta) y),$$

我们发现 $xa - \beta a \in I$ 的支撑大小至多为 |supp(a)|。

若 $xa - \beta a = 0$，则对于所有 $y \in$ supp(a)，都有 $\alpha_{x,y} = \beta = \alpha_{x,z}$，并且

$$0 = xa - \beta a = \Big(\sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y \Big) x \in I.$$

因此 $\sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} \lambda_y = 0$。此外，若对于某个 z，$\alpha_{z,z'} \neq \frac{1}{2}$，且 $z' \in$ supp(a)，那么根据 $u = \lambda \sum_{y \in} \mathrm{supp}(a) y$。命题 2.8，我们有 $a_{z,z'} = {}_{2-|}{}^{1}\,\mathrm{supp}(a)|$，并且存在一个 $\lambda \in \mathbb{F}^*$，使得 $\sum_{y \in \mathrm{supp}(a)} y$。因此，在 $\mathbb{F}$ 中，$\lambda|\mathrm{supp}(a)| = 0$，这与 $\alpha_{z,z'} \neq 0$, 1 2 矛盾。因此，对于所有 $y, y' \in$supp(a)，都有 $\alpha_{y,y'} = \frac{1}{2}$，且我们发现 supp($a$) 是 Γ 的一个理想子图。 –

如果 $xa - \beta a \neq 0$，那么 $xa - \beta a$ 也是 I的一个元素，其最小支撑等于 $\{x\} \cup \mathrm{supp}(a) \setminus \{z\}$。但是，根据命题 2.8，我们有 $\alpha_{x,y} = \alpha_{x,y'}$ 对所有 y，$y' \in$ supp(a) 不同于 z 的情形均成立。因此，对于固定的 $z' \in$supp(a) 且 z' 不同于 z

我们发现 $\alpha_{x,\ z'} \neq \alpha_{x,\ z}$ 以及 $xa - \alpha_{x,\ z'}a \neq 0$ 的支撑包含于 $\{x,\ z\}$ 中。由于 $xa - \alpha_{x,\ z'}a \neq 0$，我们发现 $\mathrm{supp}(xa - \alpha_{x,\ z'}a) = \{x,\ z\}$ 的大小为 2。但是，$\mathrm{supp}(a) = \{z,\ z'\}$ 且 $\mathrm{supp}(xa - \beta a) = \{x,\ z\}$。

由于 $xa - \beta a$ 以及 $xa - \alpha_{x,\ z'}a$ 属于 I 且支撑大小为 2，由命题 2.8 可知，边（$x,\ z$）和（$x,\ z'$）的标记均为 1_2，这与它们具有不同标记相矛盾。

如果不存在这样的 $x \in X$：它不属于 $\mathrm{supp}(a)$，却与 $\mathrm{supp}(x)$ 中的某个元素相邻，那么由 Γ 的弱连通性可知，存在一个 $x \in X$，但它不属于 $\mathrm{supp}(a)$，且存在一个与 x 相邻的 $z \in \mathrm{supp}(a)$。考虑形如 $ax - \beta a$ 的乘积，可得到与上述相同的结论。□

命题2.6现在得证。事实上，如果 $\mathrm{supp}(a) = X$，那么命题 2.8 显然意味着，要么我们处于定理结论的情形 (ii)，且由命题 2.5 可知 $\sum_{x\in X} x$ 是一个理想；要么我们处于情形 (i)，且 X 是一个理想子图，I_X 是 A 的一个理想，如命题 2.4 所述。如果 $\mathrm{supp}(a) \neq X$，那么命题 2.9 意味着 $\mathrm{supp}(a)$ 是一个理想子图，并且由命题 2.4 可知，$I_{\mathrm{supp}(a)}$ 是 A 的一个真理想。

供以后使用，我们提及命题2.6的如下显然推论：

推论2.10. 若 Γ 是弱连通的，且至少有三个顶点，但没有三个顶点的完全子图，则 A 是单的。

注记2.11. 设 $\Gamma = (X,\ E)$是一个有限完全图，其中每条边均标记为 $\alpha = \frac{1}{2-|X|}$，这里 $|X| \neq 2$ 属于~~$\mathbb{F}$~~，且 $A = A_\Gamma$。则代数 A/I，其中$I = \sum x$由元素 $x = (n-1)x + I$ 生成，且 $x \in X$ 以及 $n = \dim(A/I) = \overline{x\in X}|X| - 1$。

若 $a \neq b \in X$，则

$$\begin{aligned} \overline{a}^2 &= (n-1)\overline{a}, \text{ and} \\ \overline{a}\overline{b} &= -(\overline{a} + \overline{b}). \end{aligned}$$

代数 A/I 已由Harada [19] 与Allen [2, 1] 结合2-传递群进行了研究。若特征 p 之于 $\mathbb{F}$ 不整除 $|X|$，则Allen证明 A_Γ/I 的自同构群同构于对称群Sym_{n+1}，该群亦同构于图 Γ的自同构群。

如果 p 的 $\mathbb{F}$ 特征整除 $|X|$，那么 $\frac{1}{2-|X|} = \frac{1}{2}$，~~代数~~ A不仅有一个一维理想，而且 X 是一个理想子图，I_X 是一个余维数为1的理想。Allen [2, 1] 证明代数 A/I 是一个特殊Jordan代数（也是一个Bernstein代数），其自同构群同构于一个分裂扩张$\mathbb{F}^n$:$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$。

这确实表明，代数 $A = A_\Gamma$ 的自同构群可能比图 Γ的自同构群大得多。

3. 由图构造的代数的幂等元与融合规则

与前面一样，设F是域 $\mathbb{F}$ 的一个子集，其中包含1和至少另一个元素，并且 $\Gamma = (X,\ E)$是一个弱连通有向图，其顶点集为 X，边集为 E，所有边均标记为集合F中的非零元素，并考虑代数 $A := A_\Gamma$。

命题 3.1。设 x 是 X 中的一个元素。假设尾为 x 的边上的标记是子集 $\mathcal{F}_{L_a}$ 的元素，而头为 x 的边上的标记是元素

子集 $\mathcal{F}_{R_x}$ 中的元素。如果 $1 \notin \mathcal{F}_{L_a} \cup \mathcal{F}_{R_a}$，那么代数 A 是直和

$$A = A_1(L_x) \oplus A_0(L_x) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{F}_{L_x}} A_\alpha(L_x)$$

以下 L_x-特征子空间（前提是它们不等于 $\{0\}$）

$A_1(L_x) = \langle x \rangle$, $A_\alpha(L_x) = \langle \alpha x + (\alpha - 1)y \mid x \neq y$ 相邻且 $\alpha_{x,y} = \alpha \rangle$，其中 $\alpha \in \mathcal{F}_{L_x}$ 和 $A_0(L_x) = \langle y \mid x \neq y$ 不相邻$\rangle$,

and

$$A = A_1(R_x) \oplus A_0(R_x) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{F}_{R_x}} A_\alpha(R_x)$$

以下 R_x-特征子空间（前提是它们不等于 $\{0\}$）

$A_1(R_x) = \langle x \rangle$, $A_\alpha(R_x) = \langle \alpha x + (\alpha - 1)y \mid y \neq x$ 相邻且 $\alpha_{y,x} = \alpha \rangle$，其中 $\alpha \in \mathcal{F}_{R_x}$ 和 $A_0(R_x) = \langle y \mid y \neq x$ 不相邻$\rangle$。

特别地，若图 Γ 的所有标记都不等于 1，则 (A, X) 是一个本原轴代数。

证明。设 $x \in X$。我们考察映射 L_x。代数 A 显然分解为 $A_1(L_x) \oplus A_0(L_x) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{F}} A_\alpha(x)$。对于每个 $\alpha \in \mathrm{F}_{L_x}$，我们发现 $A_\alpha(L_x)$ 包含于 L_x 的 α-特征子空间，因为对于所有相邻的 x 和 y，其中 $\alpha_{x,y} = \alpha$，以及所有不相邻的 x 和 z，我们有

$$\begin{aligned} &L_x(x) = x^2 = x, \\ &L_x(\alpha x + (\alpha - 1)y) = x(\alpha x + (\alpha - 1)y) = \alpha x + (\alpha - 1)\alpha(x + y) = \alpha(\alpha x + (\alpha - 1)y), \\ &L_x(z) = xz = 0. \end{aligned}$$

R_x 的证明类似。 □

若 $x, y \in X$ 位于标记为 1 的边 (x, y) 上，则 L_x 和 R_y 都不是半单的。子空间 x, y 显然在 L_x 和 R_y 作用下不变，但 L_x 和 R_y 在此子空间上的特征值 1 的特征子空间分别仅为 x 和 y。

因此，只要没有边的标记为 1，A 就是关于其幂等元生成集 X 的轴代数。

在本节接下来的内容中，我们假设没有边的标记为1，并确定命题 3.1中给出的分解所对应的融合律。

当 x 和 y 是 X中的两个不相邻顶点时，我们令 $\alpha_{x,y} = 0$。因此，对于不同的 $x, y \in X$，有 $xy = \alpha_{x,y}(x + y)$。

引理 3.2。假设 Γ 至少包含 3 个顶点。令 $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ 均不同于1。那么，对于 $K \in \{L, R\}$ 和 $x \in X$，有如下结论：

(i) 若 $\alpha = 0$，则 $A_\alpha(K_x)A_\alpha(K_x) \subseteq A_\alpha(K_x)$。*(ii)* 若 $\alpha \neq 0$，则 $A_\alpha(K_x)$ $A_\alpha(K_x) \subseteq A_1(K_x) + A_\alpha(K_x)$。*(iii)* 若 $\alpha \neq \beta$，则 $A_\alpha(K_x)A_\beta(K_x) \subseteq A_1(K_x)$ $+ A_\alpha(K_x) + A_\beta(K_x)$。

证明。设 $x \in X$。我们考虑 $K = L$。那么对于 $y, z \in A_0(L_x) \cap X$ 我们发现 xy 是 x 和 y 的线性组合，因此属于 $A_0(L_x)$。由于 $A_0(L_x)$由其来自 X的元素生成，这就证明了 $K = L$ 的 (i)。

现在假设 $\alpha \neq 0,1$ 属于 F，并考虑 $A_\alpha(L_x)$。那么这个空间由形如 $\alpha x + (\alpha - 1)y$ 的元素张成，其中 (x, y) 是一条标记为 α 的边。但此时

任意两个此类元素的乘积都是 x 与此类 y 的线性组合。特别地， $A_\alpha(K_x)A_\alpha(K_x) \subseteq A_1(K_x) + A_\alpha(K_x)$，从而证明了 (ii)。

此外，元素 $\alpha x + (\alpha - 1)y$ 与一个不与 x 相邻的元素 $z \in X$ 的乘积是 y 和 z 的线性组合，因此属于 $A_1(K_x) + A_\alpha(K_x) + A_0(K_x)$。因此， $A_\alpha(K_x)A_0(K_x) \subseteq A_1(K_x) + A_\alpha(K_x) + A_0(K_x)$。类似地，我们得到 $A_0(K_x)A_\alpha(K_x) \subseteq A_1(K_x) + A_\alpha(K_x) + A_0(K_x)$。由此，我们证明了在 $K = L$ 和 $\beta = 0$ 的情况下，(iii) 成立。

现在假设 $\alpha = \alpha_{x,y} \neq \beta_{x,z} = \beta$ 都不等于 0,1。那么乘积

$$(\alpha x + (\alpha - 1)y)(\beta x + (\beta - 1)z)$$

是 x, y 和 z 的线性组合，因此属于 $A_1(L_x) + A_\alpha(L_x) + A_\beta(L_x)$，从而证明了在 $K = L$ 和 $\beta \neq 0$ 的情况下 (iii) 成立。

$K = R$ 的情形类似。 □

上述引理导出以下定理：

定理 3.3。设 Γ 为一个有向图，其边标记为取自子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$ 的、不同于 0 和 1 的元素；若 Γ 不完全，则该子集包含 0 、1 及至少一个其他元素。则代数 A_Γ 是一个轴代数，其轴属于 X，并且对每个 $x \in X$ ，相对于以下分解满足融合规则

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{F}} A_\alpha(L_x)$$

and

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{F}} A_\alpha(R_x)$$

见表*3*。

$\star$	1	α	...	β	(0)
1	1	α		β	0
α	α	$1, \alpha$		$1, \alpha, \beta$	$1, \alpha, 0$
$\vdots$					
β	β	$1, \alpha, \beta$		$1, \beta$	$1, \beta, 0$
(0)	0	$1, \alpha, 0$		$1, \beta, 0$	0

$\star$	1	α	(0)
1	1	α	0
α	α	$1, \alpha$	$1, \alpha, 0$
(0)	0	$1, \alpha, 0$	0

表 3. 图类型 G(F) 的融合律，其中 F ={1， α，.....， β，(0)} 以及 F ={1， α，(0)}，其中 $\alpha \neq \beta$ 不同于 0 和 1。

表 3 中在集合 $\mathcal{F}$ 上展示的融合律将记为 $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ ，并称为图类型的融合律。

命题1.1由命题2.6 和命题3.3得出。

4. 幂等元与小秩元素

设 $\Gamma = (X, E)$ 是一个对称弱连通图，其边由集合 F $\subseteq \mathbb{F}$ 中的非零元素标记；我们假定该集合包含 1，并且当 Γ 不是完全图时也包含 0。（我们允许边被标记为 1。）设 $A = A_\Gamma$ 为相应的代数。

每个对称有向图都可以由一个简单无向图得到：将边 $\{x, y\}$ 替换为成对的边 (x, y) 和 (y, x)。当然，我们也可以

反向进行这一过程，将对称有向图中的每条有向边 $(x,\ y)$ 替换为一条无向边 $\{x,\ y\}$。这样便建立了对称有向图与无向图之间的一一对应关系。从 Γ 得到的无向图称为 Γ 的底层图，记作 Γ。

现在考虑代数 A_Γ。Γ 的对称性等价于对于 $x \neq y \in X$，$xy \neq 0$ 当且仅当 $yx \neq 0$。对于每个 $x \in X$，我们发现左、右伴随映射 L_x 和 R_x 是从 A 到 A 的线性映射，其特征值属于 F。L_x 的像是由 x 及其所有邻点张成的 A子空间。R_x 的像由 x 以及所有满足 x 是邻点的 y 张成。因此，L_x 的秩等于 $1+\delta_x^+$，其中 δ_x^+ 表示顶点 $\in X$ 的出度；而 R_x 的秩等于 $1+\delta_x^-$，其中 δ_x^- 是 x的入度。注意，这些度可能是无限的。由于我们假设 Γ 是对称的，因此顶点 $x \in X$ 的入度和出度相等，且左、右伴随映射 L_x 和R_x 具有相同的秩。

现在假设 $a = \sum \lambda_y y$ 是 A 中的任意元素，其伴随映射$_{y\in X}L_a$ 的秩为 r_a^+，而 R_a 的秩为 r_a^-。我们将把 Γ 中由 supp(a) 诱导的子图的某些性质，与 L_a 的秩 r_a^+ 以及 R_a的秩 r_a^- 联系起来。我们将 supp(a) 视为底层图 Γ所诱导的子图，其中 a是 Γ的底层图。注意，在由 supp(a) 诱导的图中，两个顶点 $x \neq y$ 相邻，当且仅当它们的乘积 xy 非零。

引理 4.1. 如果 a是一个幂等元，且 L_a 或 R_a 的秩为 r，那么支撑(a) 至多有 r 个连通分支。

如果 a是一个幂等元，且 L_a （或 R_a）的 1-特征子空间的维数为 m，那么支撑(a) 至多有 m 个连通分支。特别地，如果 a 是一个本原幂等元，那么支撑(a)是强连通的。

证明。设 $C_1,\dots,C_n$ 是 supp(a) 的连通分支，并记$a = a_1 + \cdots + a_n$，其中 supp(a_i) $= C_i$。于是 $L_a(a_i) = a_i$。因此，L_a 的秩至少为 n。这证明了第一部分。

此外，我们发现每个 a_i 都是 L_a 的特征向量，对应特征值为 1，且$n \le m$，从而证明了第二个结论。因此，若 a 是本原幂等元，则特征值 1 对应的特征子空间是一维的。因此 supp(a) 必须是连通的。

R_a 的证明类似。 □

引理 4.2。设 $Y \subseteq$supp(a) 满足：底层图所诱导的、以 Y 为顶点的子图是树。设 y_0 是一个叶子。设 $y_1,\dots,y_n$ 是$Y \setminus L$的顶点，其中 L 是 Y的叶子集合。那么 $ay_0,\dots,ay_n$ （以及 $y_0a,\dots,y_na$）线性无关。

特别是，$L_a(Y)$（以及 $R_a(Y)$）的维数至少为 $|Y|+1-\ell$，其中$\ell = |L|$。

证明。令 $Y \subseteq$supp(a)，并假设 Y 上的导出子图是一棵树。固定 y_0，并按如下方式排列 $y_1,\dots,y_n$ 的元素：其中 $Y \setminus L$，L 是 Y 的叶子集合；对于 $1 \le j \le k \le n$，树中 y_i 到 y_0 的距离不大于 y_k 到 y_0 的距离。（先给所有距离为 1 的元素编号，再给距离为 2 的元素编号，依此类推。）令 $y_{n+1},\dots,y_{n+\ell-1}$ 为由 Y 导出的树中不同于 y_0 的叶子。于是对每个 $1 \le j \le n$，元素 y_j 不是叶子，因此我们可以找到一个与它相邻的元素 y_k。由于 Y 是一棵树，该元素 y_k 与所有 $i < j$ 都不相邻。但此时，对于 $i < j$，ay_i 的支撑不包含 y_k,

而 ay_j 的支撑包含 y_k。特别地，我们发现元素 $ay_0, \ldots, ay_n$ 线性无关。

证明 $y_0a, \ldots, y_na$ 线性无关的方法类似。 □

底层图的围长 g 是该图中最短圈的长度。如果 Γ 的底层图不包含圈，则将 g 设为 ∞。

上述引理推出如下结论。

推论 4.3。令 r_a 等于 r_a^+ 或 r_a^-。如果 $r_a \le g-3$，则 $\mathrm{supp}(a)$ 是一个森林。如果该森林由树 T_1、...、T_t 组成，且它们的叶子集合分别为 L_1、...、L_t，

$$then \sum_{i=1}^{t}(|T_i| - |L_i| + 1) \le r_a \le g - 3.$$

证明。假设 $r_a^+ \le g-3$。令 C 为 $\mathrm{supp}(a)$ 中的一个最短圈。于是从 C 中移去一个顶点后得到一条至少包含 $g-1$ 个顶点的路径，由命题 4.2 可知 L_a 的秩至少为 $g-2$，这与我们的假设矛盾。因此，$\mathrm{supp}(a)$ 是一个由树 T_1、...、T_t 组成的森林。于是，由 $\mathrm{supp}(a)$ 的顶点张成的子空间是各个由 T_i 的顶点张成的子空间 V_i 的直和。根据命题 4.2，对于每个 i，我们发现子空间 $L_a(V_i)$ 的维数至少为 $|T_i| - |L_i| + 1$。由于 $L_a(V_i)$ 包含于 V_i 中，因此可得 r_a^+ 至少为 $\sum_{i=1}^{t}(|T_i| - |L_i| + 1)$。

类似的论证也适用于 $r_a^- \le g-3$ 的情形。 □

引理 4.4. 设 Γ 的底层图具有有限围长 $g > 4$。若 a 是一个幂等元，且满足 $r_a^+ = g-2$ 或 $r_a^- = g-2$，那么 Γ 是一个圈，或者 $\mathrm{supp}(a)$ 是一个森林。

证明. 设 $\mathrm{supp}(a)$ 不是森林，因而包含一个圈。假设 $r_a^+ = g-2$。那么 $\mathrm{supp}(a)$ 沿着该圈包含一条路径 $a_0 \sim \cdots \sim a_{g-2}$。由命题 4.2 可知元素 $L_a(a_i)$, 满足 $0 \le i < g-2$，它们线性无关。由于 r_a^+ 等于 $g-2$，可知这些元素张成 L_a 的像；又因为 a 是一个幂等元，a 属于这个张成空间。

因此，a 是 a_0、.....、a_{g-3} 及其邻点的线性组合，而 $\mathrm{supp}(a)$ 包含于这些顶点及其邻点构成的集合中。由于 $\mathrm{supp}(a)$ 包含一条经过 a_0、.....、a_{g-3}、a_{g-2} 的圈，且只能包含 a_0、.....、a_{g-3} 的邻点，因此它包含一条经过 a_0、.....、a_{g-3}、a_{g-2}、a_{g-1} 的圈，其中 a_{g-1} 是 a_0 和 a_{g-2} 的公共邻点。

由 $g > 4$ 可知，a_{g-1} 是 a_0 和 a_{g-2} 唯一的公共邻点。

除 a_{g-2} 和 a_0 外，a_{g-1} 的邻点均不是该圈上其他顶点的邻点，因此不在 a 的支撑中。此外，若 b 是 a_{g-1} 的一个邻点，且不同于 a_{g-2} 和 a_0，那么 ab 是 $a_{g-1}b$ 的非零倍数，而 $a_{g-1}b$ 不在元素 aa_i 的张成空间中，其中 $0 \le i < g-2$。但正如上文所述，这些元素张成了 L_a 的像。这就导致矛盾，因此我们得出结论：a_{g-1} 只有 a_0 和 a_{g-2} 这两个邻点。

从沿圈的另一条路径开始重复这一论证，我们发现，a 的支撑只包含该圈的顶点，且其中没有任何一个顶点在圈外有邻点。由此可得，$\mathrm{supp}(a) = X$ 并且，由于 Γ 的底层图是连通的，它是一个圈。

如果 $r_a^- = g-2$，我们可以使用类似的论证，以 R_a 代替 L_a。 □

引理 4.5。 假设 a 是一个幂等元，并且 $\mathrm{supp}(a)$ 是一棵具有 n 个顶点且直径为 d 的树。令 L 为$\mathrm{supp}(a)$ 的叶子集合，并设 $\ell = |L|$。则有如下结论：

(i) 若 $d \le g-3$，则 $r_a^{\pm} \ge n - \ell + 1 + \sum_{l\in L}(\delta_l - 1)$。(ii) 若 $d = g-2 \ge 4$，那么对于 $\mathrm{supp}(a)$ 中距离为 d 的任意两个叶子 a_0 和 a_d，都有 $r_a^{\pm} \ge d + \delta_{a_0} + \delta_{a_d} - 4$。

证明。 假设 $\mathrm{supp}(a)$ 是一棵有 n 个顶点、ℓ 个叶子且直径为 d 的树。

若 $d \le g-3$，则 $\mathrm{supp}(x)$ 中的顶点 $b \in X \setminus$ 在 Γ 中至多与 $\mathrm{supp}(a)$ 的一个顶点相邻。对于每个叶子 $x \in \mathrm{supp}(a)$ 及其在 $\mathrm{supp}(a)$ 外的邻点 y，我们发现 $ay = \lambda_x xy = \lambda_x \alpha_{x,y}(x+y)$ 属于 L_a 的像，而 $ya = \lambda_x yx = \lambda_x \alpha_{y,x}(x+y)$ 属于 R_a 的像。

由于 $\mathrm{supp}(a)$ 的每个叶子 l 在 $\mathrm{supp}(a)$ 外至少有 $\delta_l - 1$ 个邻点，我们发现 $L_a(X \setminus \mathrm{supp}(a))$ 和 $R_a(X \setminus \mathrm{supp}(a))$ 有一个维数至少为 $\sum_{l\in L}(\delta_l - 1)$ 的子空间与 $\mathrm{supp}(a)$ 平凡相交。正如我们在命题 4.2 中所见，空间 $L_a(\mathrm{supp}(a))$ 和 $R_a(\mathrm{supp}(a))$ 的维数至少为 $n-\ell+1$，且包含于 $\mathrm{supp}(a)$ 中。因此 $r_a^{\pm} \ge n - \ell + 1 + \sum_{l\in L}(\delta_l - 1)$。

若 $d = g-2 \ge 4$，则考虑 $\mathrm{supp}(a)$ 中距离为 d 的两个叶子 a_0 和 a_d，并取 $\mathrm{supp}(a)$ 内从 a_0 到 a_d 的一条路径 $a_0 \sim \cdots \sim a_d$。由于 $g \ge 6$，元素 a_0 和 a_d 至多有一个公共邻点。因此，我们可以找到 $\delta_{a_0} - 2$ 个邻点 x，它们是 a_0 的邻点，且与满足 $i > 0$ 的任何顶点 a_i 都不相邻。类似地，我们可以找到 $\delta_{a_d} - 2$ 个顶点 $y \in X$，它们仅与 a_d 相邻，而不与满足 $i < d$ 的任何顶点 a_i 相邻。于是，aa_0，……，aa_{d-1}（或 a_0a，……，$a_{d-1}a$）连同各个 $ax = a_0x$，以及 $ay = a_dy$（或 $xa = xa_0$ 和 $ya = ya_d$）线性无关，由此证明 $r_a^{\pm}$ 至少为 $d + \delta_{a_0} + \delta_{a_d} - 4$。□

5. 代数的自同构群

和之前一样，设 F 是域 $\mathbb{F}$ 的一个子集，包含 0，1，并且 $\Gamma = (X, E)$ 是一个弱连通有向图，其所有边都标记为 F 中的非零元素。于是，代数 $A = A_\Gamma$ 被视为域 $\mathbb{F}$ 上的代数。

本节将给出一些结果，说明在何种条件下，图 Γ 的自同构群与代数 A_Γ 的自同构群同构。我们假设图 Γ 是对称的。

用 $k_{\max}$ 表示 $\{\delta_x^{\pm} \mid x \in X\}$ 的最大值，用 $k_{\min}$ 表示其最小值；若该最大值或最小值不存在，则令 $k_{\max}$ 或 $k_{\min}$ 等于 ∞。

我们先证明命题 1.2：

定理 5.1。 设 Γ 是一个弱连通的对称有向图，其标记值不同于0 和1，且其底层图的围长有限，为 g，并且$2 < k_{\min} \le g-3$，且 $k_{\max} \le$最小值$(2(k_{\min}-1)\ g-3)$。

那么，$\mathrm{Aut}(A)$ 与标记图 Γ 的自同构群$\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 同构。

证明。 显然，Aut(Γ)（ Γ 作为标记图的自同构群）可单射嵌入 A的自同构群。因此，只需证明 Aut(A)可单射嵌入 Aut(Γ)

设 Γ 的底层图是一个围长为 g 且 $2 < k_{\min} \le g-3$的图，并且 $k_{\max} \le \min(2(k_{\min}-1),\ g-3)$。

取 $h \in \mathrm{Aut}(A)$ 和 $x_0 \in X$，并令 $a = x_0^h$。元素 x_0 是本原幂等元，由命题 3.1 可知，L_{x_0} 和 R_{x_0} 的秩均至多为 $1+k_{\max}$。但此时 a 也是本原幂等元，L_a的秩 r_a^+ 和 R_a的秩 r_a^-均至多为 $1+k_{\max}$，而 $1+k_{\max}$至多为 $g-2$。令 r_a为 r_a^+或 r_a^-之一。若 $r_a \le g-3$，则根据命题 4.1 和 4.3，a的支撑是一棵树。若 $r_a = g-2$，则命题 4.4 适用；由于每个顶点的度至少为 3，我们同样可以得出结论：a 的支撑是一棵树。若这棵树有 n 个顶点、$\ell \ge 2$ 片叶子，且直径为 $\le g-3$，则命题 4.5 推出 $r_a \ge n-\ell+1+\ell(k_{\min}-1)$。由于 $r_a \le 1+k_{\max} \le 2k_{\max}-1$，我们得到 $n = \ell = 1$。

如果这棵树的直径为 $g-2$，那么 r_a至少为 g，根据命题 4.5 便会得到矛盾。因此我们得出结论，$\mathrm{supp}(a)$ 的大小为 1。于是 $a = \lambda x$ 对于某个$x \in X$，且 $\lambda \in \mathbb{F}$。但这时 $a^2 = a$ 意味着 $a = x \in X$。

因此，我们可以得出结论：$h(X) \subseteq X$。此外，由于 X 是 A 的一个基，且 h 是 A的一个自同构，我们得到 $h(X) = X$。因此，$\mathrm{Aut}(A)$ 保持本原轴集合 X 不变，并在 X上诱导出一个置换作用。此外，由于$x,\ y \in X$ 相邻，且这条边的标记为 $\alpha_{x,\ y}$ 当且仅当它们的乘积$xy = \alpha_{x,\ y}(x+y) \ne 0$，并且 X是 A的一个基，我们得到 $\mathrm{Aut}(A)$ 可单射嵌入标记图 Γ的自同构群。这证明了这两个群同构。□

例 5.2。正如引言中已经提到的，存在许多价为 3、围长至少为 6 且自同构群颇具特点的图。我们可以将上述定理应用于这些图，从而得到自同构群颇具特点的代数。

下面给出一些例子：取 Γ底层图为希伍德图或考克斯特图的对称有向图，它们的自同构群均为$\mathrm{PSL}_3(2):2$；自同构群为 $\mathrm{Sym}_6.2$的 Tutte 八笼图；自同构群为 $3\cdot\mathrm{Sym}_6.2$ 的福斯特图；或自同构群为 $\mathrm{PSL}_2(17)$ 的比格斯-史密斯图，并用一个固定的 $\alpha \in \mathbb{F}$ 不同于 0、1 来标记其边，就可以得到这样的交换轴代数 A_Γ。关于这些图的介绍，参见 [5] 。

例 5.3。设 G是一个群，S 是一个大小至少为 3 的生成元集，并且对每个 $s \in S$，都有 $s^{-1} \in S$。令 Γ 为关于生成元集 S的 G 的凯莱图。现在固定一个映射 $\alpha : S \to \mathbb{F} \setminus \{0,1\}$，并用 $\alpha(s)$ 标记边 (g, gs)。这样便得到一个常数度为 $|S|$ 的对称有向图 Γ 。底层图的围长等于 S 中在 G 内等于单位元的最短约化字的长度。
</output>

在 [4, 12] 中可以找到各种生成集规模较小（例如为 3、4 或 5）的有限群 G S，且其对应的凯莱图围长为 $g \ge |S|+2$。特别是，如果映射 α 是单射，我们发现 G 是 Γ 的自同构群，根据上述结果，它也是 A_Γ 的自同构群。

一个部分线性空间 $\Delta = (P,\ L)$由一个点集 P 和一个直线集 L 组成，其中直线是 P 的子集且大小至少为 2，并且每一对不同的点都在唯一一条直线上。因此，普通图就是所有直线大小均为 2 的部分线性空间。

部分线性空间 $\Delta = (P,\ L)$的有向关联图是一个顶点集为 $X = P \cup L$ 的有向图，其中两个顶点相邻，当且仅当其中一个是点

而另一个是包含该点的直线。显然，有向关联图是对称的。

例5.4. 阶为（s,s）的广义四边形的有向关联图 Γ 的价为 $s+1$，围长为 8。（例如参见 [5]。）因此，对于 $2 \le s \le 4$，我们可以应用命题5.1；将此关联图中满足以下条件的边进行标记后：(x,y)，其中 x 是一个点，y 是一条直线，并赋予一个固定的、不同于 0 和 1 的 α；以及边 (a,b)，其中 a 是一条直线，b 是一个点，并赋予一个固定的、不同于 0 和 1 的 β，我们便得到代数 A_Γ，其自同构群与标记图 Γ的自同构群同构。当且仅当 $\beta = \alpha$时，此代数是交换的；否则则是非交换的。

（有向）关联图 Γ 的阶为 （s，s），其价为 $s+1$，围长为12。因此，我们可以在此处应用上述结果，构造交换代数和非交换代数；根据命题5.1，对于 $2 \le s \le 8$，这些代数的自同构群与标记图 Γ的自同构群同构。

我们证明命题5.1 的方法基于这样一个事实：我们可以识别出代数 a中的幂等元 A_Γ，使得 L_a 或 R_a 的秩较小。现在我们利用这一方法，在 X 为 X 的顶点集是某个关联图的顶点集时，识别出一组重要的元素（它们是 X 中的幂等元），并证明命题1.3。不过，我们先推导关联图的一些众所周知的性质。

引理5.5。 设 Γ是图 Δ 的有向关联图，其中含有一个度至少为3的顶点；或者设 Γ 是一个连通部分线性空间，每条直线上有三个点，且有一个点位于至少四条直线上。

则有以下结论：

(i) Γ的底层图的围长至少为6；(ii) $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 与 $\mathrm{Aut}(\Delta)$同构。

证明。 如果 Γ 的底层图包含长度为 ≤ 5的圈，那么由于该图是二部图，这个圈的长度为4，于是我们会发现一对点同时位于两条直线上。这与部分线性空间的定义矛盾。因此，(i)得证。

假设 ℓ 是 Δ的一条直线。那么在 Γ 中，这条直线 ℓ 的度为 $|\ell|$（因此为 2 或 3）。Δ 中至少关联 $|\ell|+1$ 条边或直线的点，在 Δ 中的度至少为 $|\ell|+1$。

取 Γ 中度至少为 $|\ell|+1$的一个顶点 p。那么，Δ 中的点（或顶点）就是 Γ中与 p距离为偶数的顶点。Δ中的直线则是与 p距离为奇数的顶点 Γ。此外，一个点在一条直线上，当且仅当它们在 Γ中相邻。因此，我们可以由 Γ重构 Δ，并发现它们的自同构群同构。这就证明了 (ii)。□

定理 5.6。 假设 $\Delta = (Y,F)$ 是一个连通图，且 $k_{\min} \ge 3$，或者是一个连通的部分线性空间，其中每条直线有三个点，每个点至少在四条直线上。令 Γ 为 Δ的有向关联图。那么，对于 Γ 的任意一种以不同于0 和1的元素进行的标记，我们发现$\mathrm{Aut}(A)$同构于$\mathrm{Aut}(\Gamma)$，即标记图 Γ的自同构群。

证明。 与之前一样，Aut(Γ) 可单射嵌入 Aut(A)。因此，我们将证明 Aut(A) 可单射嵌入 Aut(Γ)。注意，Γ 的围长 g 至少为 6。

设 $X = Y \cup F$ 为 Γ 的顶点集，并固定一个元素 $f \in F$ 和 $h \in$ Aut(A)。令 $a = f^h$。

首先假设 Δ 是一个图。由于 f 在 Γ中有两个邻点，L_f和 R_f 的秩等于 3。由于这些标记都不等于1，元素 f 是一个本原幂等元。因此，a、L_a 和 R_a 也具有这些性质。根据命题 4.1 我们

发现 支撑(a) 是连通的。由于 $r_a = 3 \le g-2$，由命题 4.3 和 4.4可知 支撑(a) 是一棵树。此外，根据命题 4.2，这棵树的直径为 $d \le 3$。

若 $d \ge 2$，则命题 4.5 意味着 $r_a > 3$，由此导致矛盾。若 $d = 1$，则 supp(a) 是一条有两个顶点的边，并且这些顶点在 supp(a) 之外至少有 3 个邻点与 supp(a) 中的一个顶点相邻。但这样一来，我们发现 L_a 的像的维数至少为 4，再次导致矛盾。因此 supp(a) 的大小为 1，且 $a \in X$。由于 $r_a = 3$，我们甚至发现 $a \in F$。

现在考虑这样的情形： Δ 是一个部分线性空间，每条直线上有三个点，且每个点至少位于四条直线上。同样，由于所有边的标记都不同于 0 和 1，我们发现 f，从而 a 是一个本原幂等元。但命题 4.1 意味着 supp(a) 是连通的。由于 $r_a \le 6 \le g-2$，利用命题 4.2 和 4.4，我们还发现 supp(a) 上的导出子图是一棵直径至多为 4 的树。若 $d = g-2$，则 $d = 4$，而命题 4.5(ii) 意味着 r_a 至少为 $d+3+3-4 = d+2 = 6$，这与 $r_a = 4$ 矛盾。因此 $d \le 3 \le g-3$，且命题 4.5(i) 意味着，当 supp(a) 有 n 个顶点和 ℓ 个叶子时，我们有 $4 = r_a \ge n-\ell+1+2\ell = n+\ell+1$。但是，在一棵直径为 d 的树中，我们有 $n+\ell+1 \ge (d+1)+2+1 = d+4$，这意味着 $d = 0$。因此 supp(a) 的大小为 1，且 $a \in X$。由于 $r_a = 4$，我们甚至发现 $a \in F$。

这意味着，当 Δ 是图，以及当它也是每条直线上有三个点的部分线性空间时，Aut(A) 都固定集合 F。

现在考虑一个元素 $y \in Y$，并令 $b = y^h$。固定两条边（或直线） e_0 和k_0，它们位于 y 上，并令 $e = e_0^h$ 和 $k = k_0^h$。那么 y 包含在 L_{e_0} 和 L_{k_0}的像的交中。因此，b 包含在 L_e 和L_k的像的交中。由于 $e \ne k$属于 F，我们找到元素 $(x_e)\ y_e$, $z_e \in Y$，使得 $e = \{(x_e)\ y_e, z_e\}$；并找到 $(x_k)\ y_k, z_k \in Y$，使得 $k = \{(x_k)\ y_k, z_k\}$。（这里仅在 Δ是部分线性空间时才有 x_e和 x_k。）此外，L_e 和 L_k 的像分别为 e, $(x_e)\ y_e, z_e$ 和 k, $(x_e)\ y_k, z_k$。由于 $X = Y \cup F$ 中的元素线性无关，我们发现这些子空间的交为 x，其中 x 是 e 或 k 上的一个顶点（或点），而 e 和 k 交于这个唯一的顶点 x。由于 $b \in x$是一个幂等元，我们甚至得到 $b = x \in X$。

这意味着 Aut(A) 不仅固定 F，还固定 Y，因此也固定 X （作为一个集合）。此外，由于 X 是 A的一组基，我们发现，对于每个 $h \in$Aut(A)，都有$h(X) = X$。最后，由于 X 中的两个顶点 $x \ne y$ 位于一条标记为 α 的边上，当且仅当它们的乘积非零且等于 $\alpha(x+y)$，因此 Aut(A) 可单射嵌入 Aut(Γ)，即标记图 Γ 的自同构群。我们发现 Aut(A) 与 Aut(Γ) 同构。□

如果域 $\mathbb{F}$ 的大小至少为 3，那么显然我们可以用不同于 0 和 1 的元素标记图的所有边。然而，如果 $\mathbb{F}$ 是只有两个元素的域，这就不可能了。在这种情况下，所有边都需要标记为 1。我们仍然可以证明一个与上述结果类似的结论。

定理 5.7。 设 $\Delta = (Y, F)$ 是一个连通图，且每个顶点的度至少为 3。令 Γ 为其有向关联图。设 Γ 的所有边均以 $1 \in \mathbb{F}_2$标记。那么， $\mathbb{F}_2$ 代数 $A = A_\Gamma$ 的自同构群与 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 同构，后者是图 Γ的自同构群。

证明。 我们沿用上述定理的证明。令 $X = Y \cup F$为 Γ 的顶点集，并固定一个元素 $f \in F$ 和 $h \in$ Aut(A)。设 $a = f^h$。 L_f 和R_f 的秩为三。因此， L_a 和 R_a 的秩也为 3。我们将证明 $a \in F$。其差异

与命题 5.6 的证明不同之处在于 f，于是 a的特征值 1 的（代数）重数为3，但其特征子空间只有2维。

由命题 4.1 可知， a 的支撑至多有三个连通分支。若有三个分支，则 a将是半单的。因此，至多有两个分支。假设 支撑(a)确有两个分支。由命题 4.3可知，这些分支是直径至多为 2的树。于是写作$a = a_1 + a_2$，其中 支撑(a_1) 和 支撑(a_2) 是这两个分支，我们假设它们的直径分别为 d_1 和 d_2。

若 $d_i > 1$，则由命题 4.2 可知， L_a 作用于由 supp(a_i) 张成的子空间所得的像的维数至少为 $d_i \geq 2$，且包含于该子空间中。若 $d_i = 1$，结论也成立，因为此时 $a_i = y + z$，对于某些相邻的 $y, z \in X$，并且我们可得 $ay = z$和 $az = y$ 属于该像。因此，若 d_1，$d_2 \geq 1$，则可得 $r_a > 3$，这与我们的假设矛盾。故可假设 a_2 属于 X。若 $d_1 > 0$，则由上文可知， L_a 的像包含于由 a_2、supp(a_1) 和 $d_1 \leq 2$张成的空间中。

supp(a_1) 的每个叶子至少有一个邻点 y 位于 supp(a_1) 之外。如果该邻点不与 a_2 相邻，那么我们会发现 $a_1 y$ 是一个非零向量，属于 L_a 的像，但位于 supp(a) 张成的空间之外。这是不可能的。因此，这些邻点都与 a_2相邻。由于围长至少为 6，supp(a_1) 的每个叶子在 supp(a) 之外至多有一个邻点。所以，supp(a_1) 的叶子，以及随后 a_2（它与这样的叶子距离为 2），都只有两个邻点。因此，这些叶子和 a_2 都是 F 的元素，因而在 Γ 中不相邻。这意味着 supp(a_1) 是一条含有 3 个顶点的路径。

设 u 是 supp(a_1) 中唯一一个不是叶子的顶点。由上文可知，它与 a_2 的距离为 3。因此，它属于 Y，并且至少有三个邻点。但其中有一个，记为 w，位于 supp(a_1) 之外，而 aw 属于 L_a 的像，却位于 supp(a_1) 的张成空间之外，从而导致矛盾。因此， $d_1 = 0$，并且我们还发现$a_1 \in X$。

但此时， a_1 和 a_2 都属于 X，且至多有一个公共邻点。因此，我们可以分别找到 a_1 和 a_2的不同邻点 z_1 和 z_2，使得 z_1 与 a_2 不相邻，且 z_2 与 a_1不相邻。但这样一来，我们就能在 L_a的像中找到元素 $aa_1 = a_1, aa_2 = a_2$，以及 $az_1 = a_1 + z_1$ 和 $az_2 = a_2 + z_2$，这与$r_a = 3$矛盾。由此可知，supp(a) 是连通的。

图 Γ 的围长至少为 6。因此， L_x 的秩 r_x 满足 $r_x \leq g - 3$，由命题 4.3 可知，supp(a) 是一棵树。现在，我们可以像证明命题 5.6 时那样完成证明。事实上，如上所述，我们可以得出$a \in X$，更具体地说，是 $a \in F$。因此，Aut(A) 固定集合 F，进而也固定 X，从而证明 Aut(A) 与 Aut(Γ) 同构。□

上述结果使我们能够构造自同构群与各种图或几何（包括与球面建筑相关的图或几何，乃至散在单群的自同构群）同构的（轴）代数。

我们先举一些与图的关联图相关的例子。（有关所研究图的更多信息，请参阅 [5, 6] 。）

例 5.8. 在上述结果中，我们不要求图（或部分线性空间） Δ 是有限的。设 $\Pi = (P, L)$ 是一个非退化极空间，且每条直线上至少有三个点。那么 Π 可以从其共线图 Δ中恢复。（事实上，由两个点 $x, y \in P$确定的直线等于 $\{x, y\}^{\perp\perp}$，其中 $\perp$ 表示 P 上的关系，即相等或共线。）现在设 Γ 是 Δ的有向关联图，并为 Γ 的每条边指定一个不同于 0 和 1 的固定标签 $\alpha \in \mathbb{F}$。那么 A_Γ 是

一个单交换轴代数，且

$$\mathrm{Aut}(A_\Gamma) \simeq \mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq \mathrm{Aut}(\Delta) \simeq \mathrm{Aut}(\Pi).$$

若域 $\mathbb{F}$ 至少含有 4 个元素，我们可以固定两个互不相同且不等于 0 和 1 的元素 α 和 β，并将 Γ 的所有边 $(p,\ \ell)$ 标记为 α，其中 p 是一个点，ℓ 是一条包含 p 的直线；将所有满足 β 的边 $(\ell,\ p)$ 标记为 A_Γ。于是 A_Γ 是一个简单非交换轴代数，且 Aut(A_Γ) 与 Aut(Π) 同构。

例 5.9。若干散在单群是作为图的自同构群构造出来的。利用这些图的有向关联图，并用一个不等于 0，1 的常数 α 对它们进行标记，将得到简单交换轴代数，且该单群是其自同构群的（子）群。

若将形如 $(v,\ e)$ 的边标记为 α，其中 v 是一个顶点，e 是一条边；并将形如 $(e,\ v)$ 的边标记为一个不等于 0，1 且满足 α 的 β，那么我们便得到简单非交换轴代数，其自同构群包含该单群作为（子）群。例如：

希格曼-西姆斯群 HS 被构造为希格曼-西姆斯图的自同构群的一个子群，该图有 100 个顶点，价为 22。该图有 1100 条边，经标记的有向关联图进而给出维数为 1200 的代数，其自同构群同构于 HS : 2。

Hall-Janko 群 HJ 同样是一个具有 100 个顶点的图的自同构群，但此时价为 36，因而有 1800 条边。对关联图进行标记可得到维数为 1900 的代数，其自同构群为 HJ : 2。

具有 275 个顶点、价为 112 且有 15400 条边的麦克劳克林图以散在麦克劳克林群 McL 的自同构群作为其自同构群，从而得到维数为 15675 的代数，其自同构群为 McL : 2。

接下来，我们给出一些与每条直线上有三个点的部分线性空间相关的例子。关于这些几何的描述，我们也请参阅 [5] 和 [6]。

例 5.10。设 Δ 是定义在域$\mathbb{F}_2$ 上的根群几何（即每条直线上有三个点）。那么，令 Γ 为该几何的关联图，并用一个固定的、不同于 0，1 的 $\alpha \in \mathbb{F}$ 进行标记（因此假设 $\mathbb{F}$ 的大小至少为三），则可得到代数 A_Γ，其自同构群是 Δ的自同构群；而 Δ的自同构群是定义在 $\mathbb{F}_2$上的李型群的自同构群，前提是每个点至少位于四条直线上。

例 5.11。若取 Δ 为由扩展三元 Golay 码得到的、具有 729 个点的正则近六边形，其自同构群为 $G = 2^6.2.\mathrm{M}_{12}$,，那么 Δ 每条直线上有三个点，且每个点位于 12 条直线上。因此，关联图 Γ 是一个有 $5 \cdot 729$ 个顶点的图。于是，用一个不同于 0 和 1 的 $\alpha \in \mathbb{F}$ 标记其边，可得到一个维数为 维数 3645 、自同构群为 G 的代数。

与马蒂厄群 M_{24} 相关的、具有 759 个点的近六边形有 $5 \cdot 759$条大小为 3 的直线。对关联图的边进行标记，得到一个维数为 $6 \cdot 759 = 4554$ 、其自同构群为 M_{24}的 A代数。

设 Δ 为与 Hall-Janko 群 HJ 相关的近八边形。这个近八边形有 315 个点，每条直线上有 3 个点，每个点在 5 条直线上。直线数为 525。因此，其关联图 Γ 是一个具有 $315 + 525 = 840$ 个顶点的图。用固定的 $\alpha \neq 0$ 进行标记 Γ，可得到一个 840 维代数 A_Γ，其自同构群为 HJ : 2。

由此得到的代数都是交换轴代数。用 α 标记边（p，ℓ），其中 p 是一个点，ℓ 是一条直线，并用一个不等于 0，1，α 的 β 标记反向边（ℓ，p），可得到简单非交换轴代数，其自同构群为相应的几乎单群。

例5.12。设 Δ 是与三个 Fischer散在群之一相关的Fischer空间。那么，令 Γ 为其关联图，并用一个非零的 α （或两个不同的 α 和 β）标记，且它们均不等于 0，1，即可得到简单的（非）交换轴代数 A_Γ，其自同构群为这些Fischer散在群的自同构群。

我们可以将此推广如下。设 D 是单群 G 中的一个对合共轭类，并假设至少存在两个元素 d，$e \in D$，使得 de 的阶为3。令 L 为 D 中所有满足 de 的阶为3且 $f = d^e = e^d$ 的三元组 $\{d, e, f\}$ 构成的集合。于是，$\Delta = (D, L)$ 是每条直线含三个点的部分线性空间。由于假设 G 是单群，Δ 将是连通的。令 Γ 为 Δ 的关联图，并用一个非零元素标记所有边，即可得到一个代数 A_Γ，其中 G 包含于自同构群中。于是，Δ 和 Γ 的全自同构群，进而 A_Γ 的全自同构群，均包含Aut(G)。

特别地，我们可以取 GMonster 或 Baby Monster群，并取 D $2B$ 对合类，从而得到其自同构群包含这些群的代数。A_Γ 的完整自同构群同构于 Aut(Δ)，其中当然包含 Aut(G)，但也可能更大。

注5.13。我们以如下观察结束本节。设 $\mathcal{F}$ 是一个包含 0 和 1的集合。Γ和 Γ' 是以集合 $\mathcal{F}$中的元素标记的图，且标记不同于 0 和 1。如果 Γ 和 Γ' 都满足上述某个定理的条件，但作为标记图并不同构，那么代数 A_Γ和 $A_{\Gamma'}$ 也不同构。事实上，两个代数之间的任意同构都会按照上述命题5.6 和 5.7诱导出两个图之间的同构。

6. 每个群都是某个单（轴）代数的自同构群

在 [23] Popov提出了这样一个问题：每个有限群是否都同构于某个有限维单代数的完整自同构群。他与Gordeev共同对此问题给出了肯定的回答。参见 [16]。实际上，他们证明了：对于任意包含充分多元素的域 $\mathbb{F}$及其代数闭包 $\mathbb{K}$，对每个线性代数 $\mathbb{F}$-群 G，都存在一个有限维单$\mathbb{F}$-代数 A，使得代数群 Aut($A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$)定义在 $\mathbb{F}$ 上，并且与 G是 $\mathbb{F}$-同构的。作为推论，他们发现，对于每个有限群 G，都存在一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的有限维代数 A，使得 Aut(A)与 G同构。

Costoya、Muñoz、Tocino和Viruel [8]为每个有限群 G 构造了一个定义在大小至少为 $2 \cdot |G|$ 的域 $\mathbb{F}$ 上的简单演化代数，其自同构群与 G同构，因此也为Popov的问题给出了肯定的回答。

现在，命题 5.6 和命题 5.7，再加上 Frucht[14, 15], de Groot [10] 和 Sabidussi [27], 的经典结果 G，为每个群 G 和域 $\mathbb{F}$提供了一个构造方法，可得到一个无限代数序列，它们定义在 $\mathbb{F}$ 上，且自同构群与 G同构。对于给定的集合 $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}$，若其包含 0、1 以及至少一个（或两个）其他元素，我们甚至可以确保这些代数是（非交换）轴代数，并且具有一组满足图融合律 $\mathcal{G}(\mathcal{F})$。

对于有限群，可以构造这些图，使得每个顶点的度至少为 3，参见 [27], ；并且我们可以利用命题 5.6，找到以 G为自同构群的代数。

然而，对于无限群，为了能够应用命题 5.6 ，我们仍须确保在 Frucht [14, 15], de Groot [10] 和 Sabidussi [27, 28]构造（及其修改版本）所得到的图中，所有顶点的度至少为3，这样我们就可以应用命题 5.6 来找到以 G 为自同构群的代数。

Frucht、de Groot 和 Sabidussi 的构造都采用以下方法。他们首先考虑 G 的一个生成元集合 S ，以及相对于生成集 S 的 G 的凯莱图。然后，将所有标记为同一生成元的边替换为一个自同构群平凡的图。因此，如果 G 是一个无限群，并且我们从一个至少包含四个生成元的集合 S 出发，用每个顶点的度至少为三且自同构群平凡的图来替换边，那么最终得到的图中所有顶点的度都至少为 3。标记不同的边应替换为非同构图。因此，只需确认这类图的数量足够多。于是， $|S|$ 个自同构群平凡且每个顶点的价至少为三的非同构图便足够了。（这里 $|S|$ 表示一个基数。）

我们采用 de Groot 方法的一个改进版本 [10]来构造这样的图。对于每个 $s \in S$ ，令 Θ_s 为一个图，其中包含 Frucht 图 Φ作为子图。Frucht 图有 12 个顶点，每个顶点的度为 3，且其自同构只有恒等映射。此外，对于 Φ 中 Θ_s 内固定的相邻顶点 q 和 r ，在 r 处附接一棵以 r 为根、深度可数的树 T_s ；其中顶点的度是大于 $|S|$的基数，且任意两个顶点的度都不同。见图 1。显然，我们可以构造至少 $|S|$个这样的图，并且 Θ_s 与 $\Theta_{s'}$ 同构，当且仅当 $s = s'$（通过改变 r的价）。对于 S 中的每个 s ，将 G的凯莱图中由生成集 S标记的所有边（a， $b = as$）替换为图 Θ_s，并添加边{a， q}和{r， b}。

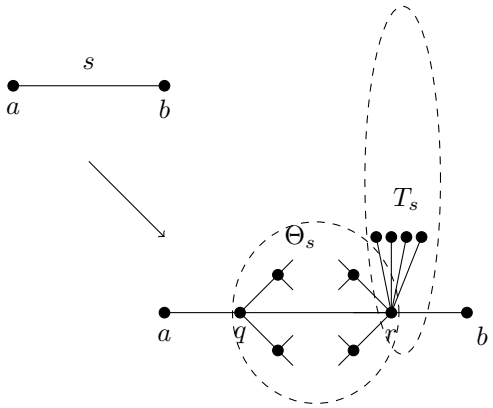


图 1. 将边 (a， $b = as$) 替换为一个子图。

在所得的图中，原凯莱图中的所有顶点的价为$|S| > 3$，子图 Φ 中不同于 q 和 r 的所有顶点的价为 3， q的价为 4，而树 r 中的顶点的价大于 $|S|$。我们可以从这个所得的图中恢复原凯莱图。事实上，我们可以将 Θ_s 中不同于 p, q 的顶点识别为度为 3 的顶点，并将顶点 q 和r 识别为与这些顶点相邻、且价分别为 4 和 $> |S|$ 的顶点。

这意味着我们可以恢复有向边 (a,b) 以及通过 T_s 的同构类型进行的标记，从而恢复原凯莱图。正如 [10] 中所述，我们可以得出结论：所得的图记为 Δ，是一个无向图，其自同构群同构于 G，且每个顶点的度至少为3。

我们注意到，可以用不同的、具有平凡自同构群且常数度为 3 的图来替代 Frucht 图 Φ，或者改变 r 的价，从而构造出无穷多个非同构图 Δ。因此，上述内容推出以下结果。

定理 6.1. 设 G 是一个群。那么存在无穷多个非同构普通图 Δ，其中每个顶点的价至少为 3，且 $\mathrm{Aut}(\Delta)$ 与G同构。

现取一个群 G，令 Δ 为一个图，其所有顶点的价都至少为 3，且 Aut(Δ) 与 G 同构；再令 $\Gamma = (X, E)$ 为 Δ 的有向关联图。那么 G 也是 Γ 的自同构群。若 $\mathbb{F}$ 是含两个元素的域，则将 Γ 的所有边都标记为 1。若 $\mathbb{F}$ 至少含三个（或四个）元素，且可以用不同于 0 和 1 的元素标记边，使得同一 Aut(Γ)-轨道中的两条边具有相同的值，则群 G 也是如此得到的标记图的自同构群，该图仍记作 Γ。注意，Γ 中的边 (v,e) 和 (e,v) 属于不同的轨道，其中 v 是 Δ 的一条边 e 上的顶点。因此，我们可以用 F 中同一个元素标记它们，以得到交换代数 A_Γ；也可以用 F 中不同的元素标记它们（若可行），以得到非交换代数A_Γ。

应用命题 5.6 (或在 $\mathbb{F}$ 只有两个元素时应用命题 5.7），我们得到 G 同构于代数 A_Γ的自同构群。由观察可知，该代数是单的，因为 Γ不包含大小为 3的团，见命题 2.10。此外，当$\mathcal{F}$ 包含多于两个元素时，A_Γ 是一个轴代数，其本原轴集合为 X，满足融合律 $\mathcal{G}(\mathcal{F})$，其中$\mathcal{F}$ 包含 $\{0,1\}$ 以及所有用到的标记。

因此，我们得到了以下结果：对于每个群G 和域 $\mathbb{F}$，都存在无穷多个两两不同构的单代数，其自同构群同构于 G。

定理 6.2。 设 G 是一个群，$\mathbb{F}$是一个域。

(i) 若 $\mathbb{F}$至少包含三个元素，则存在无穷多个两两不同构的有向图 $\Gamma = (X, E)$，其边以 $\mathbb{F}\setminus\{0, 1\}$中的元素标记，使得 A_Γ 是由一组本原幂等元 X 生成的、域 $\mathbb{F}$ 上的交换单轴代数，其图类型为 $G(F)$，其中 F 是由 0、1 及所有标记组成的集合，且 G 同构于 $Aut(A_\Gamma)$。*(ii)* 若 F 至少包含四个元素，则存在无穷多个两两不同构的有向图 $\Gamma = (X, E)$，其边以 $F\setminus\{0, 1\}$中的元素标记，使得 A_Γ 是由一组本原幂等元 X 生成的、域 $\mathbb{F}$上的非交换单轴代数，其图类型为 $G(F)$，其中 F 是由 0、1 及所有标记组成的集合，且 G 同构于 $Aut(A_\Gamma)$。*(iii)* 若 $\mathbb{F}$ 只有两个元素，则存在无穷多个两两不同构的有向图 Γ，其边均以 1 标记，使得 A_Γ 是域 $\mathbb{F}_2$ 上的单代数，且其自同构群同构于 G。

此外，若 G 是有限群，则上述陈述中的图 Γ 可以假定为有限图，这意味着代数 A_Γ 是有限维的。

命题6.2推出命题 1.4。

对于有限群 G，我们可以将上述定理视为以下由 Gorshkov、McInroy、Shumba 和 Shpectorov 得出的结果的对应定理。

定理 6.3。 [17] 设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的有限维交换轴代数，其特征不为 *2*，融合律为 $\star$，定义在集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$ 上。若 $1, 2 \notin \mathcal{F}$，则 $\mathrm{Aut}(A)$ 是有限的。

注 6.4。我们不仅可以像上述定理那样，利用图的有向关联图为每个有限群 G 构造一个代数，也可以利用某些每条直线含三个点的有限部分线性空间的有向关联图。Mendelsohn [22] 证明，对于每个有限群 G，都存在一个有限斯坦纳三元系 Δ，其中每个点至少关联 4 条直线，且 G 同构于 Δ 的自同构群。取 Γ 为 Δ 的有向关联图，并用域 $\mathbb{F}$ 中一个不同于 0 和 1 的元素（该域不同于 $\mathbb{F}_2$）标记其边，则根据命题 5.6 或命题 5.7，可得到一个有限维交换单轴代数 A_Γ，其自同构群为 G。如果该域至少含有 4 个元素，我们可以用一种恰当的方式标记这些边，从而得到一个有限维非交换单轴代数 A_Γ，其自同构群同构于 G。

参考文献

[1] Harry P. Allen。与双重传递置换群相关的非结合代数：S_{n+1}。*J. Algebra*，91(1):265–279，1984。[2] Harry P. Allen。与双重传递群相关的非结合代数的自同构群。*J. Algebra*，91(1):258–264，1984。[3] Mashaer Alsaeedi。Monster 型轴代数的一个新系列（2η，η）。*Arab. J. Math. (Springer)*，10(1):11–20，2021。[4] John Bray、Christopher Parker 和 Peter Rowley。Cayley 型图与大围长三次图。*Discrete Math.*，214(1-3):113–121，2000。[5] Andries E. Brouwer、Arjeh M. Cohen 和 Arnold Neumaier。距离正则图，第18卷，收录于*Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge*。柏林等地：Springer-Verlag，1989。[6] F. Buekenhout 和 A. M. Cohen。图示几何：与经典群和建筑相关，第57卷，收录于数学及其边界领域成果，第*3*辑：现代数学综述丛书。Springer，海德堡。[7] Alonso Castillo-Ramirez、Justin McInroy 和 Felix Rehren。码代数、轴代数与顶点算子代数。*J. Algebra*，518:146–176，2019。[8] C. Costoya、V. Muñoz、A. Tocino 和 A. Viruel。Cayley 演化代数的自同构群。*Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*，117(2):论文编号 82，11页，2023。[9] Hans Cuypers。几何与图：轴代数的一个源头，2024。[10] J. de Groot。由同胚群表示的群。*Math. Ann.*，138:80–102，1959。[11] Tom De Medts 和 Michiel Van Couwenberghe。单边Chevalley群的非结合弗罗贝尼乌斯代数。*Trans. Amer. Math. Soc.*，374(12):8715–8774，2021。[12] Geoffrey Exoo、Robert Jajcay 和 Jozef Širáň。Cayley 笼图。*J. Algebraic Combin.*，38(1):209–224，2013。[13] Daniel J. F. Fox。消去与施泰纳三元系相关的度量交换非结合代数。*J. Algebra*，608:186–213，2022。[14] R. Frucht。构造具有给定抽象群的图。*Compositio Math.*，6:239–250，1939。[15] Robert Frucht。具有给定抽象群的三度图。*Canad. J. Math.*，1:365–378，1949。[16] Nikolai L. Gordeev 和 Vladimir L. Popov。有限维简单代数的自同构群。*Ann. of Math. (2)*，158(3):1041–1065，2003。[17] Ilya Gorshkov、Justin McInroy、Tendai Mudziiri Shumba 和 Sergey Shpectorov。轴代数的自同构群，2023。[18] J. I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov。若尔当型本原轴代数。*J. Algebra*，437:79–115，2015。

[19] 原田耕一郎。关于与双重传递群相关的交换非结合代数。*J. Algebra*，91(1):192–206，1984。[20] A. A. Ivanov。魔群与*Majorana*对合，第176卷，收录于剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[21] Vijay Joshi。魔群型轴代数（2η，η）。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2020。博士论文——伯明翰大学（英国）。[22] Eric Mendelsohn。关于施泰纳三元系与四元系的自同构群。*J. Combin. Theory Ser. A*，25(2):97–104，1978。[23] Vladimir L. Popov。非结合代数不变量的 M. Artin 猜想的一个类比。载于李群与李代数：邓金研讨会，第169卷，收录于*Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*，第121–143页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗德岛州，1995。[24] Louis Rowen 和 Yoav Segev。非结合代数中的轴。*Turkish J. Math.*，45(6):2366–2381，2021。[25] Louis Rowen 和 Yoav Segev。非交换代数中的若尔当型轴。*J. Algebra Appl.*，22(4):论文编号2350094，15页，2023。[26] Louis Rowen 和 Yoav Segev。本原轴代数属于若尔当型。*J. Pure Appl. Algebra*，227(3):论文编号107206，12页，2023。[27] Gert Sabidussi。具有给定群和给定图论性质的图。*Canadian J. Math.*，9:515–525，1957。[28] Gert Sabidussi。具有给定无限群的图。*Monatsh. Math.*，64:64–67，1960。[29] Songpon Sriwongsa 和 Yi Ming Zou。关于幂等演化代数的自同构群。*Linear Algebra Appl.*，641:143–155，2022。

Hans Cuypers 数学与计算机科学系 埃因霍温理工大学 邮政信箱 513，5600 MB，荷兰埃因霍温 邮箱：f.g.m.t.cuypers@tue.nl